arXiv:2601.07066v1 [math.RA] 11 Jan 2026

具有三次恒等式的结合代数簇

Lyubov A. Vladimirova，Vesselin S. Dren SKY

Abstract. 我们完整描述了特征零域上满足三次多项式恒等式的结合代数簇。

PI-代数理论中的主要问题之一，是描述所有具有某种既定性质的代数簇。当描述给定簇的所有子簇时，通常使用格的语言来表述（参见 Artamonov 的综述 [2]）。对于特征为 0 的域上的结合代数，最简单的非平凡情形是具有三次恒等式的簇。这一问题曾由 Nagata [12], Klein [10], Olsson 和 Regev[13], Anan'in 与 Kemer [1],Regev [14, 15, 16], James [9] 进行研究。

本文旨在完成这些研究，并对具有三次恒等式的簇作出完整描述。显然，这个问题等价于描述所有包含此类恒等式的 T-理想。在证明中，我们采用了其中一位作者在某些含幺代数和李代数的簇情形下得到其格的方法 [4, 5]。

1. 预备知识。我们将使用与 [4, 5] 中类似的记号： K 是特征为 0 的固定域； S_n 是作用在集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$上的对称群； $A_m = K\langle x_1, \ldots\ldots, x_m\rangle$ 是以生成元 x_1、x_2、……、x_m 为生成元的自由非含幺结合代数（我们也将对自由生成元使用其他符号）； $A_m^{(n)}$是 A_m的次数为 n 的齐次分量； P_n 是关于 $A_m^{(n)}$的多线性多项式集合， P_n关于作用 σ是一个左 S_n-模： $x_{i_1}\cdots x_{i_n} \to x_{\sigma(i_1)}\cdots x_{\sigma(i_n)}$, $\sigma \in S_n$。对应于 n的分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r)$ 的不可约 S_n-模记为 $M(\lambda) = M(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r)$。另一方面，代数 A_m 同构于 m维向量空间的张量代数，并具有自然的左 $GL(m, K)$-模结构。相应的不可约模记为 $N_m(\lambda) = N_m(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r)$; 若 $\lambda_{m+1} > 0$, 则记为 $N_m(\lambda) = 0$。

$GL(m, K)$-子模格可以嵌入 $A_m^{(n)}$的 S_n-子模格中。该嵌入按以下方式实现。 $N_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \subset A_m^{(n)}$, $r \le m$有典范生成元 $f(x_1, \ldots, x_r)$; 而 $M(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \subset P_n$, $\sum \lambda_i = n$有典范生成元$e(x_1, \ldots, x_n)$。对 $f(x_1, \ldots, x_r)$进行线性化，得到 $e(x_1, \ldots, x_n)$; 对 $e(x_1, \ldots, x_n)$进行"对称化"，则在相差一个非零乘法常数的意义下，当 $r \le m$时得到 $f(x_1, \ldots, x_r)$，而当 $r > m$时得到0。

发表于 Lyubov A. Vladimirova、Vesselin S. Drensky, 《具有三次恒等式的结合代数簇》（俄语）, Pliska Stud. Math. Bulgar. 8(1986),144-157. Zbl 0664.16015,MR0866654。

关于 S_n 和 $GL(m,K)$的表示论信息，可参见例如[3] 或 [7], ; 关于多项式恒等式的表述，可参见 [1] 和 [4]。代数 A_m 具有自然的多重分次： $A_m = \sum A_m^{(k_1,\dots,k_m)}$, $\sum k_i \geq 1$，其中 $A^{(k_1,\dots,k_m)}{}_m$ 是 x_i中次数为 k_i 的齐次多项式所构成的向量空间。该分次与 $GL(m,K)$的作用相一致：若 $g = \sum \xi_i e_{ii}$ 是来自 $GL(m,K)$的对角线性变换，则 $A^{(k_1,\dots,k_m)}{}_m$ 是对应于 g的特征值 $\xi_1^{k_1}\cdots\xi_m^{k_m}$的特征向量集合。设 $\mathfrak{M}$ 是一个代数簇，其恒等式的T-理想为 $T(\mathfrak{M})$。相对自由代数 $F_m(\mathfrak{M}) = A_m/(T(\mathfrak{M})\cap A_m)$ 以及多重线性元素集合 $P_n(\mathfrak{M}) = P_n/(T(\mathfrak{M}) \cap P_n)$分别保持 $GL(m,K)$和 S_n的作用，并且 $F_m(\mathfrak{M})$与 $P_n(\mathfrak{M})$具有相同的模结构 [4, 6]: 若 $P_n(\mathfrak{M}) = \sum \varkappa_\lambda M(\lambda)$，则 $F_m(\mathfrak{M}) = \sum \varkappa_\lambda N_m(\lambda)$。（所有模的和都是直和，且 $F_m(\mathfrak{M})$ 的向量子空间记号中的下标与 A_m的情形相同。）就本文目的而言，处理 $GL(m,K)$的表示更为方便，但按照惯例，结果仍将以 S_n的表示语言表述。分次向量空间 $F_m(\mathfrak{M})$的希尔伯特级数

$$H(F_m(\mathfrak{M}), t_1, \dots, t_m) = \sum \dim F_m^{(k_1,\dots,k_m)}(\mathfrak{M}) t_1^{k_1}\cdots t_m^{k_m}$$

等于 $\sum \varkappa_\lambda S_\lambda(t_1, \dots, t_m)$，其中 $S_\lambda(t_1, \dots, t_m)$ 是舒尔函数。正如 Berele [6], 所指出的，该级数完全确定了$F_m(\mathfrak{M})$ 的模结构。

引理 1.1。设 $S_\lambda(t_1, \dots, t_m) = \sum \beta_\lambda^{(k)} t_1^{k_1}\cdots t_m^{k_m}$，其中求和遍历所有 $k = (k_1, \dots, k_m)$。将 n 的所有分拆按字典序排列。若 $P_n(\mathfrak{M}) = \sum \varkappa_\lambda M(\lambda)$，则

$$\varkappa_\lambda = \dim A_r^{(\lambda)} - \dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_r^{(\lambda)}) - \sum_{\mu>\lambda} \varkappa_\mu \beta_\mu^{(\lambda)}. \tag{1}$$

证明基于以下事实：系数 $\beta_\mu^{(\lambda)}$ 的矩阵是单位三角矩阵 [11]。

为了直接应用引理 1.1，我们需要舒尔函数的若干系数。它们列在 [11]中的一个表格里。

引理 1.2. $\beta^{(3,1)}_{(4)} = \beta^{(2,2)}_{(3,\ 1)} = \beta^{(2,1,1)}_{(4)} = \beta^{(2,1,1)}_{(2,\ 2)} = 1$, $\beta^{(3,1,1)}_{(3,\ 1)} = 2$, $\beta^{(2,2,1)}_{(3,\ 2)} = \beta^{(2,2,1)}_{(3,\ 1,\ 1)} = \beta^{(2,1,1,1)}_{(2,\ 2,\ 1)} = 2$, $\beta^{(2,1,1,1)}_{(3,\ 2)} = \beta^{(2,1,1,1)}_{(3,\ 1,\ 1)} = 3$。

对于具有三次恒等式的簇 $\mathfrak{M}$，至少有一个不可约 e P_3 的分量包含于 $T(\mathfrak{M})$ 中。众所周知，

$$P_3 \cong KS_3 \cong M(3) + 2M(2,1) + M(1^3).$$

相应子模的生成元是多项式 x^3 for $M(3)$、 $\alpha[x,y]x + \beta x[x,y]$, $\alpha \neq 0$ or $\beta \neq 0$ for $M(2,1)$ 的线性化，以及 $M(1^3)$ 的标准恒等式 $S_3(x_1,x_2,x_3)$。我们将分别讨论这三种情况。对于每种情况，我们的讨论步骤如下：1）确定 $P_n(\mathfrak{M})$ 的模结构。这里我们主要使用 [1, 9, 12, 14, 15, 16] 中较早的结果。2）对于 $P_n(\mathfrak{M})$ 的每个不可约分量，我们找出更高次数的推论。只需找出 $P_{n+1}(\mathfrak{M})$ 中的推论。我们将用图形表示如下：不可约模用点表示，其推论用箭头表示。这样

便立即得到了具有三次恒等式的 T-理想的完整描述，以及相应簇的子簇格。

在下文中，所有计算都将在簇$\mathfrak{M}$的相对自由代数中进行。

2. 由恒等式定义的簇 $\mathfrak{M}$

$$\alpha[x,y]x+\beta x[x,y]=0. \tag{2}$$

文献 [1]几乎完整地描述了 $P_n(\mathfrak{M})$的结构。根据系数 α 和 β 的不同，该问题归结为四种情形:

2.1. $\alpha\neq 0$、 $\beta\neq 0$、 $\alpha-\beta\neq 0$、 $\alpha+\beta\neq 0$ （一般情形);

2.2. $\alpha=0$ （情形 $\beta=0$ 以类似方式处理）；2.3.

$\alpha-\beta=0$; $\alpha+\beta=0$。

情形 2.1. $\alpha\beta(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\neq 0$.

命题 2.1.1. $P_n(\mathfrak{M})\cong M(n)$, $n=1$ 或 $n\geq 4$, $P_2(\mathfrak{M})\cong M(2)+M(1^2)$, $P_3(\mathfrak{M})\cong M(3)+M(2,1)+M(1^3)$。

相应的模由 x^n *for* $M(n)$、$[x_1,x_2]x_1$*for* $M(2,1)$、 $S_n(x_1,\ldots,x_n)$*for* $M(1^n)$、 $n=2$ 和 3 的线性化生成。

证明。对于 $n\leq 3$，四种情形中的模 $P_n(\mathfrak{M})$ 都相同，可利用 $P_n\cong KS_n$ 直接描述。令 $n\geq 4$。由 [1]可知，若模 $P_n(\mathfrak{M})$ 非零，则它由 $h_n(x_1,\ldots,x_n)=\sum x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$生成。交换多项式代数 $K[x]$ 属于 $\mathfrak{M}$，且$x^n\neq 0$在 $K[x]$中。多项式 $h_n(x_1,\ldots,x_n)$ 是 x^n 的线性化，因此 $P_n(\mathfrak{M})\cong M(n)$。

定理 2.1.2. 设恒等式 $f(x_1,\ldots,x_r)$ 的线性化生成 S_n 的一个不可约子模 $P_n(\mathfrak{M})$。那么，$f(x_1,\ldots,x_r)$ 的高次推论等价于以下恒等式:

(a) $x_1x_2\cdots x_{n+1}$ 如果 $f=x^n$;

(b) $[x_1,x_2]x_3$ 如果 $f=[x_1,x_2]$;

(c) $[x_1,x_2]x_1$ 和 $S_3(x_1,x_2,x_3)$ 没有高次推论 (见图 1)。

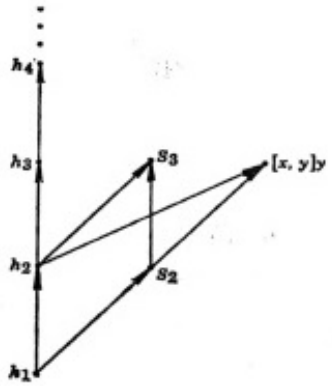

图 1

证明。对于 $n>3$，多项式 x^n 在 $\mathfrak{M}$ 中等价于 $x_1x_2\cdots x_n$。(a) 和 (b) 可直接验证。(c) 的情形由以下事实可知：在 $K[x]$ 中，我们有 $[x_1,x_2]x_1=S_3(x_1,x_2,x_3)=0$ 和 $x^n\neq 0$。

情形 2.2. $\alpha=0$。于是，簇 $\mathfrak{M}$ 由恒等式 $x[x,y]=0$定义。

命题 2.2.1. $P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n)+M(n-1,1)$, $n \geq 4$。子模 $M(n)$和 $M(n-1,1)$ 分别由 x^n 和 $f_{n-1} = [x,y]x^{n-2}$的线性化生成。

证明。已证明，在 [1] 中，$n \geq 4$ $P_n(\mathfrak{M})$ 是至多两个不可约子模之和。$[x,y]x^{n-2}$ 的线性化生成 $M(n-1,1)$ 于 $P_n(\mathfrak{M})$ 中。因此，只需证明 $[x,y]x^{n-2} \neq 0$ 属于 $F(\mathfrak{M})$。令

$$A_1 = \langle a, b \mid a^2 = a, b^2 = ab = 0, ba = b \rangle$$

为一个二维结合代数。它同构于 2×2矩阵代数 $\{k_1e_{11} + k_2e_{21} \mid k_1, k_2 \in K\}$。于是 $A_1 \in \mathfrak{M}$ 且 $[a,b]a^{n-2} = -b \neq 0$。

定理 2.2.2。设 $f(x_1, \ldots\ldots, x_r) \in F(\mathfrak{M})$。那么，$f$ 的高次推论等价于以下恒等式：

(a) $x_1x_2 \cdots x_{n+1}$ 若 $f = x^n$;(b) $[x_1,x_2]x_1^{n-1}$若 $f = [x_1,x_2]x_1^{n-2}$, $n > 2$;
(c) $S_3(x_1,x_2,x_3)$ 没有更高次数的推论(见图 2)。

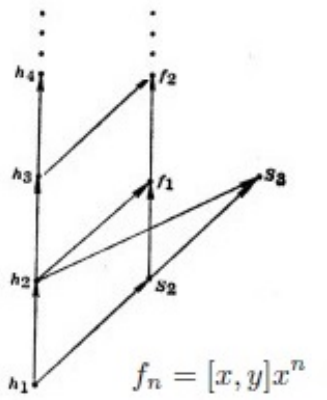

图 2

证明。(a) 只需证明，在 $F(\mathfrak{M})$ 中，恒等式 x_{n+1}和 $[x_1,x_2]x_1^{n-1}$可由 x^n推出。恒等式 $xyx = x^2y$ 可由定义簇 $\mathfrak{M}$的恒等式 $x[x,y] = 0$推出。但 $[x,y]x^{n-1} = xyx^{n-1} - yx^n = xyx^n - 1$ 和$[x,y]x^{n-1} = xyx^{n-1} = x^2yx^{n-2} + \cdots = x^ny$。

情形 (b) 显然。

(c) 证明命题 2.2.1 中的代数 A_1 是二维的，并且 $S_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ 属于 A_1。此外，$A_1 \in \mathfrak{M}$、$x_1^4 \neq 0$、$[x_1,x_2]x_1^2 \neq 0$ 属于 A_1。因此，$S_3(x_1, x_2, x_3)$ 没有更高次数的推论。

情形 2.3. $\alpha = \beta$。簇 $\mathfrak{M}$ 由恒等式定义

$$[x^2, y] = 0 \tag{3}$$

而式 (3) 的线性化给出

$$f(x_1,x_2,y) = [x_1x_2 + x_2x_1, y] = 0 \tag{4}$$

命题 2.3.1。$P_4(\mathfrak{M}) \cong M(4) + M(2^2)$, $P_n(\mathfrak{M}) = M(n)$ 对于 $n \geq 5$。子模 $M(2^2)$ 由 $x[x,y]y$ 的线性化生成。

证明。在 [1] 中已证明，$P_4(\mathfrak{M})$ 是至多两个非同构不可约子模之和，且对 $n \geq 5$, $P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n)$。由此可得

由 (3) 可知， $[x, yzt] = 0$、 $x^3y - xyx^2 = x^2yx - yx^3 = x^3y - yx^3 = 0$ 以及这三个恒等式线性无关。利用 (1) 和引理 1.2，我们得到

$$0 \leq \varkappa_{(3,1)} \leq \dim A_2^{(3,1)} - 1 \cdot \beta_4^{(3,1)} = 0, \ \varkappa_{(3,1)} = 0.$$

由（3）还可推出

$$x^2y^2 - xy^2x = yx^2y - y^2x^2 = x^2y^2 - y^2x^2 = xyxy - yxyx = 0 \tag{5}$$

且（5）中的恒等式是线性无关的。因此

$$\dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_2^{(2,2)}) \geq 4. \tag{6}$$

由（3）得到的 $A_2^{(2,2)}$ 中的所有推论，都可由（4）中的线性组合得到

$$f(u_1, u_2, u_3)u_4 = f(u_1u_2, u_3, u_4) = f(u_1, u_2, u_3u_4) = 0, \tag{7}$$

其中两个变量 u_1、 u_2、 u_3、 u_4 等于 x ，另外两个等于 y。直接验证可知，所有可能的恒等式（7）都由（5）推出，即（6）中的等式成立。

引理1.1和引理1.2表明， $\varkappa_{(2,2)} = 1$。容易验证，多项式$[x, y]^2$ 在 $A_2^{(4)}$ 中生成一个同构于 N_2（2^2）的子模，并且模恒等式（5）与 $x[x, y]y$ 成比例。

定理 2.3.2 设 $f(x_1, \ldots, x_r) \in F(\mathfrak{M})$。那么， f 的高次推论等价于以下恒等式:

(a) $x_1x_2 \cdots x_{n+1}$ 若 $f = x^n$, $n \geq 1$;(b) $x_1[x_1, x_2]x_2$ 若 $f = [x_1, x_2]x_1$ 或 $f = S_3(x_1, x_2, x_3)$;(c) $x_1[x_1, x_2]x_2$ 没有高次推论(见图 3)。

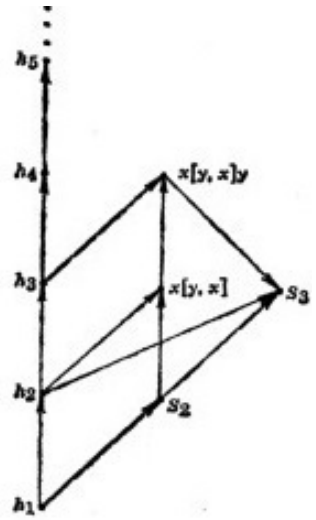

图 3

证明。 我们将证明 $x^3 = 0$ 蕴含 $x[x, y]y = 0$，即 $x_1x_2x_3x_4 = 0$是 $x^3 = 0$的一个推论。对 $x^3 = 0$ 作部分线性化可得

$$x^2y + xyx + yx^2 = 0 \text{ and hence } g(x, y) = x^2y^2 + xy^2x + y^2x^2 = 0;$$

$$h_3(xy, y, x) - (g(x, y) + g(y, x)) = yxyx - x^2y^2 + 2xyxy - 2y^2x^2 = 0.$$

应用 (5)，得到 $x[x, y]y = 0$。

同理可得， $S_3(x, y, xy) = 0$ 等价于恒等式 $x[x, y]y = 0$。

该定理的其他情形显然成立。

情形 2.4. $\alpha+\beta=0$. 于是，恒等式 (2) 等价于 $[x,y,z]=0$。**命题 2.4.1.** (见 [1]。)

$$P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n)+M(n-1,1)+M(n-2,1^2)+\cdots+M(1^n)$$

而模 $M(n-k,1^k)$ 由以下线性化生成

$$g_{k+1,n-k-1}=S_{k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1})x_1^{n-k-1}.$$

定理 2.4.2. $S_{k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1})x_1^{n-k-1}$在 $F(\mathfrak{M})$ 中的所有更高次数推论都等价于

$$\varepsilon S_k(x_1,\ldots,x_k)x_1^{n-k+1}, S_{k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1})x_1^{n-k},$$

$$S_{k+2}(x_1,\ldots,x_{k+2})x_1^{n-k-1}, S_{k+3}(x_1,\ldots,x_{k+3})x_1^{n-k-2},$$

其中 $\varepsilon=1$ 在 k 为偶数时，以及 $\varepsilon=0$ 在 k 为奇数时 (见图 4)。

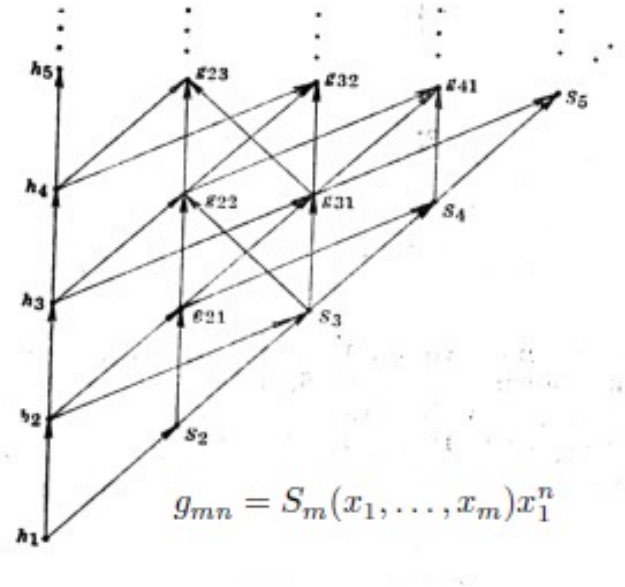

图 4

证明。 我们将使用 $[y,x,x]=0$ 的推论

$$[x,y]z=z[x,y];[x,y][z,t]=-[x,t][z,y]. \tag{8}$$

由 [5, 命题 1.1] 可知，模 $M(n-k,1^k)$ 的所有次数为 $n+1$ 的多线性推论都属于

$$M(n-k+2,1^{k-1}), M(n-k+1,1^k), M(n-k,1^{k+1}), M(n-k-1,1^{k+2}).$$

可以直接看出，在 $M(n-k+2,1^{k-1})$ 的情形下，$k=2m$，多项式$S_{2m+1}(x_1,\ldots,x_{2m},x_1^2)x_1^{n-k-1}$与 $S_{2m}(x_1,\ldots,x_{2m})x_1^{n-k+1}$成比例。

当 $k=2m-1$ 时，$S_{2m-1}(x_1,\ldots,x_{2m-1})x_1^{n-k+1}$并非由$S_{2m}(x_1,\ldots,x_{2m})x_1^{n-k+1}$推出，因为后一个多项式是长度为二的 m 个交换子的乘积的结果，而前一个多项式不能被

写成多于 $m-1$ 个交换子的乘积。因此，由 [8] 可知$S_{2k}(x_1, \ldots\ldots, x_{2k})$ 和 $S_{2k+1}(x_1, \ldots\ldots, x_{2k+1})$ 分别与.....成比例,

$$[x_1, x_2][x_3, x_4]\cdots[x_{2k-1}, x_{2k}]$$

and

$$[x_1, x_2][x_3, x_4]\cdots[x_{2k-1}, x_{2k}]x_{2k+1} + [x_2, x_3][x_4, x_5]\cdots[x_{2k}, x_{2k+1}]x_1$$

$$+\cdots+[x_{2k+1}, x_1][x_2, x_3]\cdots[x_{2k-2}, x_{2k-1}]x_{2k}.$$

$M(n-k+1, 1^k)$ 的情形显然。若 k 为偶数，则$S_{k+1}(x_1, \ldots\ldots, x_k, [x_{k+1}, x_{k+2}])x_1^{n-k-1}$ 的线性化在 $\mathfrak{M}$ 中非零，并生成 $M(n-k, 1^{k+1})$。若 k 为奇数，那么考虑到 [8], , 只需将 $S_{2m}x_1^{n-k-1}$ 乘以$x_{2m+1}, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{2m}$，并对这些乘积求和。所得结果非零，且与 $S_{2m+1}(x_1, \ldots\ldots, x_{2m+1})x_1^{n-k-1}$ 成比例。

在 $S_{k+1}(x_1, \ldots\ldots, x_{k+1})x_1^{n-k-1}$ 中，我们用 $x_1 + [x_{k+2}, x_{k+3}]$ 替换 x_1，并取关于 x_{k+2} 的线性分量。经过一些计算可知，这等价于恒等式 $S_{k+3}(x_1, \ldots\ldots, x_{k+3})x_1^{n-k-2}$。至此，定理得证。

3. 由恒等式 $S_3(x_1, x_2, x_3) = 0$定义的簇 $\mathfrak{M}$。

命题 3.1.

$$P_3(\mathfrak{M}) \cong M(3) + 2M(2,1); P_4(\mathfrak{M}) \cong M(4) + 2M(3,1) + M(2^2);$$

$$P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n) + 2M(n-1,1), n \geq 5.$$

$P_n(\mathfrak{M})$的不可约分量由以下多项式的线性化生成:

$$x^n \text{ for } M(n), f_n(x,y) = \alpha[x,y]x^{n-2} + \beta x^{n-2}[x,y] \text{ for } M(n-1,1), [x,y]^2 \text{ for } M(2^2).$$

证明。 $P_n(\mathfrak{M})$的模结构已在 [9]中得到完整描述。证明该命题只需说明多项式 $f_n(x,y)$ 和$[x,y]^2$ 在 $F_2(\mathfrak{M})$中非零。模 $N_2(2^2)$在 $A_2^{(4)}$ 分解为不可约 $GL(2,K)$-模之和时，重数为 2。但

$$S_3(x_1, x_2, [x_1, x_2]) = \sum(-1)^\sigma [x_1, x_2, x_{\sigma(1)}]x_{\sigma(2)} + [x_1, x_2]^2$$

而这是 $S_3(x_1, x_2, x_3)$中生成模 $N_2(2^2)$的唯一推论。因此 $[x_1, x_2]^2 \neq 0$ 在 $F_2(\mathfrak{M})$中。二维代数（见情形 2.2）

$$B_1 = \{k_1e_{11} + k_2e_{21} \mid k_1, k_2 \in K\} \text{ and } B_2 = \{k_1e_{11} + k_2e_{12} \mid k_1, k_2 \in K\}$$

属于 $\mathfrak{M}$，并且对于它们，$f_n(x, y) \neq 0$, $n \geq 3$。由此完成了该命题的证明。

定理 3.2. 设 $f(x_1, \ldots, x_n) \in F(\mathfrak{M})$。那么，$f$ 的更高次数推论等价于以下恒等式:

（a） $x_1x_2\cdots x_{n+1}$ 若 $f = x^n$; （b） $[x_1, x_2]x_3\cdots x_{n+1}$ 若 $f = [x, y]x^{n-2}$; （c） $x_1\cdots x_{n-1}[x_n, x_{n+1}]$ 若 $f = x^{n-2}[x, y]$; （d） $[x_1, x_2]x_3\cdots x_{n+1}$ 且 $x_1\cdots x_{n-1}[x_n, x_{n+1}]$ 若 $f = \alpha[x,y]x^{n-2} + \beta x^{n-2}[x,y]$,$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$; （e） $[x, y]^2$ 没有更高次数的推论 （见图 5）。

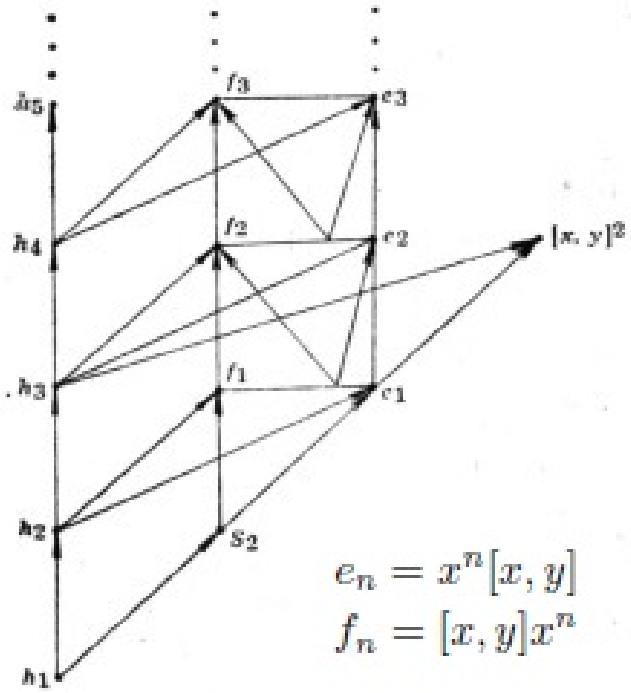

图 5

证明。（a）在 $F(\mathfrak{M})$ 中

$$S_3(x, y, x^2) = x[y, x]x = 0.$$

另一方面，由 $x^n = 0$ 可得

$$0 = x^{n-1}yx + x^{n-2}yx^2 + \cdots + xyx^{n-1} = (n-1)x^{n-1}yx = (n-1)x^n y + x^{n-1}[y, x],$$

即 $x^{n-1}[y, x] = 0$ 可由 $x^n = 0$ 得出。同理，我们推导出推论 $[y, x]x^{n-1} = 0$。对于 $n \geq 4$，我们得到 $P_{n+1}(\mathfrak{M})$ 中所有不可约子模都是 $x^n = 0$ 的推论。因此，在 $F(\mathfrak{M})$ 中，$x_1 \cdots x_{n+1} = 0$ 可由 $x^n = 0$ 得出。对于 $n = 3$，我们还必须证明 $[x, y]^2 = 0$。这些恒等式

$$x^2y^2 + xy^2x + y^2x^2 = y^2x^2 + yx^2y + x^2y^2 = 0$$

是 $x^3 = 0$ 的推论，因此

$$xy^2x = yx^2y. \tag{9}$$

此外，$0 = [x^2y + xyx + yx^2, y]$，并且根据 (9),

$$x^2y^2 + xyxy = yxyx + y^2x^2. \tag{10}$$

在 $(x^2y + xyx + yx^2)\ x = x^2yx + xyx^2 = 0$ 中，我们用 $x + y$ 替换 x，并取 x 中次数为 2 的齐次分量：

$$x^2y^2 + 2xy^2x + yxyx + y^2x^2 + xyxy = 0.$$

由（9）和（10）可得

$$x^2y^2 + xy^2x + xyxy = 0.$$

由于 $x^2y^2 + xy^2x + y^2x^2 = 0$，我们得到 $xyxy = y^2x^2$。同理，$yxyx = x^2y^2$。现在

$$S_3(x, y, xy) = [x, y]^2 + x[y, x]y = 0$$

推出

$$x[x,y]y=[x,y]^2=y[y,x]x,$$

$$2[x,y]^2=x[x,y]y+y[y,x]x=x^2y^2-yxyx+y^2x^2-xyxy=0.$$

由此我们得到，$[x,y]^2=0$是 $F(\mathfrak{M})$中 $x^3=0$的推论。

(b) 显然，$[x,y]x^{n-1}=0$可由 $F(\mathfrak{M})$中的 $[x,y]x^{n-2}=0$推出。对$n\geq 4$而言，这意味着 $[x_1,x_2]x_3\cdots x_{n+1}=0$。另一方面，$x^{n-1}[x,y]=0$不能由 $[x,y]x^{n-2}=0$ 推出，因为后一个恒等式在代数B_2 中成立，而前一个恒等式不成立。

情形 $n=3$ 已在情形 2 中处理。

(c) 证明与(b)中的证明类似。

(d) 作为恒等式的推论

$$f(x,y)=\alpha[x,y]x^{n-2}+\beta x^{n-2}[x,y]=0,\alpha\neq 0,\beta\neq 0,$$

我们得到

$$f(x,y)x=\alpha[x,y]x^{n-1}=0,xf(x,y)=\beta x^{n-1}[x,y]=0$$

（因为 $x[x,y]x=0$属于 $F(\mathfrak{M})$）。由此即得 $n\geq 4$的证明。$n=3$的情形已在第 2 部分中讨论。

（e）恒等式 $[x,y]^2=0$在 $F(\mathfrak{M})$中没有推论，因为由命题 3.1 的证明可知，它在代数 B_1 和 B_2 中成立，而这些代数中的非零 5 次多项式均不等于 0。

4. 由恒等式 $x^3=0$定义的簇 $\mathfrak{M}$。

恒等式 $x^3=0$ 等价于其线性化

$$h_3(x_1,x_2,x_3)=\sum x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}=0,\sigma\in S_3.$$

已知 [12]，$x_1x_2x_3x_4x_5x_6=0$ 属于 $F(\mathfrak{M})$。因此，要描述 $P_n(\mathfrak{M})$的模结构，只需处理 $n=4$，5 的情形。首先我们证明：

定理 4.1。 $P_4(\mathfrak{M})\cong M(3,1)+M(2^2)+2M(2,1^2)+M(1^4)$。

证明。证明分几个步骤进行，并由引理 4.2 – 4.5 得出。

引理 4.2。恒等式

$$x^2yx+xyx^2=x^2y^2-yxyx=0$$

在 $F(\mathfrak{M})$ 中成立。

证明。由于 $0=\frac{1}{2}h_3(x,x,y)x=x^2yx+xyx^2+yx^3$属于 $F(\mathfrak{M})$，我们得到$x^2yx+xyx^2=0$。此外，我们还有

$$\frac{1}{2}[h_3(x,x,y),y]=(x^2y^2+xyxy)-(yxyx+y^2x^2)=0.$$

在 $x^2yx+xyx^2=0$ 中，我们用 $x+y$ 替换 x，并取 y中次数为 2 的齐次分量：

$$x^2y^2+2xy^2x+yxyx+y^2x^2+xyxy=2(x^2y^2+xy^2x+xyxy)=0.$$

由于 $\frac{1}{2}h_3(x,x,y^2)=x^2y^2+xy^2x+y^2x^2=0$，我们得到 $y^2x^2=xyxy$，类似地有$x^2y^2=yxyx$。

引理 4.3. 模 $M(3、1)$ 在将 $P_4(\mathfrak{M})$ 分解为不可约子模之和时，重数为1。

证明。 由 (1) 和引理 1.2

$$\varkappa_{(3,1)} = \dim A_2^{(3,1)} - \dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_2^{(3,1)}).$$

（模 N(4) 由 x^4 生成，因此包含于 $T(\mathfrak{M})$ 中。）这里 $\dim A_2^{(3,1)} = 4$，且 $\varkappa_{(3,1)} = 4 - \dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_2^{(3,1)})$。

$x^3 = 0$ 的所有次数为 (3,1) 的齐次推论，均可由$h_3(x, y, z)$ 得到：将 x, y, z 替换为 x, x^2, y, xy, yx，并在右侧乘以 x 和 y。直接验证可知，所有次数为 (3,1) 的恒等式都是恒等式 $x^3y = yx^3 = x^2yx - xyx^2 = 0$ 的线性组合，且这些恒等式线性无关。因此 $\dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_2^{(3,1)}) = 3$，且 $\varkappa_{(3,1)} = 1$。

引理 4.4。 $M(2^2)$ 在 $P_4(\mathfrak{M})$ 中的重数等于 1。

证明。 由 (1) 可得

$$\varkappa_{(2,2)} = \dim A_2^{(2,2)} - \dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_2^{(2,2)}) - 1 \cdot \beta_{(3,1)}^{(2,2)} = 5 - \dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_2^{(2,2)}).$$

与前一个引理中一样，可以看出这些恒等式

$$xyxy - y^2x^2 = xy^2x + x^2y^2 + y^2x^2 = yxyx - x^2y^2 = yx^2y + y^2x^2 + x^2y^2 = 0$$

是线性无关的，并且 $x^3 = 0$ 的所有次数为 (2,2) 的齐次推论都是它们的线性组合。因此 $\dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_2^{(2,2)}) = 4$ 且 $\varkappa_{(2,2)} = 1$。

引理 4.5。 $M(2, 1^2)$ 在 $P_4(\mathfrak{M})$ 中的重数等于 2。

证明。 由 (1) 可得

$$\varkappa_{(2,1^2)} = \dim A_3^{(2,1^2)} - \dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_3^{(2,1^2)}) - 1 \cdot \beta_{(3,1)}^{(2,1^2)} - 1 \cdot \beta_{(2,2)}^{(2,1^2)}.$$

该向量空间 $A^{(2,1^2)}{}_3$ 有一个含 12 个元素的基：

$$xyxz, xyzx, yxzx, xzxy, xzyx, zxyx, yx^2z, yzx^2, x^2yz, zx^2y, zyx^2, x^2zy.$$

我们取这三个恒等式

$$xyxz + x^2yz + yx^2z = xyzx + x^2yz + yzx^2 = yxzx + yx^2z + yzx^2 = 0$$

以及通过改变 y 和 z 的位置所得到的类似恒等式，还有恒等式

$$x^2yz + yx^2z + yzx^2 + x^2zy + zx^2y + zyx^2 = 0.$$

以这些恒等式相对于上述基的坐标为行组成的矩阵的秩为 7。因此，这七个恒等式线性无关。与前面的引理一样，可以证明这是 $T(\mathfrak{M}) \cap A^{(2,1^2)}{}_3$ 中线性无关多项式的最大数量。因此，由引理 1.2

$$\varkappa_{(2,1^2)} = 12 - 7 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 2.$$

模 $M(1^4)$ 参与了 $P_4(\mathfrak{M})$ 的分解，因为根据 [5,命题 1.1] $S_4(x, y, z, t) = 0$ 不能作为 $h_3(x, y, z) = 0$ 的推论得到。

下一个定理给出了 $P_5(\mathfrak{M})$ 的模结构。其证明由引理 4.7–4.11 得出。

定理 4.6. $P_5(\mathfrak{M}) \cong M(3,2) + M(3,1^2) + M(2,1^3)$.

引理 4.7。 模 $M(5)$ 和 $M(4,1)$ 不参与 $P_5(\mathfrak{M})$ 的分解。

证明。 根据引理1.1和引理1.2，只需证明单项式 $x^4y, x^3yx, x^2yx^2, xyx^3, yx^4$ 在 $F_2(\mathfrak{M})$ 中均等于零。只有对于 x^2yx^2，这一点并不明显。由于 $x(x^2y+xyx+yx^2)x=0$，我们得到 $x^2yx^2=0$。

引理 4.8。 $M(3,\ 2)$ 在将 $P_5(\mathfrak{M})$ 分解为不可约 S_5-模之和时的重数等于 1。

证明。 由引理 1.1 和 4.7

$$\varkappa_{(3,2)}=\dim A_2^{(3,2)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_2^{(3,2)}).$$

这里 $\dim A_2^{(3,2)}=10$。我们从左侧或右侧乘以 x 或 y 这些恒等式

$$x^2yx+xyx^2=x^2y^2+xy^2x+y^2x^2=x^2y^2+xy^2x+xyxy=y^2x^2-xyxy=x^2y^2-yxyx=0$$

由引理 4.2 的证明可得

$$xyxyx=0, x^2y^2x=-xy^2x^2=xyx^2y=-x^2yxy=yxyx^2=-yx^2yx.$$

结合显然的恒等式 $x^3y^2=y^2x^3=yx^3y=0$ ，我们得到 9 个次数为 (3,2) 的线性无关恒等式。经过直接验证，可以证明 $x^3=0$ 的所有次数在 x 中为 3、在 y 中为 2 的推论，都是这 9 个恒等式的推论。因此 $\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_2^{(3,2)})=4$ 且 $\varkappa_{(3,2)}=1$。

引理 4.9. 在 $P_5(\mathfrak{M})$的分解中，有一个模 $M(3,1^2)$。

证明。 根据引理1.1、1.2、4.7和4.8

$$\varkappa_{(3,1^2)}=\dim A_3^{(3,1^2)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_3^{(3,1^2)})-1\cdot\beta_{(3,2)}^{(3,1^2)},$$

其中 $\beta^{(3,1^2)}{}_{(3,2)}=1$ 且 $\dim A^{(3,1^2)}{}_3=20$。由 [8]中的恒等式

$$yx^2zt+tyx^2z=0 \tag{11}$$

对于 $t=x$，我们得到 $yx^2zx+xyx^2z=0$。由 $xyx^2=-x^2yx$，我们得到 $yxzx^2+x^2yxz=0$。此外

$$h_3(x,x,yxz)=yxzx^2+xyxzx+x^2yxz=0$$

这意味着 $xyxzx=0$。类似地， $xzxyx=0$。在 $xyx^2+x^2yx=0$ 中，我们用 yz 替换 y，得到 $xyzx^2+x^2yzx=0$。在（11）中用 $x+v$ 替换 x，并取多线性分量。于是对于 $y=x=v$，我们得到

$$x^2vzx+xvxzx+x^3vz+x^2vxz=0,$$

即恒等式 $x^2yzx+x^2yxz=0$ 在 $\mathfrak{M}$中成立。这样，我们在 $\mathfrak{M}$中得到 9 个恒等式:

$$x^3yz=yzx^3=yx^3z=xyxzx=0,$$
$$xyzx^2=-x^2yzx=x^2yxz=-xyx^2z=yx^2zx=-yxzx^2.$$

交换 y 和 z的位置，可得到另外 9 个恒等式。直接验证可知，这 18 个恒等式线性无关。为证明这一点，只需将它们相对于 $A^{(3,1^2)}{}_3$ 的任意一组基表示，并求出坐标矩阵的秩。最方便的是考虑 $A^{(3,1^2)}{}_3$ 的以下一组基：因子 x^3 出现在前 6 个单项式中，接着是单项式 $xyxzx$ 和 $xzxyx$。下一组基元素由$xyzx^2, x^2yzx, x^2yxz,$ xyx^2z, yx^2zx 以及交换y和 z后得到的另外 5 个单项式组成。最后，我们加入元素 $yxzx^2$和 $zxyx^2$。于是，矩阵前 18 列构成的 18×18 子式等于 1。另一方面，如果

我们求出 $x^3=0$ 的所有次数为$(3,1^2)$的推论，很容易看出它们都是这 18 个恒等式的线性组合。因此 $\dim(T(\mathfrak{M})\cap A^{(3,1^2)}{}_3)=18$ 和$\varkappa_{(3,1^2)}=1$。

引理 4.10. 模 $M(2^2,1)$ 不参与 $P_5(\mathfrak{M})$ 的分解。

证明. 引理 1.1、1.2 以及第 4 节中已建立的结果给出

$$\varkappa_{(2^2,1)}=\dim A_3^{(2^2,1)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_3^{(2^2,1)})-1\cdot\beta_{(3,2)}^{(2^2,1)}-1\cdot\beta_{(3,1^2)}^{(2^2,1)},$$

$$\dim A_3^{(2^2,1)}=30,\beta_{(3,2)}^{(2^2,1)}=2,\beta_{(3,1^2)}^{(2^2,1)}=1.$$

由恒等式 $x^2u+xux+ux^2=0$ 可得 $xz(yxy+y^2x+xy^2)=0$，即

$$xzyxy=-xzxy^2-xzy^2x=(x^2z+zx^2)y^2+x^2(zy^2)+(zy^2)x^2.$$

另一方面，

$$xzyxy=(-x^2(zy)-(zy)x^2)y=-x^2zy^2+z(y^2x^2+x^2y^2).$$

因此

$$2x^2zy^2+zx^2y^2+zy^2x^2=-x^2zy^2+zx^2y^2+zy^2x^2 \text{ and } x^2zy^2=0.$$

类似地，$y^2zx^2=0$。所得恒等式很容易推出 $F(\mathfrak{M})$ 中的以下恒等式：

$zxyxy=zy^2x^2$ （在引理 4.4 中，我们证明了 $xyxy=y^2x^2$）

$$xyzxy=x^2y^2z+zx^2y^2,x^2yzy=-x^2y^2z,xy^2zx=-x^2y^2z,xyxyz=y^2x^2z,$$

$$xzy^2x=-zy^2x^2,xzyxy=zx^2y^2+zy^2x^2,xy^2xz=-x^2y^2z-y^2x^2z,$$

$$yxzxy=y^2x^2z+zx^2y^2,zxy^2x=-zx^2y^2-zy^2x^2,xyxzy=x^2y^2z+y^2x^2z,$$

$$x^2y^2z+y^2x^2z+zx^2y^2+zy^2x^2=0,xzxy^2=-zx^2y^2.$$

交换 x 和 y 的位置，可以得到类似的恒等式。可以证明，这 27 个恒等式线性无关。为此，只需证明这些恒等式的系数矩阵相对于 $A^{(2^2,1)}{}_3$ 的任意一组基的秩为 27。选取以下 $A^{(2^2,1)}{}_3$ 的基进行计算较为方便：x^2zy^2,y^2zx^2，以及所有满足以下性质的单项式：两个符号 x （或两个符号 y）不相邻，$x^2y^2z,zx^2y^2,y^2x^2z,zy^2x^2$。由此可知，$\dim(T(\mathfrak{M})\cap A^{(2^2,1)}{}_3)\geq 27$ 且 $0\leq\varkappa_{(2^2,1)}\leq 30-27-3=0$，因此 $\varkappa_{(2^2,1)}=0$。

引理 4.11。 模 $M(2,1^3)$ 以重数 1 参与将 $P_5(\mathfrak{M})$ 分解为不可约 S_5-子模之和。

证明。 根据引理 1.1、1.2 以及已知的重数，我们有

$$\varkappa_{(2,1^3)}=\dim A_4^{(2,1^3)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_4^{(2,1^3)})-1\cdot\beta_{(3,2)}^{(2,1^3)}-1\cdot\beta_{(3,1^2)}^{(2,1^3)},$$

$$\dim A_4^{(2,1^3)}=60,\beta_{(3,2)}^{(2,1^3)}=\beta_{(3,1^2)}^{(2,1^3)}=3.$$

因此，问题归结为确定 $T(\mathfrak{M})\cap A^{(2,1^3)}{}_4$ 的维数。由恒等式 $x^2zy^2=0$

$$x^2yzt+x^2ytz=yztx^2+zytx^2=0. \tag{12}$$

已在 [8] 中证明，$\mathfrak{M}$ 满足恒等式

$$yx^2zt+tyx^2z=0. \tag{13}$$

在线性化 $xyztu+yxztu+xyzut+yxzut=0$ 中，将 $x^2zy^2=0$ 中的 u 替换为 x，并利用 $xvx=-x^2v-vx^2$，得到

$$x^2yzt+yztx^2+yx^2zt+yzx^2t=0. \tag{14}$$

同样容易验证这些恒等式

$$\begin{aligned} &xyxzt=-x^2yzt-yx^2zt,\ yxzxt=-yx^2zt-yzx^2t,\\ &xyzxt=-x^2yzt-yzx^2t,\ yxztx=-yx^2zt-yztx^2,\\ &xyztx=-x^2yzt-yztx^2,\ yzxtx=-yzx^2t-yztx^2. \end{aligned} \tag{15}$$

在恒等式（15）中对变量 y、z、t 进行置换，我们得到30个新的恒等式。同样地，由（12）和（13）可再得到18个恒等式。这样，我们共有54个类似于（12）、（13）和（15）的恒等式。结果表明，其中53个线性无关，但全部54个线性相关。为说明这一点，只需将这些多项式表示为关于 $A^{(2,1^3)}{}_4$ 的基的形式，该基由以下单项式组成

$$xyxzt, xyzxt, xyzxt, yxzxt, yxztx, yzxtx,$$

以及通过置换 y、z、t而得到的另外30个单项式。最后，我们得到24个其中包含 x^2 的单项式:

$$\begin{aligned} &x^2yzt, x^2ytz, ytzx^2, tyzx^2, x^2tyz, x^2tzy, tzyx^2, ztyx^2,\\ &x^2zty, x^2zyt, zytx^2, yx^2zt, yx^2tz, zx^2ty, zx^2yt, tx^2yz,\\ &tx^2zy, yzx^2t, ytx^2z, ztx^2y, zyx^2t, tyx^2z, tzx^2y, yztx^2. \end{aligned}$$

所考虑恒等式关于该基的坐标 60×54 矩阵的秩为53。通过列出 $x^3=0$的次数为 $(2,1^3)$ 的所有可能推论，我们得到，所有这类推论都是类似于（12）、（13）和（15）的恒等式的线性组合。因此，$\dim(T(\mathfrak{M})\cap A^{(2,1^3)}{}_4)=53$且 $\varkappa_{(2,1^3)}=1$。

为证明定理 4.6，只需注意到

$$S_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=0$$

与恒等式成比例

$$\sum(-1)^\sigma h_3(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)},x_{\sigma(5)})=0,$$

因此，$S_5=0$ 是 $x^3=0$的推论。

命题 4.12. 以下元素的线性化生成了 $P_n(\mathfrak{M})$中的不可约 S_n-子模:

$$\begin{gathered} M(1^3):S_3(x_1,x_2,x_3);\ M(2,1):\alpha x[x,y]+\beta[x,y]x,(\alpha,\beta)\neq(0,0);\\ M(1^4):S_4(x_1,x_2,x_3,x_4);\ M(2,1^2):\alpha f_1(x,y,z)+\beta f_2(x,y,z),\\ \textit{where } f_1(x,y,z)=x^2[y,z]-[y,z]x^2, f_2(x,y,z)=yx^2z-zx^2y,(\alpha,\beta)\neq(0,0);\\ M(2^2):xy^2x;\ M(3,1):x^2yx;\ M(2,1^3):x^2S_3(y,z,t)+2d_3(y,z,t;x^2,1)\\ \textit{(here } d_3(x_1,x_2,x_3;y_1,y_2)=\sum(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2x_{\sigma(3)}\ \textit{is the Capelli identity)};\\ M(3,1^2):x[y,z]x^2;\ M(3,2):x^2y^2x. \end{gathered}$$

证明。该命题证明的主要思路如下。首先，我们固定 n 的一个分拆 $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots\ldots,\ \lambda_r)$。按照 [4, §1] 中的记号，对于适当的置换 τ，我们考虑与分拆 λ 对应的杨表。

对称化 $f_\tau(x_1, \ldots\ldots, x_r)$ 在 $F_m(\mathfrak{M})$ 中生成一个不可约的 $GL(m, K)$-子模，该子模同构于 $N_m(\lambda)$。利用 $x^3 = 0$ 已知的推论，我们重新处理 $f_\tau(x_1, \ldots\ldots, x_t)$，并证明在 $F_m(\mathfrak{M})$ 中，它等价于命题 4.12 陈述中的恒等式。

情形 $M(1^3)$、$M(2, 1)$ 和 $M(1^4)$ 显然。我们假设 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = t$。

对于分拆 $(2, 1^2)$ 和恒等置换 τ_1，我们得到：

$$f_{\tau_1}(x, y, z) = S_3(x, y, z)x = -x^2[y, z] + [y, z]x^2 + yx^2z - zx^2y.$$

那么对于置换 $\tau_2 =(34)$，我们有：

$$f_{\tau_2}(x, y, z) = [x, y]xz + [y, z]x^2 + [z, x]xy = [y, z]x^2 - x^2[y, z] + 2(zx^2y - yx^2z).$$

利用引理 4.5 证明中的恒等式，我们可以证明多项式 f_{τ_1} 和 f_{τ_2} 在 $F_3(\mathfrak{M})$ 中线性无关。这意味着它们的线性化在 $P_4(\mathfrak{M})$ 中生成两个不同的同构子模 $M(2, 1^2)$。并且容易看出，f_{τ_1} 和 f_{τ_2} 是 f_1 和 f_2 的线性组合。

情形 (2^2)。在这种情况下，对于恒等置换 τ，我们得到

$$f_\tau(x, y) = x^2y^2 - yx^2y - xy^2x + y^2x^2.$$

由引理 4.4 的证明可知，$f_\tau(x, y) = -3xy^2x \neq 0$ 属于 $F(\mathfrak{M})$。

情形 $(3, 1)$，$(3, 2)$，$(3, 1^2)$ 可用类似的方法处理，即利用恒等置换以及引理 4.3、4.8 和 4.9 中的恒等式。

情形 $(2, 1^3)$。利用恒等式 (12)、(13)、(14)、(15)，容易看出，在对应于标准杨表的所有不可约子模中，只有恒等置换对应的子模能得到非零生成元：$x^2S_3(y, z, t) + 2d_3(y, z, t; x^2, 1)$。

下一个定理给出了包含多项式 x^3 的 T-理想的完整描述。

定理 4.13。在由恒等式 $x^3 = 0$ 定义的簇 $\mathfrak{M}$ 中，由 $P_n(\mathfrak{M})$ 中生成不可约 S_n-子模的恒等式所得到的所有高次推论，均列于图 6 (a)、(b)、(c) 中。在此图中

$$f = yx^2z - zx^2y, e = x^2S_3(y, z, t) + 2d_3(y, z, t; x^2, 1), g = x^2[y, z] - [y, z]x^2.$$

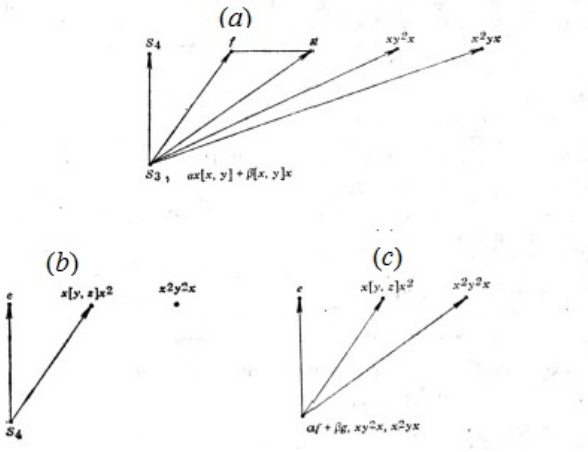

图 6

我们将分几个步骤完成该定理的证明：

1) 为了处理图 6 (a) 的情形，只需分别在由恒等式定义的簇中，从 x^3 求出更高次数的推论，

$$S_3(x,y,z)=0, \alpha x[x,y]+\beta[x,y]x=0, (\alpha,\beta)\neq(0,0),$$

（见图 1、2、3、4、5）。

2) 在命题 4.12 的证明中，我们已经提到，模去恒等式 (12)、(13)、(14)、(15)

$$S_4(x,y,z,t)x=x^2S_3(y,z,t)+2d_3(y,z,t;x^2,1),$$

也就是说，元素 $x^2S_3+2d_3$ 显然是 $S_4(x,\ y,\ z,\ t)$ 在 $F(\mathfrak{M})$ 中的一个推论。

在 (14) 中，我们对 $y,\ z,\ t$ 取交错和，得到

$$x^2S_3(y,z,t)+S_3(y,z,t)x^2=0. \tag{16}$$

将 t 替换为 x 并使用 (12)，我们看到恒等式 $x[y,z]x^2=0$ 是 $S_4(x,\ y,\ z,\ t)$ 在 $F(\mathfrak{M})$ 中的推论。这样，我们得到图 6(b) 的情形。根据 [5, 命题 1.1]，恒等式 $x^2y^2x=0$ 并非由 $S_4(x,\ y,\ z,\ t)=0$ 推出。

3) 我们将证明

$$x^2S_3(y,z,t)+2d_3(y,z,t;x^2,1)=0$$

是 $xy^2x=0$ 和 $x^2yx=0$ 的推论。

我们对 (11) 取交错和，得到

$$d_3(y,z,t;x^2,1)+d_3(y,z,t;1,x^2)=0. \tag{17}$$

在 $yx^2y=0$ 中，我们将 y 替换为 $y+z$，然后将 z 替换为 zx。利用 (14) 和 (15) 计算结果，得到 $ytx^2z+2ytzx^2=0$。这意味着

$$d_3(y,z,t;x^2,1)+2S_3(y,z,t)x^2=0. \tag{18}$$

我们将 x^2yzx 线性化。于是由 (15) 可得

$$2tyx^2z=yzx^2t+yztx^2+tyzx^2,\ \text{i.e. } d_3(y,z,t;1,x^2)=S_3(y,z,t)x^2.$$

结合（16）、（17）和（18）可推出

$$d_3(y,z,t;x^2,1)=0=x^2S_3(y,z,t)$$

是 $xy^2x=0$ 的推论。由 $xyx^2=0$ 可知 $xyzx^2=yx^2zx=0$，因此我们可以应用类似的论证。

4）显然，$x^2y^2x=0$ 由 $xy^2x=0$ 推出。

我们对 y 进行线性化，并用 yx 替换 y。然后用 zx 替换 z，将这两个恒等式相减，得到 $x^2[y,z]x=0$。

显然，$x^2[y,z]x=0$ 和 $x^2y^2x=0$ 由 $x^2yx=0$ 推出。

5）现在我们将得到

$$2d_3(y,z,t;x^2,1)+x^2S_3(y,z,t)=0$$

由此可得

$$x^2[y,z]-[y,z]x^2=0. \tag{19}$$

利用（13）和（14），由（19）可得

$$tx^2yz-2zx^2yt+2yx^2tz-yx^2zt=0.$$

在 (19) 中，我们将 z 替换为 $z\circ t=zt+tz$，并结合 (12) 得到

$$x^2(z\circ t)y+y(z\circ t)x^2=0.$$

由此及 (14) 可得

$$yx^2tz - zx^2yt = -yx^2zt + tx^2yz.$$

结合（19），后一个等式给出

$$tx^2yz = yx^2zt \tag{20}$$

并且，类似地， $yx^2zt = zx^2ty$。我们在左侧用 t 乘（19），由此得到
(20)

$$2x^2tyz = tx^2[z, y]. \tag{21}$$

根据（14）和（20），我们得到 $x^2yzt + yztx^2 = 0$。因此，由（12）可知，所有以 x^2 开头或结尾的单项式除符号外均相等。因此，若我们在左侧用 x 乘（19），则得到 $tx^2[y, z] + 4tyzx^2 = 0$。由此并结合（15），我们推出 $tx^2[y, z] = 0$ 和 $tyzx^2 = 0$。因此， d_3（y， z， t； x^2， 1） $= 0$，且 S_3（y， z， t）$x^2 = 0$。特别地，由此可知， $x^2[y, z]x = 0$ 和 $x^2y^2x = 0$ 也是（19）的推论。

6) 现在我们将得到以下推论

$$yx^2z - zx^2y = 0. \tag{22}$$

分别将 z 替换为 zx 、将 y 替换为 yx，并将这些等式相减，我们得到 $x^2[y, z]x = 0$。如果在（22）中将 z 替换为 yx ，则得到 $x^2y^2x = 0$。在（22）中将 z 替换为 zt，并对 y、 z、 t 取交错和，我们得到

$$d_3(y, z, t; x^2, 1) - d_3(y, z, t; 1, x^2) = 0. \tag{23}$$

结合（16），这意味着 d_3（y、 z、 t； x^2、 1） $= 0$。现在我们将（22）线性化，从左侧乘以 x，并利用（15），得到

$$yx^2tz + 2ytzx^2 + ytx^2z - ztyx^2 - zx^2ty = 0.$$

对 y、 z、 t 取交错和，得到

$$2d_3(y, z, t; x^2, 1) + 4S_3(y, z, t)x^2 + 2d_3(y, z, t; 1, x^2) = 0.$$

于是（16）意味着 S_3（y、 z、 t） $x^2 = 0$。

7) 现在我们将考察以下推论

$$\alpha(x^2[y, z] - [y, z]x^2) + \beta(yx^2z - zx^2y) = 0,\ \alpha \neq 0, \beta \neq 0. \tag{24}$$

我们从右侧乘以 t ，并对 y, z, t 取交错和：

$$2x^2S_3(y, z, t) + (\alpha + \beta)d_3(y, z, t; x^2, 1) = 0. \tag{25}$$

类似地，从左侧乘以 t 并考虑到 (25)，我们得到

$$d_3(y, z, t; x^2, 1) = x^2S_3(y, z, t) = 0.$$

现在我们在 (24) 的右侧乘以 x：$(\alpha - \beta)x^2[y, z]x = 0$。若 $\alpha = \beta$，我们可以明确地验证，再次有 $x^2[y, z]x = 0$。

若在 (24) 中将 z 替换为 yx，则得到 $(3\alpha - \beta)x^2y^2x = 0$。若 $3\alpha = \beta$，我们在 (24) 中将 z 替换为 xy。

定理中图 6 (c) 的情形是所考察的情形 3)–7) 的推论。

这样，定理的证明就彻底完成了。

References

[1] A.Z. Anan'in、A.R. Kemer，子簇格为分配格的结合代数簇（俄语），西伯利亚数学杂志 17 (1976), 723-730。译文：Sib. Math. J. 17(1976), 549-554。[2] A.V. Artamonov，线性代数簇的格。（俄语），Usp. Mat. Nauk 33, No. 2(200) (1978), 135-167。译文：Russ. Math. Surv. 33, No. 2 (1978), 155-193。[3] H. Weyl，《经典群、它们的不变量与表示》。第2版。普林斯顿数学丛书，第1卷。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1946（第IV章）。（论文俄文原版中，作者引用的是该书1947年的俄译本。）[4] V.S. Drensky，对称群的表示与线性代数簇（俄语），数学文集 115 (1981), 98-115。译文：Math. USSR Sb. 43 (1981), 85-101。[5] V.S. Drensky，关于结合代数簇的格（俄语），Serdica 8 (1982), No. 1, 20-31。[6] A. Berele，齐次多项式恒等式，以色列数学杂志 42 (1982), 258-272。[7] J.A. Green，GL_n的多项式表示，数学讲义，830，柏林—海德堡—纽约：施普林格出版社，1980。[8] G. Higman，关于永田猜想，剑桥哲学学会会报 52 (1956), 1-4。[9] G.D. James，关于由 $s_3[x_1, x_2, x_3]$生成的 T-理想的一个注记，以色列数学杂志 29 (1978), No. 1, 105-112。[10] A.A. Klein，满足三次恒等式的PI-代数，美国数学会汇刊 201 (1975), 263-277。[11] I.G. Macdonald，对称函数与霍尔多项式，牛津数学专著。牛津：克拉伦登出版社，1979。（第1章）[12] M M. Nagata，关于幂零代数的幂零性，日本数学会杂志 4 (1952), 296-301。[13] J.B. Olsson、A. Regev，关于由标准恒等式生成的T-理想，以色列数学杂志 26 (1977), 97-104。[14] A. Regev，由标准恒等式 $s_3[x_1, x_2, x_3]$生成的T-理想，以色列数学杂志 26 (1977), 105-125。[15] A. Regev，三次T-理想是有限生成的，伦敦数学会通报 10 (1978), 261-266。[16] A. Regev，满足Capelli恒等式的代数，以色列数学杂志 33 (1979), 149-154。

Received Dec. 7, 1983

Centre for Mathematics and Mechanics
1090 Sofia, P.O. Box 373

Current address:Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of SciencesAcad. G. Bonchev Str.,
Block 8, 1113 Sofia, Bulgaria*Email address*:
drensky@math.bas.bg