arXiv:2601.07039v1 [math-ph] 11 Jan 2026

滞后随机振子不变测度的偏微分方程方法

郭立宏*[1]、叶夏志†[2]和王明扬‡[2]

[1]香港城市大学深圳研究院，中国深圳[2]香港城市大学数学系，中国香港

摘要

本文提出一种偏微分方程方法，作为蒙特卡洛模拟的替代方法，用于计算滞后白噪声驱动双线性振子的不变测度。该模型广泛用于工程学中，以描述包辛格效应等高度非线性动力学。本文将 Bensoussan 等人提出的随机弹塑性框架［《SIAM 数值分析杂志》47（2009年），第 3374–3396]页，从二维弹塑性振子扩展到三维双线性弹塑性振子。通过构造适当的李雅普诺夫函数，证明了不变测度的存在性。这一扩展使得对更丰富滞回行为的建模成为可能，并拓宽了偏微分方程方法替代蒙特卡洛方法的适用范围。两项应用展示了该方法的效率：计算振子的阈值穿越频率（为 Rice公式提供一种替代方法）以及可用性概率。

1 引言

本文研究以下由白噪声驱动的双线性弹塑性振子（BEPO）系统

$$\ddot{X}(t) + \mathbf{F}(t) = \mathfrak{f}(X(t), \dot{X}(t)) + \sigma \dot{W}(t), \tag{1.1}$$

初始条件为 $(X(0)\ \dot{X}(0)) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$。这里，$X(t) \in \mathbb{R}$ 表示时刻 t的状态变量，点表示对 t的导数，$\mathbf{F}(t)$ 是双线性滞回恢复力，$\mathfrak{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是利普希茨函数，表示所有非弹塑性确定性力，W 表示白噪声随机激励，其中 W 是维纳过程，σ 是噪声强度。我们的工作包括两部分：首先，证明不变测度的存在

*lihguo2223@cityu.edu.cn
†harryip2-c@my.cityu.edu.hk
‡mywang43-c@my.cityu.edu.hk

系统 (1.1)在对 f作出合理假设的条件下的不变测度，并提出一种基于其后向柯尔莫哥洛夫方程的计算方法，以评估该测度，作为经典蒙特卡罗方法的替代方案。

在随机结构力学中，白噪声驱动的BEPO是弹塑性材料在随机激励下的基本模型 [1–5]。它是弹性理想塑性振子（EPPO）的扩展形式；EPPO是最简单且研究最广泛的模型 [6–25]。这两种模型的关键区别在于恢复力$\mathbf{F}(t)$。对于EPPO，$\mathbf{F}(t)$ 与弹性变形呈线性关系，系统状态可由速度和弹性变形完全描述。相比之下，BEPO的恢复力同时与弹性变形和总变形呈双线性关系。总变形因此成为其动力学中的一个额外控制变量，使EPPO框架扩展为三维状态空间。本构模型如图1所示。

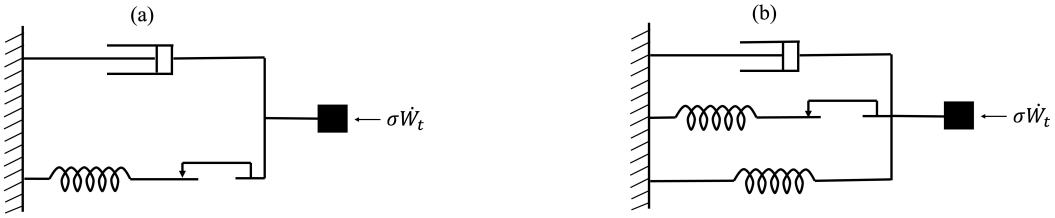

图1：本构模型。(a) EPPO模型，由线性质量块、阻尼器和弹簧组成，三者与库仑摩擦滑移接头串联。(b) BEPO模型，在EPPO模型的基础上并联连接一个弹簧。两个模型均受时变随机力 σW_t激励，其中 W_t 为白噪声， σ 为噪声强度。

随机动力系统的不变概率测度是评估随机激励下结构可靠性的核心，尤其是对于表现出非弹性行为的系统。关于这一领域的奠基性贡献发表于 [6–8]，该研究针对白噪声驱动的 EPPO 系统建立了随机变分不等式（SVI）框架。这一表述避免了对轨迹进行分阶段描述，从而便于证明不变测度的存在性和唯一性。

在此基础上，后续研究从多个方向拓展了这一理论。 [12, 24], 给出了不变测度存在性和唯一性的新解析证明，而 [11, 14, 16]则提出了随机变分不等式的近似解。 [13, 15], 推导了随机弹性理想塑性振子的更多性质，表明塑性变形的方差随时间线性增长； [15], 则对其概率分布进行了解析刻画。应用研究包括渐近失效风险估计 [19]，以及将 Rice公式用于塑性变形统计分析 [10]。该模型还拓展至由滤波白噪声 [17, 18] 和有色噪声 [22, 25],驱动的系统，并对其不变测度进行了类似刻画。

然而，仍有两个重要的理论挑战有待解决。(1) 对于上述白噪声驱动的BEPO系统，其稳态的存在性与唯一性尚未得到数学上的证明。尽管如此，随机模拟 [25]为其提供了经验支持。(2) 维数灾难。不变测

度的数值计算通常采用蒙特卡洛模拟或偏微分方程方法。用于求解偏微分方程的常见数值方法包括但不限于有限差分法[20, 21, 26], 有限元法 [9, 23, 27, 28], 间断伽辽金法 [29],以及有限体积法 [30]。然而，本文研究的偏微分方程包含一个小参数 λ，该参数引入了一个宽度为 $O(\lambda)$ 的边界层，因此需要极其精细的网格。在三维情况下，这会导致高得难以承受的计算成本，超出现有的实际处理能力。

本文提出了一种随机变分不等式建模系统（1.1），并通过构造李雅普诺夫函数证明稳态的存在性。我们进一步开发了一种偏微分方程数值方法，作为概率模拟的替代方案。这种方法尤其适合关注弹塑性模型平稳统计量的材料科学研究人员。稳态分析能够深入揭示系统的长期动力学，并有助于提取关键定量指标，例如阈值穿越频率和极限状态适用度概率。

本文结构如下：第2节讨论模型的物理表述和数学表述。第3节介绍稳态的理论分析。第4 节描述数值方法。第5节给出两个示例及其数值结果，最后在第6节总结全文。

2 模型表述

为了从物理和数学角度阐述BEPO模型的表述，我们引入以下记号。令

$$\begin{aligned} &\mathcal{D} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(-b,b), && \bar{\mathcal{D}} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[-b,b],\\ &\mathcal{D}^- = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{-b\}, && \mathcal{D}^+ = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{b\}, \quad b>0,\\ &\mathbf{X}(t) = (X(t),Y(t),Z(t)), && \mathbf{x} = (x,y,z). \end{aligned}$$

此外，令 $C_b(\mathcal{D})$ 表示定义在 $(\mathcal{D},\mathcal{B})$ 上的连续有界函数空间，其中 $\mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{D}$上的 Borel σ-域。

2.1 BEPO 的物理表述

As 如前所述，白噪声驱动的BEPO可形式化地描述为

$$\ddot{X}(t) + \mathbf{F}(t) = \mathfrak{f}(X(t),\dot{X}(t)) + \sigma\dot{W}(t), \tag{2.1}$$

初始位移和速度分别为 $X(0) = x$ 和 $\dot{X}(0) = y$ 。这里，W表示白噪声随机外力，即 W 是维纳过程， $\sigma > 0$ 是噪声强度，而 $\mathfrak{f}(x, y)$ 是从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的利普希茨函数，表示所有非弹塑性确定性力。恢复力 $\mathbf{F}(t)$ 是一个依赖于截至时间 t的整个轨迹 $\{X(s)\ 0\leqslant s\leqslant t\}$ 的泛函，其非线性源于弹性阶段与塑性阶段之间的切换

从弹性阶段切换到塑性阶段，反之亦然。在该模型中，时刻 t 的不可逆（塑性）变形 Δ 和可逆（弹性）变形 Z 满足

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z(t) &= \mathrm{d}X(t), \quad \mathrm{d}\Delta(t) = 0, \quad \text{in elastic phase}, \\ \mathrm{d}\Delta(t) &= \mathrm{d}X(t), \quad \mathrm{d}Z(t) = 0, \quad \text{in plastic phase}, \end{aligned}$$

当 $X(t) = Z(t) + \Delta(t)$ 时。通常，当 $|Z(t)| = b$ 时，系统处于塑性阶段；当 $|Z(t)| < b$时，系统处于弹性阶段，其中 $b > 0$ 是弹塑性界限。我们考虑力 $\mathbf{F}(t)$ 为弹性变形与塑性变形的线性组合的情形。在弹性阶段，该力是 Z 的线性函数（此时 $\Delta = X - Z$ 保持常数）；在塑性阶段，该力是 X 的线性函数（此时 Z 保持为常数 $\pm b$），如下所示：

$$\mathbf{F}(t) = k(1-\alpha)Z(t) + k\alpha X(t), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad k > 0. \tag{2.2}$$

注意，当 $\alpha = 0$时，系统（2.1）–（2.2）化简为经典的 EPPO 模型。

2.2 BEPO 的数学表述

考虑三元组 $\{(X(t)\ Y(t)\ Z(t))\ \ t \geqslant 0\}$，它是下列随机变分不等式的解

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = Y(t)\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}Y(t) = [\mathfrak{f}(X(t), Y(t)) - k(1-\alpha)Z(t) - k\alpha X(t)]\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t), \\ (\mathrm{d}Z(t) - Y(t)\mathrm{d}t)(\xi - Z(t)) \geqslant 0, \ \forall |\xi| \leqslant b, \ |Z(t)| \leqslant b, \end{cases} \tag{2.3}$$

初始条件为 $(X(0)\ Y(0)\ Z(0)) = (x、\ y、\ z) \in \mathcal{D}$。随机变分不等式（2.3）是对第2.1节所示弹塑性动力学的简洁而严谨的表达方式，因为它刻画了弹性区间与塑性区间之间的交替过程。这是一个适定问题，见 [31] 第 4 章。

2.3 利用停时重新表述

不失一般性，取$\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ 为例，说明由随机变分不等式（2.3）生成的过程。回顾 [7] 并定义如下两组停时：

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \inf\{t > \tau_n \mid |Z(t)| = b\}, \\ \tau_{n+1} = \inf\{t > \theta_{n+1} \mid \mathrm{sign}(Y(t)) = -\mathrm{sign}(Z(t))\}, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $\tau_0 = \theta_0 = 0$ 以及 $n \in \mathbb{N}_0$。为展示恢复力$\mathbf{F}(t)$ 相对于 $X(t)$的行为，我们根据图2中的停时正式绘制其演化曲线。

注 2.1. $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$ 对应于每次进入塑性区间的情况，我们使用指示量$|Z(t)| = b$ 来描述这一行为。 $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ 对应于每次退出塑性区间的情况。至少有两种指示量可以描述这一行为： $|Z(t)| < b$ 以及 $\mathrm{sign}(Y(t))$的变化。在集合（2.4）中，我们选择使用后者。

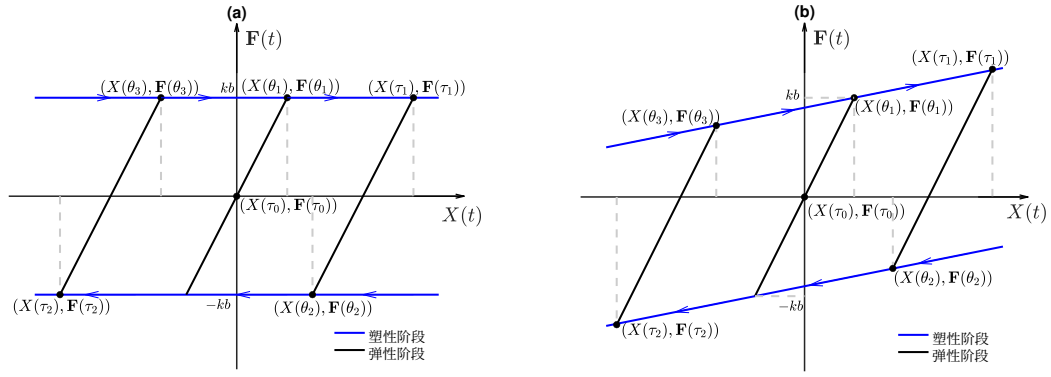

图2：恢复力$\mathbf{F}(t)$相对于 $X(t)$的典型演化过程。(a) EPPO模型。在塑性阶段，$\mathbf{F}(t)$保持为常数。(b) BEPO模型。在塑性阶段，$\mathbf{F}(t)$是一个线性函数。

当 $t \in (\tau_n, \theta_{n+1})$ 时，我们有 $|Z(t)| < b$ 且

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = Y(t)\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}Y(t) = [\mathfrak{f}(X(t), Y(t)) - k(1-\alpha)Z(t) - k\alpha X(t)]\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t), \\ \mathrm{d}Z(t) = Y(t)\mathrm{d}t. \end{cases}$$

当$t \in (\theta_{n+1},\ \tau_{n+1})$时，我们有 $|Z(t)| = b$，$\mathrm{sign}(Z(t))Y(t) \geqslant 0$，并且

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = Y(t)\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}Y(t) = [\mathfrak{f}(X(t), Y(t)) - k(1-\alpha)\mathrm{sign}(Z(t))b - k\alpha X(t)]\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t), \\ \mathrm{d}Z(t) = 0. \end{cases}$$

3 不变概率测度

在本节中，我们首先推导后向柯尔莫哥洛夫方程，然后说明不变概率测度的存在性。此外，我们还给出该测度的一种近似。由于这些证明都是经典的，为方便读者，我们将其放在附录 A 中。

3.1 后向 Kolmogorov 方程

令 $\beta(x,\ y,\ \ z)\ =\mathfrak{f}(x,\ \ y)\ -k(1-\alpha)z-k\alpha x$，定义算子 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}_{+}$ 和 $\mathbf{B}_{-}$ by

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\triangleq \frac{\sigma^2}{2}\partial_y^2+y\partial_x+\beta(x,y,z)\partial_y+y\partial_z,\\ \mathbf{B}_{+} &\triangleq \frac{\sigma^2}{2}\partial_y^2+y\partial_x+\beta(x,y,b)\partial_y+\min(0,y)\partial_z,\\ \mathbf{B}_{-} &\triangleq \frac{\sigma^2}{2}\partial_y^2+y\partial_x+\beta(x,y,-b)\partial_y+\max(0,y)\partial_z.\end{aligned}$$

定理 3.1. 设 $\mathbf{X}$ 满足随机变分不等式 (2.3)，设 $g\in L^2(\bar{\mathcal{D}})$，并考虑

$$\psi(t,\mathbf{x})=\mathbb{E}[g(\mathbf{X}(t))|\mathbf{X}(0)=\mathbf{x}], \tag{3.1}$$

then

$$\begin{cases}\partial_t\psi-\mathbf{A}\psi=0, & \text{in } (0,T]\times\mathcal{D},\\ \partial_t\psi-\mathbf{B}_{\pm}\psi=0, & \text{in } (0,T]\times\mathcal{D}^{\pm},\\ \psi(0,\mathbf{x})=g(\mathbf{x}).\end{cases} \tag{3.2}$$

3.2 不变概率测度的存在性

通过选取适当的李雅普诺夫函数，在定理 3.3 中建立了随机变分不等式 (2.3) 的能量估计。随后，根据定理 3.4，可推导出 $\mathbf{X}(t)$ 存在不变概率测度。为计算该不变测度，定理 3.6 提出了一种基于偏微分方程方法的逼近格式。为证明这些结论，需要以下假设。对于任意 $x,\ y\in\mathbb{R}$,

$$y\mathfrak{f}(x,y)\leqslant -c_0y^2+c_1xy+c_2,\ \text{with } c_0>0,\ c_1\leqslant k\alpha,\ c_2\geqslant 0, \tag{3.3}$$
$$x\mathfrak{f}(x,y)\leqslant -d_0xy+d_1x^2+d_2,\ \text{with } d_0\geqslant c_0,\ d_1<k\alpha,\ d_2\geqslant 0. \tag{3.4}$$

注 3.2. 假设 (3.3) 和 (3.4) 包含情形 $\mathfrak{f}(x,\ \ y)\ =-c_0y$，该情形来自 EPPO [9]，其中 $c_0>0$。

定理 3.3. 设 $V(x,y)\ \triangleq(k\alpha+\frac{c_0d_0}{2}-c_1)x^2+y^2+c_0xy$. 对任意 $t>0$,

$$\mathbb{E}[V(X(t),Y(t))]\leqslant V(X(0),Y(0))+C/C_1,$$

其中 $C=\sigma^2+2c_2+c_0d_2+(kb(1-\alpha))^2\ddot{\text{A}}\frac{2}{c_0}+\frac{c_0}{2(k\alpha-d_1)}\ddot{\text{a}}$，且 $C_1=\min\ddot{\text{A}}\frac{c_0}{3},\ \frac{c_0(k\alpha-d_1)}{2k\alpha+c_0d_0+c_0^2-2c_1}\ddot{\text{a}}$。

接下来，我们定义与 $\mathbf{X}(t)$ 相关的概率分布 $\mu(t)$，其定义在 $(\mathcal{D},\mathcal{B})$ 上：

$$\mu(t)(\phi)\triangleq\mathbb{E}[\phi(\mathbf{X}(t))]=\mu(0)(P_t\phi),\ \ \text{for } \phi\in C_b(\bar{\mathcal{D}}).$$

算子 P_t 定义为 $P_t\phi(\mathbf{x})\ \triangleq\mathbb{E}[\phi(\mathbf{X}(t))|\mathbf{X}(0)\ =\mathbf{x}]$, 对于 $\phi\in C_b(\mathcal{D})$。

¯定理 3.4。由随机变分不等式（$\mathbf{X}(t)$ 生成的过程 2.3），其初始条件为 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x} \in \mathcal{D}$存在不变测度 μ，即 $\mu(0) = \mu$ 蕴含 $\mu(t) = \mu$， $\forall t \geqslant 0$.

因此，这样的不变测度 μ 必须在任意测试函数上湮灭 P_t 的无穷小生成元，如下述推论所示。

推论 3.5. 测度 μ 满足超弱形式

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{A}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}\mu + \int_{\mathcal{D}^+} \mathbf{B}_+\varphi(x,y,b)\mathrm{d}\mu + \int_{\mathcal{D}^-} \mathbf{B}_-\varphi(x,y,-b)\mathrm{d}\mu = 0, \quad \forall \varphi \in C_b(\bar{\mathcal{D}}).$$

定理 3.6. 设 $\lambda > 0$ 和 $g \in L^2(\bar{\mathcal{D}})$。由 $\frac{||g||_\infty}{\lambda}$ 界定的唯一解 u_λ 满足以下偏微分方程

$$\begin{cases} \lambda u - \mathbf{A}u = g, & \text{in } \mathcal{D}, \\ \lambda u - \mathbf{B}_\pm u = g, & \text{in } \mathcal{D}^\pm, \end{cases} \tag{3.5}$$

满足

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda u_\lambda(\mathbf{x}) = \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[g(\mathbf{X}(t)) | \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}] = \int_{\bar{\mathcal{D}}} g\mathrm{d}\mu, \ \forall \mathbf{x} \in \bar{\mathcal{D}}. \tag{3.6}$$

注 3.7. 如 [9], (3.6) 中所述，该结果在数值上具有重要意义，因为它可以计算 $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[g(\mathbf{X}(t))|\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}]$，而无需求解时变问题。此外，所得极限与初始位置 $\mathbf{x}$无关。

注 3.8. 不变测度的唯一性仍是一个具有挑战性的问题，因为该系统由于滞后而表现出退化噪声和非光滑漂移，这使得标准的扩散过程遍历理论无法应用。然而，在数值实验中，我们将由不变测度（通过偏微分方程方法）得到的“空间平均”与通过长期模拟（使用蒙特卡洛）获得的“时间平均”进行比较。这些比较增强了我们对遍历性假设的信心。

4 不变测度的数值方法

¯在数值计算中，无界区域 $\mathcal{D}$ 由 $\mathcal{D}_{XY} \triangleq [-\bar{x}, \bar{x}] \times [-\bar{y}, \bar{y}] \times [-b, b]$截断，其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 取足够大的值，使得在 $\mathcal{D}_{XY}$ 之外找到底层过程的概率可以忽略不计。请注意，偏微分方程 (3.5) 中的小参数 λ 给有限差分法带来了挑战：为保持数值精度，必须采用极细的网格，这会导致很高的计算成本。为解决这一效率瓶颈，我们引入尺度变换： $\tilde{x} = \lambda x$、 $\tilde{y} = \lambda y$、$\tilde{z} = \lambda z$，并令 $v(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \triangleq \lambda u(\frac{\tilde{x}}{\lambda}, \frac{\tilde{y}}{\lambda}, \frac{\tilde{z}}{\lambda})$。因此，截断后的区域变为 $[-\lambda\bar{x}, \lambda\bar{x}] \times [-\lambda\bar{y}, \lambda\bar{y}] \times [-\lambda b, \lambda b]$。¯数值近似基于以下三维有限差分网格构造

$$\mathcal{G} \triangleq \{(\tilde{x}_\mathrm{i}, \tilde{y}_\mathrm{j}, \tilde{z}_\mathrm{k}) = (-\lambda\bar{x} + (\mathrm{i}-1)\delta_{\tilde{x}}, -\lambda\bar{y} + (\mathrm{j}-1)\delta_{\tilde{y}}, -\lambda b + (\mathrm{k}-1)\delta_{\tilde{z}})\}_{1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant I, 1 \leqslant \mathrm{j} \leqslant J, 1 \leqslant \mathrm{k} \leqslant K},$$

其中 $\delta_{\tilde{x}} \triangleq \frac{2\lambda\bar{x}}{I-1}$、 $\delta_{\tilde{y}} \triangleq \frac{2\lambda\bar{y}}{J-1}$、 $\delta_{\tilde{z}} \triangleq \frac{2\lambda b}{K-1}$、 I、 J 和 K均为大于 1 的奇整数。令 $v_{\mathrm{i},\,\mathrm{j},\,\mathrm{k}}$表示 $v(\tilde{x}_{\mathrm{i}}$、 $\tilde{y}_{\mathrm{j}}$、 $\tilde{z}_{\mathrm{k}})$ 的数值近似，令 $\boldsymbol{v}$ 为一个元素为 v_{i}、$_{\mathrm{j}}$、$_{\mathrm{k}}$ 的向量。为完整起见，我们给出关于 $\tilde{x}$的差分符号记法如下；对 $\tilde{y}$ 和 $\tilde{z}$也可作类似定义。

- 一阶向前和向后有限差分：
  $(\partial^{\mathrm{f}}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}} \triangleq (v_{\mathrm{i+1,j,k}} - v_{\mathrm{i,j,k}})/\delta_{\tilde{x}}$, $(\partial^{\mathrm{b}}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}} \triangleq (v_{\mathrm{i,j,k}} - v_{\mathrm{i-1,j,k}})/\delta_{\tilde{x}}$.
- 二阶中心有限差分：
  $(\partial^{2}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}} \triangleq (v_{\mathrm{i+1,j,k}} - 2v_{\mathrm{i,j,k}} + v_{\mathrm{i-1,j,k}})/\delta^2_{\tilde{x}}$.
- 二阶向前和向后有限差分：
  $(\partial^{\mathrm{ff}}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}} \triangleq (-3v_{\mathrm{i,j,k}}+4v_{\mathrm{i+1,j,k}}-v_{\mathrm{i+2,j,k}})/(2\delta_{\tilde{x}})$, $(\partial^{\mathrm{bb}}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}} \triangleq (3v_{\mathrm{i,j,k}}-4v_{\mathrm{i-1,j,k}}+v_{\mathrm{i-2,j,k}})/(2\delta_{\tilde{x}})$.
- 二阶迎风差分：
  $(c(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\tilde{\partial}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}} \triangleq \max(0, c_{\mathrm{i,j,k}})(\partial^{\mathrm{ff}}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}} + \min(0, c_{\mathrm{i,j,k}})(\partial^{\mathrm{bb}}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}}$.

偏微分方程（3.5）缩放版本的离散化形式如下：

$$v_{\mathrm{i,j,k}} - (L\boldsymbol{v})_{\mathrm{i,j,k}} = \tilde{g}_{\mathrm{i,j,k}}, \tag{4.1}$$

其中 $(L\boldsymbol{v})_{\mathrm{i,j,k}} \triangleq (L_{\tilde{y}}\boldsymbol{v})_{\mathrm{i,j,k}} + S_{\tilde{x}} + S_{\tilde{z}}$，且 $(L_{\tilde{y}}\boldsymbol{v})_{\mathrm{i,j,k}} = \frac{\lambda\sigma^2}{2}(\partial^2_{\tilde{y}} v)_{\mathrm{i,j,k}} + (\tilde{\beta}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\tilde{\partial}_{\tilde{y}} v)_{\mathrm{i,j,k}}$, $\tilde{\beta}$和$\tilde{g}$ 是函数 β 和 g的缩放版本。项 $S_{\tilde{x}}$ 和 $S_{\tilde{z}}$ 由区域类型和边界索引确定，具体如下：

- Interior (black triangles, shown in Fig. 3): $S_{\tilde{x}} = (\frac{\tilde{y}}{\lambda}\tilde{\partial}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}}$, $S_{\tilde{z}} = (\frac{\tilde{y}}{\lambda}\tilde{\partial}_{\tilde{z}} v)_{\mathrm{i,j,k}}$.
- 边界（蓝色/红色方形和菱形，见图 3）：

$$S_{\tilde{x}} = \begin{cases} \max(0, \frac{\tilde{y}_{\mathrm{j}}}{\lambda})(\partial^{\mathrm{ff}}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}}, & \text{if i} = 1, \\ \min(0, \frac{\tilde{y}_{\mathrm{j}}}{\lambda})(\partial^{\mathrm{bb}}_{\tilde{x}} v)_{\mathrm{i,j,k}}, & \text{if i} = I, \end{cases} \qquad S_{\tilde{z}} = \begin{cases} \max(0, \frac{\tilde{y}_{\mathrm{j}}}{\lambda})(\partial^{\mathrm{ff}}_{\tilde{z}} v)_{\mathrm{i,j,k}}, & \text{if k} = 1, \\ \min(0, \frac{\tilde{y}_{\mathrm{j}}}{\lambda})(\partial^{\mathrm{bb}}_{\tilde{z}} v)_{\mathrm{i,j,k}}, & \text{if k} = K. \end{cases}$$

此外，对于灰色圆点（y-边界），施加齐次诺伊曼边界条件以确保零通量：$(\partial^{\mathrm{f}}_{\tilde{y}} v)_{\mathrm{i},\ 1,\ \mathrm{k}} = 0$ 以及 $(\partial^{\mathrm{b}}_{\tilde{y}} v)_{\mathrm{i},\ J,\ \mathrm{k}} = 0$。数值算法见附录B。

注 4.1. 由于 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{z}$中没有扩散，因此在边界 $\tilde{x} = \pm\lambda\bar{x}$ 和 $\tilde{z} = \pm\lambda b$处省略 $S_{\tilde{x}}$ 和 $S_{\tilde{z}}$ 中的向外通量项，从而确保解由向内传播确定。

注4.2。请注意，二阶迎风格式涉及两个相邻的上游（或下游）节点。对于边界附近的有限差分节点，需要进行一些特殊处理，以避免引用计算域之外的值。借鉴 [32, 33], 中的分析，本研究对这类邻近边界的点采用一阶迎风格式。

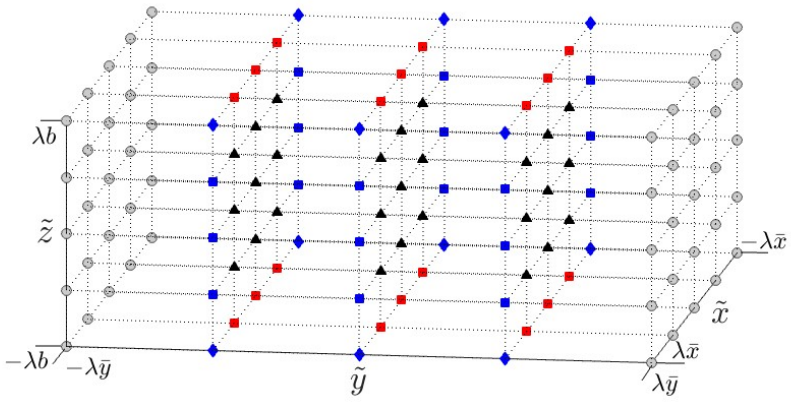

图 3: $\mathcal{D}_{XY}$ 的离散化。在黑色三角形处，离散化方程成立。在灰色圆点处，采用齐次诺伊曼边界条件。在蓝色方块/菱形和红色方块处，采用非标准边界条件。

5 数值结果

在地震学、统计物理学和工程学中，有必要研究阈值穿越频率和失效风险的概率，尤其是为了进行风险评估和方案设计。例如，在建筑物和桥梁结构设计中，量化特定地点地面运动的频率和幅度对于确保建筑结构的抗震韧性至关重要。

5.1 穿越阈值的频率

在本小节中，我们重点介绍计算随机变分不等式（2.3）在单位时间间隔内穿越频率的经验方法。计算这一量的有力工具之一是 Rice公式:

$$\nu(a_1) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(a_1, y) \mathrm{d}y,$$

其中 $p(\cdot,\cdot)$ 是 $X(0)$ 和 $\dot{X}(0)$的联合密度， $a_1 \in \mathbb{R}$ 是给定阈值。详情请参见附录 C 和 [34]。通常，很难得到（2.3）的不变概率密度函数的精确表达式。因此，我们无法直接使用 Rice公式。作为替代，我们对这一量给出一个近似。具体而言，定理 3.6表明

$$\nu(a_1) = \int_{\bar{\mathcal{D}}} g(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mu = \lim_{\lambda \to 0} \lambda u_\lambda,$$

其中， u_λ 是方程（3.5）的解，满足 $g(\mathbf{x}) = |y|\delta(x - a_1)$。实际中，当 $\varepsilon_0 > 0$ 较小时， $g(\mathbf{x})$ 可近似为 $\frac{|y|}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\varepsilon_0^2}\right)$。

另一种直接方法是采用蒙特卡洛模拟。设 $\delta_t > 0$ 为时间步长，并取足够大的终止时间 $T = N\delta_t$。定义离散时刻 $t_n = n\delta_t$，其中 $n = 0, \mathbf{1}, \ldots, N$。然后构造序列 $\{(X_n, Y_n, Z_n)\ 0 \leqslant n \leqslant N\}$。对于每个$n$，$(X_n, Y_n, Z_n)$ 表示 $(X(t_n)\ Y(t_n)\ Z(t_n))$ 的一个近似。利用狄拉克δ函数的性质，我们作如下近似

$$\begin{aligned}\nu(a_1) &\approx \frac{1}{T}\int_0^T |Y(t)|\delta(X(t)-a_1)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T |Y(t)| \sum_{\{j:X_j=a_1, Y_j\neq 0\}} \frac{\delta(t-t_j)}{|Y_j|}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\sum_j \mathbf{1}_{\{X_j=a_1, Y_j\neq 0\}}.\end{aligned}$$

我们将采用有限差分方法求得的偏微分方程结果（3.5）与蒙特卡洛模拟所得结果进行比较。参数设置列于附录D。如图4所示，基于蒙特卡洛方法得到的结果与偏微分方程结果相近。

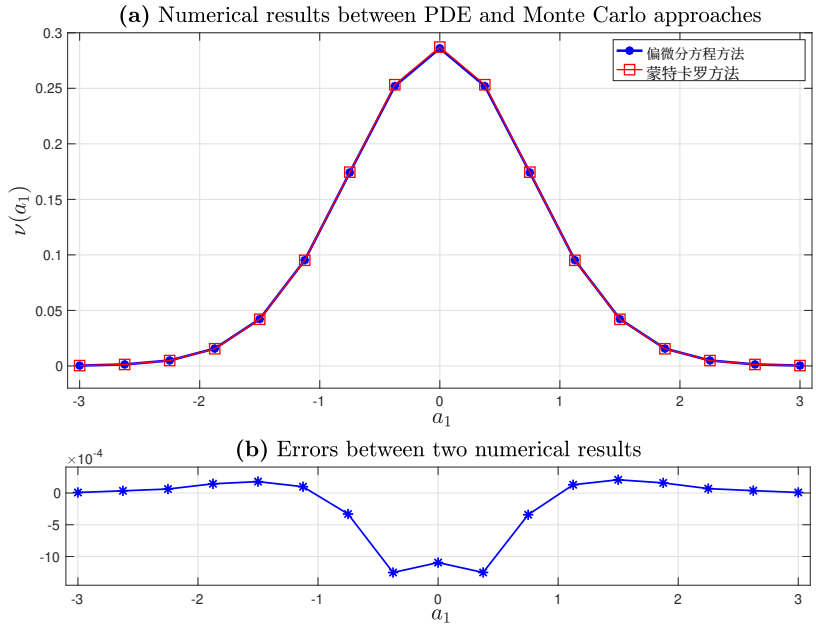

图4： $a_1 \in [-3, 3]$每单位时间间隔的阈值穿越频率。

5.2 适用性极限状态的概率

与弹性变形不同，塑性变形是永久且累积的。变形 $\Delta(t) = X(t) - Z(t)$ 既可能由单次大事件引起，也可能由

许多较小事件累积而成，后者是棘轮效应的直接结果。在本小节中，我们研究概率 $\mathbf{P}(a_2) \triangleq \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}[|X(t) - Z(t)| \leqslant a_2 \mid \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}]$。根据定理 3.6，

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(a_2) &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{|X(t)-Z(t)|\leqslant a_2\}}(\mathbf{X}(t)) \mid \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}] \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \lambda u_\lambda,\end{aligned}$$

其中 u_λ 是方程（3.5）的解，其中 $g(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\{|x-z|\leqslant a_2\}}(\mathbf{x})$， $a_2 \geqslant 0$。对于概率数值格式，我们采用蒙特卡洛方法，设置与例 1 相同。于是，$\mathbf{P}(a_2)$ 可近似为

$$\mathbf{P}(a_2) \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{\{|X_j - Z_j|\leqslant a_2\}}.$$

偏微分方程方法和蒙特卡洛方法所得的数值结果如图5所示。参数设置见附录 D。

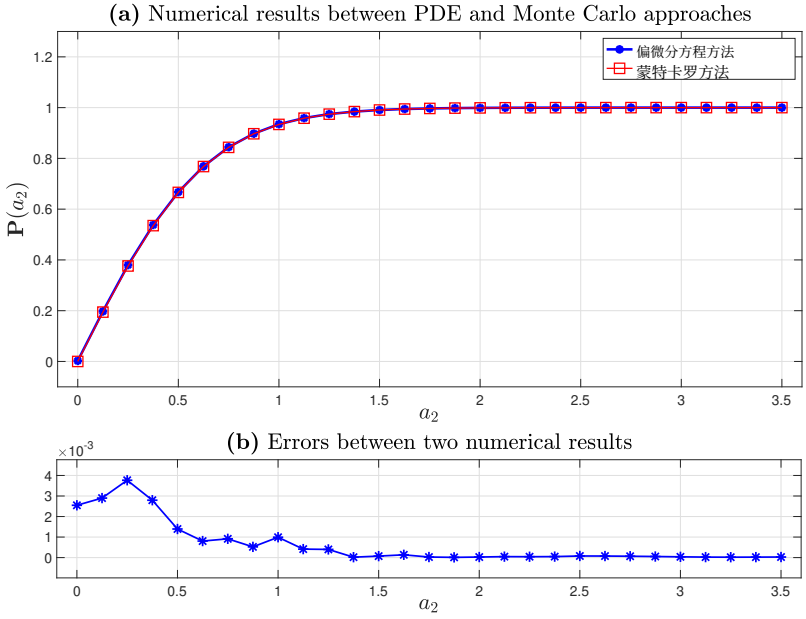

图 5： $a_2 \in [0, 3.5]$ 的极限状态下适用性的概率。

5.3 数值算例的经验收敛率

S

由于精确解并非总是可得，我们采用不同网格上计算得到的数值解来估计基于偏微分方程的方法的经验收敛率。为

准确起见，设 $\mathcal{U}^h$为间距为 h的均匀网格上的数值解， $\mathcal{U}^{\text{exact}}$为精确解，并假设 p 为数值格式的收敛阶，则

$$\|\mathcal{U}^h - \mathcal{U}^{\text{exact}}\|_\infty \leqslant Ch^p,$$

其中， C 是一个与 h无关的常数。此外，假设

$$\|\mathcal{U}^h - \mathcal{U}^{\text{exact}}\|_\infty = Ch^p + O(h^{p+\epsilon}), \quad \text{for some } \epsilon > 0,$$

then

$$\frac{\|\mathcal{U}^h - \mathcal{U}^{h/2}\|_\infty}{\|\mathcal{U}^{h/2} - \mathcal{U}^{h/4}\|_\infty} \approx 2^p + O(h^\epsilon).$$

基于这一关系，我们通过考虑以下情形来检验数值格式的收敛阶

$$p(h) \triangleq \log_2 \left(\frac{\|\mathcal{U}^h - \mathcal{U}^{h/2}\|_\infty}{\|\mathcal{U}^{h/2} - \mathcal{U}^{h/4}\|_\infty} \right).$$

更多详情请参阅 [35, 36]。

在表1 和2中，我们给出了例 1 和例 2 中关于 $p(h)$ 相对于 x， y， z的一组经验估计。结果表明，收敛阶接近 2，这与二阶迎风差分格式的理论预期一致。

表 1：例 1 的计算结果 $p(h)$，其中 $\lambda = 10^{-3}$，$h_x = \frac{\lambda\bar{x}}{8}$，$h_y = \frac{\lambda\bar{y}}{8}$，— — $h_z = \frac{\lambda b}{8}$ $\varepsilon_0 = 4 \times 10^{-4}$ $a_1 = 0$ ，，。

	$h = h_x$	$h = h_y$	$h = h_z$
$\lambda\|u^h - u^{h/2}\|_\infty$	0.0160	0.0152	0.0025
$\lambda\|u^{h/2} - u^{h/4}\|_\infty$	0.0048	0.0040	0.0007
$\lambda\|u^{h/4} - u^{h/8}\|_\infty$	0.0011	0.0010	0.0002
$p(h)$	1.7517	1.9091	1.9095
$p(h/2)$	2.1561	1.9856	1.9185

表2：例2中 $p(h)$ 的计算，参数为 $\lambda = 10^{-3}$、$h_x = \frac{\lambda\bar{x}}{8}$、 $h_y = \frac{\lambda\bar{y}}{8}$、 — — $h_z = \frac{\lambda b}{8}$ $a_2 = \frac{3}{8}$ 。

	$h = h_x$	$h = h_y$	$h = h_z$
$\lambda\|u^h - u^{h/2}\|_\infty$	0.0973	0.0321	0.0411
$\lambda\|u^{h/2} - u^{h/4}\|_\infty$	0.0414	0.0100	0.0122
$\lambda\|u^{h/4} - u^{h/8}\|_\infty$	0.0124	0.0025	0.0031
$p(h)$	1.2341	1.6886	1.7481
$p(h/2)$	1.7332	1.9660	1.9836

6 结论

在这项工作中，我们设计了一种基于偏微分方程的数值方法，用于计算白噪声驱动的双线性滞回振子的测度和稳态统计量。该方法为蒙特卡洛模拟提供了一种替代方案。通过建立 EPPO 模型的理论扩展，并给出适当的李雅普诺夫函数，我们证明了不变概率测度的存在性；不过，唯一性仍是一个具有挑战性的问题，超出了本文的讨论范围。所提出框架的应用，包括计算阈值穿越频率和适用性概率，

展现了该框架在分析高维非线性非光滑动力系统方面的实用价值。数值结果证实了我们的方法效率高且前景广阔，有望拓展传统蒙特卡洛方法的替代方案范围。

定理的证明

Fir令$\mathbf{X}$ 满足随机变分不等式 (2.3)，注意，对于足够光滑的函数 F，

$$F(t,\mathbf{X}(t)) = F(0,\mathbf{X}(0)) + \int_0^t \partial_s F(s,\mathbf{X}(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \partial_x F(s,\mathbf{X}(s))\mathrm{d}X(s) + \int_0^t \partial_y F(s,\mathbf{X}(s))\mathrm{d}Y(s)$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \partial_y^2 F(s,\mathbf{X}(s))\mathrm{d}s + \underbrace{\int_0^t \partial_z F(s,\mathbf{X}(s))\mathrm{d}Z(s),}_{=\int_0^t \partial_z F(s,\mathbf{X}(s))Y(s)\mathrm{d}s - \int_0^t \partial_z F(s,\mathbf{X}(s))\mathrm{d}\Delta(s)} \tag{A.1}$$

其中 $Z(t) = X(t) - \Delta(t)$，且 $\mathrm{d}\Delta(t) = \mathbf{1}_{\{Z(t)=b\}}\max(0,Y(t))\mathrm{d}t + \mathbf{1}_{\{Z(t)=-b\}}\min(0,Y(t))\mathrm{d}t$。定理 3.1 的证明。我们证明，若 ψ 是 (3.2) 的解，则 ψ 满足 (3.1)。对于任意 $t,\tau\in[0,T]$，由伊藤公式（将 t 视为常数，并参见 (A.1)），

$$\begin{aligned}
&\psi(t-\tau,\mathbf{X}(\tau))\\
&= \psi(t,\mathbf{X}(0)) - \int_0^\tau \partial_s\psi\mathrm{d}s + \int_0^\tau \partial_x\psi\mathrm{d}X(s) + \int_0^\tau \partial_y\psi\mathrm{d}Y(s) + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^\tau \partial_y^2\psi\mathrm{d}s\\
&\quad + \int_0^\tau Y(s)\partial_z\psi\mathrm{d}s - \int_0^\tau \partial_z\psi\mathbf{1}_{\{Z(s)=b\}}\max(0,Y(s))\mathrm{d}s - \int_0^\tau \partial_z\psi\mathbf{1}_{\{Z(s)=-b\}}\min(0,Y(s))\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

应用

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbf{1}_{\{|Z(s)|<b\}} + \mathbf{1}_{\{Z(s)=b\}} + \mathbf{1}_{\{Z(s)=-b\}},\\
Y(s) - \max(0,Y(s)) &= \min(0,Y(s)),
\end{aligned}$$

并注意到 ψ 满足 (3.2)，于是

$$\psi(t-\tau,\mathbf{X}(\tau)) = \psi(t,\mathbf{X}(0)) + \text{mean-zero term.}$$

由于 τ 是任意的，令 $\tau = t$，在给定$\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}$的条件下取期望，

$$\mathbb{E}[\psi(0,\mathbf{X}(t))|\mathbf{X}(0)=\mathbf{x}] = \mathbb{E}[\psi(t,\mathbf{X}(0))|\mathbf{X}(0)=\mathbf{x}],$$

即 $\mathbb{E}[g(\mathbf{X}(t))|\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}] = \psi(t,\ \mathbf{x})$。 □

特别是，若将定理 g 中的函数 3.1 替换为示性函数，则可得到以下推论。

¯推论 A.1。设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{D}$ 上的一个 Borel σ-域，函数 $u(s,\ \mathbf{x})$ 定义如下：

$$u(s,\mathbf{x}) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{B}}(\mathbf{X}(t))|\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}] = \mathbb{P}_{(s,\mathbf{x})}(\mathbf{X}(t) \in \mathcal{B}),$$

¯其中 $0 \leqslant s \leqslant t$ 且 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ 是方程组的一个解

$$\begin{cases} \partial_s u + \mathbf{A}u = 0, \quad \text{in } [0,t) \times \mathcal{D}, \\ \partial_s u + \mathbf{B}_{\pm} u = 0, \quad \text{in } [0,t) \times \mathcal{D}^{\pm}, \\ u(t,\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}). \end{cases}$$

定理 3.3的证明。我们考虑弹性区间内的系统；对于塑性区间，也可得到相同的结果。根据伊藤公式，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}[X^2(t)] &= 2\mathbb{E}[X(t)Y(t)], \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}[Y^2(t)] &= 2\mathbb{E}[Y(t)\mathfrak{f}(X(t),Y(t)) - k(1-\alpha)Y(t)Z(t) - k\alpha X(t)Y(t)] + \sigma^2, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}[X(t)Y(t)] &= \mathbb{E}[Y^2(t) + X(t)\mathfrak{f}(X(t),Y(t)) - k(1-\alpha)X(t)Z(t) - k\alpha X^2(t)]. \end{aligned}$$

回顾一下，

$$V(x,y) = \left(k\alpha + \frac{c_0 d_0}{2} - c_1\right)x^2 + y^2 + c_0 xy.$$

利用假设（3.3）和（3.4），以及杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}[V(X(t),Y(t))] \\ &\leqslant \mathbb{E}[-c_0 Y^2(t) - c_0(k\alpha - d_1)X^2(t) - 2k(1-\alpha)Y(t)Z(t) - c_0 k(1-\alpha)X(t)Z(t)] + \hat{C} \\ &\leqslant -\frac{c_0}{2}\mathbb{E}[(k\alpha - d_1)X^2(t) + Y^2(t)] + C, \end{aligned}$$

ˆ其中 $C = \sigma^2 + c_0 d_2 + 2c_2$, $C = \hat{C} + (kb(1-\alpha))^2$ Ä $\frac{2}{c_0} + 2 \frac{c_0}{(k\alpha - d_1)}$ ä。此外，由于 e

$$V(x,y) \leqslant \left(k\alpha + \frac{c_0 d_0}{2} + \frac{c_0^2}{2} - c_1\right)x^2 + \frac{3}{2}y^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

then

$$C_1 V(x,y) \leqslant \frac{c_0}{2}[(k\alpha - d_1)x^2 + y^2],$$

其中 $C_1 =$ min Ä $\frac{c_0}{3}$, _ $\frac{c_0\ (k\alpha - d_1)\ \ 2k\alpha + c_0 d_0 + c_0^2 - 2c_1}{}$ ä。因此，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}[V(X(t),Y(t))] + C_1\mathbb{E}[V(X(t),Y(t))] \leqslant C,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V(X(t),Y(t))] &\leqslant V(X(0),Y(0))e^{-C_1 t} + C(1-e^{-C_1 t})/C_1 \\ &\leqslant V(X(0),Y(0)) + C/C_1, \quad \forall t>0.\end{aligned}$$

□

¯定义与 $T>0$ 相关的概率分布 μ_T，其定义在 $(\mathcal{D},\ \mathcal{B})$ 上：

$$\mu_T(\phi) \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}[\phi(\mathbf{X}(t))]\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \mu(0)(P_t\phi)\mathrm{d}t, \quad \text{for } \phi \in C_b(\bar{\mathcal{D}}).$$

事实上，μ_T 对应于遍历平均。（关于遍历性的定义，请参见 [37], 第 154 页。）

为证明定理 3.4，需要以下引理。

引理 A.2. 对任意 $T_n \uparrow \infty$，序列 $\{\mu_{T_n}\}_{n\geqslant 1}$ 是紧的。

证明。我们需要证明，对于任意 $\varepsilon > 0$ 和任意 $n \in \mathbb{N}$，存在一个紧集$\mathcal{K}_\varepsilon \in \mathcal{B}$，使得

$$\mu_{T_n}(\mathbf{1}_{\mathcal{K}_\varepsilon}) \geqslant 1-\varepsilon.$$

注意到

$$\mu_{T_n}(\mathbf{1}_{\mathcal{K}_\varepsilon}) = \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{K}_\varepsilon}(\mathbf{X}(t))]\mathrm{d}t = \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} \mathbb{P}(\mathbf{X}(t)\in\mathcal{K}_\varepsilon)\mathrm{d}t.$$

因此，

$$1-\mu_{T_n}(\mathbf{1}_{\mathcal{K}_\varepsilon}) = \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} \mathbb{P}(\mathbf{X}(t)\notin\mathcal{K}_\varepsilon)\mathrm{d}t.$$

接下来我们证明集合

$$\mathcal{K}_\delta \triangleq \left\{(x,y,z) : \mathfrak{h}|x| + \left|\frac{c_0}{2}x + y\right| \leqslant \frac{1}{\delta}, |z| \leqslant b\right\}$$

是合适的，其中 $\delta = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$，$\mathfrak{c} = V(X(0)\ Y(0)) + C/C_1$，且 $\mathfrak{h} = (k\alpha + c_0 d_0/2 - c_1 - c_0^2/4)^{1/2}$。为此，根据定理 3.3 和切比雪夫不等式，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbf{X}(t)\notin\mathcal{K}_\varepsilon) &\leqslant \mathbb{P}\left(\mathfrak{h}|X(t)| > \frac{1}{2\delta}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{c_0}{2}X(t) + Y(t)\right| > \frac{1}{2\delta}\right) \\ &\leqslant 4\delta^2\mathbb{E}\left[\mathfrak{h}^2|X(t)|^2 + \left|\frac{c_0}{2}X(t) + Y(t)\right|^2\right] \\ &\leqslant 4\delta^2\mathfrak{c} = \varepsilon,\end{aligned}$$

这就得出了所需结果。 □

定理 3.4 的证明。对于任意 $\mu(0)$， $\{\mu_{T_n}\}_{n\geqslant 1}$ 根据引理 A.2 是紧的，因此存在一个子序列 $\{\mu_{T_{n_\mathrm{k}}}\}_{\mathrm{k}\geqslant 1}$ 弱收敛到某个测度 μ，即，对于任意 $\phi\in C_b(\mathcal{D})$，

$$\mu_{T_{n_\mathrm{k}}}(\phi)\underset{\mathrm{k}}{\to}\mu(\phi).$$

那么， μ 是不变的，因为

$$\begin{aligned}\mu(P_t\phi)&=\lim_{\mathrm{k}}\mu_{T_{n_\mathrm{k}}}(P_t\phi)\\&=\lim_{\mathrm{k}}\frac{1}{T_{n_\mathrm{k}}}\int_0^{T_{n_\mathrm{k}}}\mu(0)(P_sP_t\phi)\mathrm{d}s\\&=\lim_{\mathrm{k}}\frac{1}{T_{n_\mathrm{k}}}\int_0^{T_{n_\mathrm{k}}}\mu(0)(P_{s+t}\phi)\mathrm{d}s\\&=\lim_{\mathrm{k}}\frac{1}{T_{n_\mathrm{k}}}\int_t^{t+T_{n_\mathrm{k}}}\mu(0)(P_s\phi)\mathrm{d}s\\&=\lim_{\mathrm{k}}\frac{1}{T_{n_\mathrm{k}}}\int_0^{T_{n_\mathrm{k}}}\mu(0)(P_s\phi)\mathrm{d}s\\&=\mu(\phi).\end{aligned}$$

□

推论的证明 3.5。根据不变测度的定义（参见 [38], 第55—56页），我们有

$$\int_{\bar{\mathcal{D}}}\Lambda(\varphi)\mathrm{d}\mu=0,\quad\forall\varphi\in C_b(\bar{\mathcal{D}}),$$

其中， Λ 是 P_t的无穷小生成元。也就是说

$$\int_{\mathcal{D}}\mathbf{A}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}\mu+\int_{\mathcal{D}^+}\mathbf{B}_+\varphi(x,y,b)\mathrm{d}\mu+\int_{\mathcal{D}^-}\mathbf{B}_-\varphi(x,y,-b)\mathrm{d}\mu=0.$$

□

定理的证明 3.6。 (i) 考虑方程（3.2）的解的拉普拉斯变换，在 $\mathcal{D}$中记作 u_λ:

$$u_\lambda(\mathbf{x})=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t,\mathbf{x})\mathrm{d}t,\quad\text{for }\lambda>0.$$

分部积分可得

$$\begin{aligned}\lambda u_\lambda(\mathbf{x})&=-e^{-\lambda t}\psi(t,\mathbf{x})\Big|_{t=0}^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda t}\partial_t\psi(t,\mathbf{x})\mathrm{d}t\\&=\psi(0,\mathbf{x})+\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{A}\psi(t,\mathbf{x})\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注意，算子$\mathbf{A}$ 与 t 无关，因此可得

$$\lambda u_\lambda(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{A}u_\lambda(\mathbf{x}).$$

采用相同的方法，在边界 $\mathcal{D}^\pm$ 上，我们有

$$\lambda u_\lambda(x, y, \pm b) - \mathbf{B}_\pm u_\lambda(x, y, \pm b) = g(x, y, \pm b).$$

拉普拉斯变换表明其有界：

$$|u_\lambda(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{[0,T]\times\bar{\mathcal{D}}} |\psi(t, \mathbf{x})| \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\|g\|_\infty}{\lambda}.$$

(ii) 根据拉普拉斯变换的终值定理，

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda u_\lambda(\mathbf{x}) = \lim_{t\to\infty} \psi(t, \mathbf{x}).$$

因此，

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda u_\lambda(\mathbf{x}) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[g(\mathbf{X}(t))|\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}] = \int_{\bar{\mathcal{D}}} g \mathrm{d}\mu, \ \forall \mathbf{x} \in \bar{\mathcal{D}}.$$

□

B 不变测度的算法

我们首先根据以下标签子集对网格 $\mathcal{G}$ 上的 $\mathcal{D}_{XY}$ 情况进行分类，如图 3所示。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K} &\triangleq \Big\{(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}) : \mathrm{i} \in \{2,\ldots,I-1\}, \mathrm{j} \in \{2,\ldots,J-1\}, \mathrm{k} \in \{2,\ldots,K-1\}\Big\},\\
\boldsymbol{R}_- &\triangleq \Big\{(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}) : \mathrm{i} \in \{2,\ldots,I-1\}, \mathrm{j} \in \{2,\ldots,J-1\}, \mathrm{k} \in \{1\}\Big\},\\
\boldsymbol{R}_+ &\triangleq \Big\{(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}) : \mathrm{i} \in \{2,\ldots,I-1\}, \mathrm{j} \in \{2,\ldots,J-1\}, \mathrm{k} \in \{K\}\Big\},\\
\boldsymbol{B}_- &\triangleq \Big\{(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}) : \mathrm{i} \in \{1\}, \mathrm{j} \in \{2,\ldots,J-1\}, \mathrm{k} \in \{2,\ldots,K-1\}\Big\},\\
\boldsymbol{B}_+ &\triangleq \Big\{(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}) : \mathrm{i} \in \{I\}, \mathrm{j} \in \{2,\ldots,J-1\}, \mathrm{k} \in \{2,\ldots,K-1\}\Big\},\\
\hat{\boldsymbol{B}}_- &\triangleq \Big\{(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}) : \mathrm{i} \in \{1\}, \mathrm{j} \in \{2,\ldots,J-1\}, \mathrm{k} \in \{1,K\}\Big\},\\
\hat{\boldsymbol{B}}_+ &\triangleq \Big\{(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}) : \mathrm{i} \in \{I\}, \mathrm{j} \in \{2,\ldots,J-1\}, \mathrm{k} \in \{1,K\}\Big\},\\
\boldsymbol{G} &\triangleq \Big\{(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}) : \mathrm{i} \in \{1,2,\ldots,I\}, \mathrm{j} \in \{1,J\}, \mathrm{k} \in \{1,2,\ldots,K\}\Big\}.
\end{aligned}$$

第4 节中的离散化系统可改写为以下线性系统

$$M_\lambda \boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{g}},$$

其中 M_λ是一个稀疏的 $IJK \times IJK$矩阵。具体而言，令 $l(\mathrm{i},\ \mathrm{j},\ \mathrm{k}) \triangleq \mathrm{k} + (\mathrm{j}-1)K + (\mathrm{i}-1)JK$，并令 $(\tilde{\boldsymbol{g}})_{\mathrm{i},\ \mathrm{j},\ \mathrm{k}} = 0, \forall(\mathrm{i},\ \mathrm{j},\ \mathrm{k}) \in \boldsymbol{G}$；否则，$(\tilde{\boldsymbol{g}})_{\mathrm{i},\ \mathrm{j},\ \mathrm{k}} = \tilde{g}(\tilde{x}_\mathrm{i},\ \tilde{y}_\mathrm{j},\ \tilde{z}_\mathrm{k})$。

注释 A.1。注意，$l(\mathrm{i},\ \mathrm{j},\ \mathrm{k}) \triangleq \mathrm{k} + (\mathrm{j}-1)K + (\mathrm{i}-1)JK$ 是区间 $[1, IJK]$ 内一个整数的混合进制表示，且该表示唯一。更多详情请参阅 [39] 第 41–42 页。

B.1 二阶迎风格式

由于二阶迎风格式涉及两个相邻的上游（或下游）节点，因此需要对边界附近的有限差分节点进行特殊处理，以避免引用计算域之外的值。按照 [32]，中的方法，本研究对这些边界邻近点采用一阶迎风格式。在这种情形下，矩阵 M_λ 的元素可具体表示如下。

(1) 对于 (i、j、k) $\in \boldsymbol{K}$,

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i}-2,\mathrm{j},\mathrm{k})) = -\frac{\min(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{x}}}, \quad \text{if } 2<\mathrm{i}<I-1, \tag{B.1}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i}+2,\mathrm{j},\mathrm{k})) = \frac{\max(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{x}}}, \quad \text{if } 2<\mathrm{i}<I-1, \tag{B.2}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i}-1,\mathrm{j},\mathrm{k})) = (1+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{i}<I-1\}})\frac{\min(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{\delta_{\tilde{x}}}, \tag{B.3}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i}+1,\mathrm{j},\mathrm{k})) = -(1+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{i}<I-1\}})\frac{\max(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{\delta_{\tilde{x}}}, \tag{B.4}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j}-2,\mathrm{k})) = -\frac{\min(0,\tilde{\beta}_{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}})}{2\delta_{\tilde{y}}}, \quad \text{if } 2<\mathrm{j}<J-1, \tag{B.5}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j}+2,\mathrm{k})) = \frac{\max(0,\tilde{\beta}_{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}})}{2\delta_{\tilde{y}}}, \quad \text{if } 2<\mathrm{j}<J-1, \tag{B.6}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j}-1,\mathrm{k})) = -\frac{\lambda\sigma^2}{2\delta_{\tilde{y}}^2}+(1+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{\min(0,\tilde{\beta}_{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}})}{\delta_{\tilde{y}}}, \tag{B.7}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j}+1,\mathrm{k})) = -\frac{\lambda\sigma^2}{2\delta_{\tilde{y}}^2}-(1+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{\max(0,\tilde{\beta}_{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}})}{\delta_{\tilde{y}}}, \tag{B.8}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}-2)) = -\frac{\min(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{z}}}, \quad \text{if } 2<\mathrm{k}<K-1, \tag{B.9}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}+2)) = \frac{\max(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{z}}}, \quad \text{if } 2<\mathrm{k}<K-1, \tag{B.10}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}-1)) = (1+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{k}<K-1\}})\frac{\min(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{\delta_{\tilde{z}}}, \tag{B.11}$$

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}+1)) = -(1+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{k}<K-1\}})\frac{\max(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{\delta_{\tilde{z}}}, \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned} M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})) = 1+\frac{\lambda\sigma^2}{\delta_{\tilde{y}}^2}+(2+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{|\tilde{\beta}_{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}}|}{2\delta_{\tilde{y}}} \\ +(2+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{i}<I-1\}})\frac{|\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda|}{2\delta_{\tilde{x}}}+(2+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{k}<K-1\}})\frac{|\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda|}{2\delta_{\tilde{z}}}. \end{aligned} \tag{B.13}$$

(2) 对于 (i, j, k) $\in \boldsymbol{R}_-$, 元素 (B.1) – (B.8) 和 (B.10) 与情形 (1) 给出的形式一致, 但是

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}+1)) = -\frac{2\max(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{\delta_{\tilde{z}}},$$

$$\begin{aligned} M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})) = 1+\frac{\lambda\sigma^2}{\delta_{\tilde{y}}^2}+(2+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{|\tilde{\beta}_{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}}|}{2\delta_{\tilde{y}}}+(2+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{i}<I-1\}})\frac{|\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda|}{2\delta_{\tilde{x}}} \\ +\frac{3\max(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{z}}}. \end{aligned}$$

（3）对于（i，j，k）$\in \boldsymbol{R}_+$，元素（B.1）–（B.9）与情形（1）给出的形式一致，但是

$$M_\lambda(l(\mathrm{i,j,k}), l(\mathrm{i,j,k-1})) = \frac{2\min(0, \tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{\delta_{\tilde{z}}},$$
$$M_\lambda(l(\mathrm{i,j,k}), l(\mathrm{i,j,k})) = 1 + \frac{\lambda\sigma^2}{\delta_{\tilde{y}}^2} + (2 + \mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{|\tilde{\beta}_{\mathrm{i,j,k}}|}{2\delta_{\tilde{y}}} + (2 + \mathbf{1}_{\{2<\mathrm{i}<I-1\}})\frac{|\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda|}{2\delta_{\tilde{x}}} - \frac{3\min(0, \tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{z}}}.$$

(4) 对于 (i,j,k) $\in \boldsymbol{B}_-$，元素 (B.2) 和 (B.5)–(B.12) 与情形 (1) 相比保持不变，但

$$M_\lambda(l(\mathrm{i,j,k}), l(\mathrm{i+1,j,k})) = -\frac{2\max(0, \tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{\delta_{\tilde{x}}},$$
$$M_\lambda(l(\mathrm{i,j,k}), l(\mathrm{i,j,k})) = 1 + \frac{\lambda\sigma^2}{\delta_{\tilde{y}}^2} + (2 + \mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{|\tilde{\beta}_{\mathrm{i,j,k}}|}{2\delta_{\tilde{y}}} + \frac{3\max(0, \tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{x}}} + (2 + \mathbf{1}_{\{2<\mathrm{k}<K-1\}})\frac{|\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda|}{2\delta_{\tilde{z}}}.$$

(5) 对于 (i,j,k) $\in \boldsymbol{B}_+$，元素 (B.1) 和 (B.5)–(B.12) 与情形 (1) 相比保持不变，但

$$M_\lambda(l(\mathrm{i,j,k}), l(\mathrm{i-1,j,k})) = \frac{2\min(0, \tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{\delta_{\tilde{x}}},$$
$$M_\lambda(l(\mathrm{i,j,k}), l(\mathrm{i,j,k})) = 1 + \frac{\lambda\sigma^2}{\delta_{\tilde{y}}^2} + (2 + \mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{|\tilde{\beta}_{\mathrm{i,j,k}}|}{2\delta_{\tilde{y}}} - \frac{3\min(0, \tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{x}}} + (2 + \mathbf{1}_{\{2<\mathrm{k}<K-1\}})\frac{|\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda|}{2\delta_{\tilde{z}}}.$$

ˆ(6) 对于 (i,j,k) $\in \{(\mathrm{i,j,k}) \in \boldsymbol{B}_- : \mathrm{k} = 1\}$，对于 (B.5)–(B.8) 使用情形 (1)，对于 (B.10) 和 (B.12) 使用情形 (2)，对于 (B.2) 和 (B.4) 使用情形 (4)，但

$$M_\lambda(l(\mathrm{i,j,k}), l(\mathrm{i,j,k})) = 1 + \frac{\lambda\sigma^2}{\delta_{\tilde{y}}^2} + (2 + \mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{|\tilde{\beta}_{\mathrm{i,j,k}}|}{2\delta_{\tilde{y}}} + \frac{3\max(0, \tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{x}}} + \frac{3\max(0, \tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{z}}}.$$

ˆ(7) 对于(i,j,k) $\in \{(\mathrm{i,j,k}) \in \boldsymbol{B}_+ : \mathrm{k} = 1\}$，对于 (B.5)–(B.8) 使用情形 (1)，对于 (B.10) 和 (B.12) 使用情形 (2)，对于 (B.1) 和 (B.3) 使用情形 (5)，但是

$$M_\lambda(l(\mathrm{i,j,k}), l(\mathrm{i,j,k})) = 1 + \frac{\lambda\sigma^2}{\delta_{\tilde{y}}^2} + (2 + \mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{|\tilde{\beta}_{\mathrm{i,j,k}}|}{2\delta_{\tilde{y}}} - \frac{3\min(0, \tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{x}}} + \frac{3\max(0, \tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{z}}}.$$

ˆ(8) 对于(i,j,k) ∈ {(i,j,k) ∈ $\boldsymbol{B}_-$: k = K}，对于 (B.5)–(B.8) 使用情形 (1)，对于 (B.9) 和 (B.11) 使用情形 (3)，对于 (B.2) 和 (B.4) 使用情形 (4)，但是

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})) = 1+\frac{\lambda\sigma^2}{\delta_{\tilde{y}}^2}+(2+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{|\tilde{\beta}_{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}}|}{2\delta_{\tilde{y}}}+\frac{3\max(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{x}}}-\frac{3\min(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{z}}}.$$

ˆ（9）对于（i，j，k）∈ {（i，j，k）∈ $\boldsymbol{B}_+$: k = K}，对于（B.5）–（B.8）使用情形（1），对于（B.9）和（B.11）使用情形（3），对于（B.1）和（B.3）使用情形（5），但是

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})) = 1+\frac{\lambda\sigma^2}{\delta_{\tilde{y}}^2}+(2+\mathbf{1}_{\{2<\mathrm{j}<J-1\}})\frac{|\tilde{\beta}_{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}}|}{2\delta_{\tilde{y}}}-\frac{3\min(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{x}}}-\frac{3\min(0,\tilde{y}_\mathrm{j}/\lambda)}{2\delta_{\tilde{z}}}.$$

（10）对于（i，j，k）∈ $\boldsymbol{G}$,

$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})) = -\frac{1}{\delta_{\tilde{y}}},\quad M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j}+1,\mathrm{k})) = \frac{1}{\delta_{\tilde{y}}},\quad \text{if } \mathrm{j}=1,$$
$$M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j}-1,\mathrm{k})) = -\frac{1}{\delta_{\tilde{y}}},\quad M_\lambda(l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}),l(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})) = \frac{1}{\delta_{\tilde{y}}},\quad \text{if } \mathrm{j}=J.$$

C Rice公式

在介绍Rice公式之前，我们需要以下定义。

定义A.1（上穿和下穿 [40]）。对于几乎必然（a.s.）连续的过程 $\zeta=\{\zeta(t)\ \ t\geqslant 0\}$，如果存在某个 $\varepsilon>0$，使得$\zeta(t)\ \leqslant a$位于（$t_0-\varepsilon$，t_0）内，且 $\zeta(t)\ \geqslant a$位于（t_0，$t_0+\varepsilon$）内，则称该过程在 $t_0>0$处发生了一次$a\in\mathbb{R}$ 上穿。通过反转不等号即可类似地定义对水平 a的下穿。

对于几乎处处可微过程 ζ，如果 9 9$\zeta(t_0)\ >0$ ($\zeta(t_0)\ <0$)，则称其在 $t_0>0$ 处上穿（下穿） a 。

接下来，我们介绍 Rice公式。设 $\eta=\{\eta(t)\ t\geqslant 0\}$ 是一个连续且严格平稳的过程。假设 $\eta(0)$ 的分布（记为 $F(x)\ =\mathbb{P}(\eta(0)\ \leqslant x)$）是一个连续函数。对于固定的 $a\in\mathbb{R}$，令 $N^+(a)$ 表示 η 在 $[0,1]$，上上穿水平 a 的次数。上穿强度可通过以下关系求得

$$\nu^+(a)\triangleq\mathbb{E}[N^+(a)]=\lim_{q\downarrow 0}\frac{1}{q}\mathbb{P}(\eta(0)<a<\eta(q)).$$

证明见 [34] 引理 7.2.2。若过程 η 是高斯过程，且导数$\dot{\eta}(t)$以均方意义存在，则 Rice公式表明

$$\nu^+(a)=\int_0^\infty yp(a,y)\mathrm{d}y,$$

其中 $p(a,\ y)$ 是 $\eta(0)$ 和 $\dot{\eta}(0)$ 的联合密度（参见 [34] 定理 7.2.4）。Rice公式关于穿越给定水平的强度的更一般形式 a:

$$\nu(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(a, y) \mathrm{d}y,$$

其中 $\nu(a) = \nu^{+}(a) + \nu^{-}(a)$，而 $\nu^{-}(a)$ 是下穿越强度。

D 两个数值算例的参数设置

这里介绍第 5 节中两个算例的参数设置。对于所有数值实验，我们使用了一台配备 Apple M4 Pro 处理器（14 核中央处理器配置）和 24 GB 统一内存的 MacBook Pro。计算在 MATLAB R2024b 中执行。

偏微分方程方法（采用二阶迎风格式）

为求解第 5 节中的两个偏微分方程，我们对第 4 节中的线性系统进行数值求解。具体而言，我们使用 MATLAB 的 gmres 函数实现的广义最小残量（GMRES）算法求解线性系统，并对每个系统采用不完全 LU 分解进行预条件处理。

参数	例 1	例2
a_1 或 a_2	$[-3, 3]$	$[0, 3.5]$
λ	10^{-3}	10^{-3}
$\bar{x}$	3.5	3.5
$\bar{y}$	3.5	3.5
b	1	1
f$(x,\ y)$	$-y$	$-y$
k	1	1
α	0.5	0.5
σ	1	1
$\delta_{\tilde{x}}$	5.47×10^{-5}	5.47×10^{-5}
$\delta_{\tilde{y}}$	5.47×10^{-5}	5.47×10^{-5}
$\delta_{\tilde{z}}$	1.56×10^{-5}	1.56×10^{-5}
IJK	2.15×10^{6}	2.15×10^{6}

在例 1 中，狄拉克δ函数 $\delta(x-a_1)$ 通过 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_0}$ exp Ä $-\frac{(x-a_1)}{2\varepsilon_0^2}$ ä 进行近似，其中 $\varepsilon_0 = \lambda\bar{x}/2^6$。

蒙特卡罗方法

参数	例 1	例2
a_1 或 a_2	$[-3, 3]$	$[0, 3.5]$
$\mathbf{x}$	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
b	1	1
f(x, y)	$-y$	$-y$
k	1	1
α	0.5	0.5
σ	1	1
δ_t	10^{-3}	10^{-3}
T	10^9	10^9

参考文献

[1] T. K. Caughey。具有双线性滞后系统的随机激励。应用力学杂志，27(4)：649–652，1960年。2

[2] A. Naess 和 V. Moe。《具有双线性滞后的振子的平稳与非平稳随机振动》。《国际非线性力学杂志》，31(5):553–562，1996年。

[3] J. B. Roberts。《双线性滞后振子对平稳随机激励的响应》。《应用力学杂志》，45(4):923–928，1978年。

[4] P-T. D. Spanos。《随机载荷下的滞后结构振动》。《美国声学学会杂志》，65(2):404–410，1979年。

[5] M. Yar 和 J. K. Hammond。《双线性滞回系统的建模与响应》。《工程力学杂志》，113(7):1000–1013，1987年。2

[6] C. Feau. 高斯白噪声作用下弹性理想塑性振子的概率响应。《概率工程力学》，23(1):36–44，2008年。2

[7] A. Bensoussan 和 J. Turi. 与弹塑性振子不变测度相关的退化狄利克雷问题。《应用数学与优化》，58(1):1– 27，2008年。4

[8] A. Bensoussan 和 J. Turi。关于一类具有非局部狄利克雷边界条件的偏微分方程。载于《应用与数值偏微分方程：多学科背景下仿真、优化与控制中的科学计算》，第 9–23 页。多德雷赫特：施普林格出版社，2009年。2

[9] A. Bensoussan、L. Mertz、O. Pironneau 和 J. Turi。一种超弱有限元方法：作为蒙特卡洛方法的替代方案，用于求解含噪声的弹塑性问题。SIAM 数值分析期刊，47(5):3374–3396，2009年。3，6，7[10] L. Mertz 和 C. Feau。含噪声弹塑性问题中塑性变形的实证研究。《概率工程力学》，30:60–69，2012年。2[11] A. Bensoussan、H. Jasso-Fuentes、S. Menozzi 和 L. Mertz。对具有消失跳跃的弹塑性问题建模的随机变分不等式进行渐近分析。《渐近分析》，80(1-2):171–187，2012年。2[12] A. Bensoussan 和 L. Mertz。随机变分不等式遍历理论的解析方法。《数学报告》，350(7-8):365–370，2012年。2[13] A. Bensoussan、L. Mertz 和 S. C. P. Yam。受噪声激励的弹塑性振子的塑性变形长周期行为。《数学报告》，350(17-18):853–859，2012年。2[14] H. Jasso-Fuentes、L. Mertz 和 S. C. P. Yam。对含噪声弹塑性问题建模的随机变分不等式的近似解。《应用数学研究快报》，2014(1):52–73，2014年。2[15] A. Bensoussan、C. Feau、L. Mertz 和 S. C. P. Yam。研究白噪声激励的弹塑性振子相关变形方差增长率的解析方法。《应用数学研究快报》，2015(1):99–128，2015年。2[16] M. Laurière 和 L. Mertz。对含噪声弹塑性问题建模的随机变分不等式进行惩罚处理。ESAIM：论文集与综述，48:226–247，2015年。2[17] L. Mertz 和 A. Bensoussan。与滤波白噪声激励的弹塑性振子的遍历性质相关的退化狄利克雷问题。IMA 应用数学期刊，80(5):1387–1408，2015年。2[18] A. Bensoussan、L. Mertz 和 S. C. P. Yam。对滤波噪声激励的弹塑性振子进行建模的随机变分不等式的非局部边值问题。SIAM 数学分析期刊，48(4):2783–2805，2016年。2[19] C. Feau、M. Laurière 和 L. Mertz。与含噪声弹塑性问题相关的失效风险渐近公式。《渐近分析》，106(1):47–60，2017年。2[20] M. Laurière、Z. Li、L. Mertz、J. Wylie 和 S. Zuo。弹塑性振子随机最优控制的自由边界值问题与HJB方程。ESAIM：论文集与综述，65:425–444，2019年。3

[21] L. Mertz、G. Stadler 和 J. Wylie。采用 Feynman–Kac 公式计算非光滑随机动力系统的期望和阈值穿越概率。Physica D，397：25–38，2019年。3[22] M. Laurière 和 L. Mertz。带噪声非光滑动力系统的惩罚方法：遍历性及阈值穿越概率的渐近公式。SIAM 应用动力系统期刊，18(2)：853–880，2019年。2[23] L. Mertz 和 O. Pironneau。受约束随机哈密顿系统的退化 Kolmogorov 方程的数值分析。计算机与数学应用，78(8)：2719–2733，2019年。3[24] L. Mertz、V. Nersesyan 和 M. Rissel。通过能控性条件研究受约束随机动力系统的指数混合。SIAM 控制与优化期刊，62(6)：3266–3287，2024年。2[25] H. L. F. Ip、C. Mathey、L. Mertz 和 J. Wylie。瞬态有色噪声驱动的塑性变形阈值穿越概率的控制变量法。《非线性科学与数值模拟通讯》，2025年。2[26] X. Zhong 和 W. Qiu。采用窄模板有限差分法逼近完全非线性二阶抛物型偏微分方程黏性解的分析。科学计算期刊，99(3)：76，2024年。3[27] W. Qiu 和 L. Tang。关于具有一般源项的 Monge–Ampère 型方程的注记。计算数学，89(326)：2675–2706，2020年。3[28] H. Gao 和 W. Qiu。非凸多面体的非钝角四面体网格上分片线性有限元法的逐点稳定性。科学计算期刊，87(2)：53，2021年。3[29] B. Li、W. Qiu 和 Z. Yang。具有可变密度不可压流的收敛后处理间断 Galerkin 方法。科学计算期刊，91(1)：2，2022年。3[30] X. Wu、W. Qiu 和 K. Pan。在三角形网格上求解各向异性椭圆方程的无条件稳定且 L^2 最优二次有限体积格式。计算数学进展，49(6)：83，2023年。3[31] E. Pardoux 和 A. Răşcanu。随机微分方程、反向随机微分方程、偏微分方程，第69卷。Cham：施普林格出版社，2014年。4[32] S. P. Vanka。回流中的二阶迎风差分。AIAA 期刊，25(11)：1435–1441，1987年。8，18[33] W. Qiu 和 L. Tang。椭圆方程非散度形式下的全局 $W^{2,p}$ 估计。美国数学会会刊，151(02)：763–770，2023年。8

[34] M. R. Leadbetter、G. Lindgren 和 H. Rootzén。随机序列与过程的极值及相关性质。纽约：施普林格出版社，1983年。 9， 21， 22[35] A. Bensoussan、A. Brouste、F. B. Cartiaux、C. Mathey 和 L. Mertz。受外力作用的干摩擦动力系统的数学表述。《物理学D：非线性现象》，421：132859，2021年。 12[36] C. J. Roy。计算模拟的代码审查与解验证程序。《计算物理学杂志》，205(1)：131–156，2005年。 12[37] P. E. Kloeden 和 E. Platen。随机微分方程的数值解。柏林：施普林格出版社，1992年。 15[38] R. F. Bass。扩散与椭圆算子。纽约：施普林格出版社，1998年。 16[39] N. S. Szabo 和 R. I. Tanaka。剩余算术及其在计算机技术中的应用。纽约：麦格劳-希尔，1967年。 18[40] M. R. Leadbetter。广泛类别随机过程的水平线与曲线的穿越。《数学统计年刊》，37(6)：260–267，1966年。 21