复射影空间中由厄米二次曲面所围成的域的体积

JOYITA BANERJEE GANGULY、DEBRAJ CHAKRABARTI 和 MEERA MAINK AR

摘要。我们明确计算了复射影空间中由厄米二次曲面所围成的域相对于 Fubini-Study 度量的黎曼体积。该体积是定义二次型的特征值的有理函数。

arXiv:2601.07077v1 [math.MG] 11 Jan 2026

1. 引言

1.1. 厄米二次曲面的体积。设 A 是一个 $(n+1)\times(n+1)$ 厄米矩阵，$n \geq 1$。我们将由 A 确定的二次曲面域定义为 n 维复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 中的开子集，其定义如下

$$\Omega(A) = \{[z] \in \mathbb{CP}^n : \langle Az, z\rangle > 0\}, \tag{1.1}$$

其中，对于点 $z \in \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$，记 $[z] \in \mathbb{CP}^n$ 为其在商映射 $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{CP}^n$ 下的投影，而 z，$w = \sum_{j=1}^{n+1} z_j w_j$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的标准内积。二次曲面域及其边界（厄米超二次曲面，见 [Car50]）是复分析和 CR几何中的基本模型域（例如参见 [BER99,Bog91]）。例如，当矩阵 A 有一个负特征值，其余特征值为正时，域 $\Omega(A)$ 与 $\mathbb{C}^n$ 的单位球双全纯等价；毫无疑问，这是复分析中最重要的域（参见 [Rud08]）。

复射影空间带有 Fubini-Study度量，这是一种 K¨ahler 度量，在 $\mathbb{CP}^n$ 的射影酉自映射下保持不变。本文计算二次曲面域 $\Omega(A)$ 关于 Fubini-Study度量的黎曼体积。谱定理与度量在酉群下的不变性共同表明，该体积是 A 的特征值的函数（这些特征值为实数，因为 A 是 Hermitian），且此函数分别关于正特征值和负特征值对称。有趣的是，体积的显式公式（见下文 (1.2)）最终是这些特征值的有理函数。相比之下，在实椭圆平面 $\mathbb{RP}^2$ 中，圆锥曲线所围区域面积的类似公式关于定义矩阵的特征值是超越的；见 [WS12]，其中面积被表示为以特征值为参数的完全椭圆积分。据我们所知，文献中此前尚未出现 $\Omega(A)$ 体积存在有理闭式表达式这一结果，也未给出本文证明的精确表达式。

定理。设 n 为正整数，p、q 和 r 为非负整数，使得$n = p+q+r-1$。设 A 为一个 $(n+1)\times(n+1)$ *Hermitian* 矩阵，具有 p 个正特征值μ_1、.....、μ_p、q个负特征值 $-\nu_1$、.....、$-\nu_q$（其中每个 $\nu_j > 0$），以及 r 个特征值各自

2020数学主题分类。51M25,32Q02，Debraj Chakrabarti 部分获得了美国国家科学基金会（DMS–2153907）和西蒙斯基金会（编号 706445）的资助。

等于 *0*。则二次曲面域 $\Omega(A) \subset \mathbb{CP}^n$ 关于 *Fubini-Study*度量的黎曼体积为

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(A)) = \mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{CP}^n) \cdot \frac{\mathsf{S}_{(p,q)}(\mu,\nu)}{\mathsf{D}_{(p,q)}(\mu,\nu)}, \tag{1.2}$$

其中，$\mathsf{S}_{(p,q)}$ 和$\mathsf{D}_{(p,q)}$ 均为关于 $p+q$ 个变量μ_1、……、 μ_p、 ν_1、……、 ν_q的次数为 pq 的齐次多项式，且系数均为非负整数；它们分别由下文的(1.9)和(1.3) 给出。

1.2. 分母$\mathsf{D}_{(p,q)}$. 设 $x = (x_1,\ldots,x_p)$和 $y = (y_1,\ldots,y_q)$分别为由 p个和 q个变量组成的元组。**(1.2)**中的分母$\mathsf{D}_{(p,q)}$ 是关于变量$x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q$的多项式，其定义如下:

$$\mathsf{D}_{(p,q)}(x,y) = \prod_{k=1}^{q}\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_k), \tag{1.3}$$

按照惯例，空乘积视为**1**。显然，$\mathsf{D}_{(p,q)}$ 是一个系数为非负整数的多项式，并且关于 p 个变量（$x_1,\ldots,x_p$）对称，同时也关于 q 个变量（$y_1,\ldots,y_q$）对称。

1.3. 舒尔多项式。 为了描述分子 $\mathsf{S}_{(p,q)}$ ，我们先回顾经典的舒尔多项式 （例如， [Mac15] 提供了详细综述， [Ful97] 采用了精妙的组合方法， [Egg19] 则给出了初等论述）。舒尔多项式在数学的许多领域中都会出现，例如在表示论中，它们是一般线性群的不可约多项式表示的特征标。

回忆一下，分拆 $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$是一个满足条件 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 的非负整数元组。元组 λ中的非零项称为 λ 的部 ，若两个分拆具有相同的部，我们就将它们视为相同。特别地，我们允许存在唯一一个没有部的分拆，即空分拆，记为 0。

设 $n \geq 1$和 λ是一个至多有 n 个部的分拆。舒尔多项式 $s_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$定义为

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{a_{\lambda+\delta_n}(x_1,\ldots,x_n)}{a_{\delta_n}(x_1,\ldots,x_n)}, \tag{1.4}$$

其中（x_1，……， x_n）是一个变量组， δ_n是分拆（$n-1$， $n-2$，……， 0），

$$a_{\delta_n}(x_1,\ldots,x_n) = \det(x_i^{\delta_n(j)})_{1\leq i,j\leq n} = \det(x_i^{n-j})_{1\leq i,j\leq n} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j), \tag{1.5}$$

是范德蒙交错多项式，并且

$$a_{\lambda+\delta_n}(x_1,\cdots,x_n) = \det(x_\ell^{\lambda_j+\delta_n(j)})_{1\leq j,\ell\leq n} = \det(x_\ell^{\lambda_j+n-j})_{1\leq j,\ell\leq n}. \tag{1.6}$$

由于行列式是其列的交错函数，且分拆 $\lambda+\delta_n$ 的各部分互不相同，因此容易看出多项式 $a_{\lambda+\delta_n}$ 是交错且非零的。由于 $a_{\lambda+\delta_n}$ 在两个变量 x_i、 x_j 相等时为零，因此它可被 $x_i - x_j$ （$i \neq j$）整除，进而可被它们的乘积——范德蒙多项式 a_{δ_n}——整除。因此， s_λ 确实是一个多项式；又由于（**1.4**）的分子和分母都是交错的，可知 s_λ 是对称的。对于空分拆，令 $s_0 \equiv 1$，这与（**1.4**）一致。

1.4. 分子 $\mathsf{S}_{(p,q)}$。 用 $\mathfrak{B}(p,\ q)$ 表示至多有 p 个部分，且每个部分均不超过 q 的分拆的集合。分拆 λ 的共轭分拆 λ' 定义如下：令 λ'_k 为满足 $\lambda_j \geq k$ 的最大整数 j，即 $\lambda'_k = \#\{j : \lambda_j \geq k\}$。这在费雷图中有一个众所周知的转置解释。对于 $\lambda \in \mathfrak{B}(p,\ q)$（见下文），令 $\lambda^*_{p,\ q}$ 为由 $(\lambda^*_{p,\ q})_{\ j} = p - \lambda'_{q-j+1}$ 给出的分拆，即，

$$\lambda^*_{p,q} = (p - \lambda'_q, \ldots, p - \lambda'_1), \quad \text{if } q \geq 1 \quad \text{and } \lambda^*_{p,0} = 0. \tag{1.7}$$

不难看出 $\lambda^*_{p,\ q} \in \mathfrak{B}(q,\ p)$。通过如下方式定义 $\mathfrak{B}(p,\ q)$ 的一个子集

$$\mathfrak{C}(p,q) = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathfrak{B}(p,q) : \lambda_1 = q\}, \tag{1.8}$$

该子集由 $\mathfrak{B}(p,\ q)$ 中最大部分为 q 的分拆组成。式 (1.2) 中的分子 $\mathsf{S}_{(p,q)}$ 为

$$\mathsf{S}_{(p,q)}(x,y) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{C}(p,q)} s_\lambda(x) s_{\lambda^*_{p,q}}(y), \tag{1.9}$$

其中 x 和 y 的含义与式 (1.3) 中相同。至此，式 (1.2) 中分子和分母的描述完毕。

1.5. 文献中的相关结果与特例。 在欧几里得空间中，能够围成有限体积区域的二次曲面只有椭球。欧几里得和阿基米德的著作中记载了熟知的公式：πr^2 平面圆盘的面积、$\frac{4}{3}\pi r^3$ 三维球的体积，以及 $\bar{\pi} ab$ 椭圆所围平面区域的面积。阿基米德关于椭圆所围面积的公式及其证明（见 [Arc02，第 113 页及后续页]）可以推广到更高维：对于某个正整数 n，若 Q 是一个特征值为 λ_1，……，λ_n（按重数重复）的 $n \times n$严格正定对称矩阵，则

$$\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^n}\left\{x \in \mathbb{R}^n : (Qx, x) < 1\right\} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det Q}}, \tag{1.10}$$

其中 $(x,\ y)\ = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ 是 $\mathbb{R}^n$的标准内积，而该公式的第二种形式使我们能够直接根据椭球代数方程的系数计算其体积。

在复欧几里得空间中，(1.10) 可简化为：对于具有特征值 λ_1，.. .，λ_n的 $n \times n$ 严格正定厄米矩阵 A，有：

$$\mathrm{Vol}_{\mathbb{C}^n}\left\{z \in \mathbb{C}^n : \langle Az, z\rangle < 1\right\} = \frac{\pi^n}{n!} \cdot \frac{1}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = \frac{\pi^n}{n!} \cdot \frac{1}{\det A},$$

其中 $z,\ w\ = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w_j}$是 $\mathbb{C}^n$的标准内积。

与实公式 (1.10) 相比，上述复公式的简洁性是厄米几何中的一种普遍现象，其根源在于 $\mathbb{C}$-线性映射的实行列式与复行列式之间的关系：$\det_{\mathbb{R}} T = |\det_{\mathbb{C}} T|^2$. 。其他此类简化的例子包括“复勾股定理”，以及 (1.2) 的有理性；这与实椭圆空间中相应公式的超越性形成对比。

Fubini-Study度量使 $\mathbb{CP}^n$ 成为一个齐性 K¨ahler 流形，由此得到的“Hermitian椭圆空间”在代数几何和微分几何中具有根本重要性（例如参见 [GH78,Mum95]）。度量量在 Hermitian

椭圆几何中的重要性，充分体现在著名的 Wirtinger 公式中：对于 $\mathbb{CP}^n$ 中的一个 r 维光滑射影簇 Z，我们有

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}\, Z = \mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}\, \mathbb{CP}^r \cdot \deg(Z),$$

其中，$\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}$ 表示相对于 Fubini-Study度量的 $2r$ 维黎曼体积，而 deg(Z) 是 Z 的次数。由此可知，光滑射影簇的体积可以根据 Z 的方程通过代数方法计算。鉴于此，尝试计算射影空间中对象的体积，尤其是像 (1.1) 这样具有简单代数定义的开集的体积，无疑是很有意义的。注意，只要能够确定特征值，(1.2) 也允许通过纯代数方法计算体积。

文献中已知少数几个射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 中二次曲面域的体积特例，尽管其形式并非 (1.2)。在 $\mathbb{CP}^1$中，唯一有意义的二次曲面域是一个圆盘，对应于 $n = p = q = 1$。Fubini-Study度量可以与 $\mathbb{R}^3$ 中球面的诱导的圆度量相对应，球面通常归一化为半径 $\frac{1}{2}$，而球面上测地半径为 ρ 的度量圆盘的面积公式 $\pi \sin^2 \rho$ 是初等且众所周知的。作为圆盘的推广，可以考虑如下形式的域

$$\{w \in \mathbb{CP}^n : \mathrm{dist}_{FS}(Z, w) < \rho\}, \tag{1.11}$$

其中，dist_{FS} 表示 Fubini-Study 距离，Z 是 $\mathbb{CP}^n$ 中的一个射影线性子空间，ρ是一个正数。利用 Fubini-Study 距离的显式公式（见下文（3.1）），可知该集合是一个二次曲面域 Ω(A)（参见 [Car50，第 §179] 节），其特殊之处在于 A 的正特征值彼此相等，负特征值也彼此相等。集合（1.11）也是 $\mathbb{CP}^n$ 中 Weyl 意义下的一个管状邻域，其体积可通过$\mathbb{CP}^n$ 中的 Weyl 管公式的一个变体，表示为 ρ 的函数（见 [Gra04，定理 7.20 和公式（7.58）]）。由此可得该体积为在射影线性子空间 Z上的积分。当 Z 是$\mathbb{CP}^n$中的一个射影超平面时，还可进一步简化（见 [Gra04，定理 7.22 和公式（7.62）]），且积分项消失。不过，我们想在此强调，形式如（1.11）的二次曲面域非常特殊，其中大多数都不能表示为（1.11）的形式；此外，由复射影管公式得到的体积表达式，并未体现出以特征值表示体积这一形式在代数上的简洁性。

1.6. 本文计划。 这里给出的主要结果的证明是初等的，本质上是对给出 Ω(A) 体积的积分进行蛮力计算。通过找出一个以 p 和 q（正特征值和负特征值的数量）表示体积的递推公式，并证明（1.2）右端是该递推关系的唯一解，计算得以简化。我们先在下文第2节考察主公式（1.2）的一些实用的不同写法。然后在第3节概述证明的主要论证，并将技术细节留到最后一节（第4节）讨论。

1.7. 问题与未来方向。 如上所述，这里给出的 (1.2) 的证明是计算性的，若能找到一种更具概念性的证明，将会非常有趣。这样的证明会比我们这里更充分地利用 $\mathbb{CP}^n$ 度量的对称性，并准确解释为什么乘积群 $U(p) \times U(q)$ 的特征标会以这种方式出现在 (1.2) 的分子 (1.9) 和分母 (1.3) 中。这里请注意，$U(p) \times U(q)$ 作为 Ω(A) 的全纯合同变换群（即等距变换）

作用于环境空间 $\mathbb{CP}^n$，并保持集合 $\Omega(A)$ 不变，因此该群的表示论在公式 (1.2) 中发挥作用也就不足为奇了。

至少还有两个方向可以尝试推广这个公式。首先，可以探讨在其他具有二次曲面概念的齐性复流形中是否存在类似公式，例如在复双曲空间的射影实现中。还可以探讨，在 $\mathbb{CP}^n$附近代数簇周围的某些管状域的体积，是否也存在符合（1.2）思路的有趣公式。我们计划在未来的论文中继续研究这些问题及其推广。

1.8. **致谢**。 第二作者在与 Andy Raich 和 Phil Harrington 合作研究多复变函数论中的一个问题时（见 [CHR24]），得知了公式（1.2）的存在；当时他想了解在非伪凸点处，超曲面的 Levi 形式沿随机方向为正的概率。他感谢 Andy 和 Phil 多年来的慷慨相助与友谊。他还感谢 Ben Salisbury 和 Alperen Ergur 所提供的宝贵讨论。

2. $S_{(p,q)}$ 和$D_{(p,q)}$的其他表示形式

2.1. 用舒尔多项式表示$D_{(p,q)}$。 一个经典事实（参见 [Mac15，第 67]页）是

$$D_{(p,q)}(x,y) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{B}(p,q)} s_\lambda(x) s_{\lambda^*_{p,q}}(y). \tag{2.1}$$

由于舒尔多项式的系数均为非负整数（参见 [Egg19，第 4]章），根据分子公式（1.9），$S_{(p,q)}$ 中任意一个单项式的系数都小于或等于$D_{(p,q)}$中同一单项式的系数。

2.2. **不使用舒尔多项式表示**$S_{(p,q)}$。对于一个 p元组 $x = (x_1, \ldots, x_p)$以及任意 $1 \le \ell \le p$，我们将通过从 x 中删除第 ℓ个元素得到的$(p-1)$元组定义为 $x[\ell]$：

$$x[\ell] = (x_1, \cdots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \cdots, x_p). \tag{2.2}$$

特别地，$x[1] = (x_2, x_3, \cdots, x_p)$和 $x[p] = (x_1, x_2, \cdots, x_{p-1})$。

命题 2.1. 对于非负整数 p, q，我们有

$$S_{(p,q)}(x,y) = \sum_{\ell=1}^{p} \frac{x_\ell^{p+q-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{p} (x_\ell - x_k)} \cdot D_{(p-1,q)}(x[\ell], y). \tag{2.3}$$

我们需要以下引理：

引理 2.2. 映射 $\xi \mapsto \xi[1], (\xi_1, \cdots, \xi_p) \mapsto (\xi_2, \ldots, \xi_p)$

(1) 是从 $\mathfrak{C}(p,q)$ 到 $\mathfrak{B}(p-1,q)$的双射，且 *(2)* 对于分拆 $\xi \in \mathfrak{C}(p,q)$，有 $(\xi[1])^*_{p-1,q} = \xi^*_{p,q}$，记号同(1.7)。

证明。 (1) 令 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) \in \mathfrak{C}(p,q)$，使得 ξ至多有 p个部分，且对每个 k，$\xi_1 = q$和$\xi_k \le q$。于是 $\xi[1] = (\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_p)$ 至多有 $p-1$ 个部分，且每个部分都小于或等于 q，因此 $\xi[1] \in \mathfrak{B}(p-1,q)$。

为证明单射性，设 $\xi, \eta \in \mathfrak{C}(p,q)$ 满足 $\xi[1] = \eta[1]$，即 $(\xi_2, \cdots, \xi_p) = (\eta_2, \cdots, \eta_p)$。根据 $\mathfrak{C}(p,q)$ 的定义，我们有 $\xi_1 = q = \eta_1$，因此有 $\xi = \eta$，从而完成单射性的证明。

为证明满射性，设 $\eta \in \mathfrak{B}(p-1,q)$，并令 $\xi = (q, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{p-1})$。由于 η 的各部分是不递增的，且 $\eta_i \le q$, ξ 的各部分也不递增，因此它是一个合法的分拆，至多有 p 个部分，且最大部分等于 q，所以 $\xi \in \mathfrak{C}(p,q)$。由于

$$\xi[1] = (q, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{p-1})[1] = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{p-1}) = \eta,$$

映射 $\xi \mapsto \xi[1]$ 是满射。

(2) 令 $\xi = (q, \xi_2, \cdots, \xi_p) \in \mathfrak{C}(p,q)$。首先注意到，对于 $1 \le j \le q$，有 $(\xi[1])'_j = \xi'_j - 1$，因为

$$\begin{aligned}(\xi[1])'_j &= (\xi_2, \cdots, \xi_p)'_j = \#\{k : \xi_k \ge j, 2 \le k \le p\} \\ &= \#\{k : \xi_k \ge j, 1 \le k \le p\} - 1 \\ &\quad (\text{since } \{k : \xi_k \ge j, 1 \le k \le p\} = \{1\} \sqcup \{k : \xi_k \ge j, 2 \le k \le p\}\ ) \\ &= \xi'_j - 1.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(\xi[1])^*_{p-1,q} &= ((p-1) - (\xi[1])'_q, \cdots, (p-1) - (\xi[1])'_1) \\ &= ((p-1) - (\xi'_q - 1), \cdots, (p-1) - (\xi'_1 - 1)) \\ &= (p - \xi'_q, \cdots, p - \xi'_1) \\ &= \xi^*_{p,q}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

□

命题 *2.1* 的证明。令 $\xi \in \mathfrak{C}(p,q)$，其中如同 (1.8)，$\mathfrak{C}(p,q) = \{\lambda \in \mathfrak{B}(p,q) : \lambda_1 = q\}$，从而 $\xi_1 = q$ 且 ξ 至多有 p 个部分。根据 (1.6) 中 $a_{\xi+\delta_p}$ 的行列式定义，沿第一行展开行列式可得：

$$\begin{aligned}a_{\xi+\delta_p}(x) &= \det\begin{pmatrix} x_1^{\xi_1+p-1} & x_2^{\xi_1+p-1} & \cdots & x_p^{\xi_1+p-1} \\ x_1^{\xi_2+p-2} & x_2^{\xi_2+p-2} & \cdots & x_p^{\xi_2+p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\xi_p} & x_2^{\xi_p} & \cdots & x_p^{\xi_p} \end{pmatrix} = \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+\xi_1-1} a_{\xi[1]+\delta_{p-1}}(x[\ell]) \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+q-1} a_{\xi[1]+\delta_{p-1}}(x[\ell]) \quad (\text{Since } \xi_1 = q). \end{aligned} \tag{2.5}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathsf{S}_{(p,q)}(x,y) &= \sum_{\lambda \in \mathfrak{C}(p,q)} s_\lambda(x) s_{\lambda^*_{p,q}}(y) \quad \text{using definition (1.9)} \\ &= \sum_{\xi \in \mathfrak{C}(p,q)} \frac{a_{\xi+\delta_p}(x)}{a_{\delta_p}(x)} \cdot s_{\xi^*_{p,q}}(y) \quad \text{using definition of Schur polynomial (1.4)} \\ &= \frac{1}{a_{\delta_p}(x)} \sum_{\xi \in \mathfrak{C}(p,q)} a_{\xi+\delta_p}(x) \cdot s_{\xi^*_{p,q}}(y) \\ &= \frac{1}{a_{\delta_p}(x)} \sum_{\xi \in \mathfrak{C}(p,q)} \left[\sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+q-1} a_{\xi[1]+\delta_{p-1}}(x[\ell]) \right] \cdot s_{\xi^*_{p,q}}(y) \quad \text{using (2.5))} \\ &= \frac{1}{a_{\delta_p}(x)} \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+q-1} \sum_{\xi \in \mathfrak{C}(p,q)} a_{\xi[1]+\delta_{p-1}}(x[\ell])\, s_{\xi^*_{p,q}}(y)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a_{\delta_p}(x)} \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+q-1} \sum_{\xi \in \mathfrak{C}(p,q)} s_{\xi[1]}(x[\ell])\, a_{\delta_{p-1}}(x[\ell])\, s_{\xi^*_{p,q}}(y),$$

by definition of Schur polynomials (1.4), $\quad a_{\xi[1]+\delta_{p-1}}(x[\ell]) = s_{\xi[1]}(x[\ell])\, a_{\delta_{p-1}}(x[\ell])$.

$$= \frac{1}{a_{\delta_p}(x)} \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+q-1} a_{\delta_{p-1}}(x[\ell]) \left[\sum_{\xi \in \mathfrak{C}(p,q)} s_{\xi[1]}(x[\ell]) s_{\xi^*_{p,q}}(y) \right]. \tag{2.6}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi \in \mathfrak{C}(p,q)} s_{\xi[1]}(x[\ell]) s_{\xi^*_{p,q}}(y) &= \sum_{\xi \in \mathfrak{C}(p,q)} s_{\xi[1]}(x[\ell]) s_{(\xi[1])^*_{p-1,q}}(y) \quad \text{using Part 2 of Lemma 2.2} \\
&= \sum_{\xi[1] \in \mathfrak{B}(p-1,q)} s_{\xi[1]}(x[\ell]) s_{(\xi[1])^*_{p-1,q}}(y) \quad \text{using Part 1 of Lemma 2.2} \\
&= \sum_{\lambda \in \mathfrak{B}(p-1,q)} s_\lambda(x[\ell]) s_{\lambda^*_{p-1,q}}(y) = \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y), \quad \text{by (2.1)}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
(2.6) &= \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+q-1} \frac{a_{\delta_{p-1}}(x[\ell])}{a_{\delta_p}(x)} \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+q-1} \frac{a_{\delta_{p-1}}(x[\ell])}{\prod\limits_{1 \le i < j \le p} (x_i - x_j)} \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+q-1} \frac{a_{\delta_{p-1}}(x[\ell])}{\prod\limits_{\substack{1 \le i < j \le p \\ i \ne \ell \\ j \ne \ell}} (x_i - x_j) \cdot \prod\limits_{i<\ell} (x_i - x_\ell) \cdot \prod\limits_{j>\ell} (x_\ell - x_j)} \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+q-1} \frac{a_{\delta_{p-1}}(x[\ell])}{a_{\delta_{p-1}}(x[\ell]) \cdot (-1)^{\ell-1} \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \ne \ell}}^{p} (x_\ell - x_k)} \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell-1} x_\ell^{p+q-1} \frac{1}{(-1)^{\ell-1} \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \ne \ell}}^{p} (x_\ell - x_k)} \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} \frac{x_\ell^{p+q-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \ne \ell}}^{p} (x_\ell - x_k)} \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y),
\end{aligned}$$

证明完成。 □

3. 证明概述

3.1. 度量及其体积形式。 让我们先回顾一些与 $\mathbb{CP}^n$ 的厄米几何学相关的公式（详细介绍见 [KN96，第 159–161 页及第 273–278] 页）。为明确起见，本文余下部分将采用 Fubini-Study 度量的一种标准归一化方式，使全纯截面曲率为 4。接下来，Fubini-Study

中两点之间的距离由以下公式给出

$$\mathrm{dist}_{FS}([z],[w]) = \arccos\left(\frac{|\langle z,w\rangle|}{\|z\|\cdot\|w\|}\right), \quad z,w\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}, \tag{3.1}$$

其中，$[z]$ 表示包含 z.的 $\mathbb{C}^{n+1}$ 一维复子空间。Fubini-Study 距离显然在 $\mathbb{CP}^n$的射影化酉自同构群$PU(n+1)$作用下保持不变，即形如 $[U]:\mathbb{CP}^n\to\mathbb{CP}^n$的映射，其中 $[U][z]=[Uz]$ 由$U\in U(n+1)$给出，且 $z\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$。众所周知，(3.1) 可延拓为 $\mathbb{CP}^n$上的 K¨ahler 度量。仿射片$\{z_{n+1}\neq 0\}$上的一个 K¨ahler 势可用非齐次坐标 $\zeta_j=\dfrac{z_j}{z_{n+1}}$，$1\le j\le n$ 表示为 $\varphi=\log(1+|\zeta|^2)$，其中$|\zeta|^2=|\zeta_1|^2+\cdots+|\zeta_n|^2$。由此可立即推得 K¨ahler 形式$\omega=i\partial\bar\partial\varphi$，以及体积形式 n !的公式；经计算可知，后者等于$(1+|\zeta|^2)^{-(n+1)}dV(\zeta)$，其中 $dV(\zeta)$表示复欧几里得空间的体积形式。由于 $\mathbb{CP}^n$ 中的超曲面$\{z_{n+1}=0\}$测度为零，因此对于可测集 $U\subset\mathbb{CP}^n$，有如下公式

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(U) = \int_{\sigma^{-1}(U)} \frac{dV(\zeta)}{(1+|\zeta|^2)^{n+1}} \tag{3.2}$$

对于 Fubini-Study 体积，其中 $\sigma:\mathbb{C}^n\to\mathbb{CP}^n$ 是由 $\sigma(\zeta)=[\zeta_1、\ldots、\zeta_n、1)]$给出的仿射片 $\{z_{n+1}\neq 0\}$ 的参数化。黎曼度量及其体积形式也在群 $PU(n+1)$ 的作用下保持不变。

因此，我们的目标是根据 A 的特征值，计算 $U=\Omega(A)$ 时的积分 (3.2)。注意，当 A 为正定（即 A 的所有特征值都严格为正）时，$\Omega(A)=\mathbb{CP}^n$。在这种情况下，众所周知，

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{CP}^n) = \frac{\pi^n}{n!}. \tag{3.3}$$

对于 $n=0$，当 $\mathbb{CP}^0$ 是单点集时，我们令 $\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{CP}^n)=1$，这样 (3.3) 仍然成立。

3.2. 化归为非退化对角形式。 令 A 如本文主定理所述，即 A 是一个大小为 $n+1$ 的 Hermitian 方阵，其中 $n=p+q+r-1$，$p=$ 为正特征值的个数，$q=$ 为负特征值的个数，$r=$ 为零特征值的个数。回忆一下，正特征值记为 μ_j、$1\le j\le p$，负特征值记为 ν_k、$1\le k\le q$。根据谱定理，存在一个酉矩阵 U，使得 $U^{-1}AU=\Delta$，其中

$$\Delta=\mathrm{diag}(\mu,-\nu,0)=\mathrm{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_p,-\nu_1,\ldots,-\nu_q,\underbrace{0,\ldots,0}_{r}). \tag{3.4}$$

于是我们有 $\Omega(A)=[U](\Omega(\Delta))$，其中 $[U]:\mathbb{CP}^n\to\mathbb{CP}^n$是由酉自同构 U诱导的射影化酉映射 $[z]\mapsto[Uz]$。因此

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(A))=\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}([U](\Omega(\Delta))=\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\Delta)), \tag{3.5}$$

因为 Fubini-Study度量（因而其黎曼体积形式）在射影化酉映射下保持不变。为了计算 $\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\Delta))$，令 D 为由下式给出的$p+q$ 阶对角矩阵

$$D=\mathrm{diag}(\mu,-\nu)=(\mu_1,\ldots,\mu_p,-\nu_1,\ldots,-\nu_q). \tag{3.6}$$

我们将证明以下内容：

命题 3.1. 我们有

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\Delta)) = \frac{\pi^r}{n(n-1)\dots(n-r+1)}\,\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(D)), \tag{3.7}$$

其中左侧为 $2n = 2(p+q+r-1)$ 实维体积，右侧为$2(p+q-1)$ 实维体积。

我们需要体积的积分表示。下文用 $\mathbb{R}_+$ 表示正实数集，因此 $\mathbb{R}_+^n$ 表示由所有坐标均严格为正的点组成的 $\mathbb{R}^n$ 中的正交象限。对于 $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_P) \in \mathbb{R}_+^P$和 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_Q) \in \mathbb{R}_+^Q$，我们将集合 $E_{P,Q}(\gamma, \delta) \subset \mathbb{R}_+^{P+Q}$定义为:

$$E_{P,Q}(\gamma,\delta) = \left\{(t_1,\dots,t_{P+Q}) \in \mathbb{R}_+^{P+Q} : \sum_{j=1}^{P}\gamma_j t_j - \sum_{k=1}^{Q}\delta_k t_{P+k} > -1\right\}. \tag{3.8}$$

引理 3.2。 设 $p \geq 1$、 q、 $r \geq 0$、 $x \in \mathbb{R}_+^p$、 $y \in \mathbb{R}_+^q$，并且

$$\Delta = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_p, -y_1, \cdots, -y_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{r})$$

是一个$(n+1)\times(n+1)$ 对角矩阵，其中令 $n = p+q+r-1$。令

$$a = \frac{1}{x_1}\cdot x[1] = \left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_p}{x_1}\right) \in \mathbb{R}_+^{p-1}, \tag{3.9}$$

其中 $x[1] = (x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}_+^{p-1}$如$(2.2)$ 所示，并且

$$b = \frac{1}{x_1}\cdot y = \left(\frac{y_1}{x_1}, \cdots, \frac{y_q}{x_1}\right) \in \mathbb{R}_+^q. \tag{3.10}$$

记 $t' = (t_1, \dots, t_{p+q-1})$ $t'' = (t_{p+q}, \dots, t_n)$， 则有

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\Delta)) = \pi^n \int\limits_{E_{p-1,q}(a,b)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^r} \frac{dV(t'')dV(t')}{\left(1 + \sum\limits_{j=1}^{n} t_j\right)^{n+1}}, \tag{3.11}$$

其中 $E_{p-1,q}(a,b)$ 如(3.8)所示。

证明。 在仿射图 $U_1 = \{[z] \in \mathbb{CP}^n : z_1 \neq 0\}$上，引入非齐次坐标$\xi_j = \frac{z_{j+1}}{z_1}, 1 \leq j \leq n$。在这些坐标下

$$\Omega(\Delta) \cap U_1 = \left\{\xi \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{p-1} a_j|\xi_j|^2 - \sum_{k=1}^{q} b_k|\xi_{p+k-1}|^2 > -1\right\}. \tag{3.12}$$

将映射 $\mathbb{C}^n$到 $\mathbb{R}_n^+ \times [0, 2\pi)$，令 $\xi_j = \sqrt{t_j}e^{\overline{i\theta}_j}$。注意，此时体积元素之间满足关系

$$dV(\xi) = \frac{1}{2^n}dV(t)dV(\theta), \tag{3.13}$$

其中，按照惯例， dV 表示勒贝格测度的体积元（适当维数的）。在坐标（t_1，…， t_n， θ_1，…，θ_n）中，我们有

$$\Omega(\Delta) \cap U_1 = \left\{\sum_{j=1}^{p-1} a_j t_j - \sum_{k=1}^{q} b_k t_{p+k-1} > -1, 0 \leq \theta_j < 2\pi \text{ for } 1 \leq j \leq n\right\} \tag{3.14}$$

$$= \{(t', t'', \theta) \in \mathbb{R}_+^{p+q-1} \times \mathbb{R}_+^r \times [0, 2\pi) : t' \in E_{p-1,q}(a, b)\}$$
$$= E_{p-1,q}(a, b) \times \mathbb{R}_+^r \times [0, 2\pi)^n. \tag{3.15}$$

因此，由（3.2）可知，Ω(Δ)的Fubini-Study 体积为

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\Delta)) &= \int_{(3.12)} \frac{dV(\xi)}{\left(1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2\right)^{n+1}}, \\
&= \frac{1}{2^n} \int_{(3.14)} \frac{dV(t)dV(\theta)}{\left(1 + \sum_{j=1}^n t_j\right)^{n+1}} \quad \text{using (3.14) and (3.13)} \\
&= \frac{1}{2^n} \int_{[0,2\pi)^n} dV(\theta) \int_{E_{p-1,q}(a,b)} \int_{\mathbb{R}_+^r} \frac{dV(t'')dV(t')}{\left(1 + \sum_{j=1}^n t_j\right)^{n+1}} \quad \text{using (3.15)}, \\
&= \pi^n \int_{E_{p-1,q}(a,b)} \int_{\mathbb{R}_+^r} \frac{dV(t'')dV(t')}{\left(1 + \sum_{j=1}^n t_j\right)^{n+1}},
\end{aligned}$$

完成证明。

□

命题 *3.1* 的证明。回想 $t'' = (t_{p+q}, \ldots, t_n)$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^r} \frac{dV(t'')}{\left(1 + \sum_{j=1}^n t_j\right)^{n+1}} &= \int_{\mathbb{R}_+^{r-1}} \left(\int_{t_n=0}^{\infty} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} t_j + t_n\right)^{-(n+1)} dt_n \right) dt_{p+q} dt_{p+q+1} \ldots dt_{n-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{r-1}} \left(\frac{-1}{n} \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} t_j + t_n\right)^{-n} \Big|_{t_n=0}^{\infty} \right) dt_{p+q} dt_{p+q+1} \ldots dt_{n-1} \\
&= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}_+^{r-1}} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} t_j\right)^{-n} dt_{p+q} dt_{p+q+1} \ldots dt_{n-1}.
\end{aligned}$$

将此迭代 r 次，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}_+^r} \frac{dV(t'')}{\left(1 + \sum_{j=1}^n t_j\right)^{n+1}} = \frac{1}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)} \left(1 + \sum_{j=1}^{p+q-1} t_j\right)^{-(p+q)}. \tag{3.16}$$

因此，根据引理 3.2,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\Delta)) &= \pi^r \cdot \pi^{n-r} \int_{E_{p-1,q}(a,b)} \left(\int_{\mathbb{R}_+^r} \left(1 + \sum_{j=1}^n t_j\right)^{-(n+1)} dV(t'') \right) dV(t') \\
&= \frac{\pi^r}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)} \cdot \pi^{p+q-1} \int_{E_{p-1,q}(a,b)} \left(1 + \sum_{j=1}^{p+q-1} t_j\right)^{-(p+q)} dV(t')
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^r}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)} \cdot \mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(D)),$$

再次根据引理 3.2。 □

3.3. 二重归纳的预备知识。 根据命题 3.1，只需在 D 没有零特征值时计算体积 $\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(D))$。我们将对 p 和 q进行二重归纳，其中二者分别表示正特征值和负特征值的个数。为便于处理 p, q 同时变化时的归纳假设，我们引入如下设定。

令 $\mathbb{N}$ 为非负整数集，并回顾 $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$。我们引入一族由 $\mathbb{N}^2$索引的函数二重序列 $\mathscr{N}$： $\mathscr{N}$ 由双重序列 $N = \{N_{(p,q)} : (p,q) \in \mathbb{N}^2\}$组成，其中每个 $N_{(p,q)}$ 都是连续函数

$$N_{(p,q)} : \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^q \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

使得函数 $(x,y) \mapsto N_{(p,q)}(x,y)$（其中 $x \in \mathbb{R}_+^p$和 $y \in \mathbb{R}_+^q$）关于变量 $x_1, \cdots, x_p$对称，同时也关于变量 $y_1, \cdots, y_q$对称，其中 $x = (x_1, \cdots, x_p)$且$y = (y_1, \cdots, y_q)$，并满足以下性质：

- **(基条件)** 对于所有 $x \in \mathbb{R}_+$,

$$N_{(0,0)}(\cdot,\cdot) = 0 \quad \text{and } N_{(1,0)}(x,\cdot) = 1. \tag{3.17}$$

- **(对偶性)** 对于所有 $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$，以及对于所有 $x \in \mathbb{R}_+^p$和 $y \in \mathbb{R}_+^q$,

$$N_{(p,q)}(x,y) = \mathsf{D}_{(p,q)}(x,y) - N_{(q,p)}(y,x), \tag{3.18}$$

其中 $\mathsf{D}_{(p,q)}(x, y)$ 如 (1.3) 所示。

- **(R递归)** 对于所有 $q \geq 1$，以及对于所有满足 $y_1 < y_2 < \cdots < y_q$ 的 $x \in \mathbb{R}_+^p$ 和$y \in \mathbb{R}_+^q$ ，

$$N_{(p,q)}(x,y) = \left(\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q)\right) \cdot N_{(p,q-1)}(x, y[q]) - \mathsf{T}_{(p,q)}(x,y) \cdot N_{(p,q-1)}(\alpha(x,y), \beta(y)), \tag{3.19}$$

with

$$\mathsf{T}_{(p,q)}(x,y) = \frac{1}{y_q^{pq-2p-q+1}} \cdot \prod_{j=1}^{p}(y_q + x_j)^{q-1} \prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)^{p-1}, \tag{3.20}$$

$$\alpha(x,y) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \qquad \alpha_j = \frac{x_j}{y_q + x_j}, \quad 1 \leq j \leq p, \tag{3.21}$$

$$\beta(y) = (\beta_1, \ldots, \beta_{q-1}), \qquad \beta_k = \frac{y_k}{y_q - y_k}, \quad 1 \leq k \leq q-1.\text{‘} \tag{3.22}$$

以上述 $\mathscr{N}$ 为基础，将证明以下三个命题，它们将导出 $\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(D))$ 的确定，并完成主定理的证明：

命题 A. 族 $\mathscr{N}$ 至多包含一个元素。

命题 B。 对于每个 $(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$、 $x \in \mathbb{R}_+^p$和 $y \in \mathbb{R}_+^q$，令

$$\mathsf{N}_{(p,q)}(x,y) = \frac{(p+q-1)!}{\pi^{p+q-1}} \cdot \mathsf{D}_{(p,q)}(x,y) \cdot \mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\mathrm{diag}(x,-y)), \tag{3.23}$$

其中 $\mathrm{diag}(x,-y) = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_p, -y_1, \cdots, -y_q)$ 是一个大小为 $(p+q)$ 的对角矩阵。若设$\mathsf{N}_{(0,0)}(\cdot,\cdot) = 0$, 则双重序列 $\mathsf{N} = \{\mathsf{N}_{(p,q)} : (p,q) \in \mathbb{N}^2\}$ 属于 $\mathscr{N}$。

命题 C。 *(1.9)* 中的双重序列 $\mathsf{S} = \{\mathsf{S}_{(p,q)} : (p,q) \in \mathbb{N}^2\}$ 属于 $\mathscr{N}$.

3.4. 假设命题 A、B 和 C 成立时主定理的证明。 暂且推迟对这三个命题的证明，我们现在可以完成主定理的证明。设A 如主定理的陈述所述，并设 Δ 为其在 (3.4) 中所述的对角形式。结合 (3.5) 和 (3.7)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(A)) &= \frac{\pi^r}{n(n-1)\dots(n-r+1)}\,\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\mathrm{diag}(\mu,-\nu)))\\ &= \frac{\pi^r}{n(n-1)\dots(p+q)}\cdot\frac{\pi^{p+q-1}}{(p+q-1)!}\frac{\mathsf{N}_{(p,q)}(\mu,\nu)}{\mathsf{D}_{(p,q)}(\mu,\nu)} \quad \text{using definition 3.23 of } \mathsf{N}\\ &= \frac{\pi^n}{n!}\cdot\frac{\mathsf{N}_{(p,q)}(\mu,\nu)}{\mathsf{D}_{(p,q)}(\mu,\nu)}, \quad \text{since } p+q+r=n+1.\end{aligned}$$

由命题 B 得到 $\mathsf{N}\in\mathscr{N}$，由命题 C 得到 $\mathsf{S}\in\mathscr{N}$。但命题 A 表明，$\mathscr{N}$至多包含一个元素，因此 $\mathsf{S}=\mathsf{N}$。于是，对于每个 $(p,\ q)\in\mathbb{N}^2$,

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(A)) = \frac{\pi^n}{n!}\cdot\frac{\mathsf{S}_{(p,q)}(\mu,\nu)}{\mathsf{D}_{(p,q)}(\mu,\nu)},$$

注意到由 (3.3) 可知 $\frac{\pi^n}{n!}=\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{CP}^n)$。，这就是 (1.2)。

4. 计算

4.1. 命题 A 的证明。 设 $N,\ S\in\mathscr{N}$。只需证明，对于所有 $(p,\ q)\in\mathbb{N}^2$，$x\in\mathbb{R}^p_+$，且只要 $y\in\mathbb{R}^q_+$满足分量$y_1,\ \dots\dots,\ y_q$互不相同，就有 $N_{(p,q)}(x,\ y)=S_{(p,q)}(x,\ y)$。注意，此时可以使用递推性质 (3.19)，因为函数 $N_{(p,q)}$ 和 $S_{(p,q)}$ 关于 $(x_1,\ \dots\dots,\ x_p)$ 和 $(y_1,\ \dots\dots,\ y_q)$ 对称。随后，利用 N 和 S 的连续性假设，即可处理 y 可能含有重复项的一般情形。

利用 (3.17)，我们有 $N_{(0,0)}(\cdot,\ \cdot)=S_{(0,0)}(\cdot,\ \cdot)=0$。现在我们用归纳法证明，对所有 $q\geq 1$，都有 $N_{(0,q)}=S_{(0,q)}$。对于 $x>0$，有

$$\begin{aligned}N_{(0,1)}(\cdot,x) &= \mathsf{D}_{(1,0)}(x,\cdot)-N_{(1,0)}(x,\cdot) \quad \text{by duality}\\ &= \mathsf{D}_{(1,0)}(x,\cdot)-S_{(1,0)}(x,\cdot) \quad \text{by the base condition } N_{(1,0)}(x,\cdot)=S_{(1,0)}(x,\cdot)=1\\ &= S_{(0,1)}(\cdot,x) \quad \text{by duality again.}\end{aligned}$$

这构成了归纳法的基础。现在假设对于某个 $q,\ N_{(0,q)}=S_{(0,q)}$。令$y'=(y_1,\ \cdots,\ y_{q+1})$。利用方程 (3.19) 中的递推关系，并约定空乘积为 1，我们得到

$$\begin{aligned}N_{(0,q+1)}(\cdot,y') &= 1\cdot N_{(0,q)}(\cdot,y'[q+1])-\mathsf{T}_{(0,q+1)}(\cdot,y')\cdot N_{(0,q)}(\cdot,\beta(y'))\\ &= 1\cdot S_{(0,q)}(\cdot,y'[q+1])-\mathsf{T}_{(0,q+1)}(\cdot,y')\cdot S_{(0,q)}(\cdot,\beta(y')) \quad \text{(Induction hypothesis)}\\ &= S_{(0,q+1)}(\cdot,y').\end{aligned}$$

因此，$N_{(0,q)}=S_{(0,q)}$ 对所有 $q\geq 1$均成立。现在可得，对所有 $p\geq 1$，都有 $N_{(p,0)}=S_{(p,0)}$，这是因为利用了对偶性

$$N_{(p,0)}(x,\cdot)=\mathsf{D}_{(p,0)}(x,\cdot)-N_{(0,p)}(\cdot,x)=\mathsf{D}_{(p,0)}(x,\cdot)-S_{(0,p)}(\cdot,x)=S_{(p,0)}(x,\cdot).$$

剩下的情形是 $p \geq 1$ 和 $q \geq 1$，这同样可由归纳法证明。假设对某个$p \geq 1$， $q \geq 1$, $N_{(p,q)} = S_{(p,q)}$. 成立。固定 $p \geq 1$，由递推式 (3.19)，对于 $y' = (y_1, \cdots, y_{q+1})$

$$\begin{aligned} N_{(p,q+1)}(x, y') &= \left(\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_{q+1})\right) \cdot N_{(p,q)}(x, y'[q+1]) - \mathsf{T}_{(p,q+1)}(x, y') \cdot N_{(p,q)}(\alpha(x, y'), \beta(y')) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_{q+1})\right) \cdot S_{(p,q)}(x, y'[q+1]) - \mathsf{T}_{(p,q+1)}(x, y') \cdot S_{(p,q)}(\alpha(x, y'), \beta(y')) \\ &\qquad \text{(by induction hypothesis)} \\ &= S_{(p,q+1)}(x, y'). \end{aligned}$$

由于 $p \geq 1$ 是任意的，我们有 $N_{(p,q)} = S_{(p,q)}$，对每个 $p \geq 1$ 和每个 $q \geq 1$ 都成立。结合此前为 $p = 0$ 得到的等式，这表明对所有 $(p, q) \in \mathbb{N}^2$，都有 $N_{(p,q)} = S_{(p,q)}$。因此， $N = S$，且 $\mathscr{N}$ 至多包含一个元素。

4.2. 命题 B 的证明。我们汇集了关于函数 $\mathsf{D}_{(p,q)}$ 的两个简单计算，这些计算不仅在下文中会用到，在命题 C 的证明中也会用到。回顾 (2.2) 中的记号$x[q]$，注意到

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_{(p,q)}(x, y) &= \prod_{k=1}^{q}\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_k) = \left(\prod_{k=1}^{q-1}\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_k)\right) \cdot \prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q) \\ &= \mathsf{D}_{(p,q-1)}(x, y[q]) \cdot \prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q), \end{aligned} \tag{4.1}$$

并且还回顾 i 根据上文（3.21）和（3.22）中 $\alpha(x, y)$ 和 $\beta(y)$ 的含义，我们有 e

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_{(p,q-1)}(\alpha(x, y), \beta(y)) &= \mathsf{D}_{(p,q-1)}\left(\left(\frac{x_j}{x_j + y_q}\right)_{j=1}^{p}, \left(\frac{y_k}{y_q - y_k}\right)_{k=1}^{q-1}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{q-1}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{x_j}{x_j + y_q} + \frac{y_k}{y_q - y_k}\right) \\ &= \frac{y_q^{pq-p}\prod_{k=1}^{q-1}\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_k)}{\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q)^{q-1}\prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)^{p}} \\ &= \frac{y_q^{pq-p}}{\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q)^{q-1}\prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)^{p}} \cdot \mathsf{D}_{(p,q-1)}(x, y[q]) \qquad (4.2) \\ &= \frac{y_q^{p+q-1}}{\prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)} \cdot \frac{y_q^{pq-2p-q+1}}{\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q)^{q-1}\prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)^{p-1}} \cdot \mathsf{D}_{(p,q-1)}(x, y[q]) \\ &= \frac{y_q^{p+q-1}}{\prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)} \cdot \frac{\mathsf{D}_{(p,q-1)}(x, y[q])}{\mathsf{T}_{(p,q)}(x, y)} \quad (\text{with } \mathsf{T}_{(p,q)}(x, y) \text{ as in } (3.20)) \end{aligned}$$

$$= \frac{y_q^{p+q-1}}{\prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)\cdot\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q)} \cdot \frac{\mathsf{D}_{(p,q)}(x,y)}{\mathsf{T}_{(p,q)}(x,y)} \tag{4.3}$$

其中，我们利用（4.1）由前面的步骤得到了（4.2）和（4.3）。

现在我们来验证，由 (3.23) 定义的双重序列 N 属于类 $\mathscr{N}$。注意，直接应用控制收敛定理即可显然得出，$\mathsf{N}_{(p,q)}$ 是关于 $p+q$ 正实变量的连续函数。此外，由于 Fubini-Study 体积在射影化酉变换下保持不变，因此显然，因子 $\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\mathrm{diag}(x,\ -y)))$ 在变量 $(x_1,\ \ldots,\ x_p)$ 的置换以及变量 $(y_1,\ \ldots,\ y_q)$ 的置换下保持不变；也就是说，它关于 x 和 y 是对称的。由于 $\mathsf{D}_{(p,q)}(x,\ y)$ 显然也具有相同的对称性，因此 $\mathsf{N}_{(p,q)}(x,\ y)$ 关于 $(x_1,\ \ldots,\ x_p)$ 和 $(y_1,\ \ldots,\ y_q)$ 也是对称的。现在我们来证明，双重序列 N 确实满足类 $\mathscr{N}$ 的三个定义条件。

4.2.1. 基条件的验证。 根据定义，条件 $\mathsf{N}_{(0,0)}(\cdot,\cdot) = 0$ 成立。为计算 $\mathsf{N}_{(1,0)}(x,\cdot)$，注意到在定义该量的公式（3.23）中，集合 $\Omega(\mathrm{diag}(x,\cdot))$ 是 $\mathbb{CP}^0$，根据定义其 Fubini-Study 体积为 1，并且 $\mathsf{D}_{(1,0)}(x,\cdot) = 1$ 作为空乘积，因此

$$\mathsf{N}_{(1,0)}(x,\cdot) = \frac{(1+0-1)!}{\pi^{1+0-1}}\cdot\mathsf{D}_{(1,0)}(x,\cdot)\cdot\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\mathrm{diag}(x,\cdot))) = 1\cdot 1\cdot 1 = 1,$$

证明完毕。

4.2.2. 对偶性的验证。 若 $p \geq 1, q = 0$，则 $\mathrm{diag}(x,\cdot)$ 为正定的，而 $\mathrm{diag}(\cdot,-x)$ 为负定的，从而 $\Omega(\mathrm{diag}(x,\cdot)) = \mathbb{CP}^{p-1}$，而 $\Omega(\mathrm{diag}(\cdot,-x)) = \varnothing$。因此

$$\mathsf{N}_{(p,0)}(x,\cdot) + \mathsf{N}_{(0,p)}(\cdot,x) = \frac{(p-1)!}{\pi^{p-1}}\mathsf{D}_{(p,0)}(x,\cdot)\cdot\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{CP}^{p-1}) + 0 = \mathsf{D}_{(p,0)}(x,\cdot),$$

利用（3.3）。现在，$p = 0, q \geq 1$ 的情形随即得到，因为 $\mathsf{D}_{(0,q)}(\cdot,y) = \mathsf{D}_{(p,0)}(x,\cdot) = 1$ 是空乘积。

现在假设 $p,q \geq 1$ 且令 $x \in \mathbb{R}^p_+, y \in \mathbb{R}^q_+$。令 $D = \mathrm{diag}(x,-y)$，于是我们得到如下不相交并表示：

$$\mathbb{CP}^{p+q-1} = \Omega(D) \sqcup \Omega(-D) \sqcup H,$$

其中 H 是超二次曲面 $\{[z] \in \mathbb{CP}^{p+q-1} : (Dz, z) = 0\}$。由于 $p,q \geq 1$，集合 H 的测度为零；计算其他集合的体积可得

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(D)) = \mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}\,\mathbb{CP}^{p+q-1} - \mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(-D)) = \frac{\pi^{p+q-1}}{(p+q-1)!} - \mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(-D)).$$

因此，根据定义 (3.23)，我们有

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}_{(p,q)}(x,y) &= \frac{(p+q-1)!}{\pi^{p+q-1}}\cdot\mathsf{D}_{(p,q)}(x,y)\cdot\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\mathrm{diag}(x,-y)) \\
&= \frac{(p+q-1)!}{\pi^{p+q-1}}\cdot\mathsf{D}_{(p,q)}(x,y)\cdot\left(\frac{\pi^{p+q-1}}{(p+q-1)!} - \mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(-D))\right) \\
&= \mathsf{D}_{(p,q)}(x,y) - \frac{(q+p-1)!}{\pi^{q+p-1}}\mathsf{D}_{(q,p)}(y,x)\,\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\mathrm{diag}(y,-x))) \\
&= \mathsf{D}_{(p,q)}(x,y) - \mathsf{N}_{(q,p)}(y,x),
\end{aligned}$$

在倒数第二个表达式中，我们使用了这一事实：$\mathsf{D}_{(q,p)}(y,\ x)\ =\mathsf{D}_{(p,q)}(x,\ y)$。这就证明了 (3.18)。

4.2.3. 递推关系的验证。 首先，令 $p\geq 1$。令 a,b 按照 (3.9) 和 (3.10) 用 x,y 定义，并令 $E_{p-1,q}(a,b)$ 如 (3.8) 所示。使用记号 $t'=(t_1,\cdots,t_{p+q-2})\in\mathbb{R}_+^{p+q-2}$，我们可以将定义改写为：

$$
\begin{aligned}
&E_{p-1,q}(a,b)\\
&=\left\{(t',t_{p+q-1})\in\mathbb{R}_+^{p+q-2}\times\mathbb{R}_+ : 0<t_{p+q-1}<\frac{1}{b_q}\left(1+\sum_{j=1}^{p-1}a_jt_j-\sum_{k=1}^{q-1}b_kt_{p+k-1}\right)\right\}\\
&=\left\{(t',t_{p+q-1})\in\mathbb{R}_+^{p+q-2}\times\mathbb{R}_+ : t_{p+q-1}<\frac{1}{b_q}\left(1+\sum_{j=1}^{p-1}a_jt_j-\sum_{k=1}^{q-1}b_kt_{p+k-1}\right)\ \text{and}\ \sum_{j=1}^{p-1}a_jt_j-\sum_{k=1}^{q-1}b_kt_{p+k-1}>-1\right\}\\
&=\left\{(t',t_{p+q-1})\in\mathbb{R}_+^{p+q-2}\times\mathbb{R}_+ : t'\in E_{p-1,q-1}(a,b[q]),\ t_{p+q-1}<A(t')\right\},\qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

其中 $A(t')=\frac{1}{b_q}\left(1+\sum_{j=1}^{p-1}a_jt_j-\sum_{k=1}^{q-1}b_kt_{p+k-1}\right)$，并且 $b[q]=(b_1,\cdots,b_{q-1})$ 如 (2.2) 所示。现在，根据 $p+q-2$ 引理 3.2（见 (3.11)），令 $s(t')=\sum t_j$:$_{j=1}$，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\text{直径}(x,-y)))\\
&=\pi^{p+q-1}\int\limits_{E_{p-1,q}(a,b)}\frac{dV(t)}{(1+s(t')+t_{p+q-1})^{p+q}}.\\
&=\pi^{p+q-1}\int\limits_{t'\in E_{p-1,q-1}(a,b[q])}\left(\int\limits_{t_{p+q-1}=0}^{A(t')}\frac{dt_{p+q-1}}{(1+s(t')+t_{p+q-1})^{p+q}}\right)dV(t'),\ \text{using (4.4)}\\
&=\frac{\pi^{p+q-1}}{p+q-1}\cdot\int\limits_{t'\in E_{p-1,q-1}(a,b[q])}\left(\frac{1}{(1+s(t'))^{p+q-1}}-\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{b_q}\right)+\sum_{j=1}^{p-1}\left(1+\frac{a_j}{b_q}\right)t_j+\sum_{k=1}^{q-1}\left(1-\frac{b_k}{b_q}\right)t_{p+k-1}\right)^{p+q-1}}\right)dV(t'),
\end{aligned}
$$

通过对变量 t_{p+q-1} 的内积分进行初等计算。因此，根据 $\mathsf{N}_{(p,q)}$ 的定义 (3.23)：

$$
\mathsf{N}_{(p,q)}(x,y)=\frac{(p+q-1)!}{\pi^{p+q-1}}\cdot\mathsf{D}_{(p,q)}(x,y)\cdot\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\mathrm{diag}(x,-y)))=\mathscr{J}-\mathscr{K},\qquad (4.5)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathscr{J}&=(p+q-2)!\cdot\mathsf{D}_{(p,q)}(x,y)\cdot\int\limits_{E_{p-1,q-1}(a,b[q])}\frac{dV(t')}{\left(1+\sum_{j=1}^{p+q-2}t_j\right)^{p+q-1}}\\
&=\frac{(p+q-2)!}{\pi^{p+q-2}}\cdot\prod_{j=1}^{p}(x_j+y_q)\cdot\mathsf{D}_{(p,q-1)}(x,y[q])\cdot\mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\mathrm{diag}(x,-y[q])))\\
&\quad\text{(using (4.1) and Lemma 3.2)}\\
&=\left(\prod_{j=1}^{p}(x_j+y_q)\right)\cdot\mathsf{N}_{(p,q-1)}(x,y[q]),\qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

and

$$\mathscr{K} = (p+q-2)! \cdot \mathsf{D}_{(p,q)}(x,y) \cdot I, \tag{4.7}$$

with

$$I = \int\limits_{E_{p-1,q-1}(a,b[q])} \frac{dV(t')}{\left(\left(1+\frac{1}{b_q}\right) + \sum\limits_{j=1}^{p-1}\left(1+\frac{a_j}{b_q}\right)t_j + \sum\limits_{k=1}^{q-1}\left(1-\frac{b_k}{b_q}\right)t_{p+k-1}\right)^{p+q-1}}.$$

$$= \left(\frac{b_q}{b_q+1}\right)^{p+q-1} \int\limits_{E_{p-1,q-1}(a,b[q])} \frac{dV(t')}{\left(1 + \sum\limits_{j=1}^{p-1}\frac{b_q+a_j}{b_q+1}t_j + \sum\limits_{k=1}^{q-1}\frac{b_q-b_k}{b_q+1}t_{p+k-1}\right)^{p+q-1}}. \tag{4.8}$$

为计算积分 I，在 $\mathbb{R}^{p+q-2}$ 中进行线性变量替换 $u = Mt$，其中M是一个（$p+q-2$）×（$p+q-2$）对角矩阵，其对角元素为

$$M_{\ell\ell} = \begin{cases} \dfrac{b_q + a_\ell}{b_q+1} & \text{for } 1 \le \ell \le p-1 \\ \dfrac{b_q - b_{\ell-p+1}}{b_q+1} & \text{for } p \le \ell \le p+q-2. \end{cases}$$

于是我们有

$$I = (4.8) = \left(\frac{b_q}{b_q+1}\right)^{p+q-1} \cdot \frac{1}{|\det M|} \cdot \int\limits_{M(E_{p-1,q-1}(a,b[q]))} \frac{dV(u)}{(1+s(u))^{p+q-1}}. \tag{4.9}$$

现在，在我们需要证明对 $\mathsf{N}_{(p,q)}$成立的递推关系 (3.19) 中，由于假设 x_j 和 y_k 为正，因此有 $a_j = x_{j+1}/x_1 > 0$，对于 $1 \le j \le p-1$, $b_k = y_k/x_1 > 0$，对于$1 \le k \le q$（参见 (3.9) 和 (3.10) 中元组 a 和 b 的定义）。此外，由于在 (3.19) 中假设 $y_1 < y_2 < \cdots < y_q$，根据 b的定义可得 $b_q - b_k = (y_q - y_k)/x_1 > 0$对于 $1 \le k \le q-1$。因此，变量变换矩阵 M 的每个对角元素 $M_{\ell\ell}$ 都严格为正，并且我们有

$$|\det M| = \prod_{\ell=1}^{p+q-2} M_{\ell\ell} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{p-1}(b_q+a_j)\prod\limits_{k=1}^{q-1}(b_q-b_k)}{(b_q+1)^{p+q-2}}. \tag{4.10}$$

为了计算 (4.9)，注意到

$$M(E_{p-1,q-1}(a,b[q])) = E_{p-1,q-1}(d,e) \tag{4.11}$$

其中，$\alpha(x,y)$ 和 $\beta(y)$ 如 (3.21) 和 (3.22) 中所述，

$$d = \frac{\alpha(x,y)[1]}{\alpha_1}, \quad \text{i.e. } d_j = \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_1}, \quad \text{for } 1 \le j \le p-1, \tag{4.12}$$

and

$$e = \frac{\beta(y)}{\alpha_1}, \quad \text{i.e. } e_k = \frac{\beta_k}{\alpha_1}, \quad \text{for } 1 \le k \le q-1. \tag{4.13}$$

为证明 (4.11)，我们首先注意到，令 $\alpha_j = \dfrac{x_j}{y_q + x_j}$代入 $1 \le j \le p$，并令 $\beta_k = \dfrac{y_k}{y_q - y_k}$代入$1 \le k \le q-1$，可得 $d_j = \dfrac{a_j}{(b_q+1)}\, b_q + a_j$ 以及 $e_k = \dfrac{b_k}{(b_q+1)}\, b_q - b_k$（回顾 (3.9) 和 (3.10)，

$a = \dfrac{x[1]}{x_1}$，$b = \dfrac{y}{x_1}$。）因此，若令 $u_j = M_{jj}t_j$ 代入 $1 \le j \le p+q-2$，

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p-1} d_j u_j - \sum_{k=1}^{q-1} e_k u_{p+k-1} &= \sum_{j=1}^{p-1} d_j \frac{b_q + a_j}{b_q + 1} t_j - \sum_{k=1}^{q-1} e_k \frac{b_q - b_k}{b_q + 1} t_{p+k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{a_j(b_q+1)}{b_q + a_j} \right) \left(\frac{b_q + a_j}{b_q + 1} \right) t_j - \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{b_k(b_q+1)}{b_q - b_k} \right) \left(\frac{b_q - b_k}{b_q + 1} \right) t_{p+k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{p-1} a_j t_j - \sum_{k=1}^{q-1} b_k t_{p+k-1}, \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

回顾式 (3.8) 中集合 $E_{p-1,q-1}(a, b[q])$ 和 $E_{p-1,q-1}(d, e)$ 的定义，现在即可得到等式 (4.11)。因此，利用 (4.10) 和 (4.11)，式 (4.8) 中的积分 I 可变换如下：

$$\begin{aligned}
I = (4.9) &= \frac{b_q^{p+q-1}}{(b_q+1)^{p+q-1}} \cdot \frac{(b_q+1)^{p+q-2}}{\prod_{j=1}^{p-1}(b_q + a_j) \prod_{k=1}^{q-1}(b_q - b_k)} \cdot \int_{E_{p-1,q-1}(d,e)} \frac{dV(u)}{(1+s(u))^{p+q-1}} \\
&= \frac{y_q^{p+q-1}}{\prod_{j=1}^{p}(y_q + x_j) \cdot \prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)} \cdot \int_{E_{p-1,q-1}(d,e)} \frac{dV(u)}{(1+s(u))^{p+q-1}} \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

其中，(4.15) 是在前一步的基础上分别代入式 (3.9) 中的 $a_j = \dfrac{x_{j+1}}{x_1}$ 和式 (3.10) 中的 $b_k = \dfrac{y_k}{x_1}$ 得到的。现在，由 (4.3) 可得

$$\mathsf{D}_{(p,q)}(x,y) = \frac{\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q) \cdot \prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)}{y_q^{p+q-1}} \cdot \mathsf{T}_{(p,q)}(x,y) \cdot \mathsf{D}_{(p,q-1)}(\alpha(x,y), \beta(y)). \qquad (4.16)$$

因此，将方程 (4.16) 和 (4.15) 的结果代入 $\mathscr{K}$，得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{K} &= (p+q-2)! \cdot \frac{\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q) \cdot \prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)}{y_q^{p+q-1}} \cdot \mathsf{T}_{(p,q)}(x,y) \cdot \mathsf{D}_{(p,q-1)}(\alpha(x,y), \beta(y)) \\
&\quad \cdot \frac{y_q^{p+q-1}}{\prod_{j=1}^{p}(y_q + x_j) \cdot \prod_{k=1}^{q-1}(y_q - y_k)} \cdot \int_{E_{p-1,q-1}(d,e)} \frac{dV(u)}{(1+s(u))^{p+q-1}} \\
&= \mathsf{T}_{(p,q)}(x,y) \cdot \frac{(p+q-2)!}{\pi^{p+q-2}} \cdot \mathsf{D}_{(p,q-1)}(\alpha(x,y), \beta(y)) \cdot \pi^{p+q-2} \cdot \int_{E_{p-1,q-1}\left(\frac{\alpha(x,y)[1]}{\alpha_1}, \frac{\beta(y)}{\alpha_1}\right)} \frac{dV(u)}{(1+s(u))^{p+q-1}} \\
&= \mathsf{T}_{(p,q)}(x,y) \cdot \frac{(p+q-2)!}{\pi^{p+q-2}} \cdot \mathsf{D}_{(p,q-1)}(\alpha(x,y), \beta(y)) \cdot \mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\mathrm{diag}(\alpha(x,y), -\beta(y)))) \qquad (4.17) \\
&= \mathsf{T}_{(p,q)}(x,y) \cdot \mathsf{N}_{(p,q-1)}(\alpha(x,y), \beta(y)), \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

其中，$\mathsf{T}^{(p,q)}(x,y)$ 与 (3.20) 中相同；在 (4.17) 中，我们使用了引理 3.2 的积分表示 (3.11)，在 (4.18) 中，我们使用了 $\mathsf{N}^{(p,q)}\cdot$ 的定义 3.23。将 (4.6) 和 (4.18) 代入 (4.5)，当 $p \geq 1$ 时，递推公式 (3.19) 即得。

为完成证明，我们验证 $p = 0, q \geq 1$ 的递推关系。于是对于 $y \in \mathbb{R}^q_+$，二次曲面域 $\Omega(\mathrm{diag}(\cdot, -y))$ 是 $\mathbb{C}^{q-1},$ 的空子集，因此

$$\mathsf{N}_{(0,q)}(\cdot, y) = \frac{(q+0-1)!}{\pi^{q+0-1}} \cdot \mathsf{D}_{(0,q)}(\cdot, y) \cdot \mathrm{Vol}_{\mathrm{FS}}(\Omega(\mathrm{diag}(\cdot, -y))) = 0,$$

注意到 $\mathsf{D}^{(0,q)}(\cdot, y) = 1$ 是一个空乘积。由此可知，在 (3.19) 中，左边为零，右边的两项也都为零。至此，递推关系的证明完成，命题 B 也随之得证。

4.3. 命题 C 的证明。 我们验证函数 $\mathsf{S}^{(p,q)}(x,y) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{C}(p,q)} s_\lambda(x) s_{\lambda^*_{p,q}}(y).$ 的类 $\mathscr{N}$ 的四个定义性质。$\mathsf{S}^{(p,q)}$ 的连续性显然，因为 $\mathsf{S}^{(p,q)}$ 是多项式；对称性也显然，因为舒尔多项式具有对称性，定义和 $\sum_{\xi \in \mathfrak{C}(p,q)} s_\xi(x) s_{\xi^*_{p,q}}(y)$ 中的每一项关于变量$x = (x_1, \ldots, x_p)$ 和 $y = (y_1, \ldots, y_q)$ 都是对称的。

4.3.1. 验证(3.17)的基条件。注意，$\mathfrak{C}(0,0)$ 是最大部分为 0 且不含任何部分的分拆的集合，因此 $\mathfrak{C}(0,0)$ 是空集。因此，$\mathsf{S}_{(0,0)} = 0$，是一个空和。

现在，$\mathfrak{C}(1,0)$ 由最大部分为 0 且至多含一个部分的分拆组成，因此 $\mathfrak{C}(1,0)$ 仅由分拆 (0) 构成，即不含非零部分的空分拆。根据定义 (1.7)，$(0)^*_{1,\ 0} = (0)$。空分拆的 Schur 多项式为 $s_{(0)} = 1$，因此

$$\mathsf{S}_{(1,0)}(x, \cdot) = \sum_{\xi \in \mathfrak{C}(1,0)} s_\xi(x) s_{\xi^*_{1,0}}(\cdot) = s_0(x) \cdot s_0(\cdot) = 1 \cdot 1 = 1,$$

验证 $\mathscr{N}$的基条件。

4.3.2. 验证对偶关系，(3.18)。我们需要以下组合引理：

引理 4.1。映射 $\lambda \mapsto \lambda^*_{q,\ p}$ 是从 $\mathfrak{C}(q,p)$ 到 $\mathfrak{B}(p,q) \setminus \mathfrak{C}(p,q)$的双射，其逆映射为 $\mu \mapsto \mu^*_{p,\ q}$.

证明。令 $f(\lambda) = \lambda^*_{q,\ p}$。令 $\lambda \in \mathfrak{C}(q,\ p)$，使得 $\lambda_1 = p$，这意味着 $\lambda'_p = \#\{j : \lambda_j \geq p\} \geq 1$。根据定义，$\lambda^*_{q,\ p}$ 的最大部分为 $(\lambda^*_{q,\ p})_1 = q - \lambda'_p \leq q - 1$。由此可得 $\lambda^*_{q,\ p} \notin \mathfrak{C}(p,\ q)$，因此 f映射到 $\mathfrak{B}(p,\ q) \setminus \mathfrak{C}(p,\ q)$。

为证明单射 性，假设对于 $\lambda,\ \nu \in \mathfrak{C}(q,\ p)$，有 $f(\lambda) = f(\nu)$。那么根据定义 (1.7) ：

$$(q - \lambda'_p, \ldots, q - \lambda'_1) = (q - \nu'_p, \ldots, q - \nu'_1).$$

比较各分量可得，对于 $k = 1, \ldots, p$，有 $\lambda'_k = \nu'_k$。由于 λ', ν'是至多含有 p 个非零部分的分拆，因此 $\lambda' = \nu'$。由于 $\lambda'' = \lambda$，我们得出 $\lambda = \nu$。因此，f是单射。

为证明满射性，设 $\mu \in \mathfrak{B}(p,\ q) \setminus \mathfrak{C}(p,\ q)$，我们要找到一个满足 $f(\lambda) = \mu$ 的 $\lambda \in \mathfrak{C}(q,\ p)$，即对 $1 \leq k \leq p$，$\lambda'_k = q - \mu_{p-k+1}$。由于分拆上的共轭运算是对合的，我们可以取 $\lambda = \nu'$，其中 $\nu_k = q - \mu_{p-k+1}.$。现在，由于 $\mu \notin \mathfrak{C}(p,\ q)$，我们有 $\mu_1 \leq q - 1$，因此 $\nu_p = q - \mu_1 \geq 1.$。于是 $\lambda_1 = \nu'_1 = \#\{j : \nu_j \geq 1\} = p$，这说明 $\lambda \in \mathfrak{C}(q,\ p)$。因此，映射 f 是一个双射。

为求出 f 的逆映射，令 $\mu = f(\lambda)$，即 $\mu_j = q - \lambda_{p-j+1}$ 对于 $1 \leq j \leq p$。由此可得 $\lambda'_\ell = q - \mu_{p-\ell+1}$, $1 \leq \ell \leq p$。由于共轭映射 $\lambda \mapsto \lambda'$ 是其自身的逆映射，我们有

$$\lambda_k = \#\{1 \leq \ell \leq p : \lambda'_\ell \geq k\} = \#\{1 \leq \ell \leq p : q - \mu_{p-\ell+1} \geq k\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \#\{1 \le \ell \le p : \mu_\ell \le q-k\} \\
&= p - \#\{1 \le \ell \le p : \mu_\ell \ge q-k+1\} \\
&= p - \mu'_{q-k+1},
\end{aligned}
$$

即 $\lambda = \mu^*_{p,\ q}$. □

利用引理 4.1，我们有

$$
\mathsf{S}_{(q,p)}(y,x) = \sum_{\eta \in \mathfrak{C}(q,p)} s_\eta(y) s_{\eta^*_{q,p}}(x) = \sum_{\mu \in \mathfrak{B}(p,q)\setminus\mathfrak{C}(p,q)} s_\xi(x) s_{\xi^*_{p,q}}(y),
$$

其中在最后一步中，我们令 $\xi = \eta^*_{q,\ p}$。因此

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}_{(p,q)}(x,y) + \mathsf{S}_{(q,p)}(y,x) &= \sum_{\xi \in \mathfrak{C}(p,q)} s_\xi(x) s_{\xi^*_{p,q}}(y) + \sum_{\xi \in \mathfrak{B}(p,q)\setminus\mathfrak{C}(p,q)} s_\xi(x) s_{\xi^*_{p,q}}(y) = \sum_{\xi \in \mathfrak{B}(p,q)} s_\xi(x) s_{\xi^*_{p,q}}(y) \\
&= \mathsf{D}_{(p,q)}(x,y), \quad \text{by (2.1)},
\end{aligned}
$$

从而完成了对偶条件的验证。

4.3.3. 递推关系的验证，(3.19)。我们要证明 S 满足 (3.19)，即

$$
\mathsf{S}_{(p,q)}(x,y) = \underbrace{\left(\prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q)\right) \cdot \mathsf{S}_{(p,q-1)}(x, y[q])}_{G} - \underbrace{\mathsf{T}_{(p,q)}(x,y) \cdot \mathsf{S}_{(p,q-1)}(\alpha(x,y), \beta(y))}_{H}. \tag{4.19}
$$

首先假设 $p \ge 1$。利用命题 2.1（见 (2.3)），我们有

$$
\begin{aligned}
G &= \sum_{\ell=1}^{p} \frac{x_\ell^{p+q-2}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq\ell}}^{p}(x_\ell - x_k)} \prod_{j=1}^{p}(x_j + y_q) \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell], y[q]) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} \frac{x_\ell^{p+q-2}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq\ell}}^{p}(x_\ell - x_k)} \cdot (x_\ell + y_q) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{p}(x_j + y_q) \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell], y[q]) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} \frac{x_\ell^{p+q-2}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq\ell}}^{p}(x_\ell - x_k)} (x_\ell + y_q) \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) \quad (\text{Using (4.1)}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} x_\ell^{p+q-2} \cdot \frac{(x_\ell + y_q)}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{p}(x_\ell - x_k)} \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y).
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

在继续化简 H之前，请注意，由 (3.21) 可得

$$
\begin{aligned}
\alpha(x,y)[\ell] &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell-1}, \alpha_{\ell+1}, \ldots, \alpha_p) \\
&= \left(\frac{x_1}{y_q + x_1}, \ldots, \frac{x_{\ell-1}}{y_q + x_{\ell-1}}, \frac{x_{\ell+1}}{y_q + x_{\ell+1}}, \ldots, \frac{x_p}{y_q + x_p}\right) \\
&= \alpha(x[\ell], y).
\end{aligned}
$$

因此，由 (4.2) 可知，对每个 ℓ:

$$
\mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(\alpha(x,y)[\ell], \beta(y)) = \mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(\alpha(x[\ell], y), \beta(y))
$$

$$= \frac{y_q^{pq-p-q+1}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{p}(x_j+y_q)^{q-1}\prod_{k=1}^{q-1}(y_q-y_k)^{p-1}} \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell],y[q]). \tag{4.21}$$

因此

$$\begin{aligned}
H &= \mathsf{T}_{(p,q)}(x,y)\cdot\sum_{\ell=1}^{p}\frac{\alpha_\ell^{p+q-2}}{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{p}(\alpha_\ell-\alpha_k)}\mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(\alpha(x,y)[\ell],\beta(y))\\
&= \mathsf{T}_{(p,q)}(x,y)\sum_{\ell=1}^{p}\frac{\alpha_\ell^{p+q-2}}{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{p}(\alpha_\ell-\alpha_k)}\cdot\frac{y_q^{pq-p-q+1}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{p}(x_j+y_q)^{q-1}\prod_{k=1}^{q-1}(y_q-y_k)^{p-1}}\cdot\mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell]\ y[q])\\
&\quad \text{(Using (4.21))}\\
&= y_q^p\cdot\prod_{j=1}^{p}(x_j+y_q)^{q-1}\sum_{\ell=1}^{p}\frac{\alpha_\ell^{p+q-2}}{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{p}(\alpha_\ell-\alpha_k)}\cdot\frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{p}(x_j+y_q)^{q-1}}\cdot\mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell],y[q])\\
&= y_q^p\sum_{\ell=1}^{p}\frac{\alpha_\ell^{p+q-2}}{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{p}(\alpha_\ell-\alpha_k)}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{p}(x_j+y_q)^{q-1}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{p}(x_j+y_q)^{q-1}}\cdot\mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell],y[q])\\
&= y_q^p\sum_{\ell=1}^{p}\left(\frac{x_\ell}{x_\ell+y_q}\right)^{p+q-2}\cdot\frac{(x_\ell+y_q)^{q-1}}{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{p}(\alpha_\ell-\alpha_k)}\cdot\mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell],y[q])\\
&= y_q^p\sum_{\ell=1}^{p}\frac{x_\ell^{p+q-2}}{(x_\ell+y_q)^{p+q-2}}\cdot(x_\ell+y_q)^{q-1}\frac{1}{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{p}\left(\frac{x_\ell}{x_\ell+y_q}-\frac{x_k}{x_k+y_q}\right)}\cdot\mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell],y[q])\\
&\quad \text{(Recall } \alpha_j=\frac{x_j}{x_j+y_q} \text{ from (3.21))}\\
&= y_q^p\sum_{\ell=1}^{p}\frac{x_\ell^{p+q-2}}{(x_\ell+y_q)^{p-1}}\cdot\frac{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{p}((x_\ell+y_q)(x_k+y_q))}{y_q^{p-1}\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{p}(x_\ell-x_k)}\cdot\mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell],y[q])\\
&= y_q\sum_{\ell=1}^{p}\frac{x_\ell^{p+q-2}}{(x_\ell+y_q)^{p-1}}\cdot\frac{(x_\ell+y_q)^{p-1}\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{p}(x_k+y_q)}{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{p}(x_\ell-x_k)}\cdot\mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell],y[q])
\end{aligned}$$

$$= y_q \sum_{\ell=1}^{p} x_\ell^{p+q-2} \cdot \frac{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{p}(x_k+y_q)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{p}(x_\ell-x_k)} \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell], y[q]). \tag{4.22}$$

因此，我们有 $G - H =$ (4.20) $-$ (4.22) $=$

$$\sum_{\ell=1}^{p} x_\ell^{p+q-2} \cdot \frac{(x_\ell+y_q)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{p}(x_\ell-x_k)} \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) - y_q \sum_{\ell=1}^{p} \frac{x_\ell^{p+q-2}\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{p}(x_k+y_q)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{p}(x_\ell-x_k)} \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell], y[q])$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \frac{x_\ell^{p+q-2}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{p}(x_\ell-x_k)} \left[(x_\ell+y_q) \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) - y_q \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{p}(x_k+y_q) \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q-1)}(x[\ell], y[q]) \right]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \frac{x_\ell^{p+q-2}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{p}(x_\ell-x_k)} \left[(x_\ell+y_q) \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) - y_q \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) \right] \quad \text{Using (4.1)}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \frac{x_\ell^{p+q-2}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{p}(x_\ell-x_k)} \cdot x_\ell \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \frac{x_\ell^{p+q-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{p}(x_\ell-x_k)} \cdot \mathsf{D}_{(p-1,q)}(x[\ell], y) = \mathsf{S}_{(p,q)}(x, y) \quad \text{using Proposition 2.1.}$$

我们仍需验证上述计算未涵盖的情形 $p = 0$ 下的递推关系。在这种情况下，定义 $\mathsf{S}_{0,q}$ 的求和为空，因为集合 $\mathfrak{C}(0, q)$（不含任何部分且最大部分等于 q 的分拆）为空，因此我们有 $\mathsf{S}^{(0,q)}(\cdot, y) = 0$. 另一方面，递推关系的右边为

$$\left(\prod_{j=1}^{0}(x_j+y_q)\right) \cdot \mathsf{S}_{(0,q-1)}(\cdot, y[q]) - \mathsf{T}_{(0,q)}(\cdot, y) \cdot \mathsf{S}_{(0,q)}(\cdot, \beta(y)) = 1 \cdot 0 - \mathsf{T}_{(0,q)}(\cdot, y) \cdot 0 = 0,$$

再利用一次 $\mathsf{S}^{(0,q)}(\cdot, y) = 0$ 这一事实。

参考文献

[Arc02] 阿基米德。《阿基米德全集》。多佛出版社，纽约州米尼奥拉，2002年。重印1897年版及1912年补编，由T. L. 希思编。[BER99] M. Salah Baouendi、Peter Ebenfelt和Linda Preiss Rothschild。《复空间中的实子流形及其映射》，普林斯顿数学丛书第47卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1999年。[Bog91] Albert Boggess。《CR流形与切向柯西–黎曼复形》。高等数学研究。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，1991年。[Car50] ´E. Cartan。《复射影几何课程》。Gauthier-Villars，巴黎，1950年。第2版。

_[CHR24] Debraj Chakrabarti、Phillip S. Harrington和Andrew Raich。2024年， $z(q)$-域上的 ∂问题。[Egg19] Eric S. Egge。《对称函数及其组合学导论》，学生数学图书馆第91卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯， [2019] ©2019。[Ful97] William Fulton。《杨氏图表》，伦敦数学学会学生文本第35卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997年。附有关于表示论和几何学的应用。[GH78] Phillip Griffiths和Joseph Harris。《代数几何原理》。纯粹与应用数学。Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 纽约，1978年。[Gra04] Alfred Gray。《管状体》，数学进展第221卷。Birkhäuser出版社，巴塞尔，第2版，2004年。附有Vicente Miquel撰写的序言。[KN96] Shoshichi Kobayashi和Katsumi Nomizu。《微分几何基础》。第II卷。Wiley经典图书馆。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1996年。重印1969年原版，Wiley-Interscience出版物。[Mac15] I. G. Macdonald。《对称函数与霍尔多项式》。牛津物理科学经典文本。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，第2版，2015年。A. V. Zelevinsky撰写补充内容，Richard Stanley撰写序言。重印2008年平装版 [MR1354144]。[Mum95] David Mumford。《代数几何》。第I卷。数学经典。施普林格出版社，柏林，1995年。复射影簇，重印1976年版。[Rud08] Walter Rudin。《单位球中的函数论》， $\mathbb{C}^n$。数学经典。施普林格出版社，柏林，1980年版，2008年。[WS12] Matthias J. Weber和Hans-Peter Schr¨ocker。椭圆平面中的最小面积圆锥曲线。《Adv. Geom.》，12(4):665–684，2012年。

数学系，中密歇根大学，密歇根州芒特普莱森特，MI 48859，美国电子邮箱地址：baner1j@cmich.edu电子邮箱地址：chakr2d@cmich.edu网址：https://people.se.cmich.edu/chakr2d/电子邮箱地址：maink1m@cmich.edu