arXiv:2601.07063v1 [math.AP] 11 Jan 2026

测度的勒贝格点与 Poisson-Hermite 积分的非切向收敛

G. FLORES，G. GARRIG´OS，B. VIVIANI

Abstract. 我们研究复测度 ν 在一点 $x_0 \in \mathbb{R}^d$处的可微性条件，以及泊松型积分 $\mathbb{P}_t\nu = e^{-t\sqrt{L}}\nu$在该点的边界收敛，其中 $L = -\Delta + |x|^2$ 是 Hermite 算子。特别地，我们证明，x_0 是 ν 的勒贝格点，当且仅当 $\mathbb{P}_t\nu$ 在 x_0处满足一种略强于非切向收敛的性质。我们还证明，当 x_0 是 ν的一个 σ-点时，$d = 1$ 也会非切向收敛；这种点的概念弱于勒贝格点，而对于 $d = 1$，它与经典 Fatou 条件一致。

1. Introduction

设 ν 是 $\mathbb{R}^d$上的局部有限复测度，也就是说，$\nu = \nu_1 + i\nu_2$ 和ν_1是有符号博雷尔测度，并且在紧集上有限。

我们将采用 Saeki 在 [14] 中定义的 ν 的勒贝格点概念。具体而言，若存在 $\ell \in \mathbb{C}$ 使得，我们称 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 是 ν 的一个勒贝格点，记作 $x_0 \in \mathcal{L}_\nu$，

$$\lim_{r\to 0} \frac{|\nu - \ell\, dy|\big(B_r(x_0)\big)}{|B_r(x_0)|} = 0. \tag{1.1}$$

这里，$dy(E) = |E|$ 表示集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 的标准勒贝格测度，而 $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \ |x - x_0| < r\}$。若将 ν 按勒贝格–拉东–尼科迪姆分解表示，即

$$\nu = f\, dy + \lambda, \quad \text{with } \lambda \perp dy \tag{1.2}$$

（例如参见 [6, 定理 3.12]），然后利用 $|\mu + \lambda| = |\mu| + |\lambda|$ 当$\mu \perp \lambda$时的性质，我们看到，$x_0 \in \mathcal{L}_\nu$ 当且仅当存在某个 $\ell \in \mathbb{C}$ 使得

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} |f(y) - \ell|\, dy = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{r\to 0} \frac{|\lambda|\big(B_r(x_0)\big)}{|B_r(x_0)|} = 0. \tag{1.3}$$

Date：2026年1月13日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 42C10、35C15、33C45、40A10、31B25、28A15。*Key words and phrases.* Hermite 算子、泊松积分、法图定理、勒贝格点。G.G. 获得了西班牙国家研究署的 PID2022-142202NB-I00 项目资助，以及穆尔西亚大区塞内卡基金会的 21955-PI22 项目资助。F.G. 获得了国家科学技术研究委员会和科尔多瓦国立大学科学技术秘书处的部分资助。.

特别地，如果 $\nu = f dx$，这就是函数f的通常勒贝格点概念；而对于如（1.2）中的一般 ν，我们有

$$\mathcal{L}_\nu = \mathcal{L}_f \cap \mathcal{L}_\lambda.$$

还要注意，如果 $x_0 \in \mathcal{L}_\nu$，我们可以通过令以下内容来表示 (1.1) 中的 ℓ，而无需借助勒贝格-拉东-尼科迪姆分解

$$\ell = D\nu(x_0) := \lim_{r\to 0} \frac{\nu\big(B_r(x_0)\big)}{|B_r(x_0)|}. \tag{1.4}$$

事实上，该恒等式可由以下基本界推出

$$\left|\frac{\nu\big(B_r(x_0)\big)}{|B_r(x_0)|} - \ell\right| \quad = \quad \left|\frac{(\nu - \ell\, dy)\big(B_r(x_0)\big)}{|B_r(x_0)|}\right| \le \frac{|\nu - \ell\, dy|\big(B_r(x_0)\big)}{|B_r(x_0)|} \longrightarrow 0.$$

(1.4) 中的 $D\nu(x_0)$ 有时称为测度 ν 在 x_0 处的 对称导数；例如参见 [13, Def7.2]。

现在考虑 Hermite 算子

$$L = -\Delta + |x|^2, \quad \text{in } \mathbb{R}^d,$$

及其相关的泊松半群

$$\mathbb{P}_t = e^{-t\sqrt{L}} = \tfrac{t}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\, e^{-\tau L}\, \frac{d\tau}{\tau^{3/2}};$$

例如参见 [17, 第 2 章2]。这一半群（以及涉及 Ornstein-Uhlenbeck 算子 $-\Delta + 2x\cdot\nabla$的密切相关半群）已在调和分析中得到广泛研究；例如参见 [11, 19, 18, 9, 20]。我们希望对测度 ν 在单点 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 处建立温和的可微性条件，使得泊松积分

$$\mathbb{P}_t\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_t(x,y)\, d\nu(y), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \tag{1.5}$$

在 $(t,\ x) \to (0,\ x_0)$ 时具有非切向极限。

当 L 为 Hermite 算子时，核 $\mathbb{P}_t(x,\ y)$ 可以显式求得；精确表达式见下文（2.1），并且其增长率（对固定的 t 和 x而言）由函数确定

$$\Phi(y) := \frac{e^{-|y|^2/2}}{(1+|y|)^{\frac{d}{2}}\,[\log(e+|y|)]^{\frac{3}{2}}}, \quad y \in \mathbb{R}^d. \tag{1.6}$$

具体而言，文献 [8, 引理 4.1] 表明，对于每个 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，存在 $c_j(t,\ x) > 0$、$j = 1,\ 2$，使得

$$c_1(t,x)\,\Phi(y) \le \mathbb{P}_t(x,y) \le\ c_2(t,x)\,\Phi(y), \quad y \in \mathbb{R}^d. \tag{1.7}$$

特别地，令 $\mathcal{M}(\Phi)$表示 $\mathbb{R}^d$中满足以下条件的（局部有限）复测度集合 ν

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y)\, d|\nu|(y) < \infty,$$

由此可知，根据 (1.7)，若 $\nu \in \mathcal{M}(\Phi)$，则 (1.5) 中的函数 $\mathbb{P}_t\nu(x)$ 对所有 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$ 都有定义。此外，$u(t,\ x) = \mathbb{P}_t\nu(x)$ 在 $\mathbb{R}^{d+1}_+ = (0,\ \infty) \times \mathbb{R}^d$ 中是光滑的，并满足偏微分方程

$$u_{tt} = -\Delta_x u + |x|^2 u,$$

例如，参见 [5,定理 1.3]。

本文的第一个结果探讨了勒贝格点条件、$x_0 \in \mathcal{L}_\nu$与非切向极限存在性之间的关系

$$\lim_{|x-x_0|<\alpha t\to 0} \mathbb{P}_t\nu(x),$$

对每个 $\alpha > 0$ 都成立。我们将证明以下结论

定理 1.1。设 $\nu \in \mathcal{M}(\Phi)$ 且 $x_0 \in \mathbb{R}^d$。则下列断言等价

(i) $x_0 \in \mathcal{L}_\nu$;

(ii) $\lim_{t\to 0} \mathbb{P}_t\big(|\nu - \ell\, dy|\big)(x_0) = 0$, *for some* $\ell \in \mathbb{C}$;

(iii) $\lim_{|x-x_0|<\alpha t\to 0} \mathbb{P}_t\big(|\nu - \ell\, dy|\big)(x) = 0$, *for some* $\ell \in \mathbb{C}$ *and some (all)* $\alpha > 0$.

此外，若这些断言成立，则可取 $\ell = D\nu(x_0)$，并且对每个 $\alpha > 0$ 也有

$$\lim_{|x-x_0|<\alpha t\to 0} \mathbb{P}_t\nu(x) = D\nu(x_0). \tag{1.8}$$

作为第二个结果，我们给出一个比勒贝格点条件更弱、但仍能保证非切向收敛的条件。这就是 V. Shapiro 在 [16] 中引入的 σ-点概念；另见 [15]。若存在 $\ell \in \mathbb{C}$ 使得 ……，我们就称 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 是复测度 ν 的一个（局部有限） σ-点，记作 $x_0 \in \mathfrak{S}_\nu$。

$$\lim_{|x-x_0|+r\to 0} \frac{\big|(\nu - \ell\, dy)(B_r(x))\big|}{(|x-x_0|+r)^d} = 0. \tag{1.9}$$

注意，若 x_0 是一个 σ-点，则 ν 在 x_0 处有对称导数，因此在 (1.9) 中可以取 $\ell = D\nu(x_0)$。这只需将上面的极限限制在 $x = x_0$ 上即可得出。此外，由于 $B_r(x) \subset B_{r+|x-x_0|}(x_0)$，我们有

$$\mathcal{L}_\nu \subset \mathfrak{S}_\nu,$$

根据 [16, §3] 中的例子，这个包含关系可以是严格的。最后，当 $d = 1$ 时，有一个简单的刻画：将 ν 写成勒贝格–斯蒂尔切斯测度 $\nu = dm_F$，其中

$$\nu\big((a,b]\big) = F(b) - F(a);$$

例如参见 [6, 定理 1.16]。那么，当且仅当 F 在 x_0处可微时，$x_0 \in \mathfrak{S}_\nu$ 成立，此时

$$F'(x_0) = \ell = D\nu(x_0).$$

证明是初等的；另请参见 [15, 命题 3.4]。

我们的第二个结果表述如下。

定理 1.2. 设 $\nu \in \mathcal{M}(\Phi)$ 是 ν 的一个 σ-点。设 $\ell = D\nu(x_0)$。 *(i)* 若 $d \in \{1,2,3\}$，则

$$\lim_{|x-x_0|<\alpha t \to 0} \mathbb{P}_t\nu(x) = \ell, \quad \forall\, \alpha > 0. \tag{1.10}$$

(ii) 若 $d \geq 4$，则在另外假设下，(1.10) 成立

$$\lim_{r\to 0} \frac{|\nu - \ell\, dy|(B_r(x_0))}{r^{d-3}} = 0. \tag{1.11}$$

作为推论，当 $d = 1$ 时，我们在经典 Fatou 条件下得到非切向收敛，参见 [2] 或 [21，定理 III.7.9.ii]。这一结果对于 Poisson-Hermite 积分似乎是新的。

推论 1.3. 设 $d = 1$ 和 $\nu = m_F$ 是 $\mathcal{M}(\Phi)$ 上的 *Lebesgue-Stieljes* 测度。若 F 在 x_0 上可微，则

$$\lim_{|x-x_0|<\alpha t \to 0} \mathbb{P}_t\nu(x) = F'(x_0), \quad \forall\, \alpha > 0.$$

最后我们指出，当 $x_0 = 0$ 时，由于所得核 $\mathbb{P}_t(0, y)$ 具有特殊的对称性，条件 (1.11) 可以略微放宽（若 $d = 4$，甚至可以去掉）；详见下文定理 3.3 中的精确表述。

我们来谈谈关于 Poisson-Hermite 半群的这些问题的既有结果。当初始数据是函数时，即 $\nu = f\, dy$，关于 $\mathbb{P}_t f$ 几乎处处收敛的一般性结果可追溯至 [11]，，另见 [18, 8]。这些文献包含主要的核估计，但没有讨论在 f 的各个勒贝格点处的收敛性。近期，[7]（针对相关的 Laguerre 算子）给出了关于这些点的一个结论；其证明需要一番论证，我们将在新的引理 2.4 中进一步展开。关于以测度 ν 作为初始数据的情形，我们只知道 $\mathbb{P}_t\nu$ 在 [5，中的几乎处处结果；这些结果同样没有考察各个点处的行为。

关于定理 1.2，文献中似乎尚无针对 Poisson-Hermite 积分、采用比勒贝格点更弱概念的结果，即使 ν等于 f 或 $d = 1$时也是如此。然而，在调和函数的经典情形下，关于非切向收敛最优条件的研究文献十分丰富；例如参见 [10, 12, 1]，或较新的 [14, 16, 15] 及其中的参考文献。后两篇论文考虑了单位近似的一般情形，但始终与具有伸缩结构的卷积核相关，也就是说，

$$K_t(x, y) = t^{-d}\phi((x - y)/t), \quad t > 0,$$

并且通常具有径向递减的 ϕ。

此处的一个新颖之处在于，必须考虑不具备这种卷积结构的核 $\mathbb{P}_t(x,\ y)$，因此需要采用不同的方法来完成证明。我们的方法将基于将核适当地分解为径向部分和非径向部分，并对核给出非常精确且最优的估计

这些估计适用于维数 $d \le 3$，但当 $d \ge 4$ 时还需要附加条件 (1.11)。我们不知道定理 1.2 是否可以在没有这一假设的情况下成立（如果 $x_0 \neq 0$），不过鉴于 [4], 中的例子，这似乎不太可能；在那些例子中，对于维数 $d \ge 4$，与 $\mathbb{P}_t\nu(x_0)$ 的通常收敛相关的类似条件也会出现，并且在该情形下无法去掉。尽管如此，我们仍指出，由于分母中有因子 r^{d-3}，条件 (1.11) 相当宽松（当然弱于勒贝格点条件）。

本文结构如下。第 2 节整理符号和所需的核估计，并给出定理 1.1 的证明。我们在 §2.3 中证明一个一般性的引理 2.4，该引理本身也可能具有独立的研究价值。最后，第 3 节详细证明定理 1.2。

2. Proof of Theorem 1.1

显然，(iii) 蕴含 (ii)。我们将在不同的小节中证明其余的蕴含关系。下面采用如下记号

$$p_t(z) = \frac{t}{(t^2+|z|^2)^{\frac{d+1}{2}}},$$

除相差一个乘法常数外，它就是标准的泊松核。还需回顾一下，与 Hermite 算子相关的泊松核 $\mathbb{P}_t(x,y)$ 可显式表示为

$$\mathbb{P}_t(x,y) = c_d\, t \int_0^1 \frac{e^{-\frac{t^2}{\ell(s)}}\,(1-s^2)^{\frac{d}{2}-1}\, e^{-\frac{1}{4}(\frac{|x-y|^2}{s}+s|x+y|^2)}}{s^{\frac{d}{2}}\,\big(\ell(s)\big)^{3/2}}\, ds, \tag{2.1}$$

其中 $\ell(s) = 2\ln\frac{1+s}{1-s}$ 且 $c_d > 0$；例如参见 [8, (4.1)]。注意，当 $s \in (0,1/2)$ 时，$\ell(s) \approx s$；这一事实我们将在下文中频繁使用。

2.1. 证明 $(ii) \implies (i)$。 我们有核 $\mathbb{P}_t(x,y)$ 的如下下界估计。

引理2.1。 给定 $R \ge 1$，存在常数 $\delta_R > 0$ 使得

$$\mathbb{P}_t(x,y) \ge \delta_R\, p_t(x-y), \quad \textit{when } |x|,|y|,t \le R. \tag{2.2}$$

证明。如果将（2.1）中的积分范围限制在 $s \in (0,1/2)$，使得 $\ell(s) \approx s$，忽略无关紧要的项后，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_t(x,y) &\gtrsim t \int_0^{1/2} \frac{e^{-\frac{c\,t^2}{4s}}\, e^{-\frac{1}{4}(\frac{|x-y|^2}{s}+s|x+y|^2)}}{s^{\frac{d+3}{2}}}\, ds \\
&\ge e^{-\frac{R^2}{2}}\, t \int_0^{1/4} \frac{e^{-\frac{c\,t^2+|x-y|^2}{4s}}}{s^{\frac{d+1}{2}}}\, \frac{ds}{s} \\
&= \frac{c_R\, t}{(ct^2+|x-y|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \int_{ct^2+|x-y|^2}^{\infty} e^{-u} u^{\frac{d+1}{2}}\, \frac{du}{u},
\end{aligned}$$

最后一步作变量代换 $u=(c\,t^2+|x-y|^2)/(4s)$。再次利用假设 $|x|,|y|,t\le R$，最后一个积分有如下界

$$\int_{(4+c)R^2}^{\infty} e^{-u}u^{\frac{d+1}{2}}\,\frac{du}{u}=c'_R.$$

合并这些表达式即可得到 (2.2)。 □

回到定理 1.1 的证明，假设 (ii) 成立，并记作$|\nu-\ell dx|=\mu$。取 $R\ge|x_0|+1$ 和 $t\le 1$。于是，由前面的引理可得

$$\mathbb{P}_t\big(\mu\big)(x_0)\ \ \gtrsim\ \ \delta_R\int_{|y-x_0|\le t}p_t(x_0-y)\,d\mu(y).$$

由于当 $|x_0-y|\le t$时， $p_t(x_0-y)\approx t^{-d}$，这就意味着

$$\mathbb{P}_t\big(\mu\big)(x_0)\gtrsim\frac{\mu\big(B_t(x_0)\big)}{|B_t(x_0)|}.$$

由 (ii)，当 $t\to 0$时，左端趋于 0，因此右端也趋于 0。由于 $\mu=|\nu-\ell\,dx|$，这意味着 x_0 是 ν 的一个勒贝格点（因此也有 $\ell=D\nu(x_0)$）。

2.2. **证明** $(i)\implies(iii)$。我们将使用以下关于 $\mathbb{P}_t(x,\ y)$ 的上界，该上界见 [8, 引理 4. 2]。

引理 2.2。存在常数 $\gamma\ge 2$ 和连续函数 $C(x)$，使得

$$\mathbb{P}_t(x,y)\le C(x)\Big[p_t(x-y)\mathbb{1}_{|y|\le\gamma\max\{|x|,1\}}\ +\ t\,\Phi(y)\Big],$$

对于所有 $t>0$ 和 x，均有 $y\in\mathbb{R}^d$。

我们还引用以下初等引理。

引理 2.3。设 $\alpha>0$。则存在 $C_\alpha>0$，使得

$$\frac{1}{C_\alpha}\big(|x_0-y|+t\big)\le|x-y|+t\le C_\alpha\big(|x_0-y|+t\big),\tag{2.3}$$

每当 $|x-x_0|\le\alpha t$ 和 $y\in\mathbb{R}^d$ 时，均有此结论。

证明。利用条件 $|x-x_0|\le\alpha t$ 和三角不等式即可得到初等证明。事实上，一方面

$$|x-y|+t\le|x-x_0|+|x_0-y|+t\le|x_0-y|+(\alpha+1)t,$$

这意味着 (2.3) 中的上界满足 $C_\alpha=\alpha+1$。交换 x 和 x_0 的角色后，即可由上界推出下界。□

我们转而证明定理 1.1 的 (iii)。由于我们关注的是 x_0 处的非切向极限，因此固定 $\alpha>0$，并且只考虑满足$|x-x_0|\le\alpha t\le 1$的点 $(t,\ x)$。对于这样的点，由引理 2.2 和 2.3 可知

$$\mathbb{P}_t(x,y)\lesssim C_{x_0}\Big[p_t(x_0-y)\mathbb{1}_{|y|\le\gamma(|x_0|+2)}\ +\ t\,\Phi(y)\Big],\quad\forall\,y\in\mathbb{R}^d,$$

其中某个常数为 $C_{x_0} > 0$ （我们可以取 $\max_{|x| \le |x_0|+1} C(x)$）。为简便起见，我们记

$$K = \big\{ y \in \mathbb{R}^d \ : \ |y| \le \gamma(|x_0| + 2) \big\},$$

并且如前所述，我们记作 $\mu = |\nu - \ell dx|$。于是，前面的不等式推出

$$\mathbb{P}_t \mu(x) \ \lesssim \ C_{x_0} \Big[\int_K p_t(x_0 - y)\, d\mu(y) \ + \ t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y)\, d\mu(y) \Big]. \tag{2.4}$$

假设 $\nu \in \mathcal{M}(\Phi)$，这意味着最后一项为 $O(t)$，因为 $t \to 0$，因此我们只需估计第一项

$$\int_K p_t(x_0 - y)\, d\mu(y).$$

这里可以利用关于标准泊松核的已知结果，得到

$$\lim_{t \to 0} \int_K p_t(x_0 - y)\, d\mu(y) = 0, \tag{2.5}$$

在假设 $x_0 \in \mathcal{L}_\nu$ 下。为完整起见，我们简要概述论证。给定 $\varepsilon > 0$，我们选取 $\delta > 0$ 使得

$$\frac{\mu\big(B_r(x_0)\big)}{r^d} < \varepsilon, \quad r \in (0, 2\delta]. \tag{2.6}$$

当 $|y - x_0| \ge \delta$ 时，我们有 $p_t(x_0 - y) \le t/\delta^{d+1}$，因此

$$\int_{y \in K \setminus B_\delta(x_0)} p_t(x_0 - y)\, d\mu(y) \le \ \frac{t\, \mu(K)}{\delta^{d+1}} < \varepsilon, \tag{2.7}$$

若 $t < t_0 := \min\{\varepsilon\, \delta^{d+1}/\mu(K) \ \delta\}$。另一方面，给定任意这样的 t，我们可以找到一个整数 $J \in \mathbb{N}$，使得

$$\delta < 2^J t \le 2\delta.$$

因此，令 $S_j := B_{2^j t}(x_0) \setminus B_{2^{j-1} t}(x_0)$，并利用 $p_t(x_0 - y) \lesssim t^{-d} 2^{-j(d+1)}$ in S_j，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta(x_0)} p_t(x_0 - y)\, d\mu(y) \quad &\lesssim \quad \int_{B_t(x_0)} t^{-d}\, d\mu(y) + \sum_{j=1}^{J} \int_{S_j} (2^j t)^{-d} 2^{-j}\, d\mu(y) \\ &\le \quad \frac{\mu(B_t(x_0))}{t^d} + \sum_{j=1}^{J} 2^{-j} \frac{\mu(B_{2^j t}(x_0))}{(2^j t)^d} \\ &\le \quad 2\varepsilon, \end{aligned}$$

在最后一步使用（2.6）。这就证明了（2.5）。

2.3. **定理 1.1 的最后一个断言**。还需证明，在假设 (iii) 下，它也成立

$$\lim_{|x-x_0|<\alpha t\to 0} \mathbb{P}_t\nu(x) = \ell.$$

这将是以下引理的推论。

引理 2.4. 令 $\nu \in \mathcal{M}(\Phi)$ 且 $\ell \in \mathbb{C}$。则函数

$$E(t,x) := \big(\mathbb{P}_t\nu(x) - \ell\big) - \mathbb{P}_t(\nu - \ell\, dy)(x)$$

满足

$$\lim_{(t,x)\to(0,x_0)} E(t,x) = 0, \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

事实上，假设该引理成立并利用 (iii)，可得

$$\big|\mathbb{P}_t\nu(x) - \ell\big| \le \mathbb{P}_t|\nu - \ell\, dy|(x) + |E(t,x)| \longrightarrow 0,$$

当 $|x - x_0| < \alpha t \to 0$ 时。

现在我们证明引理 2.4。需要指出的是，这并非完全显然，因为对于 Hermite 算子，我们没有 $\mathbb{P}_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ （因为 $\lambda = 0$ 不是 L的特征值）。我们将改用一种借鉴自 [3, §3.2] （另见 [7, §6]）的论证，并将其推广到更一般的正自伴算子L。唯一需要用到的是 L存在一个正则正特征向量，也就是说，存在$\psi \in \mathrm{Dom}(L)$使得

(a) $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (b) $\psi(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$(c) $L(\psi) = \lambda\psi$，其中某个 $\lambda \ge 0$。

当 $L = -\Delta + |x|^2$ 时，容易验证

$$\psi(x) = e^{-|x|^2/2} \tag{2.8}$$

满足这些性质，其中 $\lambda = d$。

证明 引理 2.4： 设 $\psi(x)$ 如 (2.8) 中所述。由于 $\mathbb{P}_t = e^{-t\sqrt{L}}$，我们还有

$$\mathbb{P}_t\psi = e^{-t\sqrt{\lambda}}\psi.$$

Then

$$\mathbb{P}_t\nu(x) - \ell \;=\; \big(\mathbb{P}_t\nu(x) - \ell\, e^{-t\sqrt{\lambda}}\big) \;+\; \big(e^{-t\sqrt{\lambda}} - 1\big)\,\ell. \tag{2.9}$$

最后一项在 $t \to 0$ 时趋于 0，因此我们考察第一项。由于$\psi(x_0) > 0$，我们不妨考虑

$$A(t,x) := \psi(x_0)\,\big(\mathbb{P}_t\nu(x) - \ell\, e^{-t\sqrt{\lambda}}\big),$$

利用 $\mathbb{P}_t\psi = e^{-t\sqrt{\lambda}}\psi$ ，我们可以将其写为

$$\begin{aligned} A(t,x) &= \big[\psi(x_0)\,\mathbb{P}_t\nu(x) - \ell\,\mathbb{P}_t\psi(x)\big] \;+\; \ell\,\big[\mathbb{P}_t\psi(x) - \mathbb{P}_t\psi(x_0)\big] \\ &= A_1(t,x) + A_2(t,x). \end{aligned}$$

Now,

$$|A_2(t,x)| = |\ell|\, e^{-t\sqrt{\lambda}}|\psi(x) - \psi(x_0)| \longrightarrow 0, \quad \text{if } |x - x_0| \to 0,$$

根据 ψ的连续性。最后,

$$\begin{aligned} A_1(t,x) &= \psi(x_0)\,\mathbb{P}_t(\nu-\ell\,dy)(x) \,-\, \ell\,\mathbb{P}_t\big(\psi-\psi(x_0)\big)(x) \\ &= A_{1,1}(t,x)+A_{1,2}(t,x). \end{aligned}$$

由于函数 $g=\psi-\psi(x_0)$ 处处连续（并且在 x_0 处为零），利用引理 2.2 以及关于单位近似的标准结果，可以证明

$$|A_{1,2}(t,x)| \le |\ell|\,\mathbb{P}_t|g|(x) \lesssim \big(p_t * |g|\big)(x) + t\int |g|\Phi \longrightarrow 0,$$

当 $|x-x_0|+t\to 0$ 时。因此,

$$A(t,x) = A_{1,1}(t,x)+O(1).$$

将此表达式除以 $\psi(x_0)$，并代回式 (2.9)，可得

$$\mathbb{P}_t\nu(x)-\ell\, = \mathbb{P}_t(\nu-\ell\,dy)(x)+O(1).$$

这就证明了引理 2.4，从而完成了定理 1.1 的证明。 □

3. Proof of Theorem 1.2

只需考虑 $\ell=0$ 的情形；否则，可对测度 $\mu=\nu-\ell\,dy$ 应用相同的推理，并结合引理 2.4。我们固定 $\alpha>0$，并须证明

$$\lim_{|x-x_0|<\alpha t\to 0} \mathbb{P}_t\nu(x) = 0. \tag{3.1}$$

根据条件 $x_0\in\mathfrak{S}_\nu$（其中 $\ell=0$），对于任意固定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,1)$ 使得

$$\big|\nu\big(B_r(x)\big)\big| \le \varepsilon\,(|x-x_0|+r)^d, \quad \text{whenever } |x-x_0|+r<2\delta. \tag{3.2}$$

如果维数 $d\ge 4$，我们还假设 δ 的选取满足

$$|\nu|\big(B_r(x_0)\big) \,<\, \varepsilon\, r^{d-3}, \quad \text{when } r<2\delta, \tag{3.3}$$

鉴于 (1.11) 中的假设。

证明的第一部分与定理 1.1 的证明类似：我们只考虑满足 $|x-x_0|\le \alpha t\le 1$ 的点 $(t,\ x)$；特别地，$|x|\le |x_0|+1$。由引理 2.2 可得

$$\mathbb{P}_t(x,y) \lesssim C_{x_0}\Big[p_t(x-y)\mathbb{1}_{|y|\le\gamma(|x_0|+2)} \,+\, t\,\Phi(y)\Big], \quad \forall\, y\in\mathbb{R}^d,$$

对于某个常数 $C_{x_0}>0$。在区域 $|x-y|\ge\delta$ 中，我们有 $p_t(x-y)\lesssim t/\delta^{d+1}$，因此上述界给出

$$\begin{aligned} \int_{|x-y|\ge\delta} \mathbb{P}_t(x,y)\,d\,|\nu|(y) &\lesssim C'_{x_0}\,\big(\delta^{-d-1}+\int\Phi\,d|\nu|\big)\cdot t \\ &= c(x_0,\delta)\cdot t \,<\, \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.4}$$

假设 $t < t_0 := \min\{\varepsilon/c(x_0,\ \delta)\ \delta\}$ 即可。因此，在证明的余下部分，我们将致力于证明

$$\Big|\int_{|x-y|<\delta} \mathbb{P}_t(x,y)\, d\,\nu(y)\Big| = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

当 $|x - x_0| \le \alpha t$ 和 t 足够小时。由于 $|x| \le |x_0| + 1$，我们有

$$B_\delta(x) \subset \{y \in \mathbb{R}^d \ :\ |y| \le |x_0| + 2\} =: K,$$

因此，接下来我们可以假设 ν 的支集包含于紧集 K中。

接下来，我们去掉另一个无关紧要的项：定义泊松核的"局部"部分如下:

$$\mathbb{P}^0_t(x,y) := \ c_d\, t \int_0^{1/2} \frac{e^{-\frac{t^2}{\ell(s)}}\,(1-s^2)^{\frac{d}{2}-1}\, e^{-\frac{1}{4}(\frac{|x-y|^2}{s}+s|x+y|^2)}}{s^{\frac{d}{2}}\,\big(\ell(s)\big)^{3/2}}\, ds. \tag{3.5}$$

于是我们有

$$\mathbb{P}^1_t(x,y) := \mathbb{P}_t(x,y) - \mathbb{P}^0_t(x,y)\ \le\ C\, t \int_{1/2}^1 (1-s^2)^{\frac{d}{2}-1} ds = C'\, t,$$

对于某个 $C' > 0$ （仅取决于 d），因此

$$\int_K \mathbb{P}^1_t(x,y)\, d|\nu|(y)\ \le\ C'\,|\nu|(K)\cdot t = C''\, t < \varepsilon, \tag{3.6}$$

若 $t < t_1 = \min\{t_0, \varepsilon/C''\}$。因此，只需证明

$$A(t,x) := \int_{|x-y|<\delta} \mathbb{P}^0_t(x,y)\, d\,\nu(y) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

当 $|x - x_0| \le \alpha t$ 和 t 充分小时。以下固定 x，并作变量代换 $y = x + h$，将上式改写为

$$A(t,x) = \int_{|h|<\delta} \mathbb{P}^0_{t,x}(h)\, d\,\nu_x(h),$$

为简便起见，我们记

$$\mathbb{P}^0_{t,x}(h) := \mathbb{P}^0_t(x, x+h) \quad \text{and} \quad \nu_x(E) := \nu(x+E),\ \ E \subset \mathbb{R}^d.$$

此时核的形式为

$$\mathbb{P}^0_{t,x}(h) = \ c_d\, t \int_0^{1/2} \frac{e^{-\frac{t^2}{\ell(s)}}\,(1-s^2)^{\frac{d}{2}-1}}{s^{\frac{d}{2}}\,\big(\ell(s)\big)^{3/2}}\, e^{-\frac{|h|^2}{4s}}\, e^{-\frac{s|2x+h|^2}{4}}\, ds.$$

这不是关于 h 的径向函数，因此我们将其拆分为径向部分和余项。为此，我们写成

$$\begin{aligned} e^{-\frac{s|2x+h|^2}{4}} \ &= \ e^{-s|x|^2}\, e^{-\frac{s|h|^2}{4}}\, e^{-s\,x\cdot h} \\ &= \ e^{-s|x|^2}\, e^{-\frac{s|h|^2}{4}}\, \big(1 + R(s\,x\cdot h)\big), \end{aligned}$$

其中令 $u = s\,x\cdot h$，我们得到

$$|R(u)| = |e^{-u} - 1| = \Big|\int_0^u e^{-v}\, dv\Big| \le |u|\, e^{|u|} \le c_{x_0}\, s\,|x|\,|h|, \tag{3.7}$$

因为 $s \in (0, 1/2)$, $|h| \le 1$ 且 $|x| \le |x_0| + 1$。现在我们将其拆分

$$\mathbb{P}^0_{t,x}(h) = \mathcal{K}_{t,x}(h) + \mathcal{R}_{t,x}(h), \tag{3.8}$$

其关于变量 h 的"径向部分"$\mathbb{P}^0_{t,x}$ 由下式给出

$$\mathcal{K}_{t,x}(h) = c_d\, t \int_0^{1/2} \frac{e^{-\frac{t^2}{\ell(s)}}\,(1-s^2)^{\frac{d}{2}-1}}{s^{\frac{d}{2}}\,\big(\ell(s)\big)^{3/2}}\, e^{-\frac{|h|^2}{4}(s+\frac{1}{s})}\, e^{-s|x|^2}\, ds. \tag{3.9}$$

核 $\mathcal{R}_{t,x}(h)$ 有类似的表达式，只是在积分中多了一个（非径向）因子$R(s\,x\cdot h)$。忽略不重要的项，可将其估计为

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{t,x}(h) &\lesssim t \int_0^{1/2} \frac{e^{-\frac{c\,t^2}{4s}}\, e^{-\frac{|h|^2}{4s}}\, s\,|x|\,|h|}{s^{\frac{d+3}{2}}}\, ds \\ &= \frac{t\,|x|\,|h|}{(ct^2+|h|^2)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\frac{ct^2+|h|^2}{2}}^{\infty} e^{-v}\, v^{\frac{d-1}{2}}\, \frac{dv}{v}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

在最后一步中，我们作了变量代换 $v = (ct^2 + |h|^2)/(4s)$。此时分两种情况讨论：若 $d > 1$，上述积分有一个有限的界，因此有

$$\big|\mathcal{R}_{t,x}(h)\big| \lesssim \frac{t\,|x|\,|h|}{(ct^2+|h|^2)^{\frac{d-1}{2}}}. \tag{3.11}$$

若 $d = 1$，利用 $t, |h| \ll 1$，可得

$$\big|\mathcal{R}_{t,x}(h)\big| \lesssim t\,|x|\,|h|\,\log\tfrac{1}{ct^2+|h|^2}. \tag{3.12}$$

注意，在这两种情况下，所涉及的常数仅依赖于 x_0（以及维数 d），而不依赖于 x 或 δ。还需注意

$$|x| \le |x - x_0| + |x_0| \le \alpha t + |x_0| \le 1 + |x_0|,$$

因此，下面我们将把 (3.11) 和 (3.12) 中的因子 $|x|$ 吸收到常数中；然而，在特殊情况下，该因子为 $x_0 = 0$ $\mathcal{O}(t)$，这将带来略好的结果；参见下文的注记 3.2。

现在我们将证明

$$A_1(t,x) := \int_{|h|<\delta} \mathcal{R}_{t,x}(h)\, d\nu_x(h) = \mathcal{O}(1), \quad \text{as } |x - x_0| < \alpha t \searrow 0. \tag{3.13}$$

论证过程取决于维数。

情形 $d = 1$。在这种情况下，我们只需有

$$\begin{aligned} |A_1(t,x)| &\le \int_{|h|<\delta} |\mathcal{R}_{t,x}(h)|\; d|\nu_x|(h) \\ &\lesssim t\,\log(1/t) \int_{|h|<\delta} |h|\; d|\nu_x|(h) \\ &\le t\,\log(1/t)\; |\nu|(K), \end{aligned}$$

当 $t \searrow 0$ 时趋于零。

对于高维 $d>1$, （3.11）中的界给出

$$\begin{aligned}|A_1(t,x)| &\leq \int_{|h|<\delta} |\mathcal{R}_{t,x}(h)|\, d|\nu_x|(h)\\ &\lesssim t\int_{|h|<\delta}\frac{|h|}{(t+|h|)^{d-1}}\, d|\nu_x|(h)\\ &\leq t\int_{|h|<\delta}\frac{d|\nu_x|(h)}{(t+|h|)^{d-2}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

我们再次区分不同情形。

情形 $d=2$。在此情形下，(3.14)显然变为 $\mathcal{O}(t)$，当 $t\searrow 0$ 时（其界与 x 无关，因为 $|\nu|(K)<\infty$）。

情形 $d=3$。现在我们有

$$\begin{aligned}|A_1(t,x)| &\lesssim \int_{|h|<\delta}\frac{t}{t+|h|}\, d|\nu_x|(h) = \int_{B_\delta(x)}\frac{t}{t+|y-x|}\, d|\nu|(y)\\ \text{(by Lemma 2.3)}\quad &\lesssim \int_K \frac{t}{t+|y-x_0|}\, d|\nu|(y)\end{aligned}$$

根据控制收敛定理，右侧在 $t\searrow 0$ 时趋于零（与 x无关）。

情形 $d\geq 4$。在此情形下，我们不证明(3.13)，而是证明

$$\limsup_{|x-x_0|\leq \alpha t\to 0^+} |A_1(t,x)| \leq C\,\varepsilon.$$

为此，我们需要采用 (1.11) 中的附加假设，具体形式为 (3.3)。我们将 (3.14) 中的积分拆分成几部分。假设 $t\ll \delta/2$，则可以找到 $J\in\mathbb{N}$，使得 $2^J t<\delta\leq 2^{J+1}t$。于是我们写成

$$\int_{|h|<\delta}\frac{t\, d|\nu_x|(h)}{(t+|h|)^{d-2}}\, dh \leq \int_{|h|<t}\cdots + \sum_{j=0}^{J}\int_{2^j t\leq |h|<2^{j+1}t}\cdots =: I_0+I_1.$$

然后，利用 (3.3) 可得

$$I_0\leq \frac{1}{t^{d-3}}\int_{|h|<t} d|\nu_x| = \frac{|\nu|\big(B_t(x)\big)}{t^{d-3}}<\varepsilon,$$

and

$$I_1\leq \sum_{j=0}^{J}\int_{|h|<2^{j+1}t}\frac{t\ d|\nu_x|}{(2^j t)^{d-2}} = \sum_{j=0}^{J}\frac{2^{-j}}{(2^j t)^{d-3}}|\nu|\big(B_{2^{j+1}t}(x)\big)\leq C\,\varepsilon,$$

其中 $C=2^{d-2}$。将这些估计与 (3.14) 结合起来，我们得到

$$\limsup_{|x-x_0|\leq \alpha t\to 0} |A_1(t,x)| \leq c_{x_0}\,\varepsilon. \tag{3.15}$$

至此，涉及核的余项部分$\mathcal{R}_{t,\ x}(h)\mathbb{P}^0_{t,\ x}(h)$的估计便完成了；参见（3.8）。我们指出，这一部分并未用到假设（1.10）。

现在我们转而估计涉及径向递减部分$\mathcal{K}_{t,\ x}(h)$的部分，这一步至关重要地用到了这一假设（以（3.2）的形式）。我们需要一个测度论引理，其证明与 [6, 命题 6.23], 类似，但为求完整起见，我们仍将其略作说明。由此可得一般测度 μ的极坐标公式（3.18）。

引理 3.1. 设 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个（局部有限）复测度，令

$$\varrho(r) := \mu\big(\overline{B}_r(0)\big) = \mu\Big(\big\{|x| \le r\big\}\Big), \quad r \ge 0, \tag{3.16}$$

并以 m_ϱ 表示 $[0,\infty)$ 中相应的勒贝格–斯蒂尔切斯测度，即

$$m_\varrho\big((a,b]\big) = \varrho(b) - \varrho(a), \quad \textit{and} \quad m_\rho\big(\{0\}\big) = \varrho(0). \tag{3.17}$$

那么，对于每个径向 $f(x) = f_0(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^d;\, |\mu|)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu(x) = \int_{[0,\infty)} f_0(r)\, dm_\varrho(r). \tag{3.18}$$

证明。 不妨设测度 μ为正。考虑定义在博雷尔集 $A \subset [0,\infty)$ 上的新测度μ_0，其定义为

$$\mu_0(A) := \mu\Big(\big\{x \ :\ |x| \in A\big\}\Big) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(|x|) d\mu(x).$$

当 A 是区间 $(a,b] \subset (0,\infty)$（或 $A = \{0\}$）时，由定义显然有

$$\mu_0(A) = m_\varrho(A).$$

由于这些初等集生成了 σ代数中 $[0,\infty)$ 的所有博雷尔集，根据唯一性，两个测度 μ_0 和 m_ϱ 在所有这类集合上都相同；例如参见[6, 定理 1.14]。因此，对于任意形如 $f(x) = \mathbb{1}_A(|x|)$ 的函数，其中 A 是一个博雷尔集，成立

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu(x) = \int_{[0,\infty)} f_0(r)\, d\mu_0(r) = \int_{[0,\infty)} f_0(r)\, dm_\varrho(r).$$

由线性性，该恒等式可推广到所有简单函数；再由单调收敛定理，可推广到所有非负的 $f(x) = f_0(|x|)$。再利用线性性将其推广到 $L^1(d|\mu|)$ 中的复值函数，即可得出结论。□

我们将把前述引理应用于测度 $\mu = \nu_x$，于是

$$A_2(t,x) := \int_{|h|<\delta} \mathcal{K}_{t,x}(h)\, d\,\nu_x(h) = \int_{[0,\delta)} \mathcal{K}^0_{t,x}(r)\, dm_{\varrho_x}(r),$$

其中 $\mathcal{K}_{t,\ x}(h) = \mathcal{K}^0_{t,\ x}(|h|)$ 且

$$\varrho_x(r) := \nu_x\big(\overline{B}_r(0)\big) = \nu\big(\overline{B}_r(x)\big). \tag{3.19}$$

注意到，条件 (3.2) 蕴含

$$\big|\varrho_x(r)\big| \le \varepsilon\,(|x - x_0| + r)^d, \quad \text{if } |x - x_0| + r < 2\delta. \tag{3.20}$$

然后，通过分部积分（例如参见 [6, 定理 3.36]），我们得到

$$\begin{aligned} A_2(t,x) &= \mathcal{K}^0_{t,x}(0)\varrho_x(0) + \int_{(0,\delta)} \mathcal{K}^0_{t,x}(r)\, dm_{\varrho_x}(r) \\ &= \mathcal{K}^0_{t,x}(0)\varrho_x(0) + \Big[\mathcal{K}^0_{t,x}(r)\varrho_x(r)\Big]_{r=0}^{r=\delta^-} - \int_0^\delta \varrho_x(r)\, \frac{d\mathcal{K}^0_{t,x}}{dr}(r)\, dr \\ &= \mathcal{K}^0_{t,x}(\delta)\varrho_x(\delta^-) + \int_0^\delta \varrho_x(r)\, \Big|\frac{d\mathcal{K}^0_{t,x}}{dr}(r)\Big|\, dr, \end{aligned} \tag{3.21}$$

在最后一行中使用了如下事实：对于每个固定的 t 和 x，函数

$$r \longmapsto \mathcal{K}^0_{t,x}(r)$$

关于 $[0,\infty)$ 是递减的；参见 (3.9)。还要注意，

$$\mathcal{K}_{t,x}(h) \lesssim \frac{t}{(t+|h|)^{d+1}}, \tag{3.22}$$

这可以用与我们在 (3.10) 中处理核$\mathcal{R}_{t,\ x}(h)$ 时类似的论证证明（去掉该核中因 (3.7) 而出现的因子 $s\,|x|\,|h|$）。因此，利用这一点和 (3.20)，(3.21) 中的边界项满足

$$\mathcal{K}^0_{t,x}(\delta)\,\big|\varrho_x(\delta^-)\big| = \mathcal{K}^0_{t,x}(\delta)\,\big|\nu\big(B_\delta(x)\big)\big| \lesssim \frac{t}{\delta^{d+1}}\,(|x-x_0|+\delta)^d\cdot\varepsilon \lesssim \varepsilon,$$

因为 $|x-x_0| \le \alpha t < \delta$ （$t<\delta$ 也如此）。为了估计 (3.21) 中的积分，我们将其拆分为 $\int_0^t + \int_t^\delta$。在第一个范围内，我们利用

$$\big|\varrho_x(r)\big| \le (|x-x_0|+r)^d\,\varepsilon \lesssim \varepsilon\, t^d,$$

因为 $|x-x_0| \le \alpha t$ 和 $r \le t$。因此，

$$\begin{aligned} \int_0^t |\varrho_x(r)|\,\Big|\frac{d\mathcal{K}^0_{t,x}}{dr}(r)\Big|\, dr &\lesssim \varepsilon\, t^d \int_0^t \Big|\frac{d\mathcal{K}^0_{t,x}}{dr}(r)\Big|\, dr \\ &= \varepsilon\, t^d \Big[\mathcal{K}^0_{t,x}(0) - \mathcal{K}^0_{t,x}(t)\Big] \\ &\le \varepsilon\, t^d\, \mathcal{K}^0_{t,x}(0) \lesssim \varepsilon, \end{aligned}$$

最后一个界由（3.22）得出。最后，若 $r \in (t,\delta)$，则有

$$\big|\varrho_x(r)\big| \le (|x-x_0|+r)^d\,\varepsilon \le (\alpha t + r)^d\,\varepsilon \lesssim \varepsilon\, r^d.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_t^\delta |\varrho_x(r)|\,\Big|\frac{d\mathcal{K}^0_{t,x}}{dr}(r)\Big|\, dr &\lesssim \varepsilon \int_0^\delta \Big|\frac{d\mathcal{K}^0_{t,x}}{dr}(r)\Big|\, r^d\, dr \\ &\overset{\text{(parts)}}{=} \varepsilon\Big(-\Big[r^d\,\mathcal{K}^0_{t,x}(r)\Big]_0^\delta + d\int_0^\delta \mathcal{K}_{t,x}(r)\, r^{d-1}\, dr\Big) \\ &\overset{\text{(by (3.22))}}{\lesssim} \varepsilon \int_0^\infty \frac{t\, r^{d-1}\, dr}{(t+r)^{d+1}} = c\,\varepsilon. \end{aligned}$$

这表明，若 $|x-x_0| \le \alpha t$ 且 $t < t_2 = \min\{\delta, \delta/\alpha\}$，则

$$|A_2(t,x)| \le C\,\varepsilon.$$

结合前面的估计 (3.4)、(3.6) 和 (3.15)，我们得出：给定 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon) > 0$ ，使得若 $|x - x_0| < \alpha t$ 且$t \in (0,\ \tau_0)$，则

$$\left|\mathbb{P}_t\nu(x)\right| < \varepsilon.$$

因此，(3.1) 成立，我们也完成了定理 1.2 的证明。 □

注记 3.2。 如上所述，在 $x_0 = 0$ 这一特殊情形下，由于 (3.11) 中出现了因子 $|x| = \mathcal{O}(t)$，余项 $\mathcal{R}_{t,\ x}$ 的估计可以略作改进。事实上，这将使估计 (3.14) 中的因子 t^2 更优，进而推出

$$A_1(t,x) = \mathcal{O}(1), \quad \text{as } t \searrow 0$$

对所有维数 $d \le 4$ 均成立。此外，为了使维数为 $d \ge 5$ 时满足以下估计

$$\limsup_{|x-x_0|<\alpha t\to 0} |A_1(t,x)| \le C\,\varepsilon,$$

只需假设

$$\lim_{r\to 0} \frac{|\nu - \ell\,dy|(B_r(0))}{r^{d-4}} = 0, \tag{3.23}$$

在点 $x_0 = 0$ 处，这比 (1.11) 弱。因此，总而言之，我们可以将这一特殊情形表述为一个单独的定理。

定理 3.3。 设 $\nu \in \mathcal{M}(\Phi)$ ，并假设0 是 ν 的一个 σ-点，其对应值为 ℓ。 (*i*) 若 $d \in \{1,2,3,4\}$ ，则

$$\lim_{|x|<\alpha t\to 0} \mathbb{P}_t\nu(x) = \ell, \quad \forall\,\alpha > 0. \tag{3.24}$$

(*ii*) 若 $d \ge 5$ ，则在附加假设(3.23)下，式(3.24) 成立。

4. Declarations

（1）利益冲突：不适用。（2）数据和材料的可用性：不适用。

References

[1] J. Brossard and L. Chevalier, 法图逐点问题与测度的可导性。Acta Math. **164** (1990), 237–263. [2] P. Fatou, 三角级数与 Taylor级数。Acta Math **30** (1906), 335-400. [3] G. Flores, G. Garrigós, T. Signes, B. Viviani, Hermite型算子分数幂的逐点收敛。Rev Uni´on Matem Arg. **66** (1) (2023), 187–205. [4] G. Flores, G. Garrigós, B. Viviani, Poisson-Hermite 积分的对称导数与正规收敛。研究进行中，2024。[5] G. Flores, B. Viviani, 关于与奥恩斯坦-乌伦贝克算子和 Hermite 算子相关的泊松半群的 Calder´on 定理。Math. Ann. **386** (2023), 329–342. [6] G. Folland, *Real Analysis*, 第2版。John Wiley & Sons Inc, 1989. [7] G. Garrigós, S. Hartzstein, T. Signes, B. Viviani, Poisson-Laguerre半群的几乎处处收敛与双权不等式。Ann. Matem. Pura Appl. **196** (2017), 1927–1960.

[8] G. Garrigós, S. Hartzstein, T. Signes, J.L. Torrea, B. Viviani, 热方程与拉普拉斯方程初始数据的逐点收敛。美国数学会汇刊 368 (9) (2016), 6575–6600. [9] L. Liu, P. Sjögren, 高斯利普希茨空间的刻画及奥恩斯坦-乌伦贝克泊松核的尖锐估计。Rev. Mat. Iberoam. 32 (4) (2016), 1189–1210.
[10] L.H. Loomis, 正调和函数的法图定理逆命题。美国数学会汇刊 53 (1943), 239-250.
[11] B. Muckenhoupt, Hermite 展开与拉盖尔展开的泊松积分。美国数学会汇刊 139 (1969), 231–242. [12] W. Ramey and D. Ullrich, 调和函数在边界点附近的行为。美国数学会汇刊 305 (1988), 207-220. [13] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 第3版。麦格劳-希尔，1987。[14] S. Saeki. 关于非径向核的法图型定理。Math. Scand. 78 (1996), 133-160. [15] J. Sarkar. 关于 σ-点与非切向收敛的注记。预印本，2021。可见于 https://arxiv.org/abs/2101.05660。[16] V. Shapiro. 泊松积分与非切向极限。Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 3181-3189.[17] E. M. Stein.
Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory. Ann. Math. Stud. 63, Princeton Univ Press and Univ Tokio Press, Princeton NJ 1970.
[18] K. Stempak and J.L. Torrea, 带权埃尔米特函数展开的泊松积分与里斯变换。Jour. Funct. Anal. 202 (2) (2003), 443–472. [19] S. Thangavelu, 关于埃尔米特展开的共轭泊松积分与里斯变换。Colloq. Math. 64 (1) (1993), 103–113. [20] W. Urbina-Romero, *Gaussian harmonic analysis*. 施普林格数学专著。施普林格，2019。[21] A. Zygmund, *Trigonometric series*, 第3版，第I卷，剑桥大学出版社，纽约，1959。
G. Flores, CIEM-CONICET & FaMAF,
Universidad Nacional de Córdoba, Av. MedinaAllende s/n, Ciudad Universitaria,
CP:X5000HUA Córdoba, Argentina*Email address*: guilleflores@unc.edu.arG. Garrigós,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, 30100, Espinardo,Murcia, Spain
Email address: gustavo.garrigos@um.esBeatriz Viviani,
IMAL (UNL-CONICET) y FIQ (Universidad Nacional del Litoral),
Colectora Ruta Nac. N 168 Paraje El Pozo - 3000 Santa Fe - Argentina ,
Email address: viviani@santafe-conicet.gov.ar