arXiv:2601.07067v1 [math.NT] 11 Jan 2026

实双二次域的 Greenberg猜想与岩泽模 II

M. M. Chems-Eddin 和 H. El Mamry

摘要。本文研究实双二次域的分圆 $\mathbb{Z}_2$扩张中类群 2-秩的稳定性。事实上，我们给出了若干族实双二次域 K，使得 rank($A(K)$) =rank($A_\infty(K)$) 且 rank($A(K)$) ≤ 3，其中 $A(K)$ 和 $A_\infty(K)$ 分别是 K 的 2-类群和 2-岩泽模。此外，对于一些新的数域族，Greenberg猜想得到了验证；特别地，我们确定了所有具有平凡的 2-岩泽模的实双二次域的完整列表。本文是 M. M. Chems-Eddin《实双二次域的 Greenberg猜想与岩泽模 I》的续篇，发表于《数论杂志》281（2026），224–266。

1. 引言

设 k 为一个数域，ℓ 为一个素数。当 $\ell = 2$ （分别为 E_k）时，记 $A_\ell(k)$，或简记为 $A(k)$，表示 k 的 ℓ-类群（分别为单位群）。k 的一个 $\mathbb{Z}_\ell$-扩张是 k 的一个无限扩张，记作 k_∞，满足 Gal(k_∞/k) $\simeq \mathbb{Z}_\ell$，其中 $\mathbb{Z}_\ell$ 是 ℓ-进数环。对每个 $n \geq 1$，扩张 k_∞/k 都包含一个唯一的域，记作 k_n，称为 k 的圆分 $\mathbb{Z}_\ell$-扩张的第 n 层，其次数为 ℓ^n。此外，我们有：

$$k = k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset \cdots \subset k_n \subset \cdots \subset k_\infty = \bigcup_{n\geq 0} k_n.$$

特别地，对于一个奇素数 ℓ，令$\mathbb{Q}_{\ell,\, n}$ 为圆分域 $\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^{n+1}})$ 的唯一实子域，其在 $\mathbb{Q}$ 上的次数为 ℓ^n；对于 $\ell = 2$，令 $\mathbb{Q}_{2,\, n}$ 为域 $\mathbb{Q}(2\cos(2\pi/2^{n+2}))$，其中对所有 $n \geq 1$ 均成立。于是 $k_\infty = \bigcup k_n$，其中 $k_n = k\mathbb{Q}_{\ell,\, n}$，称为 k 的圆分 $\mathbb{Z}_\ell$-扩张。关于范数映射的逆极限 $A(k_\infty) := \varprojlim A_\ell(k_n)$ 称为 k_∞/k 的岩泽模。岩泽的一个重要结果断言，存在整数 λ_k、$\mu_k \geq 0$ 和 ν_k，它们都与 n 无关；并且存在一个整数 n_0，使得：

$$h_\ell(k_n) = \ell^{\lambda_k n + \mu_k \ell^n + \nu_k}, \tag{1}$$

对所有 $n \geq n_0$。这里 $h_\ell(k)$ 表示数域 ℓ 的 k-类数。整数 λ_k、μ_k 和 ν_k 称为 k_∞/k 的岩泽不变量（参见 [23] 和 [35]了解更多详情）。

2010 数学主题分类。11R29；11R23；11R18；11R20。关键词和短语。实双二次域、岩泽模、分圆 $\mathbb{Z}_2$-扩张。

1976年，Greenberg 猜想，不变量 μ 和 λ 必须等于 0，对于全实数域的圆分 $\mathbb{Z}_\ell$-扩张而言（参见 [22]）。

Ferrero 和 Washington 进一步证明，当数域在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上为阿贝尔扩张时，分圆 $\mathbb{Z}_\ell$ 扩张的 μ-不变量总是消失（参见 [20]）。换言之，这一猜想等价于 $h_\ell(k_n)$ 一致有界。Greenberg猜想仍未解决，研究者通过考察 ℓ 的特定取值以及特定的数域族（尤其是实二次域），取得了一些进展；例如，读者可参见 [12, 29, 30, 31, 32, 33]。此外，最近有些作者开始关注 Greenberg猜想在某些特定实双二次域族中的情形。事实上，Chems-Eddin、El Mahi 和 Ziane 研究了形如 $\mathbb{Q}(\sqrt{pq_1},\ \sqrt{q_1q_2})$ 的双二次域的这一猜想，其中 $p \equiv 5$ (模 8) 和 $q_1 \equiv q_2 \equiv 3$ (模 4) 是满足 $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right)$ 的三个素数（参见 [14, 17, 18, 19]）。Azizi、Jerrari 和 Sbai 最近也研究了这些域的分圆 $\mathbb{Z}_2$ 扩张（参见 [24]）。此外，在[28]，Laxmi 和 Saikia 研究了形如 $\mathbb{Q}(\sqrt{p},\ \sqrt{r})$ 的双二次域的这一猜想，其中 $p \equiv 9$ 模 16，$r \equiv 3$ 模 4 是满足 $\left(\frac{p}{r}\right) = -1$ 且 $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = -1$ 的两个素数。随后，[13]，对实双二次域进行了全面的一般性研究，本文是这项工作的延续。考虑以下定义。

定义 1.1。若数域 k 是 QO 域，即它是某个类数为奇数的数域 k' 的二次扩张，则称之为 QO 域。我们将 k' 称为 QO 域 k 的基域，并称 k/k' 为 QO扩张。QO 域的扩张是指数域 L/M 的数域扩张，其中 L 和 M 是 QO 域。

在 [13], 中，第一作者考虑了以下问题。

问题：

设 K 是一个实双二次数域，使得 K_1/K 是 QO 域的分歧扩张，其中 $K_1 = K(\sqrt{2})$是 K的圆分 $\mathbb{Z}_2$-扩张的第一层。考虑以下问题：

问题 1：满足以下条件的实双二次域 K 是什么？

$$\operatorname{rank}(A(K_\infty)) \leq 2 \text{ and } \operatorname{rank}(A(K_\infty)) = \operatorname{rank}(A(K))?$$

问题2： $A(K_\infty)$的结构是什么？

根据 [13, 第 227], 页，满足问题 1 的实双二次域 K 属于以下六种形式之一：

$A)$ $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{d})$，其中 $d > 1$ 是一个奇数正平方自由整数，且不能被 q 整除。$B)$ $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2q}, \sqrt{d})$，其中 $q \equiv 3$ （模 4）和 $d \equiv 1$ （模 4）是正平方自由整数。

C) $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{d})$，其中 $q_1\equiv 3$（模 4）和 $q_2\equiv 3$（模 8）是两个素数，而 $d\equiv 1$（模 4）是一个不能被 q_1q_2 整除的正平方自由整数。

D) $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{d})$ 或 $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{2d})$，其中 $q_1\equiv 7$（模 8）、$q_2\equiv 3$（模 8）是两个素数，且 $d\equiv 3$（模 4）是一个不被 q_1q_2 整除的正平方自由整数。

E) $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{d})$ 或 $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{2d})$，其中 $q_1\equiv 3$（模 8）、$q_2\equiv 3$（模 8）是两个素数，且 $d\equiv 3$（模 4）是一个不被 q_1q_2 整除的正平方自由整数。

F) $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$，其中 $\sqrt{p}$ 和 d 满足以下条件之一：*a*) $p\equiv 1$（模 4），且 $d=q_1q_2$ 对于两个满足 $\left(\frac{q_2}{p}\right)=-1$ 的素数 $q_1\equiv q_2\equiv 3$（模 4），*b*) $p\equiv 1$（模 4），且 $d=q_1q_2$ 对于两个素数 $q_1\equiv 3$（模 4）和$q_2\equiv 3$（模 8），*c*) $p\equiv 1$（模 4）和 $d\equiv 3$（模 4）是两个素数，使得 $\left(\frac{p}{d}\right)=-1$ 或 $p\equiv 5$（模 8），*d*) $p\equiv 1$（模 4）和 $d\equiv 1$（模 4）是两个素数，使得$\left(\frac{p}{d}\right)=-1$或 $[\left(\frac{p}{d}\right)=1$ 和 $\left(\frac{p}{d}\right)_4\neq\left(\frac{d}{p}\right)_4]$。

这里，p 表示一个模 4 同余于 1 的素数，q、q_1、q_2 表示三个模 4 同余于 3 的素数。设 r 和 s 为两个素数。我们将形如以下形式的任意实双二次域命名为 L

$$L:=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{r}) \text{ or } \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{rs}) \text{ where } r\equiv 1 \pmod 8 \text{ and } \left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=1$$

我们注意到 [13, 定理 1.4] 刻画了所有满足问题 1 且形如 *A*)、*B*) 和 *C*) 的实双二次域。作为前述研究的延续，我们证明以下第一主结果。

定理 1.2 (第一主定理)。设 K 为形如 *D*) 或 *F*) 且满足 $K\neq L$的实双二次数域。则秩$(A(K_\infty))\leq 2$ 且秩$(A(K_\infty))=$秩$(A(K))$ 当且仅当 K 具有以下形式之一：

1) $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1}q_2,\sqrt{\delta r})$，其中 $q_1\equiv 7$ (模 8)、$q_2\equiv 3$ (模 8)和 r 是素数，$\delta\in\{1,q_1,q_2\}$ 满足 $\delta r\equiv 3$ (模 4)，并且满足以下同余条件之一：

C1：$r\equiv 3$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=-1$，C2：

$r\equiv 3$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1}{r}\right)=1$，C3：

$r\equiv 5$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$。

在这种情况下，我们有：秩$(A_\infty(K))=1$.

2) $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{q_1r})$，其中 $q_1\equiv 7$（模 8）、$q_2\equiv 3$（模 8）且 $r\equiv 1$（模 4）是满足 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1}{r}\right)=1$ 的素数。在这种情况下，我们有：秩$(A_\infty(K))=2$.

3） $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1}q_2,\sqrt{\delta}rs)$，其中 $q_1\equiv 7$ （模 8）、 $q_2\equiv 3$ （模 8）、 r 和 s 是素数， $\delta\in\{1,q_1,q_2\}$ 满足 $\delta rs\equiv 3$ （模 4）， $\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=1$ ，并且符合以下条件之一：条件 1： $r\equiv 5$ （模 8），$s\equiv 3$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$；条件 2： $r\equiv 3$ （模 8）， $s\equiv 3$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)\neq\left(\frac{q_1}{s}\right)$。在这种情况下，我们有：秩$(A_\infty(K))=2$.

4） $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{\delta rs})$，其中 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $q_2\equiv 3$ (模 8)， r 和 s是素数， $\delta\in\{1,q_1,q_2\}$ 满足 $\delta rs\equiv 3$(模 4)， $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=-1$，并且满足以下条件之一：C1： $r\equiv s\equiv 3$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)\neq\left(\frac{q_1}{s}\right)$，C2： $r\equiv 3$ (模 8)， $s\equiv 5$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{s}\right)=-1$，C3： $r\equiv 5$ (模 8)， $s\equiv 3$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$。在这种情况下，我们有：秩$(A_\infty(K))=2$.

5） $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{2\delta r})$，其中 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $q_2\equiv 3$ (模 8)， r 是一个素数， $\delta\in\{1,q_1,q_2\}$ 满足(模 4)，并且以下条件之一成立：C1： $r\equiv 3$ (模 8)，C2： $r\equiv 5$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$。在此情况下，我们有： 秩 $(A_\infty(K))=1$.

6） $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{2q_1r})$，其中 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $q_2\equiv 3$ (模 8)， r 是满足 $r\equiv 5$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1}{r}\right)=1$ 的素数。在此情况下，我们有： 秩$(A_\infty(K))=2$.

7） $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1}q_2,\sqrt{2\delta r}s)$，其中 $q_1\equiv 7$ （模 8）且 $q_2\equiv 3$ （模 8）， r 和 s 是素数， $\delta\in\{1,q_1,q_2\}$ 满足 $\delta rs\equiv 3$ （模 8）， $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=1$ ，并且满足以下条件之一：C1： $r\equiv 5$ （模 8）， $s\equiv 3$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$，C2： $r\equiv s\equiv 3$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)\neq\left(\frac{q_1}{s}\right)$。在此情形下，我们有：秩$(A_\infty(K))=2$.

8） $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{q_1}q_2,\sqrt{2\delta rs}\right)$ ，其中 $q_1\equiv 7$ （模 8）且 $q_2\equiv 3$ （模 8）， r 和 s是素数， $\delta\in\{1,q_1,q_2\}$ 满足 $\delta rs\equiv 3$ （模 8），且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=-1$，并且满足以下条件之一：C1： $r\equiv s\equiv 3$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)\neq\left(\frac{q_1}{s}\right)$，C2： $r\equiv 5$ （模 8）， $s\equiv 3$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$，C3： $r\equiv 3$ （模 8）， $s\equiv 5$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1}{s}\right)=-1$。在这种情况下，我们有：秩$(A_\infty(K)=2$.

9） $K=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{2\delta rs})$，其中 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $q_2\equiv 3$ (模 8)， r 和 s是素数， $\delta\in\{1,q_1,q_2\}$ 满足 $\delta rs\equiv 3$(模 8)，且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=1$ 以及以下条件之一：

- $r\equiv s\equiv 3$(模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)\equiv-\left(\frac{q_1}{s}\right)\equiv 1$,
- $r\equiv 5$ (模 8)， $s\equiv 3$ (模 8) 以及 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$。

在这种情况下，我们有：秩$(A_\infty(K)) = 2$.

10) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q_1 q_2})$，其中 $p \equiv 1$ (模 4)， $q_1 \equiv 3$ (模 4)， $q_2 \equiv 3$ (模 8) 是互不相同的素数，且 $\left(\frac{q_2}{p}\right) = -1$ 满足以下条件之一：

C1： $p \equiv 5$ (模 8) $q_1 \equiv 3$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{p}\right) = 1$,

C2： $p \equiv 5$ (模 8) $q_1 \equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{p}\right) = -1$。

在这种情况下，我们有：秩$(A_\infty(K)) = 0$.

11) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{d})$，其中 $p \equiv 5$ (模 8) 且 $d \equiv 3$ (模 4) 是两个素数。

在这种情况下，我们有：秩$(A_\infty(K)) = 0$.

12) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{d})$，其中 $p \equiv d \equiv 1$ (模 4) 是满足以下条件的两个素数：

$a)$ $\left(\frac{p}{d}\right) = -1$ 或 $[\left(\frac{p}{d}\right) = 1$ 且 $\left(\frac{p}{d}\right)_4 \neq \left(\frac{d}{p}\right)_4]$, $b)$ $h_2(2pd) = 4$ 且 $c)$ $q(k_1) = 1$，其中 $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{pd}, \sqrt{2})$。在这种情况下，我们有：秩$(A_\infty(K)) = 0$.

本文的安排如下。在第2 节，我们证明定理 1.2。在第 3节，我们给出一些实双二次域族，使得 秩$(A(K_\infty))$ =秩$(A(K)) = 3$。最后一节专门研究实双二次域的 2-岩泽模的结构。事实上，我们列出了所有具有平凡 2-岩泽模的实双二次域。此外，我们还给出了一些满足 Greenberg猜想的新实双二次域族。

2. 定理 1.2 的证明

我们先收集一些稍后会用到的预备结果 .

2.1. 预备知识。 我们先回顾以下有用的结果。

引理 2.1 ([27])。 设 k 是一个次数为 2^n 的多二次数域， $n \geq 2$，且 k_i 是 k 的二次数子域。那么

$$h(k) = \frac{1}{2^v} q(k) \prod_{i=1}^{s} h(k_i),$$

其中 $q(k) = [E_k : \prod_{i=1}^{s} E_{k_i}]$ 且

$$v = \begin{cases} n(2^{n-1} - 1); & \text{if } k \text{ is real,} \\ (n-1)(2^{n-2} - 1) + 2^{n-1} - 1 & \text{if } k \text{ is imaginary.} \end{cases}$$

为了计算上述引理中出现的单位指标 $q(k)$，回顾 [34]，中描述实多二次域基本单位系的以下方法很有用：

设 k_0 为实多二次域。令 σ_1 和 σ_2 为 $k_0/\mathbb{Q}$ 的伽罗瓦群中两个不同的二阶元素。令 k_1、k_2 和 k_3 分别为 k_0 中在 σ_1、σ_2 和 $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$ 作用下不变的三个子扩张。令 ε 表示 k_0 的一个单位。那么

$$\varepsilon^2 = \varepsilon\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon\varepsilon^{\sigma_2}\left(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2}\right)^{-1},$$

并且我们有 $\varepsilon\varepsilon^{\sigma_1} \in E_{k_1}$、$\varepsilon\varepsilon^{\sigma_2} \in E_{k_2}$ 和 $\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2} \in E_{k_3}$。由此可知，$k_0$ 的单位群由 E_{k_1}、E_{k_2} 和 E_{k_3}中的元素，以及 $E_{k_1}E_{k_2}E_{k_3}$ 中在 k_0里为完全平方数的元素的平方根生成。

以下结果是著名的福田定理的一个特例[21]。

引理 2.2 ([21])。设 k_∞/k 是一个 $\mathbb{Z}_2$-扩张，且 n_0 是一个整数，使得 k_∞ 中在 k_∞/k 里分歧的任一素理想在 k_∞/k_{n_0}中完全分歧。
1）若存在一个整数 $n \geq n_0$，使得 $h_2(k_n) = h_2(k_{n+1})$，则对所有 $m \geq n$，$h_2(k_n) = h_2(k_m)$。*2*）若存在一个整数 $n \geq n_0$，使得 $\mathrm{rank}(A(k_n)) = \mathrm{rank}(A(k_{n+1}))$，则对所有 $m \geq n$，$\mathrm{rank}(A(k_m)) = \mathrm{rank}(A(k_n))$。

引理 2.3 ([36], 引理 2.4)。设 k/k' 是数域的一个 *QO*扩张。那么，k 的2类群的秩由下式给出

$$\mathrm{rank}(A(k)) = t_{k/k'} - 1 - e_{k/k'},$$

其中，$t_{k/k'}$ 是扩张k/k' 中的分歧素理想（有限或无限）的个数，$e_{k/k'}$ 由 $2^{e_{k/k'}} = [E_{k'} : E_{k'} \cap N_{k/k'}(k^*)]$定义。

设 $k^{(1)}$ 是数域 k的希尔伯特 2-类域，即 k 的最大非分歧阿贝尔扩张，且其在 k 上的次数是 2 的幂。令$k^{(0)} = k$，并设对任意整数 $i \geq 1$，$k^{(i)}$ 表示 $k^{(i-1)}$ 的希尔伯特 2-类域。那么域序列

$$k = k^{(0)} \subset k^{(1)} \subset k^{(2)} \subset \cdots \subset k^{(i)} \cdots \subset \bigcup_{i\geq 0} k^{(i)} = \mathcal{L}(k)$$

称为 k的 2-类域塔。若对所有 $i \geq 1$，$k^{(i)} \neq k^{(i-1)}$，则称该塔为无限塔；否则称其为有限塔。满足条件 $k^{(i)} = k^{(i-1)}$ 的最小整数i 称为该塔的长度。以下这个优美的刻画归功于 Benjamin、Lemmermeyer 和 Snyder。

命题 2.4 ([9], 命题 7). 设 k 为一个数域，使得 $A(k) \simeq (2^m, 2^n)$ 对某些正整数 m 和 n 成立。若 k 存在一个类数为 2^{m+n-1} 的非分歧二次扩张，则 k 的全部三个非分歧二次扩张的类数均为 2^{m+n-1}，且 k 的 *2*-类域塔在 $k^{(1)}$ 处终止。

反之，若 k 的2类域塔终止于 $k^{(1)}$，则 k 的三个未分歧二次扩张的2类数为 2^{m+n-1}。

此外，设 k是一个数域，使得 $A(k) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$，其中 $n \geq 2$是自然数。令 G_k =Gal($\mathcal{L}(k)/k$)。因此，根据类域论，我们有$G_k/G'_k \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ 以及 $G_k = \langle a, b\rangle$，使得 $a^2 \equiv b^{2^n} \equiv 1$ 模 G'_k 且$A(k) = \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\rangle \simeq \langle aG'_k, bG'\rangle$，其中$(\mathfrak{c}, k^{(2)}/k) = aG'_k$且$(\mathfrak{d}, k^{(2)}/k) = bG'_k$，这里$(\ ., k^{(2)}/k)$是扩张 $k^{(2)}/k$中的阿廷符号。因此， G_k 中存在三个指数 2 的正规子群，记为H_1,2、 H_2,2和H_3,2，使得

$$H_{1,2} = \langle b, G'_k\rangle,\ H_{2,2} = \langle ab, G'_k\rangle \text{ and } H_{3,2} = \langle a, b^2, G'_k\rangle.$$

此外， G_k 存在三个指数为 4 的正规子群，记为 $H_{1,4}$,$H_{2,4}$ 和 $H_{3,4}$，使得

$$H_{1,4} = \langle a, b^4, G'_k\rangle, \quad H_{2,4} = \langle ab^2, G'_k\rangle \text{ and } H_{3,4} = \langle b^2, G'_k\rangle.$$

$A(k)$的每个子群$H_{i,j}$ 都对应于包含在 $k^{(1)}$ 中的 k 的一个无分歧扩张 $K_{i,j}$，使得 $A(k)/H_{i,j} \simeq$Gal($K_{i,j}/k$) 且 $H_{i,j} = \mathcal{N}_{K_{i,j}/k}(A(K_{i,j}))$. k 的希尔伯特 2-类域塔可示意如下:

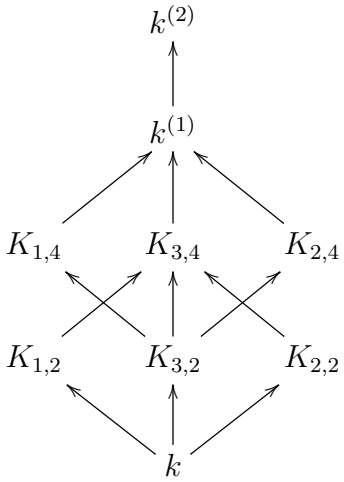

图 1. 无分歧扩张

以下有趣的结果归功于 Aaboun 和 Zekhnini。

定理 2.5 ([1], 定理 4.10)。 以下断言等价:

1) G_k 是阿贝尔的，2) $K_{3,\ 2}$ 类群同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z}$，3) $K_{3,\ 2}$ 类数等于 2^n，4) $K_{i,\ 2}$ 类群是阶为 2^n 的循环群，其中 $i = 1$ 或2，5) $K_{i,\ 2}$ 类数等于 2^n，其中 $i = 1$ 或2，6) k 的希尔伯特2类域塔在 $k^{(1)}$处终止。

2.2. **定理 1.2的证明。** 我们先从一些关于实双二次域类群的2-秩的引理开始。下面的注记有助于简化引理 2.7 和 2.9的表述。

注 2.6。 设 $q_1 \equiv 3$ （模 4）、 $q_2 \equiv 3$ （模 8）、 r 和 s 是四个素数。定义以下两个条件：

C1：$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$ 且满足以下条件之一：
- $q_1 \equiv 7$ （模 8）、 $r \equiv 1$ （模 4）和 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$，或
- $q_1 \equiv 3$ （模 8）和 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = \left(\frac{-1}{r}\right)$。

C2： $q_1 \equiv 7$ （模 8）、$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$ 且满足以下条件之一：
- $r \equiv s \equiv 1$ （模 4），
- $r \equiv 1$ （模 4）和 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$，
- $\left(\frac{q_1}{r}\right) = \left(\frac{q_1}{s}\right) = 1$，或者
- $r \equiv s \equiv 3$ （模 4）和 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = \left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$.

C3： $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$，并且满足以下条件之一：
- $q_1 \equiv 7$ （模 8）， $r \equiv 1$ （模 4）和 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$，
- $q_1 \equiv 3$ （模 8）和 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$。

引理 2.7. 设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{d})$，其中 $q_1 \equiv 3$ （模 4）， $q_2 \equiv 3$ （模 8）是两个素数，而 $d \equiv 3$ （模 4）是一个不被 q_1q_2整除的正平方自由整数。设 $\delta \in \{1, q_1, q_2\}$。则 rank（$A$（$K$））$\leq 2$ 当且仅当 K 具有以下形式之一：

1） $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{d})$，其中 $d = \delta r \equiv 3$ （模 4）且 r 是一个素数。**在这种情况下，**我们有 rank（A（K））$\in \{1, 2\}$。更准确地说，rank（A（K））$= 1$ 当且仅当满足以下条件之一：a）$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -1$，$b$） $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$ 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) \neq \left(\frac{-1}{r}\right)$。

2） $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{d})$ 满足 $d = \delta rs \equiv 3$ （模 4），其中 r 和 s 是素数，且不满足注记 C1 和 C2 中定义的任何条件 2.6。 **在这种情况下**，我们有 秩(A（K）$\in \{1, 2\}$。更准确地说，秩(A（K）$= 2$ 当且仅当满足以下条件之一时成立：

a) $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$,
b) $q_1 \equiv 7 \pmod 8$, $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$ *and* $[\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$ *or* $\left(\frac{-1}{s}\right) = -1]$,
c) $q_1 \equiv 7 \pmod 8$, $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$ *and* $[\left(\frac{q_1}{s}\right) = -\left(\frac{q_1}{r}\right) = \left(\frac{-1}{r}\right) = -1$ *or* $\left(\frac{q_1}{s}\right) = \left(\frac{-1}{r}\right) = -\left(\frac{-1}{s}\right) = -1]$.

证明。假设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{d})$，其中 $q_1 \equiv 3$ （模 4）、 $q_2 \equiv 3$ （模 8）是两个素数，而 $d \equiv 3$ （模 4）是任意一个不被 q_1q_2 整除的正平方自由整数。令 $t_{K/F}$ 为在 K 中分歧的 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$ 的素理想数。因此，rank($A(K)$) $= t_{K/F} - 1 - e_{K/F}$。由于 $e_{K/F} \in \{0, 1, 2\}$，不等式 rank($A(K)$) ≤ 2 意味着 $t_{K/F} \leq 5$。因此， d 取

以下五种形式之一

$$\begin{aligned}
&\delta r, \quad \delta rs \text{ whenever } q_1q_2 \equiv 5 \pmod 8 \text{ or } \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1,\\
&\delta rst \quad \text{whenever } q_1q_2 \equiv 1 \pmod 8 \text{ and } \left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = -1,\\
&\delta rst \quad \text{whenever } q_1q_2 \equiv 5 \pmod 8 \text{ and } \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = -1,\\
&\delta rstk \quad \text{whenever } q_1q_2 \equiv 5 \pmod 8 \text{ and } \left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{k}\right) = -1,
\end{aligned}$$

其中 $\delta \in \{1, q_1, q_2\}$、 r、 s、 t 和 k 是素数，且均不同于 q_1 和 q_2。

▶ 设 $d = \delta r$。我们有：⋆若 $q_1q_2 \equiv 5$（模 8）且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -1$，则 $\mathrm{rank}(A(K)) = 2-1-e_{K/F}$。因此，[5, 定理 3.3] 给出 $\mathrm{rank}(A(K)) = 1$。⋆ 若 $q_1q_2 \equiv 5$（模 8）且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$，则 [5, 定理 3.3] 推出 $\mathrm{rank}(A(K)) \in \{1, 2\}$，更确切地说，当且仅当 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = \left(\frac{-1}{r}\right) = 1$ 时，$\mathrm{rank}(A(K)) = 2$。⋆若 $q_1q_2 \equiv 1$（模 8）且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -1$，则 $\mathrm{rank}(A(K)) = 3 - 1 - e_{K/F}$，并且[5, 定理 3.4] 推出 $\mathrm{rank}(A(K)) = 1$。⋆若 $q_1q_2 \equiv 1$（模 8）且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$，则 $\mathrm{rank}(A(K)) = 4 - 1 - e_{K/F}$，且 [5,定理 3.4] 给出 $\mathrm{rank}(A(K)) \in \{1, 2\}$，更确切地说，当且仅当 $\left(\frac{q_1}{r}\right)\left(\frac{-1}{r}\right) = -1$ 时，$\mathrm{rank}(A(K)) = 1$。

▶ 设 $d = \delta rs$ 满足 $q_1q_2 \equiv 5$（模 8）或 $\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$。⋆ 假设 $q_1q_2 \equiv 5$（模 8）且 $\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$。若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -1$，则秩$(A(K)) = 3 - 1 - e_{K/F}$，并且 [5, 定理 3.3] 给出秩$(A(K)) = 2$。若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$，则 [5, 定理 3.3] 再次给出秩$(A(K)) = 4-1-e_{K/F} = 3 - e_{K/F} \in \{3, 2\}$，更确切地说，秩 $(A(K)) = 2$ 当且仅当 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1$或 $\left(\frac{-1}{r}\right) = -1$。⋆ 假设 $q_1q_2 \equiv 5$（模 8）且 $\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$。若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -1$，则我们有秩$(A(K)) \in \{3, 2\}$，并且秩$(A(K)) = 2$ 当且仅当 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$ 或$\left(\frac{-1}{s}\right) = -1$。若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$，则 [5, 定理 3.3], 我们有秩$(A(K)) = 5 - 1 - e_{K/F} = 4 - e_{K/F} \in \{2, 3, 4\}$，并且秩$(A(K)) = 2$ 当且仅当$e_{K/F} = 2$, 这等价于 $[\left(\frac{-1}{r}\right) = -1$ 且 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = -\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1]$ 或$[\left(\frac{-1}{r}\right) = -\left(\frac{-1}{s}\right) = -1$ 且 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1]$。⋆ 假设 $q_1q_2 \equiv 1$（模 8）且$\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$。

∗) 若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -1$，则 $\mathrm{rank}(A(K)) = 4 - 1 - e_{K/F} = 3 - e_{K/F}$，且 [5,定理 3.4] 给出 $\mathrm{rank}(A(K)) = 2$。

∗) 现在，若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$，则我们有 $\mathrm{rank}(A(K)) = 5 - 1 - e_{K/F} = 4 - e_{K/F} \in \{2, 3\}$，且 [5, 定理 3.4] 给出 $\mathrm{rank}(A(K)) = 2$，当且仅当 $\left(\frac{-1}{r}\right) \neq \left(\frac{q_1}{r}\right)$。◀

在其余情形中，我们类似地验证秩$(A(K)) \geq 3$。

□

令 $\left(\frac{-}{-}\right)$ 表示范数剩余符号。下面的引理纠正了 [5, 定理 3。4] 中关于域 $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\ \sqrt{2d})$的一个错误，其中 $d \equiv 3$(模 4) 且 $q_1q_2 \equiv 1$ (模 8)。

引理 2.8. 设 $d \equiv 3$ 模 4 是一个正平方自由整数，且 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2d})$。假设 $q_1 \equiv q_2 \equiv 3$ 模 8。那么 $e_{K/F} \in \{1,2\}$ 且 $e_{K/F} = 2$ 当且仅当 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1$，其中存在 d 的一个素因子 r，使得 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$。这里 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$。

证明. 设 r 是 d 的一个奇素因子，$\mathcal{R}$ 是 F 的一个素理想，且位于r之上。假设 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$。与 [5, 定理 3.3], 的证明一样，我们有:

$$\left(\frac{\varepsilon_{q_1q_2},\ 2d}{\mathcal{R}}\right) = \left(\frac{q_1}{r}\right), \quad \left(\frac{-1,\ 2d}{\mathcal{R}}\right) = \left(\frac{-1}{r}\right)$$

$$\left(\frac{\varepsilon_{q_1q_2},\ 2d}{2}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1,\ 2d}{2}\right) = -1.$$

因此，$e_{K/F} \in \{1,2\}$ 且 $e_{K/F} = 2$ 当且仅当 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1$。我们同样可以验证，若 d 的所有素因子 r 均满足 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -1$，则 $e_{K/F} = 1$。□

引理 2.9. 设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2d})$，其中 $q_1 \equiv 3$ (模 4)、$q_2 \equiv 3$ (模 8)是两个素数，且 $d \equiv 3$ (模 4) 是一个不被 q_1q_2 和 $\delta \in \{1, q_1, q_2\}$整除的正平方自由整数。那么，秩$(A(K)) \leq 2$ 当且仅当 K具有以下形式之一:

1) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2\delta r})$ 其中 r 是奇素数。**在此情形下**，我们有秩$(A(K))$ $\in \{1,2\}$。更准确地说，秩$(A(K)) = 2$ 当且仅当满足以下条件之一：$a)$ $q_1 \equiv 3$ (模 8) 且$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$，$b)$ $q_1 \equiv 7$ (模 8)，$r \equiv 1$ (模 4) 且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$.

2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2\delta rs})$ 其中 r 和 s 是两个不满足以下任何条件的奇素数 C2 和 C3，定义见注记 2.6。**在这种情况下**，我们有 $\operatorname{rank}(A(K)) \in \{1,2\}$。更准确地说，$\operatorname{rank}(A(K)) = 2$ 当且仅当以下条件之一成立:

$a)$ $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$,$b)$ $q_1 \equiv 3$ (模 8)，$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$ 和 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1$,
$c)$ $q_1 \equiv 7$ (模 8)，$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$ 和 $[r \equiv 3$ (模 4) 或 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1]$,$d)$ $q_1 \equiv 7$ (模 8)，$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$ 并且满足以下条件之一：$i)$ $r \equiv 3$ (模 4) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -\left(\frac{q_1}{s}\right) = 1$,$ii)$ $r \equiv 3$ (模 4)，$s \equiv 1$ (模 4) 且 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$。

证明。假设 $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{q_1q_2},\ \sqrt{2d}\right)$ 其中 $q_1 \equiv 3$ （模 4），$q_2 \equiv 3$ （模 8）是两个素数，且 $d \equiv 3$ （模 4） 是任意一个不被

被 q_1q_2整除的正平方自由整数。令 $t_{K/F}$ 表示在 K中分歧的 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$的素理想的个数。因此，秩$(A(K))=t_{K/F}-1-e_{K/F}$。由于 $e_{K/F}\in\{0,1,2\}$，不等式 秩$(A(K))\leq 2$ 意味着 $t_{K/F}\leq 5$。因此， d 具有以下五种形式之一

$$\begin{aligned}
&\delta r, && \delta rs \text{ whenever } q_1q_2\equiv 5 \pmod 8 \text{ or } \left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=-1,\\
&\delta rst && \text{whenever } q_1q_2\equiv 1 \pmod 8 \text{ and } \left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{t}\right)=-1,\\
&\delta rst && \text{whenever } q_1q_2\equiv 5 \pmod 8 \text{ and } \left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{t}\right)=-1,\\
&\delta rstk && \text{whenever } q_1q_2\equiv 5 \pmod 8 \text{ and } \left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{t}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{k}\right)=-1,
\end{aligned}$$

其中 $\delta\in\{1,q_1,q_2\}$、 r、 s、 t 和 k 均为素数，且都不同于 q_1 和 q_2。

▶ 设 $d=\delta r$。我们有：⋆若 $q_1q_2\equiv 1$（模 8）且$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=-1$，则秩$(A(K))=3-1-e_{K/F}$，因此 [5, 定理 3.4] 给出秩$(A(K))=1$.⋆若 $q_1q_2\equiv 1$（模 8）且$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=1$，则由引理 2.8 可得秩$(A(K))\in\{1,2\}$。更准确地说，秩$(A(K))=1$ 当且仅当 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$.⋆若 $q_1q_2\equiv 5$（模 8）且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=-1$，则秩$(A(K))=2-1-e_{K/F}$，并且[5, 定理 3.3] 推出秩$(A(K))=1$.⋆若 $q_1q_2\equiv 5$（模 8）且$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=1$，则秩$(A(K))=3-1-e_{K/F}\in\{1,2\}$，且 [5, 定理 3.3] 推出 $e_{K/F}=0$ 当且仅当 $\left(\frac{-1}{r}\right)=\left(\frac{q_1}{r}\right)=1$，因此秩$(A(K))=2$ 当且仅当 $\left(\frac{-1}{r}\right)=\left(\frac{q_1}{r}\right)=1$.

▶ 令 $d=\delta rs$，其中 $q_1q_2\equiv 5$（模 8）或$\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=-1$。⋆ 假设 $q_1q_2\equiv 1$（模 8）。我们有：i) 若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=-1$，则 [5, 定理 3.4] 给出秩$(A(K))=4-1-e_{K/F}$.$ii$) 若$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=-\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=1$，则秩$(A(K))=5-1-e_{K/F}=4-e_{K/F}$。根据引理 2.8 $e_{K/F}\in\{1,2\}$，更确切地说，$e_{K/F}=2$ 当且仅当$\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$。⋆ 假设 $q_1q_2\equiv 5$（模 8）。我们有：i) 若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=-1$，则 [5, 定理 3.3] 给出秩$(A(K))=3-1-e_{K/F}=2$.$ii$) 若$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=-\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=1$，则秩$(A(K))=4-1-e_{K/F}=3-e_{K/F}$，并且根据 [5, 定理 3.3]，我们有 $e_{K/F}\in\{0,1\}$；更确切地说，$e_{K/F}=1$ 当且仅当 $r\equiv 3$（模 4）或 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$.$iii$) 若$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=1$，则 [5, 定理 3.3], 给出秩$(A(K))=5-1-e_{K/F}=4-e_{K/F}\in\{4,3,2\}$。更确切地说，秩 $(A(K))=2$ 当且仅当 [$r\equiv 3$（模 4）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-\left(\frac{q_1}{s}\right)=1$]，或 [$r\equiv 3$（模 4）、 $s\equiv 1$（模 4）且 $\left(\frac{q_1}{s}\right)=-1$]。

▶ 令 $d = \delta rst$ 其中 $q_1q_2 \equiv 1$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = -1$。在此情形下，[5, 定理 3.4] 给出秩$(A(K)) = 5 - 1 - e_{K/F} = 3$。

▶ 设 $d = \delta rst$，其中 $q_1q_2 \equiv 5$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = -1$。我们有：⋆ 如果 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -1$，则 [5, 定理 3.3] 给出 $e_{K/F} = 0$，因此 rank$(A(K)) = 3$。⋆ 如果 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$，则 rank$(A(K)) = 5 - 1 - e_{K/F} = 4 - e_{K/F} \in \{3, 4\}$。更确切地说，当且仅当 $r \equiv 1$ （模 4）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$ 时，rank$(A(K)) = 4$。

▶ 设 $d = \delta rstk$，其中 $q_1q_2 \equiv 5$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{k}\right) = -1$。根据 [5, 定理 3.3]，我们有 rank$(A(K)) = 5 - 1 - e_{K/F} = 4$。

□

回顾一下，L 被称为任意形如以下形式的实双二次域

$$L := \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{r}) \text{ or } \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{rs}) \text{ where } r \equiv 1 \pmod 8 \text{ and } \left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1.$$

下面的引理给出了某些实三二次数域的类群的 2-秩。

引理 2.10。设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{d}) \neq L$ 且 $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{d}, \sqrt{2})$ 其中 $\overline{q_1} \equiv 7$ （模 8），$q_2 \equiv 3$ （模 8）是两个素数，且 $d \equiv 3$ （模 4）是一个不被 q_1q_2 整除的正平方自由整数。

1) 假设 $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{d}, \sqrt{2})$，其中 $\overline{d} = \delta r \equiv 3$ (模 4)，且 r 和 s 是两个素数，并且 $\delta \in \{1, q_1, q_2\}$。我们有

$$\text{rank}(A(K_1)) \in \{1, 2\}.$$

更确切地说：秩$(A(K_1)) = 1$ 当且仅当满足以下条件之一：

- $r \equiv 3$ (模 8)，
- $r \equiv 5$ (模 8)，$q_1 \equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1$。

2) 假设 $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{d}, \sqrt{2})$ 满足 $\overline{d} = \delta rs \equiv 3$ (模 4)，其中 r 和 s 是两个素数，且满足 秩$(A(K)) = 1$。我们有：

$$\text{rank}(A(K_1)) \in \{2, 3, 4, 5\}.$$

更确切地说，我们有：
秩$(A(K_1)) = 2$ 当且仅当，经过对 r 和 s 作适当的排列后，满足以下条件之一：

C1：$\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -1$ 且满足以下同余条件之一：
- $r \equiv 5$ (模 8) 且 $s \equiv 3$ (模 8) 且 $q_1 \equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1$，
- $r \equiv 3$ (模 8) 且 $s \equiv 3$ (模 8) 且 $q_1 \equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) \neq \left(\frac{q_1}{s}\right)$。

C2：$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$ 且满足以下同余条件之一：
- $r \equiv s \equiv 3$ (模 8) 与 $q_1 \equiv 7$ (模 8) 以及 $\left(\frac{q_1}{r}\right) \neq \left(\frac{q_1}{s}\right)$，
- $r \equiv 3$ (模 8) 以及 $s \equiv 5$ (模 8) 与 $q_1 \equiv 7$ (模 8) 以及 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$，
- $r \equiv 5$ (模 8) 且 $s \equiv 3$ (模 8) 满足 $q_1 \equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1$。

C3: $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=1$并且满足以下同余条件之一:

- $r\equiv 3$ (模 8) 且 $s\equiv 3$ (模 8) 满足 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)\neq\left(\frac{q_1}{s}\right)$,
- $r\equiv 5$ (模 8) 且 $s\equiv 3$ (模 8) 满足 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$。

秩$(A(K_1))=3$ 当且仅当对 r 和 s 进行适当排列后，满足以下条件之一:

C1: $\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=-1$ 且满足以下同余条件之一:

- $r\equiv 5$ (模 8) 且 $s\equiv 3$ (模 8) 满足 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=1$,
- $r\equiv 5$ (模 8) 且 $s\equiv 5$ (模 8) 满足 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $[\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$或 $\left(\frac{q_1}{s}\right)=-1]$,
- $r\equiv 3$ (模 8) 且 $s\equiv 3$ (模 8) 满足 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=\left(\frac{q_1}{s}\right)$,
- $r\equiv 3$ (模 8) 且 $s\equiv 7$ (模 8) 满足 $q_1\equiv 7$ (模 8),
- $r\equiv 5$ (模 8) 且 $s\equiv 7$ (模 8) 满足 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$,
- $r\equiv 5$ (模 8) 且 $s\equiv 1$ (模 8) 满足 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$,
- $r\equiv 3$ (模 8) 且 $s\equiv 1$ (模 8)。

C2: $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=-\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=-1$并且我们有以下同余条件之一:

- $r\equiv s\equiv 5$ (模 8) 满足 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $[\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$ 或 $\left(\frac{q_1}{s}\right)=-1]$,
- $r\equiv s\equiv 3$ (模 8) 其中 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=\left(\frac{q_1}{s}\right)$,
- $r\equiv 3$ (模 8) 且 $s\equiv 5$ (模 8) 其中 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{s}\right)=1$,
- $r\equiv 5$ (模 8) 且 $s\equiv 3$ (模 8) 其中 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=1$,
- $r\equiv 1$ (模 8) 且 $s\equiv 5$ (模 8) 其中 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{s}\right)=-1$。

C3: $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=1$并且满足以下同余条件之一:

- $r\equiv 7$ （模 8）且 $s\equiv 5$ （模 8）满足 $q_1\equiv 7$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1}{s}\right)=-1$,
- $r\equiv 7$ （模 8）且 $s\equiv 3$ （模 8）满足 $q_1\equiv 7$ （模 8）且$\left(\frac{q_1}{r}\right)\neq\left(\frac{q_1}{s}\right)$,
- $r\equiv 3$ （模 8）且 $s\equiv 3$ （模 8）满足 $q_1\equiv 7$ （模 8）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=\left(\frac{q_1}{s}\right)$,
- $r\equiv 5$ (模 8) 且 $s\equiv 5$ (模 8) 其中 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $[\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$或 $\left(\frac{q_1}{s}\right)=-1]$,
- $r\equiv 5$ (模 8) 且 $s\equiv 3$ (模 8) 其中 $q_1\equiv 7$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=1$。

3）假设 $K_1=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{d},\sqrt{2})$ 满足 $d=\delta rst\equiv 1$ (模 4)，其中 r,s 和 t 是两个素数，使得 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{t}\right)=1$ 或 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=-\left(\frac{q_1q_2}{s}\right)=\left(\frac{q_1q_2}{t}\right)=-1$。那么，我们有:

$$\operatorname{rank}(A(K_1))\in\{4,5,6\}.$$

证明。根据 q_1 是否整除 d，令 $d'=\frac{1}{q_1}d$ 或 q_1d。注意，d' 是一个满足 $d'\equiv 1$ （模 4）的整数。令 $K_1'=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{2},\sqrt{d'})$ 和 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{2})$。那么$\operatorname{rank}(K_1)=t_{K_1/F}-1-c_{K_1/F}$。我们有 $E_F=\langle -1,\varepsilon_2,\varepsilon_{q_1q_2},\sqrt{\varepsilon_{2q_1q_2}\varepsilon_{q_1q_2}}\rangle$ 是 F 的单位群。令 $\varepsilon\in\{-1,\varepsilon_2,\varepsilon_{q_1q_2},\sqrt{\varepsilon_{2q_1q_2}\varepsilon_{q_1q_2}}\}$。

令 $\ell\notin\{q_1,q_2\}$（分别地，$r\notin\{q_1,q_2\}$）表示 d中不满足（分别地，满足）条件 $[\ell\equiv 7$ （模 8）和 $\left(\frac{q_1q_2}{\ell}\right)=1]$的奇素因子

（分别地，$[r \equiv 7$（模 8）和 $\left(\frac{q_1 q_2}{r}\right) = 1]$）。因此，$\ell$（分别地，$r$）在 F中分解为两个（分别地，四个）素理想 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}'$（分别地，$\mathcal{R}_1$、$\mathcal{R}_2$、$\mathcal{R}_1'$ 和 $\mathcal{R}_2'$），其中 $\mathcal{R}_1$（分别地，$\mathcal{R}_1'$）和 $\mathcal{R}_2$（分别地，$\mathcal{R}_2'$）在扩张 $F/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$中互为共轭。因此，由范数剩余符号乘积公式可得

$$\left(\frac{\varepsilon, d}{2}\right)\prod_{\ell|d}\left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{L}}\right)\left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{L}'}\right)\prod_{r|d}\left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{R}_1}\right)\left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{R}_2}\right)\left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{R}_1'}\right)\left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{R}_2'}\right) = 1,$$

由于 $\left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{L}}\right) = \left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{L}'}\right)$，$\left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{R}_1}\right) = \left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{R}_2}\right)$ 并且 $\left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{R}_1'}\right) = \left(\frac{\varepsilon, d}{\mathcal{R}_2'}\right)$（参见 [13,引理 3.2] 的证明），这意味着 $\left(\frac{\varepsilon, d}{2}\right) = 1$。因此，$\operatorname{rank}(A(K_1)) = t_{K_1/F} - 1 - e_{K_1/F} = (t_{K_1'/F} + 1) - 1 - e_{K_1'/F} = \operatorname{rank}(A(K_1')) + 1$。

因此，结论由 [13, 引理 3.2]得出。 □

注 2.11. 设 K 为形如 D的实双二次域，其中 $K \neq L$。结合引理 2.10、引理 2.9、引理 2.7 和引理 2.2，可得秩$(A(K_\infty)) \leq 2$，且秩$(A(K_\infty))$ =秩$(A(K))$，当且仅当 K 取第一主定理中第 1)、2)、3)、4)、5)、6)、7)和 9)项中的某一种形式。

引理 2.12。设 $p \equiv 1$（模 4）和 $d \equiv 1$（模 4）是满足 $\left(\frac{p}{d}\right) = -1$或 $[\left(\frac{p}{d}\right) = 1$且 $\left(\frac{p}{d}\right)_4 \neq \left(\frac{d}{p}\right)_4]$的两个素数。置 $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{d}, \sqrt{2})$，则$h_2(K_1)$为奇数，当且仅当 $h_2(2pd) = 4$ 且 $q(k_1) = 1$，其中 $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{pd}, \sqrt{2})$。

证明。注意，K_1 是 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2pd})$的四次无分歧扩张，且 $\operatorname{rank}(A(k)) = 2$（参见 [25, 第 314-315] 页）。因此，根据类域论，$h(K_1)$ 为奇数，当且仅当 $h_2(2pd) = 4$ 且 $k^{(1)} = k^{(2)}$，也就是说，k 的希尔伯特 2-类域塔在第一层终止。另一方面，我们有 $h_2(k_1) = \frac{1}{4}q(k_1)h_2(2)h_2(pd)h_2(2pd) = \frac{1}{2}q(k) \cdot h_2(k)$（$cf.$ [26, 定理 1]）。由于 k_1 是 k的无分歧二次扩张，因此根据命题 2.4，$k^{(1)} = k^{(2)}$ 当且仅当 $h_2(k_1) = \frac{1}{2}h_2(k)$。因此，$h_2(K_1) = 1$当且仅当 $\frac{1}{2}q(k_1) \cdot h_2(2pd) = \frac{1}{2}h_2(2pd)$ 且 $h_2(2pd) = 4$，这等价于 $q(k_1) = 1$ 且 $h_2(2pd) = 4$。 □

引理 2.13。设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q_1 q_2}, \sqrt{2})$，其中 p和 q_i是三个素理想，满足 $p \equiv 1$（模 4）、$q_1 \equiv q_2 \equiv 7$（模 8）以及 $\left(\frac{q_2}{p}\right) = -1$。则 K_1 的类数为偶数。

证明。设 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2q_1q_2})$。由于 $h_2(p) = 1$、$h_2(2q_1q_2) \geq 4$（参见 [25, 第 315] 页），并且$h_2(2pq_1q_2) \geq 4$（根据亏格理论），因此 $h_2(k) = \frac{1}{4}q(k)h_2(p)h_2(2q_1q_2)$ $h_2(2pq_1q_2) \geq 4$。因此，K_1 的类数为偶数；事实上，它是 k的非分歧二次扩张。 □

注 2.14. 令 $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2})$，其中 p、q_1 和 q_3 是三个素数，满足 $p \equiv 1$（模 4）、$q_1 \equiv 3$（模 4）、$q_2 \equiv 3$（模 8）以及 $\left(\frac{q_2}{p}\right) = -1$。根据 [13, 引理 3.12]，$h_2(K_1) = 1$ 当且仅当满足以下条件之一：

C1： $p \equiv 5$（模 8） $q_1 \equiv 3$（模 8）且 $\left(\frac{q_1}{p}\right) = 1$,

C2： $p \equiv 5$（模 8） $q_1 \equiv 7$（模 8）且 $\left(\frac{q_1}{p}\right) = -1$。

注 2.15. 设 $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{d}, \sqrt{2})$，其中 $p \equiv 1$（模 4）和 $d \equiv 3$（模 4）是两个满足 $\left(\frac{p}{d}\right) = -1$或 $p \equiv 5$（模 8）的素数。由 [13,引理 3.5-1)]， $h_2(K_1) = 1$ 当且仅当 $p \equiv 5$（模 8）。

注 2.16. 设 K 是形如 F）的实双二次域。结合引理 2.12、引理 2.13、注 2.14、注 2.15 和引理 2.2，可得 rank($A(K_\infty)$) ≤ 2 且 rank($A(K_\infty)$) =rank($A(K)$) 当且仅当 K 取主要定理第 10)、11)、12) 项中的某一种形式。

至此，第一主定理的证明完成。

3. 一些满足以下条件的实双二次域无穷族 K

$$\mathrm{rank}(A(K)) = \mathrm{rank}(A_\infty(K)) = 3$$

鉴于先前的研究以及 [13] 列出了许多满足以下条件的实双二次域K，我们将证明，圆分 $\mathbb{Z}_2$-扩张中类群 2-秩的稳定性可能对更大的秩也成立。事实上，我们给出一些满足以下条件的实双二次域无穷族 K 。让我们从以下引理开始。

引理 3.1. 设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2d})$ 或 $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{d})$，其中 $q_1 \equiv 7$ (模 8)，$q_2 \equiv 3$ (模 8) 是两个素数，且 $d \equiv 3$ (模 4) 是一个不被 q_1q_2整除的正平方自由整数。那么秩$(K) = 3$ 当且仅当 d 具有以下形式之一：

1）令 $d = \delta rs$，其中 $\delta \in \{1, q_1, q_2\}$、 r 和 s 是满足 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$、$s \equiv 1$（模 4）的素数，且 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = 1$.2）令 $d = \delta rs$，其中 $\delta \in \{1, q_1, q_2\}$、 r 和 s 是满足 $\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$ 的素数，并且以下条件之一成立

- $r \equiv 1$（模 4），$\left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$ 和 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$。
- $r \equiv 3$（模 4）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = \left(\frac{q_1}{s}\right) = 1$。
- $r \equiv s \equiv 1$（模 4）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1$。
- $r \equiv s \equiv 3$（模 4）且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) \cdot \left(\frac{q_1}{s}\right) = 1$。
- $r \equiv 3$（模 4），$s \equiv 1$（模 4）且 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = 1$。

3）设 $d = \delta rst$，其中 $\delta \in \{1, q_1, q_2\}$、 r、 s 和 t 是素数，满足$\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = 1$，且以下条件之一成立

- $r \equiv 3$（模 4），$\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$ 和 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$。
- $r \equiv 3$（模 4），$s \equiv 1$（模 4）和$\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$。

4）设 $d = \delta rst$，其中 $\delta \in \{1, q_1, q_2\}$、 r、 s 和 t 是满足 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = 1$ 的素数，且以下条件之一成立

- $s \equiv 3 \pmod 4$。
- $\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$.5）设 $d = \delta rst$，其中 $\delta \in \{1, q_1, q_2\}$、$r$、$s$ 和 t 是满足 *and* $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = -1$ 的素数。

证明。假设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2d})$，其中 $q_1 \equiv 7 \pmod 8$、$q_2 \equiv 3 \pmod 8$ 是两个素数，且 $d \equiv 3 \pmod 4$ 是任意一个不被 q_1q_2 整除的正平方自由整数。设 $t_{K/F}$ 为在 K 中分歧的 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$ 的素理想个数。由于 $q_1q_2 \equiv 5 \pmod 8$，因此在 K 中分歧且位于 2 之上的 F 的理想只有一个。因此，$\mathrm{rank}(A(K)) = t_{K/F} - 1 - e_{K/F}$。由于 $e_{K/F} \in \{0, 1, 2\}$，不等式 $\mathrm{rank}(A(K)) \leq 3$ 意味着 $t_{K/F} \leq 6$。因此，d 取以下五种形式之一

$$\begin{aligned}
&\delta r,\\
&\delta rs,\\
&\delta rst \quad \text{whenever } \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = -1,\\
&\delta rstu \quad \text{whenever } \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{u}\right) = -1,\\
&\delta rstuv \quad \text{whenever } \left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{u}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{v}\right) = -1,
\end{aligned}$$

其中 $\delta \in \{1, q_1, q_2\}$、$r$、$s$、$t$、$u$ 和 v 均为与 q_1 和 q_2 不同的素数。

▶ 设 $d = \delta r$。若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -1$，则由 [5, 定理 3.3]，有秩$(A(K)) = 2 - 1 - e_{K/F} = 1 - e = 1$。若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$，则有秩$(A(K)) = 3 - 1 - e_{K/F} = 2 - e \leq 2$。▶ 设 $d = \delta rs$，我们有以下几种情形：⋆若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$，则秩$(A(K)) = 5 - 1 - e_{K/F} = 4 - e \in \{4, 3, 2\}$；更确切地说，由 [5, 定理 3.3]，有秩$(A(K)) = 4$ 当且仅当$r \equiv s \equiv 1 \pmod 4$ 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = \left(\frac{q_1}{s}\right) = 1$；并且，秩$(A(K)) = 2$ 当且仅当[$r \equiv 3 \pmod 4$、$s \equiv 1 \pmod 4$ 且 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = 1$，或 $r \equiv 3 \pmod 4$、$\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$ 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$]。⋆ 若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$，则秩$(A(K)) = 4 - 1 - e_{K/F} \in \{3, 2\}$；更确切地说，由 [5, 定理 3.3]，有秩$(A(K)) = 3$ 当且仅当 $s \equiv 1 \pmod 4$ 且 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = 1$。⋆ 若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$，则秩$(A(K)) = 3 - 1 - e_{K/F} = 2$，由 [5, 定理 3.3]。▶ 设 $d = \delta rst$ 且 $\left(\frac{q_1q_2}{t}\right) = -1$，我们有以下几种情形：⋆若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = 1$，则秩$(A(K)) = 6 - 1 - e_{K/F} \in \{5, 4, 3\}$；更确切地说，由 [5, 定理 3.3]，有秩$(A(K)) \equiv 3$ 当且仅当 [$r \equiv 3 \pmod 4$、$\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$ 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$]，或 [$r \equiv 3 \pmod 4$、$s \equiv 1 \pmod 4$ 且 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$]。

17⋆若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$，则秩$(A(K)) = 5 - 1 - e_{K/F} \in \{4, 3\}$；更确切地说，由 [5, 定理 3.3]，有秩$(A(K)) = 3$ 当且仅当 $s \equiv 3$(模 4) 或 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = -1$。⋆若 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$，则秩$(A(K)) = 4-1-e_{K/F} = 3$，由 [5, 定理 3.3]。其余情形也类似处理，并可验证秩$(A(K)) \geq 4$。

□

因此，我们得到以下命题，它是引理 3.1、引理2.10-2)以及福田的结果的推论。

命题 3.2。 设 K 为以下形式之一的实双二次数域。

1) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{\delta rs})$ 或 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2\delta rs})$，其中 $q_1 \equiv 7$(模 8) 且 $q_2 \equiv 3$(模 8)，r 和 s 为素数，$\delta \in \{1, q_1, q_2\}$ 满足 $\delta rs \equiv 3$(模 4)，$\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = \left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = 1$，并且满足以下同余条件之一：
- $r \equiv s \equiv 3$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) \equiv \left(\frac{q_1}{s}\right)$,
- $r \equiv s \equiv 5$ (模 8) 且 $\left(\frac{q_1}{r}\right) = -1$,
- $r \equiv 5$ (模 8)，$s \equiv 3$ (模 8)，$\left(\frac{q_1}{r}\right) \equiv 1$。

2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{\delta rs})$ 或 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2\delta rs})$，其中 $q_1 \equiv 7$(模 8) 且 $q_2 \equiv 3$(模 8)，r 和 s 是素数，$\delta \in \{1, q_1, q_2\}$ 满足 $\delta rs \equiv 3$(模 4) $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right) = -\left(\frac{q_1q_2}{s}\right) = -1$，并且满足以下同余条件之一：
- $r \equiv s \equiv 5$ （模 8）和 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = -\left(\frac{q_1}{r}\right) = 1$,
- $r \equiv 3$ （模 8）、 $s \equiv 5$ （模 8）和 $\left(\frac{q_1}{s}\right) = 1$。

那么， 秩$(A(K_\infty))$ =秩$(A(K))$ **且**秩$(A(K_\infty)) = 3$。

4. 岩泽模与 Greenberg 猜想的研究

本节将给出一些满足 Greenberg 猜想的实双二次域族，并明确其岩泽模的结构。特别地，我们确定所有具有平凡岩泽模的实双二次域的完整列表。我们注意到，关于实二次域的这一问题的类似研究是论文 [33] 的主题。

4.1. 实双二次域的岩泽模的平凡性。 在本小节中，我们确定所有具有平凡的 2-岩泽模的实双二次域的列表。

引理 4.1. 设 K 是形如 $E)$ 的实双二次域，即 K =$\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{d})$ 或 $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2d})$，其中 $q_1 \equiv 3$(模 8)、$q_2 \equiv 3$(模 8) 是两个素数，$d \equiv 3$ (模 4) 是一个不被 q_1q_2 整除的正平方自由整数。那么 K_1 的类数是偶数，且 $A(K_\infty)$ 是**非**平凡的。

证明. 令 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$。注意， K/F 是一个 QO扩张。由于 F 上方有两个位于 2 之上的素理想，因此 $\mathrm{rank}(K) = t_{K/F}-1-e_{K/F}\geq 3-1-e_{K/F}=2-e_{K/F}$。注意，根据 [5, 定理 3.4] 和引理 2.8， $e_{K/F}=2$ 当且仅当 $t_{K/F}\geq 4$ （即 d 有一个素因子分解为 F 中的两个素理想）。因此，$\mathrm{rank}(K)\geq 1$。由于 K_∞/K 完全分歧，所以 $A(K_\infty)$ 不平凡。□

现在我们可以陈述并证明本文的第二主定理。

定理 4.2 (第二主定理)。设 K 是任意一个实双二次数域。当且仅当 K 属于以下形式之一时， $A(K_\infty)$ 是平凡的：

1） $K=\mathbb{Q}(\sqrt{\eta_1}q,\sqrt{\eta_2}r)$，其中 η_1、 $\eta_2\in\{1,2\}$、 $q\equiv 3$ （模 4），且 r 是两个素数，并满足以下条件之一：C1： $r\equiv 3$ 或5（模 8），C2： $r\equiv 7$ （模 8）且 $q\equiv 3$ （模 8）。

2）设 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{\eta_1}\sqrt{q_1q_2},\sqrt{\eta_2}\sqrt{\delta r})$，其中 η_1、 $\eta_2\in\{1,2\}$、 $q_1\equiv 3$ （模 4）、 $q_2\equiv 3$ （模 8）和 r 是素数，且 $\delta\in\{1,q_1,q_2\}$ 满足 $\delta r\equiv 1$ （模 4），并且满足以下条件之一：

C1： $r\equiv 3$ （模 8），C2： $r\equiv 5$ （模 8）， $q_1\equiv 3$ （模 8）和 $\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)=-1$，C3： $r\equiv 5$ （模 8）， $q_1\equiv 7$ （模 8）和 $\left(\frac{q_1}{r}\right)=-1$，C4： $r\equiv 7$ （模 8）， $q_1\equiv 3$ （模 8）。

3） $K=\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\sqrt{p_2})$，其中 $p_1\equiv p_2\equiv 1$ （模 4）是两个满足以下条件的素数：

$a)\ \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_g=-1\ or\ [\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_f=1\ and\ \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4\neq\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4],$

$b)\ h_2(2p_1p_2)=4\ and$

$c)\ q(k_1)=1,\ where\ k_1=\mathbb{Q}(\sqrt{p_1p_2},\sqrt{2}).$

证明。注意，对于任意实双二次域 K， K_∞/K 均完全分歧。因此，我们需要区分以下两种情况：

1）假设 K_1/K 是不分歧的。在这种情况下， $A(K_\infty)$是平凡的，这意味着$A(K_1)$是平凡的。由于 K_1/K 是不分歧的，因此 K 具有以下形式之一：

- $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{2d_2})$，其中 $d_2\equiv 1$ (模 4)，
- $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{2d_2})$，其中 $d_1\equiv 3$ (模 4)，或
- $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2d_1},\sqrt{2d_2})$，其中 $d_1\equiv 1$ (模 4)，且 $d_2\equiv 3$ 或 1（模 4）。

设 $K'=\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})$ 满足 d_1 和 d_2 上述条件之一。注意，我们有 $K_\infty=K'_\infty$ (事实上， $K_1=K'_1$) 且 K_1/K' 是分歧的。因此，$A(K)$ 是平凡的，这意味着 K_1/K 是一个 有理数域O-域的扩张。因此，只需列出根据我们的第一主定理、引理 4.1 以及 [13,主要定理]所得的 K'。

2) 假设 K_1/K 分歧。这里有两种子情况：

a) 假设 K 具有 E)的形式。在这种情况下， $A(K_\infty)$并非平凡（参见引理 4.1）。b) K 不具有 E)的形式。在这种情况下，注意若 $A(K_\infty)$是平凡的，则$A(K)$也是平凡的。因此， K_1/K 是 QO 域的扩张。因此， K 的列表由我们的第一主定理和 [13, 主要定理]给出。

将这些研究结果代入我们的第一个主要定理和 [13, 主要定理]，我们便完成了证明。□

4.2. 域 $K_\nu = \mathbb{Q}(\sqrt{\nu q}, \sqrt{rs})$上的Greenberg猜想，其中 $\nu \in \{1, 2\}$。设 $q \equiv 3$ （模 4）和 $r \equiv s \equiv 3$ （模 8）是三个互不相同的素数，使得 $\left(\frac{q}{s}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = (-1)^{\delta_\nu}$,2。考虑域 $K_\nu = \mathbb{Q}(\sqrt{\nu q}, \sqrt{rs})$和 $F_\nu = \mathbb{Q}(\sqrt{\nu qrs})$，其中 $\nu \in \{1, 2\}$。设 a 和 b 为满足 $\varepsilon_{\nu qrs} = a + b\sqrt{\nu qrs}$的整数。注意到 K_ν/F_ν 是一个非分歧二次扩张。此外，我们有秩$(A(K_\nu))$ =秩$(A_\infty(K_\nu))$ $= 2$（参见 [13,定理 1 的第 5）和第 14）项。4]），且秩$(A(F_\nu))$ = 秩$(A_\infty(F_\nu))$ $= 2$ （事实上，根据 [10,第 164], 页，我们有秩$(A(F_\nu))$ $= 2$）。令$K_{\nu,n}$ 和$F_{\nu,n}$ 分别表示 K_ν 和 F_ν 的 n次分圆 Z_2-扩张的第 n层。本小节旨在改进并推广 [13, 定理 4.11 和推论 4.12]。关于这一方向的一些研究，可参见 [6, 7, 15]。

引理 4.3. 设 k 是一个数域，使得 秩$(A(k)) = 2$。假设 k 的希尔伯特2-类域塔止于第一层。此外，若 k 有一个未分歧二次扩张，其 *2*-类群为循环群，则 $A(k)$ 的4-秩 等于 *1*。

证明。 设 G_k 表示 k 在 k 上的最大非分歧 2-扩张 $\mathcal{L}(k)$ 的伽罗瓦群。由于 k 的希尔伯特 2- 类域塔止于第一层， G_k 是阿贝尔群。假设 4- 秩 $(A(k)) = 2$。因此，存在两个参数 a 和 b （参见 [8, 引理 1]），使得 $G_k = \langle a, b\rangle$ ，并且 G_k 的三个指数为 2 的子群为

$$H_1 = \langle a, b^2, G_k'\rangle = \langle a, b^2\rangle,$$
$$H_2 = \langle ab, b^2, G_k'\rangle = \langle ab, b^2\rangle \quad \text{and} \quad H_3 = \langle a^2, b, G_k'\rangle = \langle a^2, b\rangle.$$

因此， k 的三个未分歧二次扩张的 2-类群的秩均为 2，这与假设矛盾。□

引理 4.4. 设 $n \geq 1$。域 $F_{\nu,\,n}$ 存在一个具有循环 2-类群的非分歧二次扩张，当且仅当 $q \equiv 7$ (模 8)。

证明。注意到$F_{\nu,n}$ 的未分歧二次扩张分别为$K_{\nu,n}$, $K'_{\nu,n}$ 和$K''_{\nu,n}$ （ $K_\nu = \mathbb{Q}(\sqrt{\nu q}, \sqrt{rs})$的分圆扩张的第 n层）、$K'_\nu = \mathbb{Q}(\sqrt{\nu r}, \sqrt{qs})$以及 $K''_\nu = \mathbb{Q}(\sqrt{\nu s}, \sqrt{qr})$。根据 [13, 定理 1.4]，若 $q \equiv$3（模 8），则秩$(A(K'_{\nu,n}))$ $=$ 秩$(A(K''_{\nu,n}))$ $= 2$。此外，若 $q \equiv 7$（模 8），则扩张$K'_{\nu,n}$ 和$K''_{\nu,n}$ 的 2-类群是循环的。因此引理得证。□

引理 4.5. 令 $q \equiv 7$ （模 8）和 $r \equiv s \equiv 3$ （模 8）为三个互不相同的素数，使得 $\left(\frac{q}{s}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = (-1)^{\delta_{\nu,2}}$且 $\left(\frac{s}{r}\right) = 1$。令 $\rho \in \{1, 2\}$满足 $\rho \neq \nu$。
1) 设 a 和 b 是满足 $\varepsilon_{\nu qrs} = a + b\sqrt{\nu qrs}$的整数。那么，在这三个整数 $2^{\delta_{\nu,1}} r(a + (-1)^{\delta_{\nu,1}})$、 $2^{\delta_{\nu,2}} q(a-1)$ 或 $2^{\delta_{\nu,2}} s(a + (-1)^{\delta_{\nu,1}})$中，恰有一个是 $\mathbb{N}$中的平方数。此外，我们有：

a) 如果 $2^{\delta_{\nu,1}} r(a + (-1)^{\delta_{\nu,1}})$ 是 $\mathbb{N}$中的平方数，那么

$$\sqrt{\nu\varepsilon_{\nu qrs}} = b_1\sqrt{r} + b_2\sqrt{\nu qs} \quad and \quad 2^{\delta_{\nu,2}} = (-1)^{\delta_{\nu,1}} r b_1^2 + (-1)^{\delta_{\nu,2}} \nu qs b_2^2.$$

b) 如果 $2^{\delta_{\nu,2}} q(a-1)$ 是 $\mathbb{N}$中的平方数，那么

$$\sqrt{2\varepsilon_{\nu qrs}} = b_1\sqrt{\nu q} + b_2\sqrt{rs} \quad and \quad 2 = -2^{\delta_{\nu,2}} q b_1^2 + rs b_2^2.$$

c) 如果 $2^{\delta_{\nu,2}} s(a + (-1)^{\delta_{\nu,1}})$ 是 $\mathbb{N}$中的平方数，那么

$$\sqrt{2\varepsilon_{\nu qrs}} = b_1\sqrt{\nu s} + b_2\sqrt{qr} \quad and \quad 2 = (-1)^{\delta_{\nu,1}} 2^{\delta_{\nu,2}} s b_1^2 + (-1)^{\delta_{\nu,2}} qr b_2^2.$$

这里 b_1 和 b_2 是两个整数。
2) 设 x和 y为满足$\varepsilon_{\rho qrs} = x + y\sqrt{\rho qrs}$的整数。那么 $2^{\delta_{\nu,2}} q(\overline{x-1})$ 是 $\mathbb{N}$中的一个平方数。此外，我们有：

$$\sqrt{\rho\varepsilon_{\rho qrs}} = y_1\sqrt{q} + y_2\sqrt{\rho rs} \text{ and } \rho = -q y_1^2 + \rho rs y_2^2.$$

证明。我们先假设 $\nu = 2$ （即 $\rho = 1$）。

- 由于 $N(\varepsilon_{2qrs}) = 1$，根据 $a^2 - 1 = 2qrsb^2$ 在 $\mathbb{Z}$中的唯一分解，以及 [2,引理 5], ，存在 b_1 和 b_2 在 $\mathbb{Z}$ 中，使得以下某个系统成立：

$$(1): \begin{cases} a \pm 1 = 2qb_1^2 \\ a \mp 1 = rsb_2^2, \end{cases} \quad (2): \begin{cases} a \pm 1 = 2rb_1^2 \\ a \mp 1 = qsb_2^2, \end{cases} \quad (3): \begin{cases} a \pm 1 = 2sb_1^2 \\ a \mp 1 = qrb_2^2, \end{cases}$$

$$(4): \begin{cases} a \pm 1 = qb_1^2 \\ a \mp 1 = 2rsb_2^2, \end{cases} \quad (5): \begin{cases} a \pm 1 = rb_1^2 \\ a \mp 1 = 2qsb_2^2 \end{cases} \quad (6): \begin{cases} a \pm 1 = sb_1^2 \\ a \mp 1 = 2qrb_2^2. \end{cases}$$

$$\text{or} (7): \begin{cases} a \pm 1 = b_1^2 \\ a \mp 1 = 2qrsb_2^2. \end{cases}$$

⋆ 假设系统 $\begin{cases} a + 1 = 2qb_1^2 \\ a - 1 = rsb_2^2, \end{cases}$ 成立。我们有：

$$1 = \left(\frac{2qb_1^2}{r}\right) = \left(\frac{a+1}{r}\right) = \left(\frac{a-1+2}{r}\right) = \left(\frac{rsb_2^2+2}{r}\right) = \left(\frac{2}{r}\right) = -1,$$

这显然荒谬。因此该系统不成立。

⋆ 假设系统 $\begin{cases} a \pm 1 = 2rb_1^2 \\ a \mp 1 = qsb_2^2, \end{cases}$ 成立。我们有：

$$1 = \left(\frac{2rb_1^2}{s}\right) = \left(\frac{a+1}{s}\right) = \left(\frac{a-1+2}{s}\right) = \left(\frac{qsb_2^2+2}{s}\right) = \left(\frac{2}{s}\right) = -1,$$

and

$$1=\left(\frac{2rb_1^2}{q}\right)=\left(\frac{a-1}{q}\right)=\left(\frac{a+1-2}{q}\right)=\left(\frac{qsb_2^2-2}{q}\right)=\left(\frac{-2}{q}\right)=-1,$$

这显然荒谬。因此，该系统不可能成立。

⋆ 假设系统 $\begin{cases} a-1=2sb_1^2, \\ a+1=qrb_2^2, \end{cases}$ 成立。我们有：

$$1=\left(\frac{qrb_2^2}{s}\right)=\left(\frac{a+1}{s}\right)=\left(\frac{a-1+2}{s}\right)=\left(\frac{rsb_2^2+2}{s}\right)=\left(\frac{2}{s}\right)=-1,$$

这显然荒谬。因此，该系统不可能成立。

⋆ 假设系统 $\begin{cases} a\pm 1=qb_1^2, \\ a\mp 1=2rsb_2^2, \end{cases}$ 成立。我们有：

$$1=\left(\frac{2rsb_2^2}{q}\right)=\left(\frac{a-1}{q}\right)=\left(\frac{a+1-2}{q}\right)=\left(\frac{qb_1^2-2}{q}\right)=\left(\frac{-2}{q}\right)=-1,$$

and

$$-1=\left(\frac{qb_1^2}{r}\right)=\left(\frac{a-1}{r}\right)=\left(\frac{a+1-2}{r}\right)=\left(\frac{2rsb_2^2-2}{r}\right)=\left(\frac{-2}{r}\right)=1,$$

这显然荒谬。因此，该系统不可能成立。

⋆ 假设系统 $\begin{cases} a-1=rb_1^2, \\ a+1=2qsb_2^2, \end{cases}$ 成立。我们有：

$$1=\left(\frac{rb_1^2}{q}\right)=\left(\frac{a-1}{q}\right)=\left(\frac{a+1-2}{q}\right)=\left(\frac{2qsb_2^2-2}{q}\right)=\left(\frac{-2}{q}\right)=-1,$$

which is absurd. So this system can not hold.

⋆ 假设系统 $\begin{cases} a\pm 1=sb_1^2, \\ a\mp 1=2qrb_2^2, \end{cases}$ 成立。我们有：

$$1=\left(\frac{sb_1^2}{r}\right)=\left(\frac{a+1}{r}\right)=\left(\frac{a-1+2}{r}\right)=\left(\frac{2qrb_2^2+2}{r}\right)=\left(\frac{2}{r}\right)=-1,$$

and

$$1=\left(\frac{sb_1^2}{q}\right)=\left(\frac{a-1}{q}\right)=\left(\frac{a+1-2}{q}\right)=\left(\frac{2qrb_2^2-2}{q}\right)=\left(\frac{-2}{q}\right)=-1,$$

这显然矛盾。因此，该系统不可能成立。

⋆ 假设系统 $\begin{cases} a\pm 1=b_1^2, \\ a\mp 1=2qrsb_2^2, \end{cases}$ 成立。我们有：

$$1=\left(\frac{b_1^2}{r}\right)=\left(\frac{a+1}{r}\right)=\left(\frac{a-1+2}{r}\right)=\left(\frac{2qrsb_2^2+2}{r}\right)=\left(\frac{2}{r}\right)=-1,$$

and

$$1=\left(\frac{b_1^2}{q}\right)=\left(\frac{a-1}{q}\right)=\left(\frac{a+1-2}{q}\right)=\left(\frac{2qrsb_2^2-2}{q}\right)=\left(\frac{-2}{q}\right)=-1,$$

这显然荒谬。因此，该系统不可能成立。

那么，唯一剩下且一致的情形是：

$$(1):\begin{cases} a-1=2qb_1^2 \\ a+1=rsb_2^2, \end{cases} \quad (3):\begin{cases} a+1=2sb_1^2 \\ a-1=qrb_2^2, \end{cases} \quad (5):\begin{cases} a+1=rb_1^2 \\ a-1=2qsb_2^2, \end{cases}$$

利用这些系统，我们在每种情况下构造 $\sqrt{\varepsilon_{2qrs}}$ 的 $\begin{cases} x-1=2qy_1^2 \\ x+1=2rsy_2^2, \end{cases}$ 以外的所有

●对于第二项，我们以类似的方法进行，并排除除

系统，其中 y_1 和 y_2 是两个整数，满足 $y=2y_1y_2$。因此得到 $\nu=2$（即 $\rho=1$）的第二项。对于情形 $\nu=1$，证明类似。

□

推论 4.6。设 $q\equiv 7$ (模 8) 和 $r\equiv s\equiv 3$ (模 8) 是三个互不相同的素数，满足 $\left(\frac{q}{s}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)=(-1)^{\delta_{\nu,2}}$ 和 $\left(\frac{s}{r}\right)=1$。则 $h_2(F_{\nu,1})=h_2(\nu qrs)$ 或 $2h_2(\nu qrs)$。更准确地说，我们有：

$$h_2(F_{\nu,1})=h_2(\nu qrs) \text{ if and only if } 2^{\delta_{\nu,2}}q(a-1)\notin\mathbb{N}^2.$$

证明。首先注意，根据前面的引理和 Wada 方法，$F_{\nu,1}=\mathbb{Q}(\sqrt{qrs},\sqrt{2})$ 的基本单位系为 $\{\varepsilon_2,\varepsilon_{qrs},\sqrt{\varepsilon_{qrs}\varepsilon_{2qrs}}\}$ or$\{\varepsilon_2,\varepsilon_{qrs},\varepsilon_{2qrs}\}$，具体取决于 $2^{\delta_{\nu,2}}q(a-1)\in\mathbb{N}^2$ 是否成立。因此，$q(F_{\nu,1})=1$or 2，并且

$$q(F_{\nu,1})=1 \text{ if and only if } 2^{\delta_{\nu,2}}q(a-1)\notin\mathbb{N}^2.$$

注意，类数公式给出 $h_2(F_\nu)=\frac{1}{4}q(F_\nu)h_2(qrs)h_2(2qrs)$。另一方面，我们有 $h_2(qrs)h_2(2qrs)=4h_2(\nu qrs)$（事实上，可以像 [10, 第 164] 页那样，使用 Redei 矩阵方法得到这一结果；也可以参见 [4,第 40] 页）。因此，$h_2(F_\nu)=q(F_\nu)h_2(\nu qrs)$，结论得证。□

现在我们可以陈述本小节的主要结果。

定理 4.7 (**第三主定理**）。设 $q\equiv 7$ (模 8) 和 $r\equiv s\equiv 3$(模 8) 为三个互不相同的素数，使得 $\left(\frac{q}{s}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)=(-1)^{\delta_{\nu,2}}$ 且 $\left(\frac{s}{r}\right)=1$。令 $\varepsilon_{\nu qrs}=a+b\sqrt{\nu qrs}$，其中 a 和 b 为整数。假设 $2^{\delta_{\nu,2}}q(a-1)$ 不是 $\mathbb{N}$ 中的平方数。那么有以下结论：

1）令 m 为满足 $h_2(\nu qrs)=2^m$ 的正整数，则有

$$A_\infty(K_\nu)\simeq A(K_\nu)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2^{m-2}\mathbb{Z}.$$

2） $\mathcal{L}(K_{\nu,\infty})/K_{\nu,\infty}$ 的伽罗瓦群，其中 $\mathcal{L}(K_{\nu,\infty})$ 是 $K_{\nu,\infty}$ 的最大非分歧 *pro*-2-扩张，是阿贝尔群。

在给出此定理的证明之前，我们先证明以下引理。

引理 4.8. 设 $q \equiv 7$ （模 8）和 $r \equiv s \equiv 3$ （模 8）是三个互不相同的素数，使得 $\left(\frac{q}{s}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = (-1)^{\delta_{\nu,2}}$ 和 $\left(\frac{s}{r}\right) = 1$。设 $\varepsilon_{\nu qrs} = a + b\sqrt{\nu qrs}$，其中 a 和 b 为整数，并设 $\rho \in \{1, 2\}$，且 $\rho \neq \nu$。假设 $2^{\delta_{\nu,2}} q(a-1)$ 在 $\mathbb{N}$ 中不是一个平方数。

$$E_{K_{\nu,1}} = \langle -1, \varepsilon_2, \varepsilon_{rs}, \sqrt{\varepsilon_q}, \sqrt{\varepsilon_{2q}}, \sqrt{\varepsilon_{2rs}}, \sqrt{\varepsilon_{rs}\varepsilon_{\nu qrs}}, \sqrt{\varepsilon_{\rho qrs}} \rangle.$$

因此，$q(K_{\nu,1}) = 2^5$。

证明。我们在 $\nu = 2$ 的情形下证明引理，另一种情形的证明类似。令 $q \equiv 7$ （模 8）和 $r \equiv s \equiv 5$ （模 8）为满足以下条件的素数 $\left(\frac{q}{r}\right) = \left(\frac{q}{s}\right) = -1$ 和 $\left(\frac{s}{r}\right) = 1$。我们将使用第6页中介绍的 Wada方法。考虑 $K_{\nu\text{的}1}$ 个双二次子域，它们由 $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q})$、$k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{rs})$ 和 $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{qrs})$ 定义。令 τ_1、τ_2 和 τ_3 为 $\mathrm{Gal}(K_{\nu,1}/\mathbb{Q})$ 中由下式定义的元素

$$\begin{array}{lll} \tau_1(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, & \tau_1(\sqrt{q}) = \sqrt{q}, & \tau_1(\sqrt{rs}) = \sqrt{rs}, \\ \tau_2(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, & \tau_2(\sqrt{q}) = -\sqrt{q}, & \tau_2(\sqrt{rs}) = \sqrt{rs}, \\ \tau_3(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, & \tau_3(\sqrt{q}) = \sqrt{q}, & \tau_3(\sqrt{rs}) = -\sqrt{rs}. \end{array}$$

注意到 $\mathrm{Gal}(K_1/\mathbb{Q}) = \langle \tau_1, \tau_2, \tau_3 \rangle$，且子域 k_1、k_2 和 k_3 分别由 $\langle \tau_3 \rangle$、$\langle \tau_2 \rangle$ 和 $\langle \tau_2\tau_3 \rangle$ 固定。因此，根据 Wada 算法，$K_{\nu,1}$ 的基本单位系由从 k_1、k_2 和 k_3 中选出的七个单位，以及从 $E_{k_1}E_{k_2}E_{k_3}$ 中那些在 K_1 中为平方数的元素的平方根组成。我们有：

- k_1 的基本单位系为 $\{\varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_q}, \sqrt{\varepsilon_{2q}}\}$。事实上，对于某些整数 α_i，我们有 $\sqrt{2\varepsilon_q} = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{q}$ 和 $\sqrt{\varepsilon_{2q}} = \alpha_3\sqrt{2} + \alpha_4\sqrt{q}$（参见 [11, 引理 6] 或 [2]）。
- k_2 的基本单位系为 $\{\varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_{rs}}, \sqrt{\varepsilon_{2rs}}\}$。事实上，对于某些整数 β_i，我们有 $\sqrt{2\varepsilon_{2rs}} = \beta_1 + \beta_2\sqrt{2rs}$ 和 $\sqrt{\varepsilon_{rs}} = \beta_3\sqrt{r} + \beta_4\sqrt{s}$（参见 [3, 引理 4]）。
- 根据推论4.6 的基本单位系为 k_3 $\{\varepsilon_2, \varepsilon_{qrs}, \varepsilon_{2qrs}\}$，因为 $2q(a-1)$ 在 $\mathbb{N}$ 中不是平方数，其中 a 和 b 是满足 $\varepsilon_{2qrs} = a + b\sqrt{2qrs}$ 的整数。

So

$$E_{k_1}E_{k_2}E_{k_3} = \langle -1, \varepsilon_2, \varepsilon_{rs}, \varepsilon_{qrs}, \varepsilon_{2qrs}, \sqrt{\varepsilon_q}, \sqrt{\varepsilon_{2q}}, \sqrt{\varepsilon_{2rs}} \rangle. \tag{2}$$

注意，根据引理4.5，我们有 $\sqrt{\varepsilon_{qrs}} \in K_{\nu,1}$。现在求 χ 中 $K_{\nu,1}$ 的元素，它们是 $E_{k_1}E_{k_2}E_{k_3}$ 中某个元素的平方根。因此，我们可以假设

$$\chi^2 = \varepsilon_2^a \varepsilon_{rs}^b \varepsilon_{2qrs}^c \sqrt{\varepsilon_q}^d \sqrt{\varepsilon_{2q}}^e \sqrt{\varepsilon_{2rs}}^f \tag{3}$$

其中 a, b, c, d, e 和 f 属于 $\{0, 1\}$。我们将利用从 K 到其子域的范数映射，消去那些不会出现的方程。

➥ 应用范数 $N_{K_{\nu,1}/\mathbb{Q}(\sqrt{q},\sqrt{rs})} = 1 + \tau_4$，我们得到：

$$N_{K_{\nu,1}/\mathbb{Q}(\sqrt{q},\sqrt{rs})}(\chi^2) = (-1)^a \cdot \varepsilon_{rs}^{2b} \cdot (-\varepsilon_q)^d \cdot (-1)^e.$$

因此 $a + d + e \equiv 0$ （模 2）。由于 ε_q 不是 $\mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{rs})$ 中的平方数，我们得到 $d = 0$。然后 $a = e$。因此，我们有：

$$\chi^2 = \varepsilon_2^a \varepsilon_{rs}^b \varepsilon_{2qrs}^c \sqrt{\varepsilon_{2q}}^a \sqrt{\varepsilon_{2rs}}^f.$$

➥ 通过应用范数 $N_{K_{\nu,1}/\mathbb{Q}(\sqrt{2q},\sqrt{rs})} = 1 + \tau_1\tau_2$，我们得到：

$$N_{K_{\nu,1}/\mathbb{Q}(\sqrt{2q},\sqrt{rs})}(\chi^2) = (-1)^a \cdot \varepsilon_{rs}^{2b} \cdot (-\varepsilon_{2q})^f.$$

由于 ε_{2q} 不是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2q}, \sqrt{rs})$ 中的平方数，我们得到 $a = 0$。因此，我们有：

$$\chi^2 = \varepsilon_{rs}^b \varepsilon_{2qrs}^c \sqrt{\varepsilon_{2rs}}^f.$$

➥ 通过应用范数 $N_{K_{\nu,1}/\mathbb{Q}(\sqrt{q},\sqrt{2rs})} = 1 + \tau_1\tau_3$，我们得到：

$$N_{K_{\nu,1}/\mathbb{Q}(\sqrt{q},\sqrt{2rs})}(\chi^2) = \varepsilon_{2qrs}^{2c} \cdot (-\varepsilon_{2rs})^f.$$

因此我们有 $f = 0$ 和：

$$\chi^2 = \varepsilon_{rs}^b \varepsilon_{2qrs}^c.$$

注意到 $\sqrt{\varepsilon_{rs}}, \sqrt{\varepsilon_{2qrs}} \notin K_{\nu,1}$ (参见引理 4.5) 和 $\sqrt{\varepsilon_{rs}}\sqrt{\varepsilon_{2qrs}} \in K_{\nu,1}$ (参见引理 4.5)。因此，$E_{k_1}E_{k_2}E_{k_3}$ 中平方数只有$\varepsilon_{rs}\varepsilon_{\eta qrs}$ 和 ε_{qrs}。故，

$$E_{K_{\nu,1}} = \langle -1, \varepsilon_2, \varepsilon_{rs}, \varepsilon_{2qrs}, \sqrt{\varepsilon_q}, \sqrt{\varepsilon_{2q}}, \sqrt{\varepsilon_{2rs}}, \sqrt{\varepsilon_{qrs}}, \sqrt{\varepsilon_{rs}\varepsilon_{2qrs}} \rangle.$$

□

定理4.7的证明。 由于 $h_2(\nu q) = h_2(rs) = 1$ (参见 [16, 推论 18。4])，我们有

$$h_2(K_\nu) = \frac{1}{4} q(K_\nu) h_2(\nu qrs).$$

利用引理 4.5 和 Wada 方法，我们验证 $\{\varepsilon_{\nu q}, \varepsilon_{rs}, \varepsilon\}$ 与 $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{rs}\varepsilon_{\nu qrs}}$ 或 $\sqrt{\varepsilon_{\nu q}\varepsilon_{\nu qrs}}$ 构成 K_ν 的基本单位系。因此$q(K_\nu) = 2$，所以 $h_2(K_\nu) = \frac{1}{2}h_2(\nu qrs)$。此外，将类数公式应用于 $K_{\nu,1}$，得到：

$$h_2(K_{\nu,1}) = \frac{1}{2^9} q(K_{\nu,1}) h_2(q) h_2(2q) h_2(rs) h_2(2rs) h(2) h_2(qrs) h_2(2qrs) = \frac{1}{2} h_2(\nu qrs)$$

事实上，我们有 $q(K_\nu,1) = 2^5$ （参见引理 4.8），$h_2(q) = h_2(2q) = h(2) = h_2(rs) = 1$ （参见 [16, 推论 18.4]），以及 $h_2(2rs) = 2$ （参见 [16, 推论 19.7]），并且$h_2(qrs)h_2(2qrs) = 4h_2(\nu qrs)$（参见推论 4.6 的证明）。

设 $n \geq 0$ 为一个整数。由福田定理可知，我们有 $h_2(K_{\nu,n}) = \frac{1}{2}h_2(\nu qrs)$。因此，根据推论 4.6，$h_2(K_{\nu,n}) = \frac{1}{2}h_2(F_{\nu,n})$，所以由命题 2.4 可知，2 类希尔伯特 K 域塔在第一层终止。

注意，根据引理 4.4，$F_{\nu,n}$ 具有一个类群为循环2的非分歧二次扩张，那么引理 4.3 给出 $A_\infty(F_\nu) \simeq A(F_\nu) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{m-1}\mathbb{Z}$,

对所有 $n \geq 0$。由此可得，根据所有 $n \geq 0$， $A(K_n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{m-2}\mathbb{Z}$ (参见定理2.5)，证明得以完成。

□

T以下是由上述证明和定理 2直接推得的结论 .5.

推论 4.9. 设 $q \equiv 7$ (模 8) 和 $r \equiv s \equiv 3$ (模 8) 是三个互不相同的素数，使得 $\left(\frac{q}{s}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = (-1)^{\delta_{\nu,2}}$和$-\left(\frac{s}{r}\right) = -1$。令 $\varepsilon_{\nu qrs} = a + b\sqrt{\nu qrs}$，其中 a和 b是整数。假设 $2^{\delta_{\nu,2}}q(a-1)$在 $\mathbb{N}$ 中**不是**平方数。那么

$$A_\infty(K'_\nu) \simeq A(K'_\nu) \simeq A_\infty(K''_\nu) \simeq A(K''_\nu) \simeq \mathbb{Z}/2^{m-1}\mathbb{Z}.$$

这里 $K'_\nu = \mathbb{Q}(\sqrt{\nu r}, \sqrt{qs})$、 $K''_\nu = \mathbb{Q}(\sqrt{\nu s}, \sqrt{qr})$和 m是满足 $h_2(\nu qrs) = 2^m$的正整数。

致谢

W我们要感谢 Katharina Müller 对本文提出的宝贵意见 .

参考文献

[1] Aaboun, B., Zekhnini, A.：关于阿贝尔化为 $(2, 2^n)$ 型的元循环 2-群 $n \geq 2$ 及其应用，《数论研究》9，55（2023）（引自第 7 页）[2] Azizi, A.：关于 k 的理想 2-类的主化 $= \mathbb{Q}(\sqrt{2pq}, i)$，其中 $p \equiv -q \equiv 1$（模 4），《算术学报》94（2000），383-399。（引自第 20 和 23 页）[3] Azizi, A., Chems-Eddin, M.M., Zekhnini, A.：某些分圆 $\mathbb{Z}_2$-扩张的各层的希尔伯特 2- 类域塔。《数论与应用新前沿》。数学趋势。Birkhäuser，Cham。https://doi.org/10.1007/978-3-031-51959-8_2（引自第 23 页）[4] Azizi, A., Mouhib, A.： $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ 的理想 2-类的主化，其中 d 是一个无平方因子的自然数，《算术学报》109（2003），27–63。（引自第 22 页）[5] Azizi, A., Mouhib, A.：某些双二次域的类群的 2-秩及其应用，《国际数学杂志》15（2004），第 169-182 页。（引自第 9、10、11、12、16、17 和 18 页）[6] Azizi, A., Rezzougui, M., Zekhnini, A.：某些分圆 $\mathbb{Z}_2$-扩张的最大非分歧 pro-2 扩张，《匈牙利数学期刊》83（2021），54–66。（引自第 19 页）[7] Azizi, A., Rezzougui, M., Zekhnini, A.：某些 $\mathbb{Z}_2$-扩张的最大非分歧 pro-2 扩张的伽罗瓦群结构，《德布勒森数学出版物》100（2022），11–28。（引自第 19 页）[8] Benjamin, E.：某些实二次数域，其希尔伯特 2-类域的 2-类群为循环群，《数论杂志》173（2017），529-546。（引自第 19 页）[9] Benjamin, E., Lemmermeyer, F., Snyder, C.：具有阿贝尔 2-类域塔的实二次域，《数论杂志》73（1998），182-194。（引自第 6 页）[10] Benjamin, E., Snyder, C.：具有 (2, 2) 型 2-类群的实二次数域，《斯堪的纳维亚数学》76（1995），161-178。（引自第 19 和 22 页）[11] Benjamin, E., Snyder, C.：关于某些实二次数域的窄 2-类域塔：第二部分：长度。（2025）arXiv:2504.20787v1 [math.NT]（引自第 23 页）[12]Chattopadhyay, J., Laxmi, H. and Saikia, A.：某些实二次域的 $\mathbb{Z}_2$-扩张中的 2-类群结构。《数论研究》9，74（2023）。（引自第 2 页）

[13] Chems-Eddin, M. M.：实双二次域的 Greenberg猜想与岩泽模 I，《数论杂志》281（2026），224-266。（引自第 2、3、14、15、18 和 19 页）[14] Chems-Eddin, M.M.：某些实双二次域的 $\mathbb{Z}_2$-扩张的最大非分歧 pro-2 扩张，预印本（2024），http://arxiv.org/abs/2409.13574v1（引自第 2 页）[15] Chems-Eddin, M. M., El Mamry, H.：Greenberg猜想与逆伽罗瓦问题：阿贝尔化为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$, $m \geq 2$ 型的第 1 型亚循环非模群，2025（预印本），https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.18402（引自第 19 页）[16] Conner, P. E., Hurrelbrink, J.：类数奇偶性，《纯数学丛书》8，世界科学出版社，1988。（引自第 24 页）[17] El Mahi, A.：某些实双二次域的 $\mathbb{Z}_2$-扩张的岩泽模结构，《匈牙利数学期刊》174（2024），49–61。（引自第 2 页）[18] El Mahi A., Ziane, M.：关于某些实双二次域的 Greenberg猜想，《匈牙利数学期刊》88（2024），475–483。（引自第 2 页）[19] El Mahi, A., Ziane, M.：岩泽不变量 μ在某些实双二次域的 $\mathbb{Z}_2$-扩张中消失，《匈牙利数学期刊》165，146–155（2021）（引自第 2 页）[20] Ferrero, B., Washington, L.C.：阿贝尔数域的岩泽不变量 μ_p 消失，《数学年刊》109（1979），377-395（引自第 2 页）[21] Fukuda, T.：关于数域的 $\mathbb{Z}_p$-扩张的注记，《日本学士院院刊 A 辑：数学科学》70（1994），264–266。（引自第 6 页）[22] Greenberg, R.：关于全实数域的岩泽不变量，《美国数学杂志》98（1976），263-284（引自第 2 页）[23] Iwasawa, K.：关于代数数域的 Γ-扩张，《美国数学会通报》65（1959），183–226。（引自第 1 页）[24]Jerrari, I., Sbai, A., Azizi, A.：实三二次域的单位与某些 $\mathbb{Z}_p$-分圆扩张的第二个 2-类群，《拉马努金杂志》67，25（2025）。https://doi.org/10.1007/s11139-025-01065-y（引自第 2 页）[25] Kaplan, P.：关于二次域的理想类 2-群，《克雷尔数学杂志》283/284（1976），313-363。（引自第 14 页）[26] Kučera, R.：关于双二次域类数的奇偶性，《数论杂志》52（1995），43–52。（引自第 14 页）[27] Kuroda, S.：关于代数数域的类数，《名古屋数学杂志》1（1950），1–10。（引自第 5 页）[28] Laxmi, H., Saikia, A.：某些实双二次域的 $\mathbb{Z}_2$-扩张中 2-类群的稳定性，预印本（2025），https://arxiv.org/abs/2501.12782（引自第 2 页）[29] Mizusawa, Y.：关于半二面体 2-类域塔与 $\mathbb{Z}_2$-扩张，《魁北克数学年刊》38（2014），73-79。（引自第 2 页）[30] Mizusawa, Y.：关于实二次域的 $\mathbb{Z}_2$-扩张上的后承阿贝尔 2-类域塔，《加拿大数学通报》3（2022），795-805。（引自第 2 页）[31] Mizusawa, Y.：关于实二次域的 $\mathbb{Z}_2$-扩张上的非分歧伽罗瓦 2-群，《美国数学会会刊》138（2010），3095-3103。（引自第 2 页）[32] Mizusawa, Y.：温和 pro-2 伽罗瓦群与基本 $\mathbb{Z}_2$-扩张，《美国数学会汇刊》370（2018），2423-2461。（引自第 2 页）[33] Mouhib, A., Movaheddi A.：非分歧岩泽模的循环性，《数学手稿》135（2011），91-106。（引自第 2 和 17 页）[34] Wada, H.：关于某些代数数域的类数与单位群，《东京大学理学部纪要》13（1966），201–209。（引自第 5 页）

27[35] Washington，L.C.：《圆分域导论》。数学研究生教材，第83卷。施普林格出版社，纽约，1982年。（引文见第1页）[36] Yue，Q.：广义 Rédei 矩阵，《数学杂志》，261（2009），23–37。（引文见第6页）Mohamed Mahmoud CHEMS-EDDIN：西迪·穆罕默德·本·阿卜杜拉大学达尔·马赫拉兹理学院数学系，摩洛哥非斯电子邮箱：2m.chemseddin@gmail.comHamza EL MAMRY：西迪·穆罕默德·本·阿卜杜拉大学达尔·马赫拉兹理学院数学系，摩洛哥非斯电子邮箱：Hamza.elmamry@usmba.ac.ma