arXiv:2601.07042v1 [math.NT] 11 Jan 2026

局部 Kaletha 束的坦纳卡描述

Alexander Bertoloni Meli 和 Peter Dillery

摘要。我们为一个 p-进域 F构造了一个显式的半单坦纳范畴 $\mathrm{RigIsoc}_F$，其纤维函子范畴恢复了 Kaletha 的伽罗瓦束 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$。随后，我们对 $\mathrm{RigIsoc}_F$中的简单对象进行了分类并将其明确写出；这些对象全部来自 GL_n的椭圆扭曲 Levi 子群。

1. 引言

1.1. 动机与概述。对于一个 p-进域 F，精细局部朗兰兹对应提出：从 $G(F)$的不可约光滑表示（其中 G 为约化且准分裂）到增强的 L-参数（ϕ存在一个单射 ρ），其中 $\phi\colon \mathrm{WD}_F \to {}^L G$（此处 $\mathrm{WD}_F = W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 是 Weil–Deligne 群的 SL_2 形式），而 ρ 是中心化子群 S_ϕ 的代数不可约表示；该中心化子群对应于 ϕ的像。精细对应映射的像应包含在满足 $\rho \in \mathrm{Irr}(\pi_0(S_\phi/Z(\widehat{G})^{\Gamma_F}))$的有序对集合（$\phi$、$\rho$) 中。Vogan（[Vog93]）提出，为了将对应提升为使 $\mathrm{Irr}(\pi_0(S_\phi)) \subset \mathrm{Irr}(S_\phi)$ 包含在其像中，应通过加入 G内形式的不可约表示来扩大定义域。在 [BMO25], Oi 中，第一作者与他人证明：如果对 G 及其 Levi 子群存在精细局部朗兰兹对应，那么只要在自守侧进一步允许 G的 Levi 子群的不可约表示，就可以将其提升为与整个目标 $\mathrm{Irr}(S_\phi)$ 之间的双射。在这一背景下，如何准确参数化 G 的内形式（以及其 Levi 子群，若有需要）是一个微妙问题，因为上同调群 $H^1(F、G_{\mathrm{ad}})$ 不够刚性：按 G_{ad}-余边界平移会将非同构的 $G(F)$表示识别起来。然而，有许多足够刚性的上同调集可供选择，包括由 $H^1(F、G)$给出的“纯内形式”，由 Kottwitz 集 $B(G)_{\mathrm{bas}}$分类的“扩展纯内形式”，以及 Kaletha 在 [Kal16a] 中定义的“刚性内形式”；后者对应于本文记作 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$ 的刚性束的基本类 $H^1_{\mathrm{bas}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}、G)$。最后这个集合的优势在于，它满射到 $H^1(F、G_{\mathrm{ad}})$，而其他集合通常并非如此。关于这一主题的精彩讨论，我们推荐综述文章 [Kal16b]。

Kottwitz 集 $B(G)_{\mathrm{bas}}$（或更一般地说，$B(G)$）的一个优点是，它有一个明确的坦纳范畴，即 F-等晶体范畴 Isoc_F，其对象与 $\coprod_n B(\mathrm{GL}_n)$（$n \in \mathbb{N}$）一一对应。$F$-等晶体范畴自然出现于 Dieudonné 理论中，因此与局部志村簇相关。借助坦纳卡形式主义，我们因而可以将等晶体 gerbe $\mathcal{E}_{\mathrm{iso}}$（参见[LR87]，其中称之为 Dieudonné gerbe）视为由 Isoc_F 的纤维函子丛得到的伽罗瓦丛；其代数上同调为 $B(G)$。反过来，我们也可以将张量范畴 $\mathrm{Rep}(\mathcal{E}_{\mathrm{iso}})$ 与 Isoc_F 等同起来（有关这一形式主义的概述，见 [Tai25, §7.1]）。

本工作的目标是构造一个“刚性等晶体”$\mathrm{RigIsoc}_F$的坦纳范畴，该范畴可与 $\mathrm{Rep}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}})$ 典范地识别，其对象由 $\coprod_n H^1(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}，\mathrm{GL}_n)$ for$n \in \mathbb{N}$ 分类。视为伽罗瓦 gerbe 时，$\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$是由 $u(F)$ 扩张 $\Gamma_{F/F}$所得的扩张，其中 u是原乘法群 $\varprojlim_{E/F,n} \mathrm{Res}_{E/F}(\mu_n)$,，极限取遍所有有限伽罗瓦扩张 E/F和所有自然数 n。提醒读者，这个群最初在 [Kal16a] 中定义时使用的是 u' 而非 u，其中

$$u' = \varprojlim_{E/F,n} \frac{\mathrm{Res}_{E/F}(\mu_n)}{\mu_n},$$

日期：2026年1月。

但也可以使用 u，因为自然映射 $u \to u'$ 是一个同构（见注 2.12）。Kaletha 使用该群的 u'-表示，因为它也给出了 $\mathbb{R}$ 上的正确对象。由于我们只考虑 p-进域，因此只需考虑 u-表示。

本文旨在说明：由于 gerbe $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$ 可以通过一系列相对简单的操作，从带有带 $\mathbb{G}_m$ 的等晶体 gerbe 构造出来，因此在坦纳卡范畴的层面上也同样如此。下面描述我们需要考虑的操作。从带有带 $\mathbb{G}_m$ 的等晶体 gerbe 出发，我们转向子群 μ_n。在坦纳卡范畴的层面上，这是一种商操作，通过转到某个模范畴来实现。之后，我们取积，得到一个带有带 $\prod \mu_{n,\ E}$ 然后将这个 gerbe 下降，得到一个带有带 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mu_n)$ 的 gerbe。最后，我们对$\Gamma_{E/F}$取极限 $E,\ n$。只要理解这四种操作——积、模、极限和下降——我们就能为 gerbe $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$构造一个坦纳卡范畴。

定理 1.1。 存在一个坦纳卡范畴$\mathrm{RigIsoc}_F$，其对应的纤维函子丛表示$[\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}]$ [1]，且其描述如下。它的对象由元组 $(V, \tilde{\Phi}, n, E)$ 构成，其中 $n \in \mathbb{N}$，而 E/F 是一个有限伽罗瓦扩张。该元组的其他分量如下给出：

- $(V, \mathcal{D})$ 是一个 L_E 上的向量空间，其中 L_E 是 E的最大非分歧扩张的完备化；它带有 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ 分次 $\mathcal{D}$ 以及环 $R_{E/F} := L_E[\prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{Z}]$ 的作用，该作用在各分次上是可加的，并使 V 成为有限生成的 $R_{E/F}$-模；• Φ 是 $W_{L_E/F}$ 在 V 上的半线性作用，它以自然方式作用于分次 $\mathcal{D}$，并且与 $W_{L_E/F}$ 在 $R_{E/F}$ 上的作用相容（关于此作用的描述，参见*§2.4*）；• 存在 V 的 $(a_\sigma)_\sigma$分次分量的一个 L_E-基，使得 E 在 $W_{L_E/F}$ 中的弗罗贝尼乌斯的一个选定提升 $\mathfrak{f}_E$ 的 n次幂 $\mathfrak{f}_E^n$ 对 ϖ_E 的作用为 $\prod_{\sigma \in \Gamma_{E/F}} \sigma(\varpi_E)^{a_\sigma}$，，其中 ϖ_E 是一个固定选定的反一致化元。

这类两个对象之间的态射是 $W_{L_E/F}$-等变的 $R_{E/F}$-模分次态射。

在最后一节中，我们讨论坦纳范畴 $\mathrm{RigIsoc}_F$ 的结构；该范畴是半单的，并给出其简单对象的若干例子。我们指出，这种情形与 Isoc_F 有相当显著的不同，尤其是在基本对象所扮演的角色方面——在 Isoc_F（分别在 $\mathrm{RigIsoc}_F$）中，基本对象是指其分次分量集中于一个 $\mathbb{Q}$-（分别为 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-）次数的对象；它们之所以重要，是因为它们给出了 GL_n 的内形式。对于 Isoc_F，简单对象全都是基本对象，并且根据 Dieudonné–Manin 分类，由一个写成既约形式的有理斜率 $r/s \in \mathbb{Q}$ 进行分类。当 s 等于底层 L-向量空间的维数时，一个基本等晶体是简单的。

在我们的情形中，$\mathrm{Rep}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}})$ 的简单对象不一定是基本对象，而是来自 $H^1(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}},\ M)$ 中某个 M 的 GL_n 的椭圆扭曲 Levi 子群的某些基本类。回顾一下，扭曲 Levi 子群是 F-有理子群，它们在基变换后成为 Levi 子群，并且恰好是 F-有理环面的中心化子。如果一个扭曲 Levi 子群的中心的分裂秩等于 G 的分裂秩，则称其为 椭圆 ； GL_n 的椭圆扭曲 Levi 子群全都同构于 $\mathrm{Res}^{E/F}\mathrm{GL}_s$，其中 $s[E : F] = n$。这类扭曲 Levi 子群的基本类集合与满足 $\sum a_i \in_i$ 的元组 $(a_i) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathrm{Hom}_F(E,F)}$ 构成双射。

– $\frac{1}{s}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$。本文将说明如何显式构造 $\mathrm{RigIsoc}_F$ 中与每个这样的 E 和 (a_i)相对应的简单对象。更确切地说，我们证明：

定理 1.2. $\mathrm{RigIsoc}_F$中的每个简单对象的同构类都可以由一对 $(E, (a_i))$表示，其中 E/F是有限可分域扩张，而元组 (a_i) 是 $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathrm{Hom}_F(E,F)}$ 的一个元素，且对任何真子扩张 $F/K/E$，它都不是从 $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathrm{Hom}_F(K,F)}$ 中的元组膨胀而来的。对于一个固定的

[1]当然，我们总可以取坦纳范畴 $\mathrm{Rep}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}})$，并将 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$ 还原为相应的 gerbe，但这一结果的要点是给出一个更显式的坦纳范畴。

~有限扩张 $\{E\}$，它们具有相同的伽罗瓦闭包 E，并且在 $\Gamma_{\tilde{E}/F}$, 下构成一个轨道。群 $\Gamma_{\tilde{E}/F}$ 作用于所有涉及 $E' \in \{E\}$的此类对；当且仅当扩张 E_1, E_2 以这种方式相关，且这些对属于同一个 $\Gamma_{\tilde{E}/F}$-轨道时，任意两对才给出相同的同构类。

在 $\mathcal{E}_{\mathrm{iso}}$ 的情形下，$\mathrm{Rep}(\mathcal{E}_{\mathrm{iso}})$ 的显式线性代数描述有许多用途，例如定义晶体上同调、构造 p-可除群的 Dieudonné 理论，以及在 Zhu（[Zhu25]）对局部朗兰兹对应的几何化中定义层 Isoc_G。自然会想到对 $\mathrm{RigIsoc}_F$提出类似的问题：是否存在一种以这个坦纳范畴为值的自然上同调理论？这个范畴是否能带来对局部朗兰兹对应更精细的几何化？本文不探讨这些问题，但会将 $\mathrm{RigIsoc}_F$ 与 Fargues 的扩展等晶体范畴 Isoc^{e}_{F} [Far22] 联系起来，并指出该论文已迈出走向更精细几何化的步伐。

1.2. **预备记号**。 我们固定以下记号

• 我们固定 F 一个 p-进局部域。• 令 L 为 F 的最大非分歧扩张的完备化，并固定一个代数闭包 $\underline{L}$。• 令 $\underline{F}$ 为 F 在 L中的代数闭包。• 我们将考虑有限伽罗瓦扩张 E/F，并以 $L_E \subset L$ 表示 E的最大非分歧扩张的完备化。• 以 $W_{L_E/E}$ 表示由选定的 Frobenius 态射的整数次幂生成的 $\Gamma_{L_E/E}$ 的子群，该态射记为 $\mathfrak{f}_E$。• 对每个 E，固定 ϖ_E 一个 E 的反一致化元，使得若 $K/E/F$ 且 K'/E 是最大非分歧子扩张，则有 $N_{K/K'}(\varpi_K) = \varpi_E$（由 [Far22，Lemme 5.5]可知，此元存在）。• 以 E_s 表示 E 的次数为 $s \in \mathbb{N}$的非分歧扩张。

1.3. **致谢**。 作者感谢 Tasho Kaletha 和 David Schwein 提供的许多有益讨论。本研究始于两位作者在密歇根大学任职期间，当时他们均获得 NSF资助项目DMS-1840234 的支持。第一作者还获得 NSF资助项目 DMS-2502131 的部分支持。

目录

1. 引言 1.1. 动机与概述 1.2. 预备记号 1.3. 致谢 2. 坦纳范畴的构造 2.1. gerbe 的积 2.2. gerbe 的极限 2.3. 模 2.4. 下降 2.5. 具体的坦纳范畴 2.6. 过渡映射 2.7. RigIsoc 范畴$_F$3. RigIsoc 的结构$_F$3.1. Newton 映射 3.2. 与等晶体的比较 3.3. 与 Fargues 的扩展等晶体的比较 3.4. 约化为 Newton 中心化子 3.5. 简单对象的分类 参考文献

1 1 3 3 4 4 6 7 9 12 14 16 17 17 18 18 20 22 25

2. 坦纳范畴的构造

本节构造的所有坦纳范畴都建立在等晶体范畴之上，其对象是对 $(V,\ \Phi)$，其中 V是有限维的 L-向量空间，而 Φ 是一个 $\mathfrak{f}_F$-半线性自同构；其态射是 Φ-等变线性映射。对于固定的 $s\in\mathbb{N}$，还可以考虑所有 $(V,\ \Phi)$ 所构成的全子范畴；这些对象具有一个基，在该基上，$\mathfrak{f}_F^s$作用于每个基向量时分别取 ϖ_F 的某个幂（幂次可以不同）。

2.1. **gerbe 的乘积**。

定义 2.1. 固定 $s\in\mathbb{N}$。然后我们如下定义范畴 $P_{E/F,s}$。

- 对象是三元组 $(V,\ \Phi,\ \mathcal{D})$，其中 V是有限维的 L_E-向量空间，$\Phi\colon\ V\to V$是一个$\mathfrak{f}_E$-半线性自同构，而 $\mathcal{D}$ 是 V上的一个 $\prod\limits_{\Gamma_{E/F}}\frac{1}{s}\mathbb{Z}$-分次，使得子空间 $V_{(b_\sigma/s)_\sigma}$ 存在一个 L_E-基，且 Φ^s 在该基上按标量 $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma_{E/F}}\gamma(\varpi_E)^{b_\gamma}$作用。
- $P_{E/F,s}$ 中的态射是保持分次的 Φ-等变 L_E-空间态射。

引理 2.2. 范畴 $P_{E/F,s}$ 可以自然地赋予一个在 E 上的坦纳范畴结构。忘却函子 $\omega_{P_{E/F,s}}\colon\ P_{E/F,s}\to \mathrm{Vect}^{L_E}$ 是一个定义在 L_E上的纤维函子。

证明。存在一个自然函子 $\otimes\colon\ P_{E/F,s}\times P_{E/F,s}\to P_{E/F,s}$，它将 $(V、\ \Phi、\ \mathcal{D})\times(V'、\ \Phi'、\ \mathcal{D}')$ 映到三元组 $(V\otimes_{L_E}V'、\ \Phi\otimes\Phi'、\ \mathcal{D}\otimes\mathcal{D}')$，其中前两项显然，而分次 $\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}'$ 由下式给出

$$(V\otimes V')_{(b_\sigma/s)_\sigma}=\bigoplus_{(c_\sigma/s)_\sigma\in\prod\limits_{\Gamma_{E/F}}\frac{1}{s}\mathbb{Z}} V_{(c_\sigma/s)_\sigma}\otimes_{L_E}V'_{(\frac{b_\sigma-c_\sigma}{s})_\sigma}.$$

上述构造给出了定义良好的张量函子 $P_{E/F,s}$。记 $\mathbf{1}_{P_{E/F,s}}$为由向量空间 L_E 给出的对象，其带有通常的 $\mathfrak{f}_E$-作用，且集中于 $(0)_\sigma$-分次分量中。于是 $P_{E/F,s}$ 是一个刚性阿贝尔张量范畴，其单位对象为 $\mathbf{1}_{P_{E/F,s}}$。此外，$\mathbf{1}_{P_{E/F,s}}$的自同态代数可识别为 E。最后，我们注意到，函子 $\omega_{P_{E/F,s}}\colon\ P_{E/F,s}\to\mathrm{Vect}^{L_E}$ 是一个 E-线性正合张量函子，因此 $P_{E/F,s}$ 是一个由扩张 L_E中性化的、定义在 E 上的坦纳范畴。□

若 Γ 是一个连续作用于阿贝尔群 A 的概形群，且我们固定 $c\in Z^2(\Gamma,\ A)$，则有一种标准方法可构造 Γ 被 A 扩张的群扩张，本文中我们将一直使用这种方法。具体而言，将 $\mathcal{E}$ 定义为集合 $A\times\Gamma$，其群乘法定义为 $(a,\ g)\cdot(b,\ h)=(a\cdot{}^gb\cdot c(g,\ h),\ gh)$。注意，存在一个自然的集合论截面 $\Gamma\to\mathcal{E}$，它将 g 映到 $(1,\ g)$。

现在我们来识别与范畴 $P_{E/F,s}$ 对应的 gerbe。对每个 $\sigma\in\Gamma_{E/F},$，元素 $\sigma(\varpi_E)$ 确定了一个 $\Gamma_{E_s/E}$ 的余循环，它表示 $H^2(\Gamma_{E_s/E},E_s^\times)$，中的反典范类，且明确给出为 $c_\sigma(\mathfrak{f}_E^i,\ \mathfrak{f}_E^j)=1$ （若 $i+j<s$），否则为 $\sigma(\varpi_E)$。我们将考虑与 $\Gamma_{E_s/E}$ 的 2-余循环 $(c_\sigma)_\sigma$ 对应的群扩张，该余循环取值于 $\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{G}_m(E_s),$，其定义为

$$1\to\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{G}_m(E_s)\to\widetilde{\prod}_{\Gamma_{E/F}}\mathcal{E}_{c_\sigma}\to\Gamma_{E_s/E}\to 1,$$

这里，“$\widetilde{\prod}$”是指该乘积是相对于每个 $\mathcal{E}_{c_\sigma}$ 到 $\Gamma_{E_s/E}$的投影纤维化的。将这个伽罗瓦丛记为 $\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}$。

现在我们提出以下断言：

断言2。3. 范畴 $P_{E/F,s}$ 与 E 上的坦纳范畴 $Rep_{E_s}(\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}$同构).

在证明该断言之前，我们先考察后一个坦纳范畴。设 $\rho\colon\ \mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}\to\mathrm{Aut}(V)$ 是 $\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}$的一个表示，其中 E_s是有限维向量空间 V。伽罗瓦丛 $\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}$ 通过

构造而带有一个截面 $\Gamma_{E_s/F} \to \mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma},$，使我们能够将其识别为对 $((a_\sigma),\ x)$对于每个 $a_\sigma \in E_s^\times$和 $\sigma \in \Gamma_{E/F}$，其中群运算为 $x \in \Gamma_{E_s/E}$，

$$((a_\sigma)_\sigma, x)((b_\sigma)_\sigma, y) = ((a_\sigma x(b_\sigma)c_\sigma(x,y))_\sigma, xy).$$

我们的固定表示 ρ 给出了一个 $\mathfrak{f}_E$-半线性自同构 $\Phi := \rho((1_\sigma),\ \mathfrak{f}_E)$，作用于 V，且 Φ^s 的作用方式为 $\rho((\sigma(\varpi_E)),\ 1)$；另请注意，$\rho$: $\prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{G}_m(E_s) \to \mathbf{GL}_V$ 必须是一个代数同态。通过同时对角化，我们可以将 V 分解为直和 $V = \bigoplus \prod_\Gamma {}^{V_{(h_\sigma)_\sigma},\mathbb{Z}}$ 其中，对于每个 $x \in (\mathbb{G}_m)_\tau(E_s),\ (\mathbb{G}_m)_\tau$ 通过 $x \cdot v = x^{h_\tau} v$ 作用于 $V_{(h_\sigma)_\sigma}$。注意，每个子空间 $V_{(h_\sigma)}$ 都是 Φ-稳定的，并且 Φ^s 必须以标量 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \sigma(\varpi_E)^{h_\sigma}$ 作用于 $V_{(h_\sigma)}$。从 $\mathcal{E}_{(c_\sigma)}$-表示 V 到 W 的态射将所有元组 (h_σ) 的 $V_{(h_\sigma)}$ 映至 $W_{(h_\sigma)}$，且是 Φ-等变的。

现在我们证明这一断言。

证明。我们先定义一个函子 $\mathbf{Rep}_{E_s}(\mathcal{E}_{(c_\sigma)})$ 到 $P_{E/F,s}$；对于一个表示 (V, ρ)，将其映到$(V \otimes_{E_s} L_E, \Phi \otimes \mathrm{id}_{L_E}, \mathcal{D})$，其中 $\mathcal{D}$是由将 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \frac{1}{s}\mathbb{Z}$-分次 $V_{(h_\sigma/s)}$:=$V_{(h_\sigma)}$与 L_E在 E_s上的张量积所诱导的分次。从 (V, ρ)到 (W, ρ')的态射将映到通过应用函子 $- \otimes \mathrm{id}_{L_E}$所给出的态射；显然，这一构造定义了一个在 E上的坦纳范畴之间的态射。还有一个逆函子，它将元组 $(V, \Phi, \mathcal{D})$映到一个向量空间 V'所给出的表示：该向量空间由 $V_{(h_\sigma/s)}$（对所有元组而言）的任意一组选定的 L_E-基所张成，且 Φ^s 通过 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \sigma(\varpi_E)^{h_\sigma}$ 作用。注意，这个向量空间不依赖于基的选取：事实上，给定任意一个 v，使得 Φ^s 通过 λ: $= \prod \sigma(\varpi_E)^{h_\sigma}$作用，并为相应的分次分量选取基 (e_i)，记 $v = \sum a_i e_i$为$a_i \in L_E$，则有

$$\sum (a_i \lambda) e_i = \sum (\mathfrak{f}_E^s(a_i)\lambda) e_i,$$

这意味着对于所有 i，都有 $\mathfrak{f}_E^s(a_i) = a_i\ \ a_i \in E_s$。

映射 ρ定义为：将 $((1_\sigma),\ \rho)$映到 Φ，并将 $(\mathbb{G}_m)_\tau$映到 V'上的线性算子；该算子由下式确定：对于分次分量 $V_{(h_\sigma/s)}$的基的 E_s-张成中的任意 v，都有 $x \cdot v = x^{h_\sigma} v$。这是一个良定义的表示，因为对于任意 $(a_\sigma) \in \prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{G}_m(E_s),$，映射 $\Phi \circ (a_\sigma) \circ \Phi^{-1}$ 和 $\mathfrak{f}_E(a_\sigma)\mathfrak{f}_E^{-1}$ 都是 L_E-线性的，并且在 $V'_{(h_\sigma/s)}$中的向量元素 v上作用如下：

$$\mathfrak{f}_E(a_\sigma)\mathfrak{f}_E^{-1} v = ((\mathfrak{f}_E(a_\sigma)), 1) \cdot v = (\prod_{\Gamma_{E/F}} \mathfrak{f}_E(a_\sigma)^{h_\sigma}) v,$$

并且我们还有（利用 $V'_{(h_\sigma)}$的 Φ-稳定性）：

$$(\Phi \circ (a_\sigma) \circ \Phi^{-1}) v = \Phi((a_\sigma) \cdot (\Phi^{-1}(v))) = \Phi(\prod a_\sigma^{h_\sigma} \Phi^{-1}(v)) = (\prod \mathfrak{f}_E(a_\sigma)^{h_\sigma}) v,$$

如所需。这些函子互为逆函子，从而得到所需的等价。 □

推论 2.4。对应于坦纳范畴 $P_{E/F,s}$ 的 ***Spec***$(E)_{fpqc}$ 上的 ***gerbe***，与 ***gerbe*** 的乘积（作为 ***Spec***$(E)_{fpqc}$ 上的纤维化范畴） $\prod_{\sigma \in \Gamma_{E/F}} \mathcal{E}_{c_\sigma}$同构。特别地，它由 E-群概形 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{G}_m$ 带化，并对应于 $H^2(\Gamma_{L_E/E}, \prod_{\Gamma_{E/F}} L_E^\times)$中的反典范类，该类对应于元素 $(-1/s)_\sigma \in \prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

上述构造所做的，是给出一个从 $\mathcal{E}_{P_{E/F,s}}$ 到 $\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}$的 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{G}_m$-gerbe同构；注意，由于 $H^1(\Gamma_{L_E/E}, \prod_{\Gamma_{E/F}} L_E^\times)$ 消失，该同构在 $\prod_{\Gamma_{E/F}} L_E^\times$, 中的某个元素作用下的共轭意义下唯一，而我们稍后将看到，这不会影响上同调。

2.2. **gerbe 的极限**。对于 $s \mid s'$，我们有一个从$\iota_{s,s'}$到$P_{E/F,s'}$,的范畴忠实满嵌入 $P_{E/F,s}$，它将三元组 $(V, \Phi, \mathcal{D})$ 映射到三元组 $(V, \Phi, \mathcal{D}_{s'/s})$,，其中 $\mathcal{D}_{s'/s}$ 是由 $V_{(b_\sigma/s')} = V_{([b_\sigma/(s'/s)]/s)}$ 给出的 V的 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \frac{1}{s'}\mathbb{Z}$-分次: 若对所有 σ， s'/s 整除 b_σ，则取该值，否则为零。

我们将范畴 $P_{E/F}$ 定义为对所有正整数 s 取直极限 $\varinjlim_s P_{E/F,s}$ （范畴的直极限，含义显然）。明确地说，对象 $(V, \Phi, \mathcal{D}, s)$ 和 $(V', \Phi', \mathcal{D}', s')$之间的态射，可以与范畴 $P_{E/F,ss'}$中 $\iota_{s,ss'}(V, \Phi, \mathcal{D}, s)$ 和 $\iota_{s',ss'}(V', \Phi', \mathcal{D}', s')$ 之间的态射对应。

注意，如果将子空间 $V_{(b_\sigma c/sc)}$, 视为 $P_{E/F,sc}$, 的对象，那么尽管先验地说，它只有一个基，在该基上$\mathfrak{f}_E^{sc}$ 按 $\prod_{\sigma\in\Gamma_{E/F}} \sigma(\varpi_E)^{b_\sigma c}$, 作用，但还可以进一步说明：它具有一个 L_E-基，在该基上 $\mathfrak{f}_E^{s}$ 按 $\prod_{\sigma\in\Gamma_{E/F}} \sigma(\varpi_E)^{b_\sigma}$, 作用；这由 Φ-L_E 空间的一般理论（参见 [Kot85，第11]页）可知。这表明，嵌入 $\iota_{s,s'}(P_{E/F,s})$ 可以描述为所有这样的元组：其唯一非零的分次分量的指标均可写成 $\binom{b_\sigma(s'/s)}{s(s'/s)}_{\sigma\circ}$ 与 $P_{E/F,s}$ 相对应的 gerbe 与 $\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}$ 的识别，对于变化的 s是相容的，前提是我们相容地选择截面（这总是可能的）；因此我们看到，坦纳范畴 $P_{E/F}$ 由$\prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{D}(L_E)$ 带化（其中 $\mathbb{D}$ 是特征群为 $\mathbb{Q}$的原环面），并且对应于 $H^2(\Gamma_{L_E/E}, \prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{D}(L_E))$ 中的反典范类；该反典范类由有限反典范类的逆极限给出（对于 $s \mid s'$，这些过渡映射由乘以 s'/s 的映射 $\frac{1}{s'}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \frac{1}{s}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$给出）。

对于 $s \mid s'$，值得研究与扩张映射$p_{s',\ s}$: $\mathcal{E}_{P_{E/F,s'}} \to \mathcal{E}_{P_{E/F,s}}$相对应的带上的过渡映射。首先，我们需要说明这个扩张映射是什么：注意，通过对 gerbe $\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}$ 到 F进行基变换，我们得到扩张

$$1 \to \prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{G}_m(\overline{F}) \to \mathcal{E}_{(c'_\sigma)_\sigma} \to \Gamma_{\overline{F}/E} \to 1,$$

其中每个 c'_σ 都表示膨胀的反典范类 $\Gamma^2_{F/E} \to \Gamma^2_{E_s/E} \xrightarrow{c_{\sigma,s}} \prod_{\Gamma_{F/E}} E_s^\times$——我们可以对 s'进行完全相同的操作。于是得到一个群扩张态射

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{G}_m(\overline{F}) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{(c'_{\sigma,s'})_\sigma} & \longrightarrow & \Gamma_{\overline{F}/E} \to 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle s'/s} & & \downarrow & & \| \\ 1 & \longrightarrow & \prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{G}_m(\overline{F}) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{(c'_{\sigma,s})_\sigma} & \longrightarrow & \Gamma_{\overline{F}/E} \to 1, \end{array}$$

并得到一个坦纳范畴的交换方块

$$\begin{array}{ccc} P_{E/F,s',\overline{L}} & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{\overline{L}}(\mathcal{E}_{(c'_{\sigma,s'})_\sigma}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ P_{E/F,s,\overline{L}} & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{\overline{L}}(\mathcal{E}_{(c'_{\sigma,s})_\sigma}), \end{array}$$

其中，左侧映射是上文描述的过渡映射，右侧映射是由上述扩张态射诱导的映射，而水平映射则由上文描述的坦纳范畴的等价诱导。

用 $P_{E/F,s,L}$ 表示具有 W_E-半线性作用的 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \frac{1}{s}\mathbb{Z}$-分次有限维 L-向量空间 V范畴，其中每个 $V_{(a_\sigma/s)}$ 都是 W_E-稳定的，且 $(V_{(a_\sigma/s)})^{\Gamma_{L/L_E}}$ 有一个 L_E-基（这意味着它是 $V_{(a_\sigma/s)}$的一个 L-基），在该基上 $\mathfrak{f}_E^{s}$以标量 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \sigma(\varpi_E)^{a_\sigma}$作用。用 $\mathrm{Rep}^L(\mathcal{E}_{(c'_{\sigma,\ s})})$表示 $\mathcal{E}_{(c'_{\sigma,\ s})}$（在 L上）的表示的坦纳范畴 $(V,\ \rho)$。经过一些初等修改，上一小节中的等价关系对这两个范畴仍然成立。我们来验证:

从对象 $(V,\ \Phi,\ \mathcal{D})$出发，先向右再向上，得到表示 $(V,\ \rho)$，其中 ρ将$\mathfrak{f}_E$ 映到 Φ，相应的 E-态射 $\prod \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_V$ 由其在子空间$V_{(h_\sigma/s)} \subseteq V$上的作用确定，具体为

$$(a_\sigma)\cdot v = \prod a_\sigma^{h_\sigma(s'/s)} v.$$

另一方面，先向上再向右得到表示 (V,ρ')，其中 ρ' 将 $\mathfrak{f}_E$ 映到 Φ，其E-态射由对 $V_{(h'_\sigma/s')}$ 作用.....所确定

$$(a_\sigma)\cdot v = \prod a_\sigma^{h'_\sigma} v.$$

现在，由于根据我们构造的过渡函子，对所有 σ都有 $h'_\sigma = h_\sigma(s'/s)$，结论便得证。

推论 2.5. 坦纳范畴之间的过渡态射 $P_{E/F,s} \to P_{E/F,s'}$ 在带上给出 s'/s次幂态射（通过上述推论 *2.4* 中的识别，并使用相容的截面）。

2.3. **模**。 现在，令 $R_{E/F}$表示 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{Z}$-分次 L_E-代数

$$\bigoplus_{(b_\tau)_\tau \in \prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{Z}} (L_E)_{(b_\tau)_\tau},$$

其加法按分量定义，乘法则由对所有 $\ell,\ell' \in L_E$都有 $\ell_{(b_\tau)_\tau}\cdot \ell'_{(c_\tau)_\tau} = (\ell\cdot\ell')_{(b_\tau+c_\tau)_\tau}$ 所确定。此环还配备一个 $\mathfrak{f}_E$-半线性作用，记作 $\Phi_{R_{E/F}}$,，它由半线性条件和恒等式
$\Phi_{R_{E/F}}(1_{(b_\sigma)}) = \prod_{\gamma\in\Gamma_{E/F}} \gamma(\varpi_E)^{b_\gamma} 1_{(b_\sigma)}$ 确定。

定义 2.6. 对于一个正整数 s，我们定义范畴 $RP_{E/F,s}$，其对象由以下元组$(V,\ \Phi,\ \mathcal{D})$组成：

- 一个（不一定有限维的） L_E-向量空间 V，配备一个 $R_{E/F}$-作用，使其作为 $R_{E/F}$-模有限生成，
- 一个 $\mathfrak{f}_E$-半线性同构 Φ，
- 以及一个 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \frac{1}{s}\mathbb{Z}$-分次 $\mathcal{D}$，使得 $V_{(a_\sigma/s)}$ 有一个 L_E-基，且 Φ^s 在其上按标量$\prod_{\sigma\in\Gamma_{E/F}} \sigma(\varpi_E)^{a_\sigma}$作用。

此外，我们要求 $R_{E/F}$-作用与 Φ-作用相容，即对于所有$v\in V$和 $r\in R$，都有 $\Phi(r\cdot v) = \Phi_{R_{E/F}}(r)\cdot\Phi(v)$。注意，这个最后的条件意味着

$$1_{(b_\sigma)}\cdot V_{(a_\sigma/s)} \subseteq V_{(\frac{a_\sigma+sb_\sigma}{s})}.$$

$RP_{E/F,s}$ 中的态射是保持分次的 $R_{E/F}$-模之间的 Φ-等变态射。注意， $RP_{E/F,s}$ 是一个在 E 上的刚性阿贝尔张量范畴，其单位对象为 $R_{E/F}$（带有典范的$R_{E/F}$-模结构，且 $\Phi = \Phi_{R_{E/F}}$）。

现在我们为这个范畴定义一个纤维函子。首先注意，存在一个典范的满增广映射 $R_{E/F}\to L_E$，它将每个 $1_{(b_\sigma)}$ 映到 $\mathbf{1}$，其核记为 I。注意，对于 $RP_{E/F,s},$中的对象$(V,\Phi,\mathcal{D})$， V是一个有限生成自由模，因而是平坦的 $R_{E/F}$-模。因此，我们有 L_E-向量空间的等式 $V\otimes_R R_{E/F}/I = V/IV$。我们定义函子 $\omega_{RP_{E/F,s}}$： $RP_{E/F,s}\to \mathsf{Vect}^{L_E}$，如下

$$(V,\Phi,\mathcal{D}) \mapsto V/IV.$$

注意， IV 恰好是自然的 L_E-线性满射 $V \to \bigoplus_{(0)\leqslant(a_\sigma/s)<(1)} V_{(a_\sigma/s)}$的核，该满射在每个 $V_{([a_\sigma+sb_\sigma]/s)}$ 上定义为乘以 $1_{(-b_\sigma)}$。这定义了一个 L_E-线性张量函子。

引理 2.7。 上述函子是一个纤维函子；也就是说，它是忠实且正合的。

证明。 我们先证明忠实性。设 f 和 g 是从 V 到 W 的两个态射（为简洁起见，我们在记号中省略其他结构），并假设它们在此函子下的像相同，再设 $V_{(b_\sigma/s)}$ 是 V的一个固定分次分量。由于这些范畴是可加的，我们可以假设 g 等于零。对于任意 $v \in V_{(b_\sigma/s)}$,，我们知道 $f(v) \in W_{(b_\sigma/s)}$,，但同时也有 $f(v) \in IW$，因此观察到对于所有元组 (b_σ/s)， $IW \cap W_{(b_\sigma/s)} = 0$，即可得出结论。

现在证明正合性。根据构造，该函子显然是右正合的，因此我们只需证明它保持单射。为此，设 $v \in V$满足：对于单射 f，有 $f(v) \in IW$。将其写成

$$v = \sum_{(a_\sigma/s)} v_{(a_\sigma/s)}$$

分次分量的形式，我们注意到，由于 f是 $R_{E/F}$-线性的，对于所有 (b_σ)，都有

$$f(v_{([a_\sigma+sb_\sigma]/s)}) = 1_{(b_\sigma)} \cdot f(1_{(-b_\sigma)} \cdot v_{([a_\sigma+sb_\sigma]/s)}).$$

由此可得

$$f(v) = \sum_{(0)\leqslant(a_\sigma/s)<(1)} \sum_{(b_\sigma)} 1_{(b_\sigma)} \cdot f(1_{(-b_\sigma)} \cdot v_{([a_\sigma+sb_\sigma]/s)}).$$

要使此表达式属于 IW，必须对固定的 $(0) \leqslant (a_\sigma/s) < (1)$, 有

$$\sum_{(b_\sigma)\neq(0)} f(1_{(-b_\sigma)} \cdot v_{([a_\sigma+sb_\sigma]/s)}) = -f(v_{(a_\sigma/s)})$$

位于空间 $W_{(a_\sigma/s)}$ 中。由于 f是单射，这意味着

$$\sum_{(b_\sigma)\neq(0)} 1_{(-b_\sigma)} \cdot v_{([a_\sigma+sb_\sigma]/s)} = -v_{(a_\sigma/s)}$$

在 $V_{(a_\sigma/s)}$，中，从而推出 $v \in IV$。 □

由上述引理 2.7 可知， $RP_{E/F,s}$ 是一个定义在 E上的坦纳范畴。对于 $s \mid s'$，注意到嵌入函子 $\iota_{s,\ s'}$ 自然延拓为一个函子（仍记作 $\iota_{s,\ s'}$），它从 $RP_{E/F,s}$ 到 $RP_{E/F,s'}$,，其定义相同（$\iota_{s,\ s'}(X)$ 的 $R_{E/F}$-模结构与 X所对应的结构相同）。与前面一样，这些范畴的直极限记作 $RP_{E/F}$.

现在我们要研究 $RP_{E/F,s}$ （从而也研究 $RP_{E/F}$）的带。存在一个“标量扩张”函子 q: $P_{E/F,s} \to RP_{E/F,s}$，它在对象上的定义为 $V \mapsto R_{E/F} \otimes_{L_E} V$，在态射上的定义为 $f \mapsto \mathrm{id}_{R_{E/F}} \otimes f$，这是一个 L_E-线性张量函子。回顾一下，坦纳范畴 P与 Q 之间的正合张量函子称为商函子，如果 Q 中的每个对象都是该函子像中某个对象的子商。

命题 2.8。 函子 q: $P_{E/F,s} \to RP_{E/F,s}$ 是一个商函子。

证明。 由于 $R_{E/F}$是一个平坦的 L_E-模，函子 q 显然是正合的。为证明商函子的另一个条件，设 $(V, \Phi, \mathcal{D})$ 是 $RP_{E/F,s}$,的一个对象，并设 $\{e_i\}_{i=1}^n$是 V作为一个$R_{E/F}$-模的一组生成元。不失一般性，我们可以假设这些生成元满足如下性质： $e_i \in V_{(a_\sigma)_\sigma}$ （取决于 i），且 Φ^s 以适当的方式作用于其上。取 $\{e_i\}$, $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$的 L_E-张成，并赋予显然的继承分次和 Φ-作用，即可得到 $P_{E/F,s}$ 的一个对象；将此对象记为 $(V, \Phi, \mathcal{D})$。于是 $R_{E/F} \otimes_{L_E} V$是一个$\tilde{}$自由 $R_{E/F}$-模，其基为 $\{1 \otimes e_i\}$；并且存在一个商映射 $R_{E/F} \otimes_{L_E} V \to V$，将 $1 \otimes e_i$ 映至e_i。这是 $RP_{E/F,s}$, 中的一个态射，从而得到所需结论。□

按照 [Mil07, §2], 的记号，回忆一下， $P^q_{E/F,s}$ 表示 $P_{E/F,s}$ 中所有这样的对象：它们在 q 下的像同构于 $RP_{E/F,s}$, 中单位对象的若干份直和； $RP_{E/F,s}$, 是 E 上的一个满坦纳卡范畴。注意， $P_{E/F,s}$ 中的对象 $(V,\ \Phi,\ \mathcal{D})$ 属于 $P^q_{E/F,s}$，当且仅当其非零分次分量 $V_{(a_\sigma/s)}$ 满足每个 a_σ/s 都是整数。根据 [Mil07, §2], ，与 $RP_{E/F,s}$ $P_{E/F,s}$ 相对应的 gerbe 的带，典范地同构于纤维函子的所有自同构

它们在 $P^q_{E/F,s}$ 上的限制均为平凡的。为了研究带如何作用于纤维函子在这些对象上的限制，最简单的做法是使用上一小节中将 $P_{E/F,s}$ 与 $\mathrm{Rep}_{L_E}(\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma})$ 识别起来的结果。我们将不使用 $P_{E/F,s},$，而改用 $P_{E/F,s,L},$；它与 $P_{E/F,s}$ 是同一个范畴，只是将 L_E 向量空间替换为 L 向量空间，并将半线性 $\mathfrak{f}_E$ 作用替换为半线性 $W_{F/E}$ 作用；后者在分次分量的 L 基上以相同方式作用（限制到 $\Gamma_{L_E/E}$ 之后）。

令 $(x_\sigma)\in\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{G}_m(F)$，作用于 $\mathrm{Rep}^F(\mathcal{E}_{(c_\sigma),F})$ 的典范 F纤维函子：对于固定的表示 V，它将 $\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{Z}$分次分量 $V_{(h_\sigma)}$ 映射到自身，并将 v 送至 $(\prod x_\sigma^{h_\sigma})v$。在上述等价下，子范畴 $P^q_{E/F,s,F}$ 的像是所有满足以下条件的表示：其非零分次分量中的每个 h_σ 都能被 s整除。这两点表明，固定 $P^q_{E/F,s,F}$ 的像的 $\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{G}_m(F)$ 子群恰好是 $\prod_{\Gamma_{E/F}}\mu_s(F),$。这意味着（由于我们知道，带是 $\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}$的带的一个$E$子群概形，而该带为 $\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{G}_m$)），与坦纳范畴 $RP_{E/F,s}$ 相对应的、位于 E 上的 gerbe 的带可以识别为 E群概形 $\prod_{\Gamma_{E/F}}\mu_s$。

2.4. 下降。 我们希望将坦纳范畴 $RP_{E/F,s}$ 下降为定义在 F上的坦纳范畴。第一步是在环 $R_{E/F}$上定义规范的 $\Gamma_{L_E/F}$-作用。

注意到 L_E/L 是一个全分歧扩张，并且序列：

$$1\to\Gamma_{L_E/L}\to W_{L_E/F}\to W_{L/F}\to 1,$$

被 $W_{L/F}$中 Frobenius 元素的任意提升所分裂。固定这样一个分裂，从而固定一个提升，将其记为$\mathfrak{f}_F$。限制给出一个单射 $\Gamma_{L_E/L}\hookrightarrow\Gamma_{E/F}$。我们将此单射的像记为 Ω_E。

现在我们定义 $W_{L_E/F}$在 $R_{E/F}$上的 $\Gamma_{L_E/F}$-半线性作用，并将其记为 $\Phi_{R_{E/F}}$。我们定义 $\Gamma_{L_E/L}$的作用，使得 $\gamma(\ell_{(b_\sigma)_\sigma})=\gamma(\ell)_{(b_{\gamma^{-1}\sigma})_\sigma}$，其中 γ是 γ到 $\Gamma_{E/F}$的投影。我们定义 $\mathfrak{f}_F$的作用，使得

$$\mathfrak{f}_F(\ell_{(b_\sigma)_\sigma})=(\mathfrak{f}_F(\ell)\prod_{\sigma'\in\Omega_E}\sigma'(\varpi_E)^{b_{\overline{\mathfrak{f}_F}^{-1}\sigma'}})_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F}^{-1}\sigma})_\sigma}.$$

特别是，这意味着

$$\mathfrak{f}_F^{-1}(\ell_{(b_\sigma)_\sigma})=(\mathfrak{f}_F^{-1}(\ell)\prod_{\sigma'\in\Omega_E}\mathfrak{f}_F^{-1}\sigma'(\varpi_E)^{-b_{\sigma'}})_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F}\sigma})_\sigma},$$

只需验证 $\mathfrak{f}_F^{-1}\circ\mathfrak{f}_F=\mathrm{id}$ 即可轻松证明这一点。

我们需要验证这确实诱导了 $W_{L_E/F}$ 的一个作用。为此，我们需要验证对于$\gamma\in\Gamma_{L_E/L},$，$\mathfrak{f}_F\circ\gamma\circ\mathfrak{f}_F^{-1}\in\Gamma_{L_E/L}$ 的作用与复合映射所诱导的作用一致。由于这两种作用都以正确的方式呈半线性，我们只需了解它们在 $1_{(b_\sigma)_\sigma}$ 上的作用。我们有

$$\begin{aligned}(\mathfrak{f}_F\circ\gamma\circ\mathfrak{f}_F^{-1})(1_{(b_\sigma)_\sigma})&=(\mathfrak{f}_F\circ\gamma)(\prod_{\sigma'\in\Omega_E}\mathfrak{f}_F^{-1}\sigma'(\varpi_E)^{-b_{\sigma'}})_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F}\sigma})_\sigma})\\&=\mathfrak{f}_F(\prod_{\sigma'\in\Omega_E}\gamma\mathfrak{f}_F^{-1}\sigma'(\varpi_E)^{-b_{\sigma'}})_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F\gamma^{-1}}\sigma})_\sigma})\\&=(\prod_{\sigma'\in\Omega_E}\mathfrak{f}_F\gamma\mathfrak{f}_F^{-1}\sigma'(\varpi_E)^{-b_{\sigma'}}\prod_{\sigma''\in\Omega_E}\sigma''(\varpi_E)^{b_{\overline{\mathfrak{f}_F\gamma^{-1}\mathfrak{f}_F^{-1}}\sigma''}}))_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F\gamma^{-1}\mathfrak{f}_F^{-1}}\sigma})_\sigma}\\&=1_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F\gamma^{-1}\mathfrak{f}_F^{-1}}\sigma})_\sigma},\end{aligned}$$

如所需。

该作用不依赖于 $\mathfrak{f}_F$ 的选择。事实上，任何其他提升都具有 $\gamma\mathfrak{f}_F$ 的形式，其中 $\gamma \in \Gamma_{L_E/L}$，并且我们有

$$\gamma\mathfrak{f}_F(\ell_{(b_\sigma)_\sigma}) = \gamma\mathfrak{f}_F(\ell) \prod_{\sigma' \in \Omega_E} \gamma\sigma'(\varpi_E)^{b_{\overline{\mathfrak{f}_F^{-1}\sigma'}}}_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F^{-1}\gamma^{-1}\sigma}})_\sigma} = \gamma\mathfrak{f}_F(\ell) \prod_{\sigma' \in \Omega_E} \sigma'(\varpi_E)^{b_{\overline{\mathfrak{f}_F^{-1}\gamma^{-1}\sigma'}}}_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F^{-1}\gamma^{-1}\sigma}})_\sigma},$$

这与我们若选择它作为弗罗贝尼乌斯的提升时，$\gamma\mathfrak{f}_F$ 所具有的作用相同 .

最后，我们需要计算 $\mathfrak{f}_E$ $W_{L_E/E} \subset W_{L_E/F}$的典范生成元的作用。我们可以写成$\mathfrak{f}_E = \gamma\mathfrak{f}_F^{f(E/F)}$，其中某个 $\gamma \in \Gamma_{L_E/L}$。于是

$$\begin{aligned}
\gamma\mathfrak{f}_F^{f(E/F)}(1_{(b_\sigma)_\sigma}) &= \gamma \left(\prod_{k=1}^{f(E/F)} \prod_{\sigma' \in \Omega_E} \mathfrak{f}_F^{f(E/F)-k} \sigma'(\varpi_E)^{b_{\overline{\mathfrak{f}_F^{-k}\sigma}}}_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F^{-f(E/F)}\sigma}})_\sigma} \right) \\
&= \gamma \left(\prod_{k=1}^{f(E/F)} \prod_{\sigma' \in \mathfrak{f}_F^{-k}(\Omega_E)} \mathfrak{f}_F^{f(E/F)} \sigma'(\varpi_E)^{b_{\sigma'}}_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F^{-f(E/F)}\sigma'}})_\sigma} \right) \\
&= \gamma \left(\prod_{\sigma' \in \Gamma_{E/F}} \mathfrak{f}_F^{f(E/F)} \sigma'(\varpi_E)^{b_{\sigma'}}_{(b_{\overline{\mathfrak{f}_F^{-f(E/F)}\sigma}})_\sigma} \right) = \prod_{\sigma' \in \Gamma_{E/F}} \sigma'(\varpi_E)^{b_{\sigma'}}_{(b_\sigma)_\sigma}.
\end{aligned}$$

有了这个作用，我们就可以为范畴 $RP_{E/F,s}$定义下降数据。固定一个截面 $s_E\colon \Gamma_{E/F} \to W_{L_E/F},$，它确定了一个取值于 $\mathbb{Z}$的 $\Gamma_{E/F}$的 2-余循环，记作 c_E。对于固定的 $\gamma \in \Gamma_{E/F},$，我们定义函子 β_γ: $RP_{E/F,s} \to RP_{E/F,s}$，将三元组 $(V, \Phi, \mathcal{D})$ 映到三元组$(\beta_\gamma(V), \beta_\gamma(\Phi), \beta_\gamma(\mathcal{D}))$，使得

- 底层向量空间 $\beta_\gamma(V)$ 定义为 $V \otimes_{R_{E/F}} R_{E/F}$，其中映射 $R_{E/F} \to R_{E/F}$由 $s_E(\gamma)$的作用给出，
- 自同态 $\beta_\gamma(\Phi)$ 定义为 $\Phi \otimes (s_E(\gamma) \circ \Phi_R)$，• $\beta_\gamma(V)$ 上的分次 $\beta_\gamma(\mathcal{D})$ 满足 $v_{(a_{\gamma\sigma}/s)_\sigma} \otimes r_{(b_\sigma)_\sigma}$ 属于第 $((a_\sigma + sb_\sigma)/s)_\sigma$ 分次分量。

态射 $f\colon (V, \Phi, \mathcal{D}) \to (V', \Phi', \mathcal{D}')$ 在 β_γ的作用下映射为 $\beta_\gamma(f) := f \otimes \mathrm{id}$。该构造给出了从 $RP_{E/F,s}$ 到其自身的一个 γ-半线性张量等价。例如，对于 $e \in E$，我们注意到

$$\beta_\gamma(e)(v \otimes r) = ev \otimes r = v \otimes \gamma(e)r = \gamma(e)(v \otimes r).$$

为了完成下降数据的定义，我们需要为所有的对 (γ', γ) 提供一个函子同构 $\mu_{\gamma',\gamma}\colon \beta_{\gamma'\gamma} \to \beta_{\gamma'} \circ \beta_\gamma$，并且该同构满足余循环条件（稍后将对此作更详细的说明）。对于任意对象 $(V, \Phi, \mathcal{D}) = X \in RP_{E/F,s}$，态射$\mu_{\gamma',\gamma}(X)$ 将通过以下映射定义

$$\mu_{\gamma',\gamma}(X) : v \otimes r \mapsto \Phi^{-c_E(\gamma',\gamma)}(v) \otimes s_E(\gamma'\gamma')(r).$$

我们检验这是 $RP_{E/F,s}$中的一个良定义态射。首先注意，对于 $v \in V$和 $r \in R_{E/F}$,，有 $\mu_{\gamma',\gamma}(X)(v \otimes r) = \mu_{\gamma',\gamma}(rv \otimes 1)$。事实上，

$$\begin{aligned}
\mu_{\gamma',\gamma}(X)(v \otimes r) &= \Phi^{-c_E(\gamma',\gamma)}(v) \otimes s_E(\gamma'\gamma)(r) = \Phi^{-c_E(\gamma',\gamma)}(v) \otimes s_E(\gamma')s_E(\gamma)\Phi^{-c_E(\gamma',\gamma)}(r) \\
&= \Phi^{-c_E(\gamma',\gamma)}(rv) \otimes 1 = \mu_{\gamma'\gamma}(X)(rv \otimes 1).
\end{aligned}$$

现在，显然 $\mu_{\gamma',\gamma}(X)$ 是 Φ-等变的并保持分次，因此只需证明 $R_{E/F}$-线性。对于任意 $v \in V$和 $r \in R_{E/F},$，我们计算得

$$\mu_{\gamma',\gamma}(X)(v \otimes r) = \Phi^{-c_E(\gamma',\gamma)}(v) \otimes s_E(\gamma', \gamma)(r) = r \cdot \mu_{\gamma'\gamma}(v \otimes 1).$$

我们声称，函子 $\mu_{\gamma',\,\gamma}$ 的同构族满足“余循环条件”。具体而言，对于 γ''，γ'，$\gamma\in\Gamma_{E/F},$，我们需要验证下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc}
\beta_{\gamma''\gamma'\gamma}(V) & \xrightarrow{(\mu_{\gamma'',\gamma'\gamma})_V} & \beta_{\gamma''}(\beta_{\gamma'\gamma}(V)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (\mu_{\gamma''\gamma',\gamma})_V} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta_{\gamma''}((\mu_{\gamma',\gamma})_V)} \\
\beta_{\gamma''\gamma'}(\beta_\gamma(V)) & \xrightarrow{(\mu_{\gamma'',\gamma'})_{\beta_\gamma(V)}} & \beta_{\gamma''}(\beta_{\gamma'}(\beta_\gamma(V))).
\end{array}$$

上面的空间中的任意元素都可以写成 $v\otimes 1$ 的形式。于是我们注意到，对于这种形式的元素，上方的箭头由 $\Phi^{-c_E(\gamma'',\,\gamma'\gamma)}$ 给出，右方的箭头由 $\Phi^{-c_E(\gamma',\,\gamma)}$ 给出，左方的箭头由 $\Phi^{-c_E(\gamma''\gamma',\,\gamma)}$ 给出，而下方的箭头由 $\Phi^{-c_E(\gamma'',\,\gamma')}$ 给出。所需的交换性便由 c_E 是一个 2-余循环这一事实推出（注意到 $\Gamma_{E/F}$ 在 $\mathbb{Z}=W_{L_E/E}$ 上的作用是平凡的）。

有了这一设定，我们得到一个在 F 上的坦纳范畴，记作 $R\mathcal{W}_{E/F,s}$。具体而言，$R\mathcal{W}_{E/F,s}$ 的对象是形如 $(X,\ f_\gamma$ 的元组：$X\to\beta_\gamma(X))$，其中 X 是 $RP_{E/F,s}$ 的一个对象，而 f_γ 是一个满足以下条件的态射：

$$\mu_{\gamma',\gamma}(X)\circ f_{\gamma'\gamma}=\beta_{\gamma'}(f_\gamma)\circ f_{\gamma'}.$$

$R\mathcal{W}_{E/F,s}$ 中的态射是 $RP_{E/F,s}$ 中的态射，且与 f_γ 映射相容。$R\mathcal{W}_{E/F,s}$的带是一个 F-群概形，其到 E 的基变换为 $\prod_{\Gamma_{E/F}}\mu_s$。事实上，我们有如下断言。

断言2.9。与 $R\mathcal{W}_{E/F,s}$ 相关联的*gerbe*的带是限制$_{E/F}(\mu_s)$。

为便于验证这一断言，我们注意到，可以在范畴 $P_{E/F,s}$ 上定义一个类似的下降数据，其定义方式完全相同，只是不考虑任何 $R_{E/F}$-模结构（例如，$\beta_\gamma(V)=V\otimes_{L_E}L_E$ 中映射 $L_E\to L_E$ 是由 $s_E(\gamma)$ 给出的伽罗瓦作用）。这给出了一个定义在 F上的坦纳范畴 $\mathcal{W}_{E/F,s}$。此外，商函子 q 可扩张为一个带有下降数据的坦纳范畴之间的态射 $\tilde{q}$；也就是说，对于对象 $(X,\ f_\gamma)$ 属于 $\mathcal{W}_{E/F,s},$，对象 $(q(X),$ $\tilde{q}(f_\gamma))$属于 $R\mathcal{W}_{E/F,s}$。映射 $\tilde{q}(f_\gamma)\colon V\otimes R_{E/F}\to V\otimes R_{E/F}\otimes_{R_{E/F}}R_{E/F}=\beta_\gamma(V\otimes R_{E/F})$ 定义为 $v\otimes r\mapsto f_\gamma(v)\otimes s_E(\gamma)^{-1}(r)\otimes 1$。该映射是 $R_{E/F}$-线性的，因为对于 $r\in R_{E/F}$和 $v\in V$，我们有

$$v\otimes r\mapsto f_\gamma(v)\otimes s_E(\gamma)^{-1}(r)\otimes 1=f_\gamma(v)\otimes 1\otimes r=r\cdot q(f_\gamma)(v\otimes 1).$$

这个 q 的扩张仍是一个商函子，与 §2.3 中相同的论证表明，$R\mathcal{W}_{E/F,s}$ 的带由 F群概形的 s-挠子群概形给出，而该群概形给出了 $\mathcal{W}_{E/F,s}$的带。因此，只需证明后一个带是 F群概形 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)$。

由于我们已通过 §2.1 中构造的、从 E 上的坦纳范畴到范畴 $\mathrm{Rep}_{E_s}(\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma})$ 的同构，将 $P_{E/F,s}$ 的带识别为 F群概形 $\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{G}_m$，因此我们将在后一个范畴中进行讨论。用这一（$E$-线性）识别共轭函子 β_γ，便在 $\mathrm{Rep}_{E_s}(\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma})$上得到下降数据。对于 $\gamma\in\Gamma_{E/F},$，它将表示 $(V,\ \rho)$ 映为表示 $(V',\ \rho')$，其中 $V'=V\otimes_{E_s}E_s$ 满足映射 $E_s\to E_s$ 由 $s_E(\gamma)$ 在 E_s 和$V'_{(h_\sigma)_\sigma}=V_{(h_{\gamma\sigma})_\sigma}$上的作用给出。我们定义 ρ'，使得元素 $((1),\ \mathfrak{f}_E)$ 的作用为 $\Phi\otimes\mathfrak{f}_E$，其中右侧的作用是伽罗瓦作用，而环面的元素 $(a_\sigma)_\sigma$ 以标量 $\prod_{\sigma\in\Gamma_{E/F}}a_\sigma^{h_{\gamma^{-1}\sigma}}$作用于 $V_{(h_\sigma)}$。有了 $\mathrm{Rep}_{E_s}(\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma})$ 上的下降函子 β'_γ，我们便可以计算赋予该带 F群概形结构的 $\Gamma_{E/F}$-作用。

我们知道，典范纤维函子 ω 的自同构由 $\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{G}_m(E_s)$,参数化，其中元组 (c_τ) 通过将 $V_{(h_\sigma)}$ 缩放为 $\prod_{\tau\in\Gamma_{E/F}}c_\tau^{h_\tau}$来作用于 V。从这样一个自同构出发

φ 和对象 (V,ρ)，我们首先应用 $\beta_{\gamma^{-1}}$，得到 (V',ρ')，并得到一个记作 $\varphi(\beta_{\gamma^{-1}}(V',\rho'))$ 的 V' 自同构。接着，我们用 $s(\gamma)^{-1}$ 扭曲 L_E 作用，得到一个自同构 $s(\gamma)^{-1}[\varphi(\beta_{\gamma^{-1}}(V',\rho'))]$

向量空间 $(V^{s(\gamma^{-1})^{-1}})^{s(\gamma)^{-1}}$，然后应用 $\omega(\mu_{\gamma,\gamma^{-1}})$，得到 $V=\omega((V,\rho))$ 的一个自同构，我们希望对其进行明确描述。自同构 $\varphi(\beta_{\gamma^{-1}}(V',\rho'))$ 将 $V_{(h_\sigma)}=V'_{(h_{\gamma\sigma})}$ 缩放 $\prod_\tau c_\tau^{h_{\gamma\tau}}$ 倍（使用扭曲的 L_E 作用），这意味着 $s(\gamma)^{-1}(\varphi(\beta_{\gamma^{-1}}(V',\rho')))$ 将 $V_{(h_\sigma)}$ 缩放 $s(\gamma)\cdot(\prod_\tau c_\tau^{h_{\gamma\tau}})$ 倍（使用通常的 L_E 作用），因此，我们的纤维函子的新的自同构由元组 $(s(\gamma)\Phi^{c_E(\gamma,\gamma^{-1})}c_{\gamma^{-1}\tau})_\tau$ 给出。由此可知，当 $(c_\tau)_\tau\in\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{G}_m(E)$，时，这个作用与 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)(E)$ 上通常的 $\Gamma_{E/F}$ 作用一致。这意味着，我们的带的 F 群概形结构如期由 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)$，给出。

最后请注意，将 $\mathcal{W}_{E/F,s}$ 和 $R\mathcal{W}_{E/F,s}$ 的带识别为这些 F-群概形，与我们的过渡映射相容；具体而言，在带的层面上，函子 $\iota_{s,\ s'}$ 诱导出从 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)$ 到其自身的 s'/s-幂映射（因此也诱导出从 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mu_{s'})$ 到 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mu_s)$的 s'/s-幂映射）。这一事实可通过对 E进行基变换得出；在那里，类似的陈述对范畴 $P_{E/F,s}$（因而也对 $RP_{E/F,s}$）成立，详见 §2.1）。若 $(X,\ f_\gamma)$ 是 $\mathcal{W}_{E/F,s}$,的一个对象，那么类似地，$(\iota(X),\ \iota(f_\gamma))$ 是 $\mathcal{W}_{E/F,s'}$,的一个对象；对于 $R\mathcal{W}_{E/F,s}$, 也同样如此。我们将 $\mathcal{W}_{E/F}$和 $R\mathcal{W}_{E/F}$ 定义为它们的直极限，其带可通过上述观察得到明确描述。

2.5. 具体的坦纳范畴。 现在，我们将用 F上的一个更具体的坦纳范畴来描述上一小节中构造的伽罗瓦下降。

首先，对于固定的 $s\in\mathbb{N}$，我们定义范畴 $\mathcal{I}_{E/F,s}$；其对象是二元组 (V,ρ)，其中 V 是 $\tilde{W}_{L_{E/F}}$-半线性作用，而 $\mathcal{D}$ 是 V 的 $\prod_{\Gamma_{E/F}}\frac{1}{s}\mathbb{Z}$-分次，使得 $V_{(a_{\sigma/s})\sigma}$ 具有一个 L_E-基，在该基上 $\mathfrak{f}_E^s\in W_{L_{E/F}}$通过 $\prod_{\sigma\in\Gamma_{E/F}}\sigma(\varpi_E)^{a_\sigma}$, 作用，并且对于 $x\in\Gamma_{L_{E/F}}$提升 $\bar{x}\in\Gamma_{E/F}$,，我们有 $\Phi(x)(V_{(a_\sigma)_\sigma})=V_{(a_{\bar{x}^{-1}\sigma})\sigma}$。范畴 $\mathcal{I}_{E/F,s}$具有自然的 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$张量结构，其定义满足 $(V,\ \Phi)\otimes(V',\ \Phi')=(V\otimes V',\ \Phi\otimes\Phi')$ 其中 $\Phi\times\Phi'$ 由下式明确给出

$$(\tilde{\Phi}\otimes\tilde{\Phi}')(\sigma)(v\otimes v')=\tilde{\Phi}(\sigma)(v)\otimes\tilde{\Phi}'(\sigma)(v').$$

$\tilde{}$单位对象$\mathbf{1}$ 由 $\mathcal{I}_{E/F}$向量空间 L_E L_E 组成，其中 Φ 等于正规伽罗瓦作用。容易验证，$\mathbf{1}$ 的自同态与 F之间存在典范双射。

现在我们构造一个函子 $T\colon\ \mathcal{W}_{E/F,s}\to\mathcal{I}_{E/F,s}$。给定 $\mathcal{W}_{E/F,s}$, 的对象 $(X,X\xrightarrow{f_\gamma}\beta_\gamma(X))$，我们令 T-像 $(X,X\xrightarrow{f_\gamma}\beta_\gamma(X))$ 中的向量空间 V为 X 的底层向量空间，并令$\tilde{}$分次 $\mathcal{D}$ 为 X上的分次。我们如下定义 Φ。对于任意 $\sigma\in W_{L_{E/F}}$，可唯一地将其写成$\sigma=\mathfrak{f}_E^n s_E(\gamma)$，其中 $\gamma\in\Gamma_{E/F}$。于是我们定义

$$\tilde{\Phi}(\sigma)(v)=\Phi^n(f_\gamma^{-1}(v\otimes 1)).$$

我们注意到，根据定义，f_γ^{-1}在 V 上是 $s_E(\gamma)$ 半线性的。

$\tilde{}$ $\tilde{}$为了证明 Φ 确实是一个 $\Gamma_{L_{E/F}}$作用，我们需要验证对于 $\sigma_1,\sigma_2\in\Gamma_{L_{E/F}}$，有 $\Phi(\sigma_1)\circ\Phi(\sigma_2)=\Phi(\sigma_1\sigma_2)$。明确地说，如果 $\sigma_i=\mathfrak{f}_E^{n_i}s_E(\gamma_i)$，那么我们必须证明

$$(\Phi^{n_1}\circ f_{\gamma_1}^{-1})\circ(\Phi^{n_2}\circ f_{\gamma_2}^{-1})=\Phi^{n_1+n_2+c_E(\gamma_1,\gamma_2)}f_{\gamma_1\gamma_2}^{-1}.$$

根据构造，我们有

$$f_{\gamma_1\gamma_2}^{-1}=f_{\gamma_1}^{-1}\circ f_{\gamma_2}^{-1}\circ\Phi^{-c_E(\gamma_1,\gamma_2)},$$

这就推出了所需的等式。

我们还需要检验 $\tilde{\Phi}$ 对分次的作用是正确的。令 $\gamma\in\Gamma_{E/F}$。那么我们有

$$\tilde{\Phi}(s_E(\gamma))(V_{(a_\sigma/s)_\sigma})=f_\gamma^{-1}(V_{(a_\sigma/s)_\sigma}\otimes 1)=f_\gamma^{-1}(\beta_\gamma(V)_{(a_{\gamma^{-1}\sigma}/s)_\sigma})=V_{(a_{\gamma^{-1}\sigma}/s)\sigma}.$$

最后，T这是一个函子，因为 $\mathcal{W}_{E/F,s}$ 的态射必然与 Φ和 f_γ 映射交换。

˜现在我们定义一个函子 $S\colon\ \mathcal{I}_{E/F,s}\to\mathcal{W}_{E/F,s},$，它是 T的拟逆。给定 $\mathcal{I}_{E/F,s},$中的对象 $(V,\ \Phi,\ \mathcal{D})$我们将其在 S 下的像定义为：其底层向量空间等于 V，并具有 $\prod\ \frac{1}{s}\mathbb{Z}$-分次 $\mathcal{D}$。$^{\Gamma_{E/F}}$

˜我们定义 Φ 为 $\Phi(\mathfrak{f}_E)$。最后，对于固定的截面 $s_E\colon\ \Gamma_{E/F}\to W_{L_E/F},$，我们定义 $f_\gamma\colon V\to\beta_\gamma(V)$ 为

$$f_\gamma : v\mapsto\tilde{\Phi}(s_E(\gamma))^{-1}(v)\otimes 1.$$

上述定义中有许多事项需要检查。首先，我们检查对于固定的 γ，f_γ 是从 V 到 $\beta_\gamma(V)$ 的 $\mathfrak{f}_E$-空间同构。显然，它是阿贝尔群的同构，并且是 $\mathfrak{f}_E$-等变的，因为对于 $v\in V$，我们有恒等式

$$\tilde{\Phi}(s_E(\gamma))^{-1}(\mathfrak{f}_E\cdot v)\otimes 1=\tilde{\Phi}(s_E(\gamma)^{-1})(\tilde{\Phi}(\mathfrak{f}_E)(v))\otimes 1=\tilde{\Phi}(s_E(\gamma)^{-1}\mathfrak{f}_E)(v)\otimes 1$$
$$=\tilde{\Phi}(\mathfrak{f}_E s_E(\gamma)^{-1})(v)\otimes 1=\mathfrak{f}_E\cdot(\tilde{\Phi}(s_E(\gamma)^{-1})(v))\otimes 1=\mathfrak{f}_E\cdot(\tilde{\Phi}(s_E(\gamma))^{-1}(v))\otimes 1,$$

这里我们用到了 $\mathfrak{f}_E$ 包含于 $Z(W_{L_E/F})$ 这一事实。由于恒等式，对于$\ell\in L_E$，我们还有 L_E-线性性，该恒等式为

$$\tilde{\Phi}(s_E(\gamma)^{-1})(v\otimes\ell)=s_E(\gamma)^{-1}(\ell)\tilde{\Phi}(s_E(\gamma)^{-1})(v)\otimes 1=\tilde{\Phi}(s_E(\gamma)^{-1})(v)\otimes\ell.$$

现在我们检查映射 f_γ 关于 β_γ 和上一小节中所述的 $\mu_{\gamma',\ \gamma}$ 满足余循环条件。回顾一下，该条件由方程给出

$$(\mu_{\gamma',\gamma})(X)\circ f_{\gamma'\gamma}=\beta_{\gamma'}(f_\gamma)\circ f_{\gamma'}$$

对于任意 $X\in\mathcal{W}_{E/F,s}$。在我们的设定中，这个方程是

$$\tilde{\Phi}(c_E(\gamma',\gamma)^{-1})\circ\tilde{\Phi}(s_E(\gamma'\gamma))^{-1}=\tilde{\Phi}(s_E(\gamma))^{-1}\circ\tilde{\Phi}(s_E(\gamma'))^{-1},$$

˜根据余循环 c_E 的定义，这显然成立，因为 Φ 是群作用。因此，上述函子给出了 $\mathcal{W}_{E/F,s}$ 中一个定义良好的对象。$\mathcal{I}_{E/F,s}$ 中的任意态射都会给出 $\mathcal{W}_{E/F,s},$中的一个态射，因为按构造，$\mathcal{I}_{E/F,s}$ 中的态射保持分次，并且与 $W_{L_E/F}$-作用相容，因此也与映射 f_γ 相容。显然，两个函子 S 和 T 都是 F- 线性张量函子。因此我们立即得到：

推论 2.10。与 F 上的坦纳范畴 $\mathcal{I}_{E/F,s}$ 相对应的 $(Sch/F)_{fpqc}$ 上的 ***gerbe***，其带同构于一个 F-群概形 $Res_{E/F}(\mathbb{G}_m)$.

不难看出，如何将此推广，从而对范畴 $R\mathcal{W}_{E/F,s}$ 给出更具体的诠释。˜回顾上一小节中定义的环 $R_{E/F}$ 上的 $W_{L_E/F}$-作用 $\Phi_{R_{E/F}}$。现在我们定义˜范畴 $R\mathcal{I}_{E/F,s},$，其对象由元组 $(V,\ \mathcal{D},\ \Phi)$ 构成，其中 V 是一个 L_E- 向量空间，而 $\mathcal{D}$ 是 V 上的一个$\prod\ \frac{1}{s}\mathbb{Z}$- 分次。分次向量空间 V 带有分次环 $R_{E/F}$ 的作用，并且$^{\Gamma_{E/F}}$

我们要求 $W_{L_E/F}$作为一个 $R_{E/F}$-模是有限生成的，V 上的半线性作用，˜满足 $\Phi(\gamma)(rv)=\Phi_{R_{E/F}}(\gamma)(r)\Phi(\gamma)(v)$ 对 $r\in R_{E/F},$成立，并且 $V_{(b_\sigma/s)_\sigma}$有一个 L_E-基，$\tilde{\Phi}(\mathfrak{f}_E^s)$ 在该基上通过$\prod\ \sigma(\varpi_E)^{b_\sigma}$进行缩放。为简化记号，我们通常将 $\tilde{\Phi}(\gamma)(v)$ 简单记作$^{\sigma\in\Gamma_{E/F}}$

由 $\gamma\cdot v$或 γv给出。范畴 $R\mathcal{I}_{E/F,s}$是定义在 F上的坦纳范畴，其单位对象为 $R_{E/F}$。与上文相同的论证˜˜可证明，函子 T和 S可扩展为逆函子 $S,\ T$，它们在 $R\mathcal{I}_{E/F,s}$与 $R\mathcal{W}_{E/F,s},$之间建立等价，表明前者由 F-群概形 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mu_s)$ 带化。所谓“扩展”，是指商函子图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{W}_{E/F,s} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{E/F,s}\\ \downarrow & & \downarrow\\ R\mathcal{W}_{E/F,s} & \longrightarrow & R\mathcal{I}_{E/F,s},\end{array}$$

其中，左侧竖直箭头是上一小节讨论的商函子，右侧竖直~ ~箭头则是将对象 $(V,\ \mathcal{D},\ \Phi)$ 映至对象 $(V\otimes_{L_E} R_{E/F}, \mathcal{D}', \Phi\otimes\Phi_{R_{E/F}})$, 的函子，其中$\mathcal{D}'$ 是将 V的分次与 $R_{E/F}$ 的分次作张量积后诱导出的分次。对于 $s'/s,$，存在一个从 $\mathcal{I}_{E/F,s}$ 到 $\mathcal{I}_{E/F,s'}$, 的显然过渡函子；对于 $R\mathcal{I}_{E/F,s}$, 也同样如此。可以验证，当我们改变 s时，上述与 $\mathcal{W}_{E/F,s}$ 和 $R\mathcal{W}_{E/F,s}$ 的等价（它们也具有过渡映射）彼此相容，从而将 $\mathcal{W}_{E/F}$和 $R\mathcal{W}_{E/F}$ 分别识别为这些范畴系统的直极限，记作 $\mathcal{I}_{E/F}$和 $R\mathcal{I}_{E/F}$。然而，在构造最终的坦纳范畴时，我们将使用稍微更有意思的过渡映射（特别是，我们也会改变扩张 E/F）。

2.6. **过渡映射**。考虑有限伽罗瓦扩张的塔 $K/E/F$。固定 E的一个反一致化元 ϖ_E。令 $K'\subset K$ 为 E的最大非分歧扩张。则 K/K' 是全分歧的，并且我们有固定的反一致化元 ϖ_K，使得 $N_{K/K'}(\varpi_K)=\varpi_E$。我们定义过渡函子 $p_{K/E}$：$R\mathcal{I}_{E/F,s}\to R\mathcal{I}_{K/F,s}$，其根据我们所选择的一致化元定义。我们选取绝对韦伊群$W_{F/F}$, 中F的弗罗贝尼乌斯的一个提升，并将其限制用于定义 $W_{L_K/F}$和 $W_{L_E/F}$ 分别在 $R_{K/F}$和 $R_{E/F}$, 上的作用。首先，我们考虑 $\prod\limits_{\tau\in\Gamma_{K/F}}\mathbb{Z}$-分次环 $R'_{E/F,K}$ 其 $(c_\tau)_\tau$-分次分量在分次不受 $\Gamma_{K/E}$作用固定时为 0，否则为 $R_{E/F}$ 的 $(c_\tau)_\sigma$-分次分量。然后我们定义 $R_{E/F,K}:=R'_{E/F,K}\otimes_{L_E} L_K$。我们赋予 $R_{E/F,K}$ 对角$W_{L_K/F}$-作用，其中 $W_{L_K/F}$通过投影到 $W_{L_E/F}$上作用于第一个因子，并通过自然的伽罗瓦作用作用于第二个因子。注意，我们有一个分次环的包含

$$R_{E/F,K}\hookrightarrow R_{K/F}.$$

此外，我们声称这个包含保持 $W_{L_K/F}$-作用。我们只需检查 $\mathfrak{f}_{F,K}$（我们选定的弗罗贝尼乌斯提升）在 $1_{(c_\tau)_\tau}$ 上的作用是否一致，因为 $\Gamma_{L_K/L}$的作用都通过自然的伽罗瓦作用实现，并以相同的方式平移分次。我们有

$$\mathfrak{f}_{F,K}(1_{(c_\tau)_\tau})=\prod_{\tau'\in\Omega_K}\tau'(\varpi_K)^{c_{\mathfrak{f}_{F,K}^{-1}\tau'}}_{(c_{\mathfrak{f}_{F,K}^{-1}\tau})_\tau}=\prod_{\sigma'\in\Gamma_{K'/(K\cap L)}}\prod_{\tau''\in\Gamma_{K/K'}}\sigma'\tau''(\varpi_K)^{c_{\mathfrak{f}_{K,F}^{-1}\tau'}}_{(c_{\mathfrak{f}_{K,F}^{-1}\tau})_\tau}$$

$$=\prod_{\sigma'\in\Gamma_{K'/(K\cap L)}}\sigma'(\varpi_E)^{c_{\mathfrak{f}_{F,E}^{-1}\sigma'}}_{(c_{\mathfrak{f}_{F,E}^{-1}\sigma})_\sigma}=\prod_{\sigma'\in\Gamma_{E/(E\cap L)}}\sigma'(\varpi_E)^{c_{\mathfrak{f}_{F,E}^{-1}\sigma'}}_{(c_{\mathfrak{f}_{F,E}^{-1}\sigma})_\sigma}=[\mathfrak{f}_{F,E}1_{(c_\sigma)_\sigma}]\otimes 1=\mathfrak{f}_{F,K}(1_{(c_\sigma)_\sigma}\otimes 1),$$

为了得到第四个等式，我们用到了这样一个事实：到 E 的限制映射诱导出一个满射 $\Gamma_{K'/(K\cap L)}\twoheadrightarrow\Gamma_{E/(E\cap L)},$，其核等于 $\Gamma_{K'/[E\cdot(K\cap L)]},$，此处 $E\cdot(K\cap L)=K'$，因为根据初等代数数论，K/E 的最大非分歧子扩张是 E 与$K/F,$ 的最大非分歧子扩张的复合。最后一个等式源于这样一个事实：根据构造，$\mathfrak{f}_{F,K}$ 在 $W_{L_E/F}$中的像是 $\mathfrak{f}_{F,E}$。

现在我们可以定义函子 $p_{K/E}$。对于 $R\mathcal{I}_{E/F,s},$ 的对象 M，我们将 M_K 定义为一个 $\prod\limits_{\tau\in\Gamma_{K/F}}\frac{1}{s}\mathbb{Z}$ 分次的 $R_{E/F,K}$-模；当分次在 $\Gamma_{K/E}$ 作用下不变时，其 $(c_\tau)_\tau$ 分次分量为 0，否则为 $M\otimes_{L_E} L_K$ 的 $(c_\tau)_\tau$ 分次分量。随后，我们定义 $p_{K/E}(M):=M_K\otimes_{R_{E/F,K}}R_{K/F}$（赋予诱导分次），并定义对角的 $W_{L_K/F}$ 作用；注意，由于 $R_{E/F,K}\hookrightarrow R_{K/F}$ 的 $W_{L_K/F}$-等变性，这一定义是良定的。

还要注意，存在一个类似的过渡函子 $p'_{K/E}$: $\mathcal{I}_{K/F,s}\to\mathcal{I}_{E/F,s},$，其定义很简单：将 $W_{L_E/F}$-模 M映射为 $W_{L_K/F}$-模 $M\otimes_{L_E} L_K$，并在其第一因子上通过投影到 $W_{L_E/F}$ 诱导对角 $W_{L_K/F}$-作用；分次的定义方式与函子 $p_{K/E}$相同。显然，过渡函子 $p'_{K/E}$ 和 $p_{K/E}$ 与商映射 $\mathcal{I}_{?/F,s}\to R\mathcal{I}_{?/F,s}$, 兼容，其中 $?=E$ 或 K。滥用记号，我们也用 $p'_{K/E}$ 表示从 $P_{K/F,s}$ 到 $P_{E/F,s}$的函子，其定义方式与 $p'_{K/E},$ 相同，只是现在在 $M\otimes L_K$ 上通过投影到 $\Gamma_{L_E/E}$，在第一因子上诱导对角 $\Gamma_{L_K/K}$-作用。

通常，为了描述 $p_{K/E}$ 对带的作用，我们先描述 $p'_{K/E}$ 的作用；而为此，我们将利用对 $P_{E/F,s}$ 和 $P_{K/F,s}$ 的识别，分别将它们视为范畴 $\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}$ 和 $\mathcal{E}_{(d_\sigma)_\sigma}$。这里，与 §2.1 中一样，元组 $(c_\sigma)_\sigma$ 和 $(d_\sigma)_\sigma$ 分别是 $H^2(\Gamma_{E_s/E}, E_s^\times)$和 $H^2(\Gamma_{K_s/K}, K_s^\times)$,中与 ϖ_E和 ϖ_K对应的反典范类代表元。用这些等价共轭 $p'_{K/E}$，得到一个从 $\mathrm{Rep}_{E_s}(\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma})$到 $\mathrm{Rep}_{K_s}(\mathcal{E}_{(d_\sigma)_\sigma})$的函子，我们将对其进行明确计算。

回顾一下，给定群 $\mathcal{E}_{(c_\sigma)_\sigma}$ 的一个 L_E-表示 (V,ρ)，它由同态h_ρ: $\prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{G}_m(L_E) \to \mathbf{GL}(V)$ 以及由 $((1),\mathfrak{f}_E)$诱导的 $\mathfrak{f}_E$-半线性自同构确定，我们得到 §2.1 中所述的 $P_{E/F,s}$ 的一个对象 $(V',\Phi,\mathcal{D})$，其中 $V'=V\otimes_{E_s} L_E$, Φ 由作用 $((1),\mathfrak{f}_E)$给出，并且 $V'_{(h_\sigma/s)}$ =$V_{(h_\sigma)}\otimes_{E_s} L_E$。那么，按定义，$p'_{K/E}$将其映为对象 $(V'\otimes_{L_E} L_K,\Phi',\mathcal{D}')$，其中 Φ'通过 $\Phi^{f(K/E)}\otimes \mathfrak{f}_K$在 $V'\otimes_{L_E} L_K$ 上作对角作用；若 (h_τ/s)不是 $\Gamma_{K/E}$-不变的，则为 $V''_{(h_\tau/s)}=0$，否则等于$V'_{(h_{\bar\tau}/s)}\otimes_{L_E} L_K$。为了计算该对象在此等价下的像，我们注意到子空间

$$V''_{(h_{\bar\tau}/s)}=V'_{(h_{\bar\tau}/s)}\otimes_{L_E} L_K = V_{(h_{\bar\tau})}\otimes_{E_s} L_K = (V_{(h_{\bar\tau})}\otimes_{E_s} K_s)\otimes_{K_s} L_K$$

具有由 $\{e_i\otimes 1\otimes 1\}$给出的 L_K-基，其中 e_i 是 $V_{(h_{\bar\tau})}$ 的 E_s-基，而 Φ^s 通过 $\prod_{\sigma\in\Gamma_{E/F}}\sigma(\varpi_E)^{h_\sigma}$ 作用于其上。因此，

$$(\Phi')^s(e_i\otimes 1\otimes 1)=[\prod_{\sigma\in\Gamma_{E/F}}\sigma(\varpi_E)^{f(K/E)h_\sigma}](e_i\otimes 1\otimes 1),$$

根据构造，这等于

$$[\prod_{\sigma\in\Gamma_{E/F}}\sigma(\prod_{\gamma\in\Gamma_{K/K'}}\gamma(\varpi_K))^{f(K/E)h_\sigma}](e_i\otimes 1\otimes 1).$$

最后，上述表达式可以改写为

$$[\prod_{\tau\in\Gamma_{K/F}}\tau(\varpi_K)^{h_{\bar\tau}}](e_i\otimes 1\otimes 1),$$

这表明 $\mathcal{E}_{(d_\sigma)}$ 的相应表示（记为 $(W,\ \rho')$）在 (h_τ) 不是 $\Gamma_{K/E}$-稳定时具有 $W_{(h_\tau)}=0$，而在其他情况下则为 $V_{(h_{\bar\tau})}\otimes_{E_s}K_s$。因此，如果纤维函子 ω_K 的自同构通过以 $\prod_{\tau\in\Gamma_{K/F}} a_\tau^{h'_\tau}$，（其中 $(a_\tau)\in\prod_{\Gamma_{K/F}}\mathbb{G}_m(K_s)$）进行缩放的方式作用于 $W_{(h'_\tau)}$，那么上述计算表明，我们得到 $(\omega_E)_K$ 的一个诱导自同构，它通过 $\prod_{\sigma\in\Gamma_{E/F}}(\prod_{\tau\in\Gamma_{K/F},\tau\mapsto\sigma} a_\tau)^{h_\sigma}$, 作用于 $V_{(h_\sigma)}\otimes_{E_s}K_s$，这表明该诱导映射在 K_s-点上由“范数”映射 $\prod_{\Gamma_{K/F}}\mathbb{G}_m(K_s)\to\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{G}_m(K_s)$ 给出。

根据构造，由 $p'_{K/E}$ 诱导的从 $\mathrm{Res}_{K/F}(\mathbb{G}_m)$ 到 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)$ 的带间 F-群态射，在 K_s-点上的作用由上一段末尾明确描述的映射给出；规范的“范数映射”$\mathrm{Res}_{K/F}(\mathbb{G}_m)\to\mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)$ 也同样如此。由于这两个概形都是环面且 K_s 是无限的，由单有理性可知这两个映射重合。以下过渡映射图表是交换的

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{I}_{E/F,s} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{K/F,s}\\ \downarrow & & \downarrow\\ R\mathcal{I}_{E/F,s} & \longrightarrow & R\mathcal{I}_{K/F,s},\end{array}$$

其中竖直箭头是上文讨论的商映射，这意味着与 $p_{K/E}$ 相关联的 F-群概形态射 $\mathrm{Res}_{K/F}(\mu_s)\to\mathrm{Res}_{E/F}(\mu_s)$ 由包含映射 $\mathrm{Res}_{K/F}(\mu_s)\hookrightarrow\mathrm{Res}_{K/F}(\mathbb{G}_m)$ 以及随后由 $p'_{K/E}$, 诱导的映射所诱导，这也意味着它同样由范数映射给出。最后，对于 $s\mid s'$，我们将过渡映射 $p_{K/E,s',s}$: $\mathcal{I}_{E/F,s}\to\mathcal{I}_{K/F,s'}$ 定义为以下复合

$$\mathcal{I}_{E/F,s}\xrightarrow{p_{K/E}}\mathcal{I}_{K/F,s}\xrightarrow{\iota_{s,s'}}\mathcal{I}_{K/F,s'},$$

在带上，这给出了 F-群概形的映射 $\mathrm{Res}_{K/F}(\mu_{s'}) \to \mathrm{Res}_{E/F}(\mu_s)$，由 $N_{K/F}$与 s'/s-次幂映射复合而成。

2.7. 范畴 $\mathrm{RigIsoc}_F$。 现在我们可以定义 F 上的坦纳范畴，它对刚性内形式进行参数化。我们将范畴 $\mathrm{RigIsoc}_F$ 定义为范畴 $R\mathcal{I}_{E/F,s}$ 在由元组 (E,s) 构成的归纳系统上的直极限，其中 E/F 是有限伽罗瓦扩张，且 $s \in \mathbb{N}$ 按如下关系排序：当且仅当 K 包含 E 和 $s \mid s'$ 时，$(K,s') > (E,s)$；这里采用上一小节定义的过渡映射 $p_{K/E,s,s'}$。为方便起见，我们经常会固定指标范畴中由 $\mathbb{N}$ 编号的对象余尾系统，并记作 (E_k, n_k)。注意，$\varinjlim_k R\mathcal{I}_k = \mathrm{RigIsoc}_F$，其中 $R\mathcal{I}_k := R\mathcal{I}_{E_k/F,n_k}$。

根据构造，$\mathrm{RigIsoc}_F$ 是 F 上的坦纳范畴，带有定义在 L 上的纤维函子；相应的 gerbe 由 F-群概形 $u = \varprojlim_k \mathrm{Res}_{E_k/F}(\mu_{n_k})$ 带化。注意，每个范畴 $R\mathcal{I}_{E/F,s}$ 都有一个定义在有限扩张 E_s/F, 上的纤维函子，具体而言，它将 $(V,\mathcal{D},\Phi)$ 映为以下（有限维）E_s-向量空间

$$\bigoplus_{0\leqslant(a_\sigma/s)<1} \Big(\Big[\bigoplus_{(b_\sigma)\in\prod_{\Gamma_{E/F}}\mathbb{Z}} V^{\mathfrak{f}_E^s\cdot(\prod\sigma(\varpi_E)^{-[a_\sigma+sb_\sigma]})} \Big] \otimes_{R_{E/F}} R_{E/F}/I \Big), \tag{1}$$

其中 $V^{\mathfrak{f}_E^s\cdot(\prod\sigma(\varpi_E)^{-[a_\sigma+sb_\sigma]})}$ 表示 V中所有满足 $\mathfrak{f}_E^s$ 以标量$\prod_{\sigma\in\Gamma_{E/F}}\sigma(\varpi_E)^{-[a_\sigma+sb_\sigma}$作用的元素所构成的子群。注意，上述表达式是良定义的，因为内部直和是 $R_{E/F}$-稳定的。我们可以通过将上述定义在 E_s 上的纤维函子与 $-\otimes_{E_s} F$复合，将其扩展为定义在 F 上的纤维函子。考察这个定义在 F上的纤维函子的自同构，我们便得到群 $H^2(\Gamma_{F/F}, \mathrm{Res}_{E/F}(\mu_s)(F))$, 中的一个典范上同调类，现对其进行计算。由于$R\mathcal{I}_{E/F,s}$ 是 $\mathcal{I}_{E/F,s}$, 的一个商，上述上同调类映射到与纤维函子 $\mathcal{I}_{E/F,s} \to \mathrm{Vect}_F$ 的自同构群相对应的上同调类，该函子由张量积 E_s-纤维函子明确给出

$$(V,\mathcal{D},\tilde{\Phi}) \mapsto \bigoplus_{(a_\sigma/s)\in\prod_{\Gamma_{E/F}}\frac{1}{s}\mathbb{Z}} V^{\mathfrak{f}_E^s\cdot(\prod\sigma(\varpi_E)^{-a_\sigma})}$$

在 E_s 上取 F，在典范映射 $H^2(\Gamma_{F/F},$ 下取 $_{E/F}(\mu_s)(F)) \to H^2(\Gamma_{F/F}, \mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)(F))$,Res $\mathcal{I}_{E/F,s}$。注意到上述纤维函子与从 $R\mathcal{I}_{E/F,s}$，到 [的商函子相容，并使用 10]Mil07, §2.。

基于上述观察，首先描述与 $\mathcal{I}_{E/F,s}$ 对应的 $H^2(\Gamma_{F/F}, \mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)(F))$ 中的相应上同调类将很有用。由于坦纳范畴的 $\mathcal{I}_{E/F,s}$ 在 F 上的基变换到 E，作为 E 上的坦纳范畴与 $P_{E/F,s}$，同构，因此该类在 $H^2(E,$ $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)(F))$中的像是类 $-1/s \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 在 $\prod_{\Gamma_{E/F}} H^2(E, \mathbb{G}_m(F))$ 中的 $\Gamma_{E/F}$ 重积。特别地，该类在 Shapiro 同构下的像

$$H^2(\Gamma_{\overline{F}/F}, \mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)(\overline{F})) \xrightarrow{\sim} H^2(\Gamma_{\overline{F}/E}, \mathbb{G}_m(\overline{F}))$$

是在局部不变量映射下映到 $-1/s \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的类。

回顾一下，$H^2(\Gamma_{F/F}, u(\overline{F})) = \varprojlim_k H^2(\Gamma_{F/F}, u_k(\overline{F}))$,，其中 u_k:=限制$_{E_k/F}(\mu_{n_k})$。利用希尔伯特90和 Shapiro 引理，我们看到后面的群构成正合列

$$0 \to H^2(\Gamma_{\overline{F}/F}, u_k(\overline{F})) \to H^2(\Gamma_{\overline{F}/F}, \mathrm{Res}_{E_k/F}(\mathbb{G}_m)(\overline{F})) \xrightarrow{x\mapsto n_k x} H^2(\Gamma_{\overline{F}/F}, \mathrm{Res}_{E_k/F}(\mathbb{G}_m)(\overline{F})),$$

因此，通过 Shapiro 引理和局部不变量映射，我们得到上同调群 $H^2(\Gamma_{F/F}, u_k(F))$ 与 $-\frac{1}{n_k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$之间的典范识别。此外，根据上文的讨论，坦纳范畴的 $R\mathcal{I}_k$ 所对应的 gerbe 的上同调类等于元素 $-\frac{1}{n_k}$。对于 $l > k$，投影映射 $H^2(\Gamma_{F/F}, u_l(F)) \to H^2(\Gamma_{F/F}, u_k(F))$（通过由下式给出的 F-纤维函子

F-纤维函子的直极限，其中每个 $R\mathcal{I}_k$ 对应的纤维函子显然彼此相容）对应于从 $\frac{1}{n_l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ 到 $\frac{1}{n_k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ 的乘以 n_l/n_k 映射。因此我们得出，范畴 $\mathbf{RigIsoc}_F$ 对应于类 $-1 \in \widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_k \frac{1}{n_k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = H^2(\Gamma_{F/F}, u(F))$，这正是我们想要的结果。总而言之，我们证明了：

定理 2.11。与$\mathrm{RigIsoc}_F$的纤维函子丛相关联的伽罗瓦丛表示类 $-1 \in \widehat{\mathbb{Z}} \cong H^2(\Gamma_{F/F}, u(F))$。特别地，我们可以将$\mathrm{RigIsoc}_F$与$\overline{\mathrm{Rep}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}})$等同起来。

注 2.12。如引言中所述，我们采用群概形 u 的一种替代表示，而非 [Kal16a] 中使用的表示 u'（后者先验上是一个不同的群）。尽管如此，映射 $u \to u'$ 仍是一个同构。只需在特征模层面证明这一点，此时该映射就是包含映射

$$\varinjlim_{E/F} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[\Gamma_{E/F}]_0 \to \varinjlim_{E/F} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[\Gamma_{E/F}],$$

其中，直极限取遍所有有限伽罗瓦扩张。满射性源于这样一个事实：对于一个固定的 $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\Gamma_{E/F}]$，若它是 m-挠的，取一个满足 $m \mid [K$ 的 $K/E/F$ 有限伽罗瓦扩张： $E]$，则 x 在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\Gamma_{K/F}]$ 中的像属于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\Gamma_{K/F}]_0$。需要指出的是，当 $F = \mathbb{R}$ 时，该结果不成立。

3. The structure of $\mathrm{RigIsoc}_F$

本节研究 $\mathbf{RigIsoc}_F$ 作为阿贝尔张量范畴的结构，并构造其对象的例子。

3.1. Newton映射。

给定 $R\mathcal{I}_k$ 中的一个对象 $X = (V, \Phi, \mathcal{D})$，可以附加一个同态 $f_X \in \mathrm{Hom}_F(u_F, \mathrm{GL}(\omega_k(X)))$，如下所示：群 $\mathrm{Res}_{E_k/F}(\mu_{n_k})(F)$ 与上一小节所述的 F-纤维函子的自同构群有典范同一性，我们将其记为 ω_k；然后，将 $x \in \mathrm{Res}_{E_k/F}(\mu_{n_k})$ 映射到与 x 对应的 $\omega_k(X)$ 的 F-线性自同构，从而定义 f_X。

引理 3.1. $\omega_k(X)$ 的维数为 $\sum_{(a_\sigma/n_k) \in \prod_{\Gamma_{E_k/F}}[0,1)}$ 维数$_{L_{E_k}}(V_{(a_\sigma/n_k)})$。

证明。这由 (1) 中函子 $\omega_{R\mathcal{I}_k}$ 的显式描述立即得出；注意，除以 $IR_{E_k/F}$ 取商后，(1) 中所有内部直和项都被识别。□

容易验证，同态 f_X 与过渡映射 $R\mathcal{I}_k \to R\mathcal{I}_l$ 相容，因此对于 $\mathbf{RigIsoc}_F$ 中处于 $R\mathcal{I}_k$ 像内的对象 X，我们可以关联一个态射 $f_X \in \mathrm{Hom}_F(u_F, \mathrm{GL}(\omega_k(X)))$。

如果 $\mathbf{RigIsoc}_F$ 中的对象 X 满足同态 f_X 的取值落在 $Z(\mathrm{GL}(\omega_k(X)))$ 中，我们就称其为基本对象。基本对象可以如下分类：

命题 3.2。$\mathrm{RigIsoc}_F$ 中的对象 X 是基本对象，当且仅当其所有非零分次分量在 $\mathbb{Q}[\Gamma_{\overline{F}/F}]$ 中的指标都在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\Gamma_{F/F}]$ 中具有相同的像。

证明。只需在有限层坦纳范畴 $R\mathcal{I}_k$ 中证明这一点。

元素 $x = (x_\sigma) \in \prod_{\Gamma_{E_k/F}} \mu_{n_k}(F) = \mathrm{Res}_{E_k/F}(\mu_{n_k})(F)$ 通过将 $V_{(a_\sigma/n_k)}$ 乘以 $\prod_\sigma x_\sigma^{a_\sigma}$ 后映到自身，从而作用于纤维函子。对于每个分次分量 $V_{(a_\sigma/n_k)}$，这给出一个从 u_F 到 $Z(\mathrm{GL}_{V_{(a_\sigma/n_k)}}) = F^\times$ 的态射，所得映射属于 $Z(\mathrm{GL}(\omega_k(X)))$，当且仅当这些映射对所有 $(a_\sigma/n_k)_\sigma$ 都相同。这个条件成立，当且仅当满足 $V_{(a_\sigma/n_k)} \neq 0$ 的所有元组 $(a_\sigma/n_k)_\sigma$ 模 $\prod_{\Gamma_{E_k/F}} \mathbb{Z}$ 后都相同。□

将基本对象在上述典范纤维函子（暂记为 ω）下的像为 n 维的对象组成的全子范畴记为 $\mathbf{RigIsoc}_{F,n}$（因此也适用于任意纤维函子）；我们还可以考虑

基本对象的全子范畴 $\mathbf{RigIsoc}_{F,\,n,\,\mathrm{basic}}$。回忆一下，若 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$ 是 $\mathbf{RigIsoc}_F$ 的纤维函子丛，则我们有一个范畴等价

$$\mathrm{RigIsoc}_{F,n} \xrightarrow{\sim} Z^1_{\mathrm{alg}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, \mathrm{GL}_n), \tag{2}$$

并且我们注意到，该函子与从两个对象到 $\mathbf{Hom}_F(u_F、\ \mathbf{GL}_{n、\ F})$ 的映射相容。更明确地说，回顾–[Tai25，第 7.1] 命题：存在一个范畴等价，将由对 $(R、\ t)$ 构成的范畴映射到范畴 $Z^1_{\mathrm{alg}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}、}\ \mathbf{GL}_n)$；其中，$R$: $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}} \to B\mathbf{GL}_n$ 是纤维化范畴在 F 上的态射，而 t 是 $R(\omega)$ 的平凡化。所声称的等价 (2) 由将这一等价与如下函子复合得到：该函子将 $X \in \mathbf{obj}(\mathbf{RigIsoc}_{F、\ n})$ 发送到由函子 $F \mapsto \mathbf{Isom}(F(X)、\ \omega(X))$ 及 $\mathbf{Isom}(\omega(X)、\ \underline{\omega(X)})$ 的平凡化所组成的对，而后者由 $X = (V、\ \mathcal{D}、\ \Phi)$ 的底层向量空间的特选基诱导。

注意，(2) 诱导出一个范畴等价

$$\mathrm{RigIsoc}_{F,n,\mathrm{basic}} \xrightarrow{\sim} Z^1_{\mathrm{bas}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, \mathrm{GL}_n).$$

推论 3.3. 当 $X \in \mathrm{obj}(\mathrm{RigIsoc}_F)$ 是基本的时，态射 $f_X \in \mathrm{Hom}_F(u_F, \mathrm{GL}(\omega_k(X)))$下降为 $\mathrm{Hom}_F(u, \mathrm{GL}(\omega_k(X)))$.中的一个态射

利用上文给出的 f_X 的显式描述，也可以直接验证这一结果。

3.2. **与等晶体的比较**。现在我们构造一个从 $\mathbf{Isoc}_F$ 到 $\mathbf{RigIsoc}_F$ 的、在 F 上的坦纳范畴之间的态射。斜率为 $\frac{1}{s}$ 的倍数的等晶体范畴 $\mathbf{Isoc}_{F,\ s}$ 等价于范畴 $\mathcal{I}_{F/F,s}$。事实上，我们可以通过将等晶体 $(V,\ \Phi)$ 映射到空间 $(V,\ \Phi,\ \mathcal{D})$ 来定义此等价，其中分次 $\mathcal{D}$ 的定义使得 $V_{a_\sigma/s}$ 是 V 的 $-a_\sigma/s$ 斜率等型分量，而$W_{L/F}$-作用由 Φ给出。

于是，对于任意等晶体 (V, Φ)，我们选取一个充分大的 $k \in \mathbb{N}$，使得 $(V, \Phi) \in \mathbf{Isoc}_{F,n_k}$，并且$(V, \Phi, \mathcal{D})$是 $\mathcal{I}_{F/F,n_k}$中对应的对象。随后，我们应用商函子得到一个对象$R\mathcal{I}_{F/F,n_k}$，最后应用过渡映射 $R\mathcal{I}_{F/F,n_k} \to R\mathcal{I}_{E_k/F,n_k}$。

若我们只考虑斜率的分母整除某个固定 k 的等晶体，其中 n_k，那么可以看出，在带上，上述函子是如下复合

$$\mathrm{Res}_{E_k/F}(\mu_{n_k}) \xrightarrow{-N_{E_k/F}} \mu_{n_k} \hookrightarrow \mathbb{G}_m, \tag{3}$$

对其取逆极限后，便可推出上述在 F 上的坦纳范畴之间的态射对应于如下复合

$$u \to \mu \to \mathbb{D},$$

其中，第一个映射由负范数映射的逆极限给出。

回顾一下， [Kal18, §3.3] 为任意选取的、代表典范类 $-1 \in H^2(F, u)$ 的 gerbe $\mathcal{E}'_{\mathrm{Kal}}$ 构造了一个同态 $\mathcal{E}'_{\mathrm{Kal}} \to \mathcal{E}_{\mathrm{iso}}$；该同态与到 $\Gamma_{F/F}$ 的投影相容，并且在带上与映射 (3) 一致。由于 $\mathcal{E}'_{\mathrm{Kal}}$ 的选取仅在被 u 共轭的意义下是典范的，因此这样的映射在后复合 $\mathcal{E}_{\mathrm{iso}}$ 的、由 $\mathbf{Int}(x)$ （其中 $x \in \mathbb{D}(F)$）诱导的自同构之后才唯一。事实上，所有满足这两个性质的映射都以这种方式彼此不同，因为 $H^1(F, \mathbb{D})$ 是平凡的。特别地，由我们的函子 $\mathbf{Isoc}_F \to \mathbf{RigIsoc}_F$ 诱导的 gerbe 态射 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}} \to \mathcal{E}_{\mathrm{iso}}$ 就是这样一个态射。

3.3. **与 Fargues 的扩展等晶体比较**。我们首先简要回顾 Fargues 在 [Far22, §6] 中构造的坦纳范畴 $\mathbf{Isoc}^e_F$，它对应于 gerbe $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}} \times \mathcal{E}_{\mathrm{iso}}$:

首先，选取该短正合列的一个分裂

$$0 \to \varinjlim_{\Gamma_{K/F}} \prod \mathbb{Z} \to \varinjlim_{\Gamma_{K/F}} \prod \mathbb{Q} \to \varinjlim_{\Gamma_{K/F}} \prod , \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

其中，直极限取遍所有有限伽罗瓦扩张 $K/F,$，并配有相应的 2-余循环 c。我们将分裂取为值于 $[0,1)$ 的唯一分裂，使得 c 的取值落在 $\varinjlim \prod_{\Gamma_{K/F}} \{0,1\}$ 中。

与 [Far22, §6.2], 中一样，对于固定的有限伽罗瓦 E/F, ，可以构造一个典范的秩一、斜率为一的 E-等晶体 $\mathbb{L}_E$。我们不需要这个等晶体的精确定义（它是利用 Fargues–Fontaine 曲线构造的）——构造 Isoc^e_F 所需的唯一性质是：对于每个 K/E，有限伽罗瓦扩张都满足 $N_{K/E}(\mathbb{L}_K) := \bigotimes_{\tau\in\Gamma_{K/E}} \mathbb{L}_K \otimes_{L_K,\tilde{\tau}} L_K$,，其中 $\tilde{\tau}$ 是 τ 到 $\Gamma_{L_K/E}$, 的某个提升，且其值等于 $\mathbb{L}_E$。显然，我们的范数相容（反）一致化元系统为我们提供了这样一个系统：令 $\mathbb{L}_E$ 为向量空间 L_E，并令 E 的弗罗贝尼乌斯作用于 1 上的结果为 ϖ_E^{-1}。

对于固定函数 $\Gamma_{E/F} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}$,，我们定义 E-等晶体

$$\mathbb{L}^{\alpha}_{\infty} := \bigotimes_{\tau\in\Gamma_{E/F}} \mathbb{L}_E^{\otimes\alpha(\tau)} \otimes_{L_E,\tilde{\tau}} L_E,$$

其中， $\tilde{\tau}$ 是 τ 到 $\Gamma_{L_{E/F}}$的某个提升。根据构造，这是一个有限维、离散的半线性 W_E-模，定义在 L上。

坦纳范畴 Isoc^e 的对象为 $\varinjlim \prod_{\Gamma_{K/F}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-分次有限维 L-向量空间 D，

$$D = \bigoplus_{\alpha\in\varinjlim \prod_{\Gamma_{K/F}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} D_\alpha$$

配备离散的半线性 W_F-作用，使得由 $\tau \in W_F$ 作用给出的映射是从 D_α 到$D_{\tau\alpha}$的同构，张量积定义为

$$(D\otimes D')_\alpha = \bigoplus_{\beta+\gamma=\alpha} D_\beta \otimes_{\overline{F}} D'_\gamma \otimes_{\overline{L}} \mathbb{L}_\infty^{c(\beta,\gamma)},$$

其中， W_F通过映射$\mathbb{L}^{\alpha}_{\infty} \to \mathbb{L}^{\alpha}_{\infty}\otimes_{L_E,\ \sigma} L, x \mapsto x\otimes 1$将 $\mathbb{L}^{c(\beta,\ \infty\ \gamma)}$映射到 $(\mathbb{L}^{c(\beta,\ \infty\ \gamma)})^\tau \simeq \mathbb{L}^{\tau c(\beta,\ \infty\ \gamma)}$，从而作用于它。我们将上述所有数据记为 $D = (V_D,\ \Phi_D,\ \mathcal{D}_D,\ )$（分别为底层向量空间、 W_F-作用和分次）。Isoc^e 中的态射是分次 W_F-模之间的态射。

目标是定义一个坦纳范畴之间的态射

$$\mathrm{RigIsoc}_F \to \mathrm{Isoc}^e_F$$

对应于（可能相差一个余边界扭曲的）投影映射 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}} \times \mathcal{E}_{\mathrm{iso}} \to \mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$。

在对象层面，此函子将 $(V, \tilde{\Phi}, \mathcal{D})$ 映射到 $(V_{[0,1)}, \Phi, \mathcal{D})$，其中 $V_{[0,1)}$ 表示 V 的斜率在 $[0,1)$ 内的广义特征子空间，其所有项都属于 $\varinjlim \prod_{\Gamma_{K/F}}[0,1)$,，而 $\varinjlim \prod_{\Gamma_{K/F}}[0,1)$, 在 W_F 作用 Φ 下保持不变；$\mathcal{D}$ 是由 $\varinjlim \prod_{\Gamma_{K/F}} \mathbb{Q}$ 分次诱导的 $\varinjlim \prod_{\Gamma_{K/F}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 分次。在态射上，该函子将 f 映射为 f（这是有意义的，因为 f 是 $R_{F/F}$-等变的）。

还需证明此函子保持张量结构。为检验张量相容性，我们先计算（固定 E/F 有限伽罗瓦，且 $(a_\sigma)_\sigma$、 $(b_\sigma)_\sigma$ 属于 $\prod_{\Gamma_{E/F}}[0,1),$，用 $\tilde{\otimes}$ 表示 Isoc^e 中的张量积）：

$$V_{(a_\sigma)}\tilde{\otimes}W_{(b_\sigma)} = (V_{(a_\sigma)}\otimes W_{(b_\sigma)}) \otimes \mathbb{L}_\infty^{c(\overline{(a_\sigma)},\overline{(b_\sigma)})} \subseteq (V\otimes W)_{(a_\sigma+b_\sigma)}$$

其中 $\mathbb{L}^{c(\overline{(a_\sigma)},\ \infty\ \ (b_\sigma))}$是每个 $\mathbb{L}_E \otimes_{L_E,\ \tilde{\sigma}} L_E$ 的张量积，使得 $a_\sigma + b_\sigma \geqslant 1$。另一方面，首先注意，对于任意分次分量 $U_{(c_\sigma)}$，

$$U_{(c_\tau)} \otimes (\mathbb{L}_E \otimes_{L_E,\tilde{\sigma}} L_E) = 1_{\delta_\sigma(-1)} \cdot U_{(c_\tau)},$$

其中 $\delta_\sigma(-1)$ 表示 $\prod_{\Gamma_{E/F}} \mathbb{Z}$ 中在 σ 坐标处为 -1、其他坐标处均为零的元素，使得 $1_{\delta_\sigma(-1)} \in R_{E/F}$。利用上述两项计算，我们得到（利用 $\mathrm{RigIsoc}_F$ 中的张量积 $V\otimes W$ 是 $R_{E/F}$-模的张量积）

$$([1_{(-c(\overline{(a_\sigma)},\overline{(b_\sigma)}))_\sigma} \cdot V_{(a_\sigma)}] \otimes W_{(b_\sigma)}) = (V_{(a_\sigma)} \otimes [1_{(-c(\overline{(a_\sigma)},\overline{(b_\sigma)}))_\sigma} \cdot W_{(b_\sigma)}]) \subseteq (V\otimes W)_{[0,1)}$$

并且等于 $V_{(a_\sigma)}\tilde{\otimes}W_{(b_\sigma)}$。由此可轻易推出所需的张量相容性。

最后，我们通过研究与这个坦纳范畴之间的态射 $\mathrm{RigIsoc}_F \to \mathrm{Isoc}^e_F$相对应的 gerbe 上的映射 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}} \times \mathcal{E}_{\mathrm{iso}} \to \mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$，结束本小节。

Isoc^e_F 的一个纤维函子，在固定的有限 K/F-层级上，由以下复合给出 [2]

$$\mathrm{Isoc}^e_{F,K} \to \mathrm{Vect}_{\overline{F}} \to R_{K/F}\text{-mod} \to \mathrm{Vect}_{\overline{F}},$$

其中，$\mathrm{Isoc}^e_{F,\ K}$ 表示 Isoc^e_F 中分次通过 $\prod_{\Gamma_{K/F}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, 的全子范畴。第一个函子遗忘 $\varinjlim \prod_{\Gamma_{K/F}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-分次和 W_F-作用，第二个函子将 Y 送到 $Y \otimes_{L_K} R_{K/F}$，第三个函子则是 §2.3 中定义的有限生成 $R_{K/F}$-模上的纤维函子。由此可得，该纤维函子的自同构群（已识别为 $u_F \times \mathbb{D}_F$）通过 u_F 因子，按照 $\prod_{\Gamma_{K/F}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-分次作用于对象 X （属于 Isoc^e_F ）的 $\prod_{\Gamma_{K/F}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-分次分量 $V_{(c_\sigma/s)_\sigma}$。这表明，在带的层面上，gerbe 的缠结态射 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}} \times \mathcal{E}_{\mathrm{iso}} \to \mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$ 是投影映射。因此我们可以推得，该 gerbe 的缠结态射与投影映射 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}} \times \mathcal{E}_{\mathrm{iso}} \to \mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$ 一致，至多相差与 $a \in u(F) \times \mathbb{D}(F)$ 对应的 $\mathrm{Int}(a)$ 复合——我们猜想它实际上就等于投影映射，但尚未验证。注意，相差 $\mathrm{Int}(a)$ 的这一相等关系，已经意味着拉回映射$H^1_{\text{ét}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}},\ G) \to H^1_{\text{ét}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}} \times \mathcal{E}_{\mathrm{iso}},\ G)$ 与沿投影映射的拉回一致。

3.4. **约化为 Newton 中心化子**。我们从关于 $\mathrm{RigIsoc}_F$ 的一个基本结构性结果开始：

引理 3.4。范畴 $\mathrm{RigIsoc}_F$ 是半单的。

证明。我们改为处理范畴 $\mathrm{Rep}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}})$，我们在 §2.7 中证明了它可以与 $\mathrm{RigIsoc}_F$ 等同。根据 [DM82，命题 2.23], ，只需证明 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$ 是原约化的（在本证明中，“约化”是指单位元的连通分支是约化的）。这由以下事实推出：它可以写成如下形式的群的射影极限

$$1 \to [\frac{\mathrm{Res}_{E/F}(\mu_n)}{\mu_n}](\overline{F}) \to \mathcal{E}_{E/F,n} \to \Gamma_{K_E/F} \to 1,$$

其中 $K_E/E/F$ 是有限伽罗瓦扩张，参见 [Kal16a，§3.1],，它们全都是有限的 . □

前一个引理意味着，为了构造 $\mathrm{RigIsoc}_F$ 中的所有对象，重要任务是构造其简单对象。为此，我们回顾一下 GL_n 的扭曲 Levi 子群的一些标准事实。

回顾一下，对于定义在 F 上的约化群 G，若子群 $M \subset G$ 定义在 F 上，且 $M_F \subset G_F$ 是一个 Levi 子群，则称 $M \subset G$ 为扭曲 Levi 子群。若扭曲 Levi 子群 $M \subset G$ 是椭圆的，则称 $Z(M)$ 的 F-分裂秩等于 $Z(G)$ 的分裂秩。我们用 A_M 表示 $Z(M)$ 的最大分裂子环面。假设 $M \subset G$ 是一个非椭圆扭曲 Levi 子群。那么， $L = Z_G(A_M)$ 是包含 M 的 G 的真 Levi 子群。特别地， G 的椭圆扭曲 Levi 子群恰好是不包含在任何真 Levi 子群中的那些子群。

引理 3.5. </style} 上的GL 的扭曲 *Levi* 子群同构于

$$\prod_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{E_i/F}\mathrm{GL}_{n_i},$$

k其中 E_i/F 是次数为 m_i 的域扩张，且 $\sum m_i n_i = n$。

$i=1$

证明。 这一结论众所周知。参见 [FS25，引理 4.3。4] □

设 $X \in \mathrm{obj}(\mathrm{RigIsoc}_F)$，其通过 (2) 映射为一个代数 1-余循环 z_X： $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}} \to \mathrm{GL}_n$，其中带的相关代数同态为 ν_X。

[2]需要提醒读者，第一个函子不是张量函子，但与第二个函子复合后便是。

引理 3.6。 我们继续讨论 $G = \mathrm{GL}_n$。可以通过 $G(F)$ 对 z_X 进行共轭，使得 ν_X 具有平凡的伽罗瓦作用（即给出一个 F-有理同态 $u \to \mathrm{GL}_n$）。

证明。 我们首先说明，对于所有扭曲 Levi 子群 M，映射

$$H^1(F, N_G(M)) \to H^1(F, N_G(M)/M)$$

都是满射。注意，对于 M 极大环面，这一满射性是 Raghunathan 定理的推论。对于 $G = \mathrm{GL}_n$，我们可以证明一般扭曲 Levi 的情形。首先，假设 M 是一个 Levi 子群；于是 $N_G(M) \to N_G(M)/M$ 有一个自然的 $\Gamma_{F/F}$-等变分裂，该分裂来自置换矩阵。这意味着 M 是满射，随后我们通过扭曲证明一般情形。

设 $M = Z_G(\nu_X)$。由于 $G = \mathrm{GL}_n$，我们有 M 是 G_E 的一个扭曲 Levi，其中 E 是 ν_X 的定义域。注意，余边界对 z_X 的作用会在 ν_X 上诱导一个共轭作用，因而也在 M 上诱导一个共轭作用。群 M 可能不是 $\Gamma_{F/F}$-不变的，但由于 $G = \mathrm{GL}_n$ 是分裂的，F 上的每个 Levi 子群都与某个 F-有理 Levi 子群的基变换共轭，因此我们可以对 ν_X 进行共轭（并用相应的余边界扭曲 z_X），使得 M 是某个 G 的子群 L 到 F 的基变换。

因此，我们不妨假设 $M = L_F$ 是 $\Gamma_{F/F}$-稳定的。现在，z_X 通过函数在 $Z^1(F, N_G(L)/L)$ 中给出一个余循环

$$\sigma \mapsto \bar{\sigma} \mapsto z_X(\bar{\sigma}) \bmod L(\overline{F}),$$

其中 $\bar{\sigma}$ 是 $\sigma \in \Gamma_{F/F}$ 到 $\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$ 的任意一个提升（该余循环与提升的选取无关）。根据上面的论证，我们可以将 z_X 修改一个余边界，使得该余循环是从某个 $z \in Z^1(F, N_G(L))$ 经投影得到的。现在，假设存在某个 $h \in G(F)$，使得 $h\nu_X h^{-1}$ 是 $\Gamma_{F/F}$-不变的。那么我们计算可得，这等价于对每个 $\gamma \in \Gamma_{F/F}$ 都有 $h^{-1}\gamma(h)z_\gamma^{-1} \in L(F)$。如果我们知道 z_γ 来自 $H^1(F, N_G(L))$ 中的一个类，且该类在 $H^1(F, G)$ 中是平凡的，那么这当然成立。但后一个群再次是平凡的，因为 $G = \mathrm{GL}_n$。□

从现在起，我们假设 ν_X 由 $\Gamma_{F/F}$ 固定。

注 3.7. 连通约化群 G 的上同调集 $H^1_{\mathrm{alg}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, G)$ 在[DS24], 中得到了详细研究。该文仅讨论所谓的“正则”类，即由极大环面 T 的 G 经 $H^1_{\mathrm{alg}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, T)$ 映射得到的类。引理 3.6意味着 $[z] \in H^1_{\mathrm{alg}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, \mathrm{GL}_n)$ 中的每个类都是正则的，证明如下：结合 [DS24, 引理 2.8]（该引理指出，当 $z|_u$ 在 F 上定义时，有 $z \in Z^1_{\mathrm{bas}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, Z_G(z|_u))$）以及这一事实（[Kal16a, 推论 3.7]）：对于任意带有椭圆极大环面 T 的连通约化群 M，$H^1_{\mathrm{alg}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, T) \to H^1_{\mathrm{bas}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, M)$ 是满射。

引理 3.8. 在上述假设下，设 $M \subset \mathrm{GL}_n$ 是 z_X 所经过的一个极小扭曲 *Levi* 子群。若 X 是简单的，则 z_X 在 M 中是基本的（换言之，ν_X 经由 $Z(M)$ 分解），且 M 是椭圆的。另一方面，z_X 经由 GL_n 的椭圆扭曲 *Levi* 子群分解，当且仅当 X 是简单的。

证明。 假设 z_X 在 M 中不是基本的。令 $M' \subset M$ 为 ν_X 在 M 中的中心化子。由于 $G = \mathrm{GL}_n$，我们断言 M' 是 M 的一个扭曲 Levi 子群，因此 G。事实上，M' 是 GL_n 中若干两两交换的半单元素的中心化子的交，而这些中心化子各自都是扭曲 Levi 子群。此外，由于 ν_X 不是基本的，$M' \subset M$ 是真子群。余循环 z_X 经由 M' 分解，因为 $x \in \mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}$ 对 $\sigma \in \Gamma_{F/F}$ 的提升满足 $\mathrm{Int}(x)(\nu_X) = \mathrm{Int}(x)(\sigma(\nu_X)) = \nu_X$，因此 M 不是极小的。

如果 X 是简单的，那么 z_X 不可能通过任何非椭圆扭曲 Levi 子群分解，因为根据上述讨论，这将意味着 z_X 通过 G 的一个 Levi 子群分解，因此并非简单。

对于第二部分，注意到 X 是简单的，当且仅当 z_X 不经过 G 的真 Levi 子群。根据引理 3.5 之前的讨论，这等价于 z_X 不经过任何非椭圆扭曲扭曲 Levi 子群。□

3.5. **简单对象的分类**。 根据引理 3.8，只需理解对应于椭圆扭曲 Levi 子群 $M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_s)$ 的基本类的 $X \in \mathrm{obj}(\mathrm{RigIsoc}_F)$，这些对象不同构于如下形式的对象：对于一个对应于 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_{s'})$ 的基本对象 Y，其中 $cs' = s$ 满足 $c > 1$。事实上，这样的 X 的取值会落在非椭圆扭曲 Levi 子群 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_{s'})^c$ 中。

根据 [Kal16a, 推论 5.4], , 对于扭曲 Levi 子群 $M \subset \mathrm{GL}_n$，我们有一个双射 n

$$H^1_{\mathrm{bas}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, M) \cong X^*(\pi_0(Z(\widehat{M})^+)) = X^*(Z(\widehat{M})^+)_{\mathrm{tor}}, \tag{4}$$

其中 $Z(\widehat{M})^+$是 $Z(\widehat{M})^{\Gamma_{F/F}}$在 $\widehat{M} \cong \widehat{M}_{\mathrm{sc}}^- \times$ lim←中的原像 $_{z\mapsto z}$ $\frown Z(M)^\circ$。若 M 是椭圆的，则$_n$

$$M \cong \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_s,$$

对于某个次数为 m的扩张 E/F，满足 $n = ms$。于是 $Z(\widehat{M})^{\Gamma_{F/F}} \cong \mathbb{C}^\times$和 $\widehat{Z(}$ $\widehat{M})^+$同构于 $(\mu_s)^m \times (\varprojlim \mathbb{C}^\times)^m$的如下子群：$((a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m))$，满足 — $a_1 b_1 = \cdots = a_m b_{m^{z\mapsto z^n}}$，其中 b_i 是 b_i 到最后一个 $\mathbb{C}^\times$的投影。于是我们有笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} Z(\widehat{M})^+ & \longrightarrow & (\mu_s)^m \times \varprojlim_{z\mapsto z^n} Z(\widehat{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z(\widehat{M})^{\Gamma_{\overline{F}/F}} & \longrightarrow & Z(\widehat{M}) \end{array}$$

转到特征后，我们得到以下对应关系

$$X^*(Z(\widehat{M})^{\Gamma_{\overline{F}/F}}) = X^*(Z(\widehat{M}))_{\Gamma_{\overline{F}/F}} = X^*(Z(\widehat{M}))/X^*(Z(\widehat{M}))_0,$$

$\widehat{\ }$ $_$ $\widehat{\ }$其中 $X^*(Z(M))_0$由 $\gamma(x) - x$对 $\gamma \in \Gamma_{F/F}$ 和 $x \in X^*(Z(M))$生成，或者等价地，在将 $X^*(Z(M))$与 $\mathbb{Z}[\Gamma_{E/F}]$（或在 E/F不是伽罗瓦扩张时，与 — $\mathbb{Z}[\Gamma_{F/E}\backslash\Gamma_{F/F}] = \mathrm{Hom}_F(E, F)$$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$）对应起来后，它就是$\widehat{\ }$增广理想。进一步注意，$X^*(\varprojlim$ $_{z\mapsto z^n}$ $Z(M)) = X^*(Z(M))_{\mathbb{Q}}$。

因此，最终得到

$$X^*(Z(\widehat{M})^+) \cong [(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^m \times X^*(Z(\widehat{M}))_{\mathbb{Q}}]/X^*(Z(\widehat{M}))_0,$$

从而

$$X^*(Z(\widehat{M})^+)_{\mathrm{tor}} \cong [(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^m \times X^*(Z(\widehat{M}))_{\mathbb{Q},0}]/X^*(Z(\widehat{M}))_0.$$

膨胀-限制正合列 [Kal16a, (3.5)]

$$1 \to H^1(F, M) \to H^1_{\mathrm{bas}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, M) \to \mathrm{Hom}(u, Z(M))^{\Gamma_{\overline{F}/F}},$$

且首项消失意味着 $H^1_{\mathrm{bas}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, M) \cong X^*(Z(\widehat{M})^{\Gamma_{F/F}})$嵌入 $\mathrm{Hom}(u, Z(M))^{\Gamma_{\overline{F}/F}}$，后者可通过以下一系列对应关系表示

$$\cong \mathrm{Hom}(X^*(Z(M)), X^*(u))^{\Gamma_{\overline{F}/F}} = \mathrm{Hom}(X^*(Z(M)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong X^*(Z(\widehat{M}))_{\mathbb{Q}}/X^*(Z(\widehat{M})) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^m.$$

我们声称，映射

$$[(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^m \times X^*(Z(\widehat{M}))_{\mathbb{Q},0}]/X^*(Z(\widehat{M}))_0 \to X^*(Z(\widehat{M}))_{\mathbb{Q}}/X^*(Z(\widehat{M}))$$

由 $(a_i,\ b_i) \mapsto \frac{b_i}{s} - \frac{a_i}{s}$给出——很容易验证其像为 $[(\mathbb{Q}^m)_0 + (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^m]/\mathbb{Z}^m \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^m$。

命题证明。为验证该映射具有上述形式，我们在有限的 k 层级上进行检验，并与 [DS24 命题 4 的证明中的中间映射复合。21]

(5) $$H^1(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, Z_{M,k} \to M) \to \mathrm{Hom}(X^*(Z_{M,k}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(X^*(Z(M)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

其中 $Z_{M,\ k}$ 是 $Z(M)$ 的子群，由所有其 k 次幂属于 $Z(M_{\mathrm{der}})$ 的元素组成。我们断言，中间的群可典范地识别为映射$\frown\frown$ $\frown M/Z_{M,k} \to M$,的核的特征群，该映射记为 K，它同构于

$$\frac{(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^m \times \mathbb{Z}^m}{k\mathbb{Z}^m},$$

其中 $k\mathbb{Z}^m$ 的嵌入由 $(a_1、\ldots\ldots、\ a_m) \mapsto (a_1/k, \ldots, a_m/k) \overline{\times (a_1}, \ldots, \overline{a_m)}$给出。接受这一点后，(5) 中的第一个映射便是由包含关系诱导的映射

$$(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^m \times (\mathbb{Z}^m)_0 \hookrightarrow (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^m \times \mathbb{Z}^m.$$

最后，我们计算 (5) 中右侧的映射，并通过写出明确的识别来证明这一断言

$$X^*(K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X^*(Z_{M,k}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

首先，令 T 为 M 的一个极大环面，并令 $Z(M_1) := Z(M)/Z(M_{\mathrm{der}})$。于是我们有正合列

$$0 \to Z_{M,k} \to T \to T/Z_{M,k} \to 0,$$

以及同构

$$T/Z_{M,k} \cong T_{\mathrm{ad}} \times Z(M_1)/Z(M_1)[k],$$

如 [Kal18，第 71] 页所示。因此，我们有正合列

(6) $$0 \to X^*(T_{\mathrm{ad}}) \oplus X^*(\frac{Z(M_1)}{Z(M_1)[k]}) \to X^*(T) \to X^*(Z_{M,k}) \to 0.$$

$\widehat{\ }$ $\frown$ $\widehat{\ }$现在选取一个嵌入 $T \hookrightarrow M$，并且我们也用 T表示其像。现在我们对 (6) 应用函子 $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$，省略首项，并通过内射分解 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, 将 $\mathbf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(X^*(Z_{M,k}), \mathbb{Z})$ 识别为 $\mathbf{Hom}(X^*(Z_{M,k}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$，从而得到正合列

(7) $$X^*(\widehat{T}) \to X^*(\widehat{T}_{\mathrm{der}}) \oplus X^*(Z(\widehat{M})) \to \mathrm{Hom}(X^*(Z_{M,k}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0,$$

其中，第一个映射是对 $\widehat{T}_{\mathrm{der}}$的限制，加上沿 $Z(\widehat{M}) \xrightarrow{[k]} Z(\widehat{M}) \to \widehat{T}$的限制（利用 $\frown\frown$ $\frown$ $\frown Z(M_1) = Z(M)^\circ = Z(M)$）。只需计算 (7) 中第二个映射的显式描述；该映射将 $\widehat{X^*}(K)$ 映至 $\mathbf{Hom}(X^*(Z_{M,k}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，并且是一个连接同态。

$\widehat{\ }$我们选择 $X^*(T) = X^*((\mathbb{C}^\times、\ ^s)^m)$ 与 $(\mathbb{Z}^s)^m$之间的标准识别，使得 $X^*(T_{\mathrm{der}}) =(\mathbb{Z}^s/\Delta(\mathbb{Z}))^m$且 $X^*(Z(\widehat{M})) = (\mathbb{Z}^s/(\mathbb{Z}^s)_0)^m$。我们分别利用映射$((c_{i、\ j})_{1\leqslant i\leqslant s}) \mapsto ((c_{i、\ j} - c_{s、\ j})_{1\leqslant i\leqslant s-1})$和$(y_{i、\ j}) \mapsto (y_{1、\ j} \overline{+\cdots+ y_{s、\ j}})$，将前者识别为 $(\mathbb{Z}^{s-1})^m$，将后者识别为$\mathbb{Z}^m$（对应于基$\{e_{1、\ j}、\ \ldots、\ e_{s-1、\ j}\}_{1\leqslant j\leqslant m}$、$\{e_{1、\ j}\}_{1\leqslant j\leqslant m}$）。在这一坐标选择下，第一个映射显式地将$((c_{i、\ j})_{1\leqslant i\leqslant s})_{1\leqslant j\leqslant m}$映至$(c_{1、\ j} - c_{s、\ j}、\ \ldots c_{s-1、\ j} - c_{s、\ j}、\ c_{1、\ j} + \cdots + c_{s、\ j})_{1\leqslant j\leqslant m}$。因此，给定$\frown$ $\frown$ $\frown(x_{1、\ j、\ \ldots} x_{s-1、\ j、\ y_j})_j \in X^*(T_{\mathrm{der}}) \oplus X^*(Z(M))$，我们将其提升至 $X^*(T)_{\mathbb{Q}}$，得到$((x_{ij} + y_j/ks - (x_{1,j} + \frown \ldots x_{s-1\ j})/s, y_j/ks - (x_{1,j} + \ldots x_{s-1,j})/s)_{1\leqslant i\leqslant s-1})_j$，然后取其在 $X^*(T)_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$,中的像，得到

$$(y_j/ks - (x_{1,j} + \ldots x_{s-1,j})/s)_j \in (\mathbb{Z}/ks\mathbb{Z})^m = \mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/ks\mathbb{Z})^m, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(X^*(Z_{M,k}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

因此，当我们按照上一段所述，通过将（7）中的第二个映射限制到 $X^*(Z(M_{\mathrm{der}})) \oplus X^*(Z(M))$，对 $(x_{1、\ j、\ \ldots} x_{s-1、\ j、\ y_j})_j$ 的像进行因式分解时，可得到

$$(x_{1,j} + \cdots + x_{s-1,j}, y_j)_j \in X^*(Z(\widehat{M}_{\mathrm{der}})) \oplus X^*(Z(\widehat{M})) \mapsto (y_j/ks - (x_{1,j} + \ldots x_{s-1,j})/s)_j,$$

这正是所声称的映射。

□

还需要构造 X $\mathrm{RigIsoc}_F$ 的元素，其余循环 z_X 可通过 $M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}^{E/F}\mathrm{GL}_s$ 分解，并且对于该群是基本的，且其分次与上述斜率相匹配。注意，由于存在到 $\mathrm{Hom}(u$ 的注入，$Z(M))^{\Gamma_{F/F}}$,我们仅凭一个基本对象的分次就可以确定其类。

例 3.9。 我们考虑 E/F 是次数为 m 的非分歧情形。假设斜率映射的像是 $(a_\sigma/r)_\sigma$ 的类，其中 r 可被 s 和 $a_\sigma \in \mathbb{Z}$ 整除，且 $\sigma \in \Gamma_{E/F}$ 满足 $\sum_{\sigma\in\Gamma_{E/F}} a_\sigma/r = b/s$ 对某个 $b \in \mathbb{Z}$。

我们首先分析 $b = 0$ 的情形。通过用 $\mathbb{Z}^m$ 的一个元素修改 $(a_\sigma/r)_\sigma$，我们可以假设 a_σ/r 满足 $\sigma \neq \sigma'$ 的 $a_\sigma \neq a_{\sigma'}$。现在我们定义分次向量空间 V，使得对于每个 $\gamma \in \Gamma_{E/F}$，其 $\gamma\cdot(a_\sigma)_\sigma$-分次分量的维数为 s。令 $\alpha = \sum a_\sigma/r \in \mathbb{Z}$，并定义 Φ，使得 $\mathfrak{f}$ 半线性地作用，按 $\mathfrak{f}$ 置换分次，并将 $(a_\sigma)_\sigma$ 次分量的一组基按 ϖ^α 缩放。于是 $\mathfrak{f}_E$ 将 V 的一组基按 ϖ^α 缩放，因此 $\mathfrak{f}_E^r$ 按 $r\alpha = \sum a_\sigma$缩放。为了得到一个 $R\mathcal{I}_{E/F,r}$，的对象，我们再张量以σ $R_{E/F}$。

现在我们转向 $b \neq 0$ 的情形。令 K/E 为一个次数为 r 的全分歧扩张的分裂域，我们将在 $R\mathcal{I}_{K/F,r}$ 中构造一个对象。我们将分次 $(a_\sigma/r)_\sigma$ 提升到 K。具体而言，我们有一个元组 $\mu \in (\frac{1}{r}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{\Gamma_{K/F}}$，其中每个 a_σ/r 都出现若干个相同的副本，共 rk 个。于是 $\Gamma_{K/E}$ 对该元组的作用是平凡的。注意，此时 μ 所有项的和 α 是一个整数。我们再次定义 V 为一个 L_K 向量空间，其 $\gamma\cdot\mu$ 分次分量的维数为 s。定义 Φ，使得 $\mathfrak{f}$ 置换各分次分量，并将 μ 的一组基乘以 $\prod_{\sigma\in\Gamma_{K/F}} \sigma(\varpi_K)^{a_\sigma k}$。于是 $\mathfrak{f}_E$ 将 V 的一组基乘以适当次幂的 $\mathfrak{f}$，作用于到 $\prod \sigma(\varpi_K)^{a_\sigma k}$，而 $\mathfrak{f}_E^r$ 乘以 $\prod \sigma(\varpi_K)^{a_\sigma rk}$。最后，我们与 $R_{K/F}$ 作张量积。一般伽罗瓦 E/F 的情形类似。

引理3.10. 给定 $s \in \mathbb{N}$伽罗瓦，且 E/F，则例 *3.9* 中构造的对象 $(a_i) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\Gamma_{E/F}}$简单，当且仅当 $\sum a_i \in \frac{1}{s}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, 与 X 互素。

证明。 如果 c 是 $\sum a_i$ 和 s 的最大公约数，那么 $\sum a_i \in \frac{1}{s/c}\mathbb{Z}/\mathbb{Z},$, 因此例 3.9 也给出一个对象 Y，其 z_Y可经由 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_{s/c})$, 分解，且 X的每个 $\gamma\cdot(a_\sigma)$-分次直和项都是 Y的 $\gamma\cdot(a_\sigma)$-分次直和项的 c重直和；这说明若 $c > 1$，则 X 不可能是简单对象。反之，如果 $\sum a_\sigma$ 与 s 互素，那么 X 的每个 $\gamma\cdot(a_\sigma)$-分次直和项作为 E-等晶体都是简单的，因此在 $\mathrm{RigIsoc}_F$中自然也是简单的。□

继续取 $G = \mathrm{GL}_n$，对于固定的 $[z_X] \in H^1_{\mathrm{alg}}(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, G)$，我们证明可以找到一个代表元$z_X$，使得 ν_X 定义在 F上，并且 $Z_G(\nu_X) = M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_s)$，其中 E/F是有限伽罗瓦且 X是简单的。我们来看看这样一个由 $[z_X]$ 导出的 M是否唯一。上述工作表明，带有 F-有理 ν_X的代表元z_X在相差一个 g-余边界的意义下唯一，其中 $g \in G(F)$ 满足 $dg \in Z^1(F, M_{\mathrm{ad}})$；这会将 M替换为 $\mathrm{Int}(g)(M)$（我们称任何由这样的元素g将 M共轭得到的 M'为 M的稳定共轭）。由于我们坚持要求 $M \cong \mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_s)$——一个准分裂群——而任何其他这样的 $M' \cong \mathrm{Res}_{E'/F}(\mathrm{GL}_{s'})$ 都是通过扭曲同构 $\mathrm{Int}(g)$得到的 M的内形式，因此，两个这样的 M和M' 能被这样的一个 g 共轭，当且仅当 $s = s'$ 和 $E = E'$（更多细节见注 3.11）。特别地， M 完全确定了，因此 z_X 也唯一确定，至多相差取值于 $[N_G(M)/M](F)$的 $g \in N_G(M)(\overline{F})$的 g-余边界。

注 3.11。 如果 E/F 和 E'/F 是有限可分扩张，那么 GL_n的扭曲 Levi 子群 $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_s) \xrightarrow{\sim} M$和 $\mathrm{Res}_{E'/F}(\mathrm{GL}_{s'}) \xrightarrow{\sim} M'$稳定共轭，当且仅当 $s = s'$、$\backsim E$、 E' 作为 F的扩张同构，这意味着它们具有相同的伽罗瓦闭包 E。 [FS25，引理 4.3.4] 的证明表明， M 和 M' 是通过将 Levi 子群 M_0 由两个余循环 z_M 和 $z_{M'}$ 进行扭曲而构造的，它们表示 $H^1(F,\ W_0)$中的一个固定的类，其中 $W_0 := N_G(M_0)/M_0$。由于

$M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_s)$，余循环 z_M是同态 $\Gamma_{F/F} \to S_{[E:\ F]}$，由 $\Gamma_{F/F}$ 对 $\mathrm{Hom}_F(E,\ F)$的作用诱导而来——特别地，其核为 $\Gamma_{F/\widetilde{E}}$,；对于 $z_{M'}$，情况类似。由于 z_M与 $z_{M'}$上同调等价，这两个同态共轭，这意味着 Γ_F-集 $\mathrm{Hom}(E,\ F)$ 和 $\mathrm{Hom}(E',\ F)$ 同构。由格罗滕迪克伽罗瓦理论可知，E 和 E' 作为域扩张同构，正如所需。

对于 E/F 伽罗瓦，在作出如下识别后

$$[N_G(M)/M](F) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{E/F},$$

注 3.11 前一段中的观察，体现在这样一个事实中：对于元组 $(a_i) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\Gamma_{E/F}}$，其中 $\sum a_i \in \frac{1}{s}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ 对应于 X，若将 (a_i) 替换为它的任意一个 $\Gamma_{E/F}$-平移，我们得到的对象都与原对象同构。事实上，另一个这样的元组 (b_i) 给出的对象与 $\mathrm{RigIsoc}_F$ 中的 X 同构，当且仅当它们属于同一个 $\Gamma_{E/F}$-轨道。由此得出：

定理 *3.12. (1)* 对于 E/F 伽罗瓦，$\boldsymbol{RigIsoc}_F$ 中满足 $Z_G(\nu_X) \xrightarrow{\sim}$ 限制$_{E/F}(\boldsymbol{GL}_s)$ 的简单对象 X 的同构类，与满足以下条件的元组 $(a_i) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\Gamma_{E/F}}$ 的 $\Gamma_{E/F}$-轨道构成双射：$\sum a_i \in \frac{1}{s}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, (\sum a_i, s) = 1$，且不被任何满足 $H \neq \{1\}$ 的子群 $H \subseteq \Gamma_{E/F}$ 固定。*(2)* 更一般地，对于可分的 E/F，其伽罗瓦闭包为 E，$\boldsymbol{RigIsoc}_F$ 中满足 $Z_G(\nu_X) \xrightarrow{\sim}$ 限制$_{E'/F}(\boldsymbol{GL}_s)$ 的简单对象X（其中 E'是 F-线性嵌入 E 到 F 的像）的同构类，与以下各对的 $\Gamma_{\widetilde{E}/F}$-轨道构成双射：$(E', (a_i))$；这些对由这样的域 E' 和满足 $\sum a_i \in \frac{1}{s}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, (\sum a_i, s) = 1$ 的元组$(a_i) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathrm{Hom}_F(E',E)}$ 组成，且它们不是由 $F/K/E'$ 的真子扩张所对应的 $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathrm{Hom}_F(K,E)}$ 中的某个元素诱导而来。特别地，*(2)* 给出了 $\boldsymbol{RigIsoc}_F$ 中简单对象的完整分类。

证明。我们给出 (1) 的证明——应用注记 3.1 后，(2) 的证明类似。 1.

通过结合上文给出的映射 (4) 的显式计算，以及以下观察，可以得到所有同构类属于 $H^1(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, M)$ 且牛顿中心化子恰为 M 的简单对象的描述：这些对象是 $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\Gamma_{E/F}}$ 中上述描述的元组。若 $H \subseteq \Gamma_{E/F}$ 固定 (a_i)，则相应的简单对象 X 满足 $\mathrm{Res}_{E^H/F}(\mathrm{GL}_{s\cdot|H|}) \subseteq Z_G(\nu_X)$。两个这样的元素在 $H^1(\mathcal{E}_{\mathrm{Kal}}, G)$ 中具有相同像，当且仅当它们属于同一个 $\Gamma_{E/F}$-轨道；这一事实可由 [DS24, 命题 3.9] 的证明推出。□

参考文献

[BMO25] Alexander Bertoloni Meli 和 Masao Oi。局部朗兰兹对应的 *B(G)* 参数化。2025。arXiv：2211.13864 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/ abs/2211.13864。[DM82] P. Deligne 和 J. S. Milne。“坦纳范畴”。载于：霍奇循环、动机与志村簇。柏林，海德堡：施普林格·柏林·海德堡，1982 年，第 101–228 页。ISBN：978-3-540-38955-2。DOI：10.1007/978-3-540-38955-2_4。网址：https://doi.org/10.1007/978-3-540-38955-2_4。[DS24] Peter Dillery 和 David Schwein。离散参数的非基本刚性包 *L*-参数。2024。arXiv：2408.13908 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2408.13908。[Far22] Laurent Fargues。“关于 Kaletha 束堆、曲线和 Kottwitz 集合”。工作论文或预印本。2022 年 3 月。网址：https://hal.science/hal-03608672。[FS25] Jessica Fintzen 和 David Schwein。任意剩余特征下温和超尖点表示的构造。2025。arXiv：2501 . 18553 [math.RT]。网址：https : / / arxiv.org/abs/2501.18553。

[Kal16a] Tasho Kaletha。“实数群和 p-进群的刚性内形式”。载于：数学年刊（第 *2* 辑）184.2（2016），第 559–632 页。ISSN：0003-486X。DOI：10.4007/annals.2016.184.2.6。网址：https: //doi.org/10.4007/annals.2016.184.2.6。[Kal16b] Tasho Kaletha。“非准分裂群的局部朗兰兹猜想”。载于：自守形式族与迹公式。西蒙斯专题研讨会。施普林格，[Cham], 2016, ，第 217–257 页。ISBN：978-3-319-41422-5；978-3-319-41424-9。[Kal18] Tasho Kaletha。“刚性内形式与等晶体”。载于：欧洲数学学会杂志（*JEMS*）20.1（2018），第 61–101 页。ISSN：1435-9855,1435-9863。DOI：10 . 4171 / JEMS / 759。网址：https : / / doi.org/10.4171/JEMS/759。[Kot85] Robert E. Kottwitz。“带有附加结构的等晶体”。载于：组合数学56.2（1985），第 201–220 页。ISSN：0010-437X。网址：http://www.numdam.org/item?id=CM_1985_56 2 201 0。_ _ _ _[LR87] R. P. Langlands 和 M. Rapoport。“志村簇与丛”。载于：纯粹与应用数学杂志378（1987），第 113–220 页。ISSN：0075-4102,1435-5345。DOI：10.1515/crll.1987.378.113。网址：https://doi.org/10.1515/crll.1987.378.113。[Mil07] J. S. Milne。“坦纳范畴的商”。载于：*Theory Appl. Categ.*18（2007），第 21 号，654–664 页。[Tai25] Olivier Taibi。局部朗兰兹猜想。2025。arXiv：2510.00632 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2510.00632。[Vog93] David A. Vogan Jr. “局部朗兰兹猜想”。载于：群与代数表示论。第 145 卷。当代数学。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1993 年，第 305–379 页。ISBN：0-8218-5168-3。DOI：10.1090/conm/145/1216197。网址：https://doi.org/ 10.1090/conm/145/1216197。[Zhu25] Xinwen Zhu。朗兰兹参数栈上的相干层。2025。arXiv：2008.02998 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/2008.02998。

数学与统计学系，波士顿大学，联邦大道665号，波士顿，MA 02215, USA.

数学研究所，波恩大学，恩登尼歇尔大道60号，德国波恩53115，德国