两党空间竞争中的对称性破缺、滞后现象与向选民均值收敛

Daniel Miranda Machado[a], Roberto Venegeroles[a,*]

[a]*ABC*联邦大学数学、计算与认知中心，巴西圣保罗州圣安德烈市 *Estados* 大道 *5001* 号，邮编 *09280-560*

arXiv:2601.07108v1 [physics.soc-ph] 12 Jan 2026

摘要

经典的两党竞争空间模型通常预测政党将趋同于中位选民，但现实中的政党体系往往呈现持续且非对称的极化。我们构建了一个两党竞争空间模型，其中选民通过一般的满意度函数评价政党，而宽度参数 q 刻画选民对意识形态距离的容忍程度。该参数决定向心激励与离心激励之间的平衡，并作为支配均衡构型的分岔参数。在温和的正则性假设下，我们通过中心—距离坐标刻画纳什均衡，该坐标将内生政治中心与极化区分开来。当选民密度对称时，约化后的均衡条件在临界值q_c处呈现一般的超临界叉形分岔。在q_c以上，唯一的稳定均衡表现为趋同于中心，从而重现经典的中位选民结论；而在该值以下，则出现两个对称极化均衡。选民分布的非对称性会使叉形分岔展开，导致内生中心漂移并产生非对称极化均衡。由此形成的均衡图具有S形几何结构，会引发滞后现象，使极化即使在容忍度恢复到对称环境下足以支持趋同的水平后仍能持续存在。在高容忍度区域，我们证明，唯一的非极化均衡会趋同于选民分布的均值，而只有在对称情况下才会恢复中位数。因此，与趋同于中位数具有普遍性的霍特林–唐斯模型不同，在这里，中位选民只是一个渐近基准，而非稳健的预测。

关键词：空 间选举竞争、纳什均衡、极化、中位选民、分岔、满意化 g
行为

1. 引言

空间模型长期以来为分析经济主体和政治行为者之间的竞争提供了统一框架。空间模型源于霍特林对产业组织的开创性贡献 [1], ，它通过抽象特征空间中选定的位置来描述策略互动。在其经典的1929年论文中，霍特林指出，在竞争线性市场中提供水平差异化产品的企业，在均衡时往往会向中心移动，这一现象如今被称为最小差异化原则。这一洞见表明，即便企业拥有相同的成本函数并面临相同的竞争激励，基础空间的几何结构仍会影响竞争结果。

后来，唐斯 [2], 将空间视角拓展到政治竞争领域。他在1957年的模型中提出，选民会选择政策立场最接近自身理想点的政党或候选人。在这一情境下，政党追求的是最大化得票份额，而非利润，但策略定位的逻辑在结构上仍然

*通讯作者电子邮箱：daniel.miranda@ufabc.edu.br (DanielMiranda Machado), roberto.venegeroles@ufabc.edu.br (Roberto Venegeroles)网址：https://danielmiranda.prof.ufabc.edu.br/ (Daniel Miranda Machado)

与霍特林框架相似。唐斯的表述催生了经典中位选民预测：根据这一预测，在选民偏好和政策空间满足适当正则性条件时，选票最大化政党会向选举中位点收敛。

尽管经典空间模型预测政党会趋同于中位选民，但政治精英在现实中的行为往往明显且持续地偏离这一理想化情形。这表明，经典框架所强调的向心激励仅反映了战略环境的一部分。若干离心力能够维持政策分离。政党领导人必须考虑积极分子和核心支持者的动员与参与，而这些群体的理想点可能远离政治中心 [3, 4]。候选人的意识形态流动性也受到限制，因为他们的选择会受既有承诺和声誉顾虑所制约 [5, 6, 7, 8]。这些因素意味着，政党往往必须在向中心靠拢与维持对组织存续能力至关重要的群体支持之间权衡。

本文旨在研究一种两党选举竞争的空间模型，以刻画向中心趋同与背离中心之间的战略张力。该模型基于两党的通用选民满意度函数，并引入一个关键参数，用以衡量选民对意识形态立场与自身不同的候选人的容忍程度。该参数在塑造战略格局中向心力与离心力的平衡方面发挥核心作用。从数学上看，它是一个分岔参数，决定政党在意识形态空间中的均衡位置，使模型既能产生靠近中心的结果，也能产生持续的意识形态分离，二者均可作为均衡结果。

近期对这一建模框架的应用凸显了其在不同实证和理论背景下的潜力。在 [9], 中，作者考察了该模型的一个一维动力学版本，采用高斯设定来描述选民满意度，并将其应用于美国立法者的历史数据，以估计选民容忍度并追踪政党位置随时间的演变。在 [10], 中，模型被扩展到多维意识形态空间，并采用多元高斯设定，由此得出解析条件，说明政党何时会向中心收敛，何时会选择远离中心的位置。在这一框架中，意识形态空间的有效维数成为决定政党分化程度的核心理论因素，从数学上解释了意识形态维数的变化如何塑造党派极化模式。

本文针对一维意识形态空间构建了一个抽象的解析框架，该框架适用于广泛的一类满意化核和选民密度，而非局限于某种特定函数形式。其次，在这一框架下，我们刻画了随着选民容忍度变化而支配局部均衡结构的结构项。第三，我们推导出可验证的条件，以确保叉形分岔的发生，并给出滞后现象的显式示例。最后，我们分析高容忍度情形（$q \to \infty$），并表明该博弈存在唯一的非极化均衡；在非对称情形下，该均衡收敛于选民分布的均值，而当选民密度对称时，则收敛于中位数（此时中位数与均值重合）。由此，我们将均衡分支的几何形态与选民满意度及其分布的经济学意义特征联系起来。

本文结构如下。第2节介绍满意化空间模型、中心—距离坐标，以及分析所依据的基本假设。第3节展示主要的均衡构型和分岔情景，区分对称与非对称选民分布，并概述由此产生的均衡的定性结构。第4节展开一般性的分岔分析，并证明一般情形下的结论；第5节则证明在高容忍度极限下向均值收敛。第6节通过一个高斯混合示例说明非对称性和滞后现象的影响。第7节将理论框架具体应用于对称基准，推导出分岔系数的显式积分公式，并在第8节将这些公式应用于高斯分布和柯西分布的设定。第9节总结全文。

2. 模型

我们假设选民沿着实数轴上的左右光谱分布，并将其称为意识形态空间。我们考虑一个两党制，政党以$i \in \{1, 2\}$为索引。每个i政党都在意识形态空间中选择一个位置u_i，我们用$j \neq i$表示其对手。方便起见，我们还将一对一般的政党位置写作$(u,v) = (u_1,u_2)$。在美国选举中，光谱的左侧通常与自由主义倾向相关，而右侧则与保守主义倾向相关。因此，选民或政党与该光谱中心的距离，体现了其自由主义或保守主义的程度，使我们能够将其位置解读为意识形态强度的衡量指标。

位置为$x \in \mathbb{R}$ 的选民以概率s_i（x,u_i）对政党i感到满意。以下假设规定了我们对该函数所施加的结构：

假设1。 我们假设，选民对位于i 位置u_i 的政党的满意度由函数$s_i(x,u_i)$给出，并满足：

(a) 空间结构：$s_i(x,u_i)$仅取决于意识形态距离 $|x - u_i|$，且连续并严格单峰，在$x = u_i$处取得唯一的全局最大值，并满足$s_i(x,u_i) \to 0$ 当$x - u_i| \to \infty$时。(b) 函数形式：存在严格单峰函数f：$\mathbb{R}_+ \to [0,1]$，其全局最大值为$f(0) = 1$，以及宽度参数$q > 0$，使得

$$s_i(x,u_i) = f_q(|x-u_i|), \qquad f_q(t) = f(t/q).$$

(c) 光滑性：函数f 满足

$$f \in C^4(\mathbb{R}_+), \qquad f'(0) = 0, \quad f''(0) < 0, \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

(d) 可积性：函数f的导数满足

$$f',\ f'',\ f^{(3)},\ f^{(4)} \in L^1(0,\infty), \qquad f' \in L^2(0,\infty).$$

备注1。 宽度参数 q 在模型中发挥着两个互补的作用。在行为层面，它衡量选民对远离自身意识形态立场的政党的容忍程度：q 值越大，政党吸引力越广，或者说政党在意识形态空间中的“包容性”越强。从动力学视角来看，我们稍后将看到，q 还充当分岔参数，决定政党位置战略配置的定性变化。

备注2。 我们的分析聚焦于双方地位平等的政党竞争，因此假设选民对各政党的满意度可由同一函数 f 和共同的宽度参数 q 表示，双方仅在各自选择的意识形态立场 u_i 上有所不同。尽管如此，该模型也能轻松适用于异质性设定：在不改变其整体结构的情况下，允许各政党使用特定的函数 f_i 和宽度参数 q_i 。

备注3。 该模型还可扩展至多维意识形态空间中的选举竞争，其中参数矩阵共同发挥核心作用，可用于开展分岔分析，或有助于阐明政党极化日益加剧的现象；参见 *[10]*。

当两位候选人展开竞争时，位于x 处的选民投票给政党i 而非竞争对手j 的概率遵循以下划分规则（例如， [9]）：

$$p_i(x \mid u_i,u_j) = s_i(x,u_i)[1 - s_j(x,u_j)] + \tfrac{1}{2}\, s_i(x,u_i)s_j(x,u_j), \tag{1}$$

其中，右侧第一项表示位于x 处且只对政党i满意的选民预期份额，第二项则表示对两个政党都满意的选民由双方均分的份额。根据假设1(b)，对各政党的满意度是独立评估的：由于$s_i(x, u_i)$ 和 $s_j(x, u_j)$ 仅取决于各政党与选民的接近程度，因此，对一个政党满意与否不会对另一个政党产生因果影响。因此，对i 满意但对j 不满意的联合概率可分解为$s_i(1 - s_j)$。显然，也有一定概率，即 $(1 - s_i)(1 - s_j)$，使得部分选民对两个政党都不满意，因此选择弃权。

令 $\rho(x)$表示意识形态空间 $\mathbb{R}$中选民的密度。我们对该密度施加以下正则性条件：

假设 2。 我们假设 $\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$， $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$，并且 ρ 是连续的。

因此，政党i 的预期得票份额为

$$V_i(u_i,u_j) = \int_{\mathbb{R}} p_i(x \mid u_i,u_j)\,\rho(x)\,dx. \tag{2}$$

由于满意度取决于宽度参数q，我们将这种依赖关系明确表示出来，并将目标泛函V_i写成对称的一对（用（u，v）表示政党 1 和政党 2 的位置）：

$$\begin{aligned} V_{1,q}(u,v) &= \int_{\mathbb{R}} \Big[f_q(|x-u|) - \tfrac{1}{2} f_q(|x-u|) f_q(|x-v|) \Big] \rho(x)\, dx, \\ V_{2,q}(u,v) &= V_{1,q}(v,u), \end{aligned} \tag{3}$$

反映了相同的满意化核和标签对称性。以下假设确立了政党竞争的战略性质：

假设 3. 每个政党i都会策略性地选择其意识形态立场$u_i \in \mathbb{R}$，以最大化其预期得票份额$V_{i,\,q}(u_i, u_j)$。形式化地说，

$$u_i \in \arg\max_{u \in \mathbb{R}} V_{i,q}(u, u_j). \tag{4}$$

备注 *4.* 假设 *2* 中对选民密度 ρ 施加的条件，确保预期得票份额在数学上定义良好，且假设 *3* 中的最大化问题适定。事实上，对于所有 $(u_i, u_j) \in \mathbb{R}^2$，函数 $x \mapsto p_i(x \mid u_i, u_j)\,\rho(x)$ 都是可积的，因此 $V_{i,q}(u_i, u_j)$ 有限，且关于 u_i 连续，并且控制收敛定理适用。此外，当 $|u| \to \infty$ 时，$V_{i,q}(u, u_j) \to 0$，因此对于每个固定的 u_j，映射 $u \mapsto V_{i,q}(u, u_j)$ 在 $\mathbb{R}$ 上取得最大值，正如假设 *3* 所要求的。

这一选举博弈的策略性与参数 q 如何塑造意识形态接近度与满意化之间的权衡密切相关。当 q 较大时，该博弈在内生政治中心存在唯一的局部稳定纳什均衡。然而，当q低于临界阈值 q_c时，超临界叉形分岔会产生两个稳定的非对角均衡。因此，q 的变化会将单一的寻求共识的格局转变为围绕相互竞争的极化立场展开的协调问题。

3. 主要结果

本节始终假设满意化核 f 和选民密度 ρ 满足假设1–3。详细的陈述和证明见第 4 节和第 7 节；此处我们总结均衡结构。

为分析两党博弈的均衡构型，我们考察与得票份额最大化相关的一阶条件。将原始政党位置写作 $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$（或等价地写作（u，v）），引入变量替换会更加方便

$$m := \frac{u_1 + u_2}{2}, \qquad d := \frac{u_1 - u_2}{2}. \tag{5}$$

这一变换将策略互动解耦为两个几何要素：政党体系的意识形态中点（m）和其极化程度（$2d$）。在这种表示中，m 是政党体系的意识形态重心，而 $2d$ 是政党之间的意识形态距离，见图 1。因此，这种分解将问题拆分为：竞争发生在哪里（m），以及差异化的程度如何（d）。

参数 q 表示选民容忍度。随着 q 从较高值开始下降，均衡集合会经历一个转变：从内生中心的共址转为极化，而这一转变发生在其低于临界值 q_c时。我们通过将政党位置分解为中点m 和极化半距离d来分析这一转变，定义见公式（5）。

3.1. 对称情形下的均衡

我们首先考虑基准情形，即选民密度 ρ 关于原点对称。这种对称性将政治中心固定在 $m = 0$，并将均衡条件简化为关于极化距离 d 的一维问题：二维一阶方程组归结为如下形式的标量方程

$$\Psi_q(d) = 0,$$

其中，Ψ_q 是d 的奇函数，而q 被视为一个参数。在此设定下，且满足假设1–3时，约化方程 $\Psi_q(d) = 0$ 在 $q = q_c$处发生超临界叉形分岔，从而形成如下典型的均衡模式：

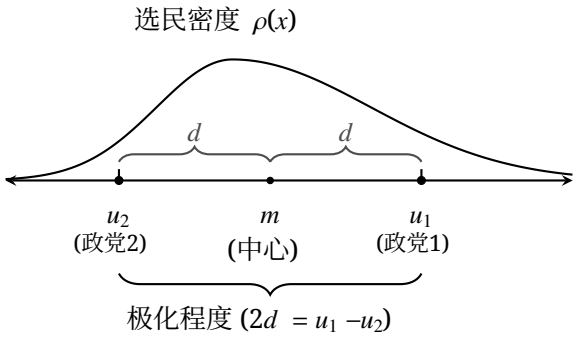


图1：中心—距离坐标的几何解释。该示意图展示了公式（5）中定义的变量替换，其中政党位置 u_1 和u_2 用系统中心$m = (u_1 + u_2)/2$ 和半距离$d = (u_1 - u_2)/2$ 表示。参数d 在分岔分析中为极化程度提供了一个自然的度量。

- 收敛区间 $(q > q_c)$。在原点的邻域内，唯一的局部稳定均衡是中间派配置

$$(m, d) = (0, 0),$$

对应于两个政党都位于同一点$u_1 = u_2 = 0$的情形。在这一参数区间内，模型重现了经典的中位选民定理。

- 分歧区间 $(q < q_c)$。随着q 减小并低于q_c，中间派均衡失去局部稳定性，系统发生分岔，形成两个稳定且对称的极化均衡；也就是说，

$$(m, d) = (0, \pm d^*(q)), \qquad d^*(q) > 0,$$

对应于政党位置$u_1 = -u_2 = d^*(q)$。

- 分岔点 q_c。临界阈值q_c 由以下积分方程的根确定：

$$\int_0^\infty \left[f''(t)\left(1 - \tfrac{1}{2} f(t)\right) + \tfrac{1}{2}(f'(t))^2 \right] \rho(q_c t)\, dt = 0.$$

在q_c 处的其他横截性条件和非退化条件将在第7节讨论；然而，违反这些条件并不具有一般性，因为这要求在同一个q_c处，另外两个独立积分方程同时不为零。

这些结果凸显了在对称情形下，满意化框架如何偏离经典的霍特林–唐斯模型。当容忍度较高时，政党的行为符合经典理论，聚集在意识形态空间的原点。然而，当容忍度较低时，即使选民群体不存在任何结构性非对称性，局部稳定的极化也会内生涌现。因此，中位选民定理并非作为普遍预测得到恢复，而是作为取决于选民容忍度的特定情形结果。

3.2. 非对称情形下的均衡

现实世界中的选民分布不一定具有对称性，因此我们接下来将分析扩展到一般密度函数 ρ。在这种情况下，非对称性充当一种几何缺陷，使对称叉形分岔展开，从而产生性质不同的局部均衡结构。

设 (f, ρ) 满足假设1–3，并假设 ρ 不具有对称性。那么，一般而言，存在临界容忍度水平 $0 < q^- < q^+$，如图2所示，使得两党博弈的均衡集合在 $[q^-、q^+]$ 的邻域内具有以下性质：

- 中心漂移。 不存在固定的外生“中心”：我们将$m_0(q)$理解为由均衡选出的内生政治中心。在对称情形下，它与唯一中位选民重合，但一般而言，它不必等于 ρ的中位数。中点$m_0(q)$由内生因素决定，并随q平滑变化；特别是，当q 接近q^+ 时，存在一个唯一的局部稳定均衡，其位置(m,d)接近$(m_0(q),0)$。

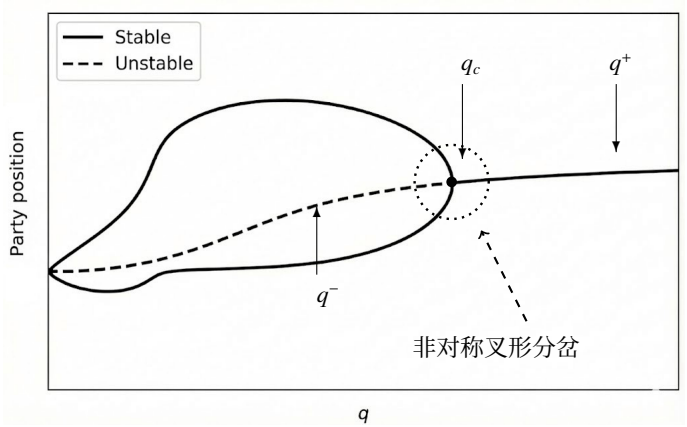


图 2：分岔图　　展示叉形分岔的非对称展开及由此导致的内生中心漂移
取值q^- 和q　　$^+$ 界定了近中心均衡与极化均衡共存的参数范围。

• 局部非对称叉形分岔。 当$q > q^+$ 时，在$(m_0(q),0)$附近存在唯一的局部稳定均衡。随着q减小并越过q^+，会出现另外两个均衡，因此当$q^- < q < q^+$ 时，附近存在三条分支：两个局部稳定的极化均衡和一个中间不稳定均衡。从近中心分支向极化分支的转变通过局部叉形分岔发生；在这一过程中，两个政党都远离内生中心$m_0(q)$，但移动到不对称的位置$(u_1(q),u_2(q<\/style))$，且

$$u_1(q) - m_0(q) \neq -(u_2(q) - m_0(q)).$$

因此，这一结果意味着，在非对称选民分布中，两个政党都会在q的同一临界点同时走向极化，但由此产生的均衡本身是不对称的。一个政党仍然更靠近内生中心，而另一个则被推向一个更加极端的利基。由此，选民分布的结构特征与容忍度水平相互作用，共同决定哪个政党会成为更极端的一极，以及这种非对称极化会持续多久。

3.3. 高容忍度极限：趋同于均值

在假设1–3、分岔分析中采用的一般性假设，以及附加正则性条件 $f'' \in L^1(0,\infty) \cap L^\infty(0,\infty)$ 下，存在 $Q > 0$，使得对于每个 $q \geq Q$，两党博弈都存在唯一的纳什均衡，且该均衡不存在极化：两个政党选择相同的政纲，记为

$$(u_1(q), u_2(q)) = (m_0(q), m_0(q)).$$

Th均衡位置 $m_0(q)$ 可刻画为一阶条件的唯一中间派解　　n

$$F_q^+(m_0(q), 0) = 0,$$

且随q平滑变化。

随着容忍度增加，中间派均衡 $m_0(q)$ 趋同于一个简单的分布性“中心”概念。当选民密度 ρ 不对称时，q 趋于高容忍度极限下，$m_0(q)$ 由 ρ的均值 给出。然而，在对称情形下，对于所有$q > q_c$，均衡中心都固定在原点，因此极限结论变得平凡：均值、中位数和均衡中点彼此重合。因此，经典的中位选民预测只有在对称情形且容忍度足够大时才得以恢复。相较之下，在非对称情形下，中位数通常不是均衡位置，而满意化框架在高q 极限下选择均值而非中位数作为相关吸引子。

这与经典的霍特林–唐斯模型形成对比：在该模型中，无论分布形态如何，也无论选民容忍度高低，政党都被迫恰好趋同于中位选民。相比之下，在满意化框架中，趋同于中位数并非结构上必然发生：只有在分布对称且

容忍度足够高时才会出现；容忍度一旦低于临界阈值q_c，这种趋同便不再发生。因此，对于容忍度极高的选民（或包容性政党）而言，中位选民在此充当渐近基准，而非均衡的可靠预测指标

3.4. 滞后现象

对称叉形分岔保证了趋同与极化之间可逆的转变，而非对称展开则从定性上改变了这一图景。在 (q,d) 平面上，均衡集合可能呈现 S形结构，由两条稳定分支和其间的一条不稳定分支构成。正是这种 S形几何结构构成了滞后现象的基础。

一种清晰呈现这一机制的便捷方法，是将坐标$u(t)$ 的演化视为在每个固定容忍度水平q下的类梯度过程：

$$\dot{u} = -M(u;q,d)\,\partial_u V(u;q,d), \tag{6}$$

其中，$M(u;q,d) > 0$是一个任意的迁移率函数，它会重新缩放时间，但不会影响均衡的位置或稳定性。对于每个固定的 (q,d)，均衡恰好是势函数的临界点，

$$\partial_u V(u;q,d) = 0,$$

其中，d 由均衡约束隐式确定，因此动力学实际上是一维的；局部稳定性对应于局部极小性（等价地，$\partial_{uu}V(u;q,d) > 0$）。从这个意义上说，“选择规则”内嵌于动力学之中：轨迹被吸引至稳定临界点，并被不稳定临界点排斥。

我们称模型关于容忍度q 表现出滞后现象，如果长期响应$u(t)$并非仅由$q(t)$的瞬时值决定，而是取决于q的历史。等价地，存在一条容忍度$q(t)$的循环路径，使得曲线

$$\{(q(t),u(t)) : t \in [0,T]\}$$

在（q，u）平面上形成一个非平凡的闭环。

在当前模型中，随着q减小，轨迹最初沿着稳定的中间派均衡演化。在某个临界值处，中间派均衡失去稳定性，但系统会出现分岔延迟：由于分岔延迟，轨迹会短暂沿着此时已不稳定的中间派分支演化，该分支构成 S 形均衡曲线的中间部分。这种短暂的跟随反映了q缓慢变化时的经典分岔延迟，而非真正的稳定性；应将其视为一种动力学效应，而不是均衡结果。当该不稳定分支与一个稳定的非中间派分支合并时，轨迹会被迫离开中间派曲线，并落入极化均衡。

如果之后恢复容忍度，极化并不会立即消失。相反，系统会继续停留在极化分支上，直到越过反向分岔。

从政治角度看，这种滞后现象机制体现了一种政治惰性。一旦极化形成，仅仅将容忍度恢复到先前足以确保趋同的水平，可能已不足以使其恢复。因此，即使潜在的社会条件有所改善，过去的不对称性仍可能在政治结果中留下持久的印记。与转变平滑且可逆的对称情形相比，非对称展开会造成依赖历史的转变，使极化更容易被触发，却更难消除。

3.5. 显式示例

我们严格刻画了随着容忍度参数q 变化而决定局部分岔结构的有效线性系数和三次系数。具体而言，我们计算临界阈值q_c，并在若干显式示例中确定分岔的性质；相应的推导见第6节和第8节。在这些假设下，以下结果成立：

- 高斯核，高斯密度。当满意化核和选民密度均为高斯分布时——具体而言，$f(x) = e^{-x^2/2}$ 且 $\rho(x) \propto e^{-x^2/2}$——约化方程在 $q_c \approx 0.8074$ 处呈现超临界叉形分岔。当 $q < q_c$ 时，两个极化均衡从对称均衡连续产生，因此薄尾偏好分布与渐进式极化相关（见图6a）。

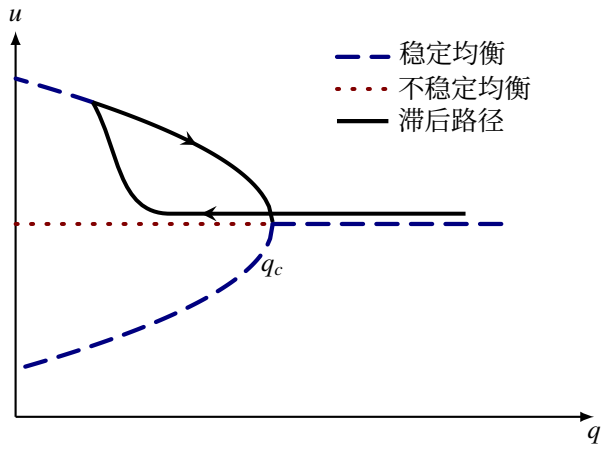


图3：非对称超临界叉形分岔与滞后现象：在超临界区间内，大振幅极化均衡的折叠分岔会形成一条滞后回线。红色虚线分支表示不稳定均衡，藏青色分支对应局部稳定均衡，绿色箭头表示在容忍度缓慢变化时所遵循的滞后轨迹。注：纵轴表示均衡位置u（其作为极化程度的代理变量）。

- 柯西核，高斯或柯西密度。当满意化核为柯西核，即 $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ 时，且选民密度 $\rho(x)$ 为高斯密度或柯西密度时，约化方程在明确给出的临界值 $q_c \approx 0.9753$（高斯密度）和 $q_c \approx 0.9068$（柯西密度）处呈现叉形分岔；见图6b。

- 非对称双群体高斯选民群体。如果放弃关于 ρ 的对称性假设，并将选民群体表示为两个高斯分量的等权混合，其均值为（d_1，d_2），标准差为（σ_1，σ_2），则对称叉形分岔会展开。中间派分支会偏离原点，极化分支随之出现，并且随着q 变化，均衡图呈现出带有极化锁定的滞后回线（见第6节和图4）。

4. 一般情形的证明

4.1. 中心—距离坐标中的一阶条件

纳什均衡是满足以下耦合系统的一对（u,v）

$$\partial_u V_{1,q}(u,v) = 0 \quad \text{and} \quad \partial_v V_{2,q}(v,u) = 0.$$

为将该系统解耦为分别表示政治中心和极化程度的分量，我们引入变量替换

$$m = \frac{u+v}{2}, \qquad d = \frac{u-v}{2},$$

其中，m 是政党位置的中点，d 是双方意识形态距离的一半。在这些坐标下，纳什均衡的一阶条件对应于寻找一阶条件向量场的零点

$$\widehat{F}_q(m,d) := (F_q^+(m,d),\, F_q^-(m,d)),$$

其中，对称分量和反对称分量分别为

$$F_q^+(m,d) := \frac{1}{2}\Big[\partial_u V_{1,q} + \partial_v V_{2,q}\Big]_{(u,v)=(m+d,m-d)}, \tag{7}$$

$$F_q^-(m,d) := \frac{1}{2}\Big[\partial_u V_{1,q} - \partial_v V_{2,q}\Big]_{(u,v)=(m+d,m-d)}. \tag{8}$$

因此，当且仅当满足以下条件时，数对（u，v）满足一阶条件

$$\widehat{F}_q\Big(\tfrac{u+v}{2},\ \tfrac{u-v}{2}\Big) = (0,0).$$

Lemma 1 (对称性与雅可比结构**).** 对于每个固定的 m，各分量满足奇偶关系 *ns*

$$F_q^+(m,-d) = F_q^+(m,d) \quad and \quad F_q^-(m,-d) = -F_q^-(m,d).$$

因此，当 $d = 0$ 时，非对角偏导数为零，即 $\partial_d F_q^+(m,0) = 0$ 以及 $\partial_m \bar{F_q}(m,0) = 0$。特别地，在由 $F_q^+(m_0(q),0) = 0$定义的中心 $m_0(q)$ 处，雅可比矩阵具有对角形式

$$D\widehat{F}_q(m_0(q),0) = \begin{pmatrix} \alpha(q) & 0 \\ 0 & \mu(q) \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha(q) := \partial_m F_q^+(m,0)\big|_{m=m_0(q)}$，且 $\mu(q) := \partial_d \bar{F_q}(m,0)\big|_{m=m_0(q)}$。

引理 2（几乎对所有q都存在中心）**.** 固定 $q > 0$ 并定义

$$\mathcal{G}(q,m) := F_q^+(m,0).$$

那么存在 $m^* \in \mathbb{R}$，使得 $\mathcal{G}(q,m^*) = 0$。此外，对于几乎所有 $q > 0$（按勒贝格测度的意义），存在一个零点 $m^*(q)$，满足 $\partial_m \mathcal{G}(q,m^*(q)) \neq 0$。

证明。 对投票份额$V_{1,q}(u,v)$关于u 求导，并应用链式法则，我们得到

$$\partial_u V_{1,q}(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \Big[-\frac{1}{q} f'\Big(\tfrac{|x-u|}{q}\Big)\operatorname{sgn}(x-u)\Big]\Big[1-\frac{1}{2}f\Big(\tfrac{|x-v|}{q}\Big)\Big]\rho(x)\,dx.$$

在对称构型$u = v = m$处取值，并利用 $-\operatorname{sgn}(x-m) = \operatorname{sgn}(m-x)$，得到 es

$$\partial_u V_{1,q}(m,m) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{q} f'\Big(\tfrac{|x-m|}{q}\Big)\Big[1-\frac{1}{2}f\Big(\tfrac{|x-m|}{q}\Big)\Big]\operatorname{sgn}(m-x)}_{=W_q(m-x)}\rho(x)\,dx,$$

这恰好就是卷积$W_q * \rho(m)$。

因此，对于$d = 0$，我们有卷积表示

$$\mathcal{G}(q,m) = F_q^+(m,0) = \int_{\mathbb{R}} W_q(m-x)\rho(x)\,dx = (W_q * \rho)(m),$$

其中

$$W_q(z) := w_q(|z|)\ \operatorname{sgn} z, \quad w_q(r) := \frac{1}{q} f'\Big(\tfrac{r}{q}\Big)\Big(1-\tfrac{1}{2}f\Big(\tfrac{r}{q}\Big)\Big) \le 0$$

对于$r \ge 0$。

由于 $0 \le 1-f \le 1$ 且 $f' \in L^1(0,\infty)$，变量替换 $t = r/q$ 得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty w_q(r)\,dr &= \int_0^\infty (-f'(t))(1-f(t))\,dt \\ &\le \int_0^\infty (-f'(t))\,dt = f(0) - \lim_{t\to\infty} f(t) = 1,\end{aligned}$$

因此 $w_q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，进而 $W_q \in L^1(\mathbb{R})$；此外，W_q 是奇函数。由于 $\rho \in L^1 \cap L^\infty$，卷积 $\mathcal{G}(\cdot) = W_q * \rho$ 是连续且可积的。

由于 W_q 是奇函数且可积，而 $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$，根据富比尼定理可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(q,m)\,dm &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} W_q(m-x)\,\rho(x)\,dx\,dm \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} W_q(y)\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx\right) = 0.\end{aligned}$$

若 $\mathcal{G}(q,\cdot) \equiv 0$，则每个 m 都是零点。否则，由于 $\mathcal{G}(q,\cdot)$ 连续且积分为零，它必定同时取正值和负值；根据介值定理，存在 m^*，使得 $\mathcal{G}(q,m^*) = 0$。

由于 $\mathcal{G}$ 在 (q,m) 上是 C^2，我们可以将 $\{H_q\}_{q>0}$ 视为一个C^2 单参数映射族 $H_q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H_q(m) = \mathcal{G}(q,m)$。根据参数横截定理（例如，参见 [11,第 2] 章），集合

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &:= \{\, q>0 :\ 0 \text{ is a regular value of } H_q \,\} \\ &= \{\, q>0 :\ \partial_m \mathcal{G}(q,m) \neq 0 \text{ whenever } \mathcal{G}(q,m)=0 \,\}\end{aligned}$$

在 $(0,\infty)$ 中具有满勒贝格测度（等价地，其补集的测度为零）。因此，对于几乎所有 $q > 0$，$m \mapsto \mathcal{G}(q,m)$ 的所有零点都是非退化的。结合上文证明的每个 $q > 0$至少存在一个零点这一结论，我们得到：对于几乎所有 $q > 0$，存在 $m^*(q)$，使得 $\mathcal{G}(q,m^*(q)) = 0$，且 $\partial_m \mathcal{G}(q,m^*(q)) \neq 0$。

□

引理3（中心的局部存在性/唯一性与正则性）。设 $\mathcal{G}(q,m) := F_q^+(m,0)$ 且假设

$$\mathcal{G}(q_c,m^*) = 0 \quad \textit{and} \quad \partial_m \mathcal{G}(q_c,m^*) \neq 0.$$

那么存在 $\delta > 0$ 且存在唯一的 C^1 函数

$$m_0 : (q_c-\delta, q_c+\delta) \to \mathbb{R}$$

使得 $\mathcal{G}(q, m_0(q)) = 0$ 对该区间内的所有 q 均成立。此外，

$$m_0'(q_c) = -\frac{\partial_q \mathcal{G}(q_c,m^*)}{\partial_m \mathcal{G}(q_c,m^*)}.$$

若对于某个 $r \geq 1$，$\mathcal{G} \in C^r$，则 $m_0 \in C^r$（可能需要缩小 δ）。

证明。由隐函数定理，存在 $\delta > 0$ 且存在唯一的 C^1 映射 $m_0(q)$，满足 $\mathcal{G}(q,m_0(q)) = 0$ 对$|q-q_c| < \delta$成立；对恒等式求导即可得到所述的 $m_0'(q_c)$ 公式。

□

注5。在我们的具体背景下，假设$f \in C^4$ 意味着 $V \in C^4$,，进而推出 $\mathcal{G} \in C^3$。因此，中心分支 $m_0(q)$ 必定是 C^3。

定义 1（中心与线性系数）。对于每个 $q > 0$，中心 是任意一个满足下式的 $m_0(q)$

$$F_q^+(m_0(q),0) = 0.$$

当存在多个解时，我们在非退化点（q_c,m^*）附近局部 处理，其中 $\mathcal{G}(q_c,m^*) = 0$且 $\partial_m \mathcal{G}(q_c,m^*) \neq 0$：根据引理3，存在 $\delta > 0$，以及一个唯一的 C^1 映射 $m_0 : (q_c-\delta, q_c+\delta) \to \mathbb{R}$，使得对于该区间内所有 q，都有 $\mathcal{G}(q,m_0(q)) = 0$，其中

$$m_0'(q_c) = -\frac{\partial_q \mathcal{G}(q_c,m^*)}{\partial_m \mathcal{G}(q_c,m^*)}.$$

约定。在定义了中心分支 $q \mapsto m_0(q)$ 的任意区间上，我们令

$$\mu(q) := \partial_d F_q^-(m,0)\big|_{m=m_0(q)}, \qquad \alpha(q) := \partial_m F_q^+(m,0)\big|_{m=m_0(q)}.$$

引理 4 (μ的连续性、表示和符号变化。 固定区间 $I \subset (0,\infty)$ ，并在 I 上取定义 1 中的连续中心分支 $q \mapsto m_0(q)$。那么：

(a) 对每个 $q \in I$,

$$\mu(q) = \partial_d F_q^-(m,0)\Big|_{m=m_0(q)} = \frac{2}{q}\int_0^\infty \psi(t)\,\tilde\rho_{q,e}(qt)\,dt,$$

其中

$$\psi(t) := f''(t)\Big(1-\tfrac12 f(t)\Big) + \tfrac12 (f'(t))^2, \quad \tilde\rho_q(x) := \rho(m_0(q)+x),$$

$$\tilde\rho_{q,e}(x) := \tfrac12(\tilde\rho_q(x) + \tilde\rho_q(-x)).$$

(b) 映射 $q \mapsto \mu(q)$ 在 I 上连续。

(c) 存在 $0 < q^- < q^+ < \infty$ （仅取决于 f、 ρ 以及所选的分支 m_0） ，使得在必要时缩小 I 后，

$$0 < q < q^- \implies \mu(q) > 0, \qquad q > q^+ \implies \mu(q) < 0.$$

特别地，沿着此分支，存在 $q_c \in (0,\infty)$ ，满足 $\mu(q_c) = 0$。

引理 *4* 的证明。根据定义，

$$\mu(q) = \partial_d F_q^-(m,0)\Big|_{m=m_0(q)}.$$

在$d = 0$处，利用缩放核$f_q(r) := f(r/q)$和变量替换$x = qt$，对d–奇场$F_q^-(m,d)$求导，可得

$$\mu(q) = \frac{2}{q}\int_0^\infty \psi(t)\,\tilde\rho_{q,e}(qt)\,dt,$$

其中

$$\psi(t) := f''(t)\Big(1-\tfrac12 f(t)\Big) + \tfrac12 (f'(t))^2, \quad \tilde\rho_q(x) := \rho(m_0(q)+x),$$

$$\tilde\rho_{q,e}(x) := \tfrac12(\tilde\rho_q(x) + \tilde\rho_q(-x)).$$

对积分号下求导 由假设 1–2，积分号下求导是合理的，因为f'、$f'' \in L^1(0,\infty)$，且 $\rho \in L^1 \cap L^\infty$。

由$f(0) = 1$、$f'(0) = 0$、$f''(0) < 0$以及 $0 \le f \le 1$，应用标准分部积分论证（利用f'、$f'' \in L^1$和$f' \in L^2$）可得

$$\psi \in L^1(0,\infty), \quad \int_0^\infty \psi(t)\,dt = \int_0^\infty (f'(t))^2\,dt > 0,$$

$$\psi(0) = \frac{f''(0)}{2} < 0,$$

且特别地， ψ 在 $[0,\infty$上有界）。

由该表示可直接得出 μ 在I 上的连续性：若$q_n \to q_0 \in I$，则

$$\tilde\rho_{q_n,e}(q_n t) = \tfrac12[\rho(m_0(q_n)+q_n t) + \rho(m_0(q_n)-q_n t)] \longrightarrow \tilde\rho_{q_0,e}(q_0 t)$$

对每个$t \ge 0$，由 ρ 和m_0, 的连续性以及$|\tilde\rho_{q,\ e}(qt)| \le \|\rho\|_{L^\infty}$。对 $\mu(q)$ 中的积分应用控制收敛定理，便得到 $\mu(q_n) \to \mu(q_0)$。

当q较小时，固定一个在 0 处聚集的紧子区间$J_- \subset I$，并假设

$$K_- := \{m_0(q) : q \in J_-\}$$

位于一个紧集内，在该集合上 ρ 连续且严格为正。因此，对于某个 $_0$，在 K_- 上有 $\rho(x) \ge c_0 > 0$。由 ρ 在 K_- 上的一致连续性，以及当 $q \to 0$ 且 t 有界时 $qt \to 0$ 这一事实，可得

$$\tilde\rho_{q,e}(qt) = \rho(m_0(q)) + o(1)$$

当 $q \to 0$ 时，t 在紧集上这一结论是一致成立的。另一方面，由于 $\psi \in L^1$,，我们可以在足够大的 T 处截断积分，使尾部 $\int_T^\infty |\psi(t)|dt$ 任意小。将这两点结合到 $q\mu(q)$ 的表示中，得到

$$q\,\mu(q) = 2\int_0^\infty \psi(t)\,\tilde{\rho}_{q,e}(qt)\,dt = 2\rho(m_0(q))\int_0^\infty \psi(t)\,dt + o(1)$$

当$q \to 0$。由于 $\rho(m_0(q)) \geq c_0$ 且

$$\int_0^\infty \psi(t)\,dt = \int_0^\infty (f'(t))^2\,dt > 0,$$

由此可知，当q足够小时，$\mu(q) > 0$，因此 $\mu(q) > 0$，对于 $0 < q < q^-$，存在某个$q^- > 0$.

对于较大的q，取一条射线$J_+ \subset I$，使得 $\inf J_+ > 0$，并假设

$$K_+ := \{m_0(q) : q \in J_+\} \subset [-R_+, R_+]$$

对于某个$R_+ < \infty$（可能需要缩小I）。固定 $\varepsilon > 0$，并选择$M > 0$ 使得

$$\int_{|x|>M} \rho(x)\,dx < \varepsilon,$$

并令$T_q := (M + R_+)/q$。将积分拆分，

$$\begin{aligned}\mu(q) &= \frac{2}{q}\int_0^{T_q} \psi(t)\,\tilde{\rho}_{q,e}(qt)\,dt + \frac{2}{q}\int_{T_q}^\infty \psi(t)\,\tilde{\rho}_{q,e}(qt)\,dt \\ &=: J_1(q) + J_2(q),\end{aligned}$$

我们先对尾部作出界估计。令$y = qt$,

$$\int_{T_q}^\infty \tilde{\rho}_{q,e}(qt)\,dt = \frac{1}{q}\int_{M+R_+}^\infty \tilde{\rho}_{q,e}(y)\,dy \leq \int_{|z|>M} \rho(z)\,dz < \varepsilon,$$

关于 $q \in J_+$一致成立。利用 $|\psi| \leq \|\psi\|_\infty$ 可得 $|J_2(q)| \leq C\,\varepsilon/q^2$。

在 $[0,T_q]$ 上，我们有 $qt \leq M + R_+$，因此 $m_0(q) \pm qt$ 仍属于某个紧集，其中 ρ 有界。此外，当$T_q \to 0$ 且 $q \to \infty$时，由于 ψ 在 0 处的连续性，我们有 $\psi(t) = \psi(0) + o(1)$，且对 $0 \leq t \leq T_q$一致成立。记

$$J_1(q) = \frac{2\psi(0)}{q}\int_0^{T_q} \tilde{\rho}_{q,e}(qt)\,dt + \frac{2}{q}\int_0^{T_q} (\psi(t) - \psi(0))\,\tilde{\rho}_{q,e}(qt)\,dt,$$

并在第一项中作变量代换 $y = qt$，得到

$$\frac{2\psi(0)}{q}\int_0^{T_q} \tilde{\rho}_{q,e}(qt)\,dt = \frac{2\psi(0)}{q^2}\int_0^{M+R_+} \tilde{\rho}_{q,e}(y)\,dy.$$

简单的变量代换论证表明

$$\int_0^{M+R_+} \tilde{\rho}_{q,e}(y)\,dy \geq \frac{1}{2}\int_{-M}^{M} \rho(z)\,dz =: \mu_0 > 0$$

关于 $q \in J_+$一致成立。由于T_q 较小且 $\tilde{\rho}_{q,e}$有界，$J_1(q)$中的第二项为 $O(\varepsilon/q^2)$ 阶。因此

$$\mu(q) \leq \frac{2\psi(0)\mu_0}{q^2} + \frac{C\varepsilon}{q^2}$$

对所有 $q \in J_+$均成立，其中 $\psi(0) = f''(0)/2 < 0$。先取 ε 足够小，再取 q 足够大，即可确保右端为负，因此存在$q^+ > 0$，使得 $\mu(q) < 0$ 对所有 $q > q^+$ 属于I时均成立。

我们已经证明，对于 q $0 < q < q^-$，$\mu(q) > 0$；对于 $q > q^+$，$\mu(q) < 0$；并且 μ 在 I 上连续。根据介值定理，存在 $q_c \in (0,\infty)$，使得 $\mu(q_c) = 0$。 □

推论1 (交叉点的存在性)。 根据引理 *4*，存在 $q_c \in (0,\infty)$，使得$\mu(q_c) = 0$。

4.2. 局部叉形分岔

定义 2 (有效三次系数)。 对于C^3 中心分支$m_0(q)$，我们将有效三次系数定义为$\beta_{\text{eff}}(q)$，其系数综合了纯三次项、分支曲率和混合导数耦合:

$$\beta_{\text{eff}}(q) := \beta(q) + \tfrac{1}{2}\, C_{md}(q)\, h_{dd}(q,0),$$

其中各分量沿分支 $m_0(q)$ 定义如下:

- $\beta(q) := \frac{1}{6}\,\partial_{ddd}F^{-}{}_{q}\,(m_0(q),0)$（纯三次项）；
- $C_{md}(q) := \partial_{md}F^{-}{}_{q}\,(m_0(q),0)$（耦合项）；
- $h_{dd}(q,0)$（分支曲率），由隐函数定理映射 $m = m_0(q)+h(q,d)$ 得出，该映射满足 $F^{+}{}_{q}\,(m_0(q)+h(q,d),d) = 0$。

按照这一约定，$\beta_{\text{eff}}(q_c) < 0$ 产生超临界叉形分岔（稳定侧分支），而 $\beta_{\text{eff}}(q_c) > 0$则产生亚临界叉形分岔。

定理 1（局部叉形分岔）。 固定 $q_c > 0$ 并假设

$$\alpha(q_c) \neq 0, \qquad \mu(q_c) = 0,\ \mu'(q_c) \neq 0, \qquad \beta_{\text{eff}}(q_c) < 0.$$

则 $(m,d) = (m_0(q),0)$ 在 $q = q_c$ 处发生超临界叉形分岔 （即，当$\mu(q) > 0$时，出现侧分支）。更精确地说，存在邻域 $I \ni q_c$ 和 $\mathcal{U} \ni (m_0(q_c),0)$，使得对于 $q \in I$,

$$\begin{cases} \mu(q) < 0: & \textit{the only equilibrium in } \mathcal{U} \textit{ is } (m,d) = (m_0(q),0), \\ & \textit{there are exactly three equilibria in } \mathcal{U}: \\ \mu(q) > 0: & (m_0(q),0) \quad \textit{and} \quad \textit{two} \quad \textit{nontrivial} \\ & \textit{branches,} \end{cases}$$

with

$$d_{\pm}(q) = \pm\sqrt{-\mu(q)/\beta_{\text{eff}}(q)} + o(\sqrt{|\mu(q)|}),$$
$$m_{\pm}(q) = m_0(q) + h(q, d_{\pm}(q)) = m_0(q) + O(\mu(q)).$$

证明（正规形）。 由引理3以及假设1和2，存在 $\delta > 0$ 和唯一的中心分支 $m_0 \in C^3((q_c-\delta, q_c+\delta))$，满足 $F^{+}_{q}(m_0(q),0) = 0$。令

$$\alpha(q) := \partial_m F^{+}_{q}(m,0)\big|_{m=m_0(q)}.$$

由于F^{+}_{q}关于d为偶函数（引理1），$\partial_d F^{+}_{q}(m,0) = 0$。因为 $\alpha(q_c) \neq 0$，若有需要，缩小I后，存在$a_0 > 0$，使得$|\alpha(q)| \geq a_0$ 对$q \in I$成立。根据隐函数定理，存在唯一的C^3 映射

$$m = m_0(q) + h(q,d), \qquad F^{+}_{q}(m_0(q) + h(q,d),\, d) = 0,$$

在 $h(q,0) = 0, \partial_d h(q,0) = 0$，以及 $h(q,d) = O(d^2)$ 关于 $q \in I$ 一致成立。对 d 求两次导数可得

$$h_{dd}(q,0) = -\frac{F^{+}_{dd}(m_0(q),0)}{\alpha(q)}.$$

定义 $\phi(q,d) := F^{-}_{q}(m_0(q) + h(q,d),\ d)$。利用 F^{-}_{q} 的奇偶性和 C^3 正则性，

$$\phi(q,d) = \mu(q)\,d + C_{md}(q)\,h(q,d)\,d + \beta(q)\,d^3 + r(q,d),$$

关于$r(q,d)$，$= o(d^3)$ 关于q一致成立。由于$h(q,d) = \frac{1}{2}h_{dd}(q,0)d^2 + o(d^2)$,

$$\begin{aligned} \phi(q,d) &= \mu(q)\,d + \Big[\beta(q) + \tfrac{1}{2}\,C_{md}(q)\,h_{dd}(q,0)\Big]d^3 + r(q,d) \\ &= \mu(q)\,d + \beta_{\text{eff}}(q)\,d^3 + r(q,d), \end{aligned}$$

并且，根据h_{dd}的公式，

$$\beta_{\text{eff}}(q) = \beta(q) - \tfrac{1}{2}\, C_{md}(q)\, \frac{F^{+}_{dd}(m_0(q), 0)}{\alpha(q)}.$$

根据连续性，$\beta_{\text{eff}}(q_c) < 0$ 意味着（缩小 I 后），$\beta_{\text{eff}}(q) \le -\beta_* < 0$ 对$q \in I$成立。

Thus

$$\phi(q, d) = d(\mu(q) + \beta_{\text{eff}}(q)\, d^2 + o(d^2)).$$

如果 $\mu(q) < 0$，则当 $|d|$较小时，括号内为负，因此只有 $d = 0$。如果 $\mu(q) > 0$，则恰好存在两个非零的小根

$$d_{\pm}(q) = \pm\sqrt{-\mu(q)/\beta_{\text{eff}}(q)} + o(\sqrt{|\mu(q)|}),$$

并且 $m = m_0(q) + h(q, d_{\pm}(q)) = m_0(q) + O(\mu(q))$。根据图性质，$F^{+}_{q} = 0$的每个解在充分小的邻域内都满足 $m = m_0(q) + h(q,d)$，因此，完整系统在 $\mathcal{U}$中的均衡恰好是上文列出的 $\phi(q, \cdot)$ 的零点。

□

备注 6（滞后现象）。 在对称基准下，超临界叉形分岔会产生一个从趋同到极化的平滑且可逆的转变；对于 q 的每个取值，都存在唯一的局部稳定均衡，因此滞后现象不可能发生。一旦引入非对称性，叉形分岔便会不完美展开，（q，d）中的均衡曲线可能变成 S 形，从而导致滞后现象。

5. 高容忍度极限的证明：趋同于均值

下一个引理表明，对于所有充分大的q，每位参与者的目标函数在共同区间K 上都一致严格凹，并且在K中有唯一的全局最大值点，且与对手的位置无关。

引理 5（大容忍度下最大值点的唯一性）。 假设假设*1–3*成立，并进一步假设

$$f'' \in L^1(0,\infty) \cap L^\infty(0,\infty) \quad \textit{and} \quad \int_{\mathbb{R}} |x|\, \rho(x)\, dx < \infty.$$

那么存在常数$Q > 0$和紧区间$K \subset \mathbb{R}$，它们仅取决于(f, ρ)，并满足以下性质。

(a) 对于每个$q \ge Q$、每位参与者$i \in \{1, 2\}$以及任意固定的对手位置$u_j \in \mathbb{R}$，目标函数

$$u \longmapsto V_{i,q}(u, u_j)$$

在K上严格凹。

(b) 对每个 $q \ge Q$，$V_{i,q}(\,\cdot\,, u_j)$ 的每个全局最大值点都属于 K，且该全局最大值点唯一。

证明。 固定$i \in \{1, 2\}$和$u_j \in \mathbb{R}$，并记

$$w_{q,u_j}(x) := \left[1 - \tfrac{1}{2} f_q(|x - u_j|)\right]\rho(x),$$

使得

$$\tfrac{1}{2}\rho(x) \le w_{q,u_j}(x) \le \rho(x) \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R},\ q > 0. \tag{9}$$

Then

$$V_{i,q}(u, u_j) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{|x - u|}{q}\right) w_{q,u_j}(x)\, dx.$$

对每个固定的x 和q，定义

$$g_x(u) := f\left(\frac{|x - u|}{q}\right).$$

直接计算可得，对于$u \neq x$,

$$\partial_u^2 g_x(u) = \frac{1}{q^2}\, f''\left(\frac{|x - u|}{q}\right),$$

并且，根据控制收敛定理（利用$f'' \in L^\infty$ 和$w_{q,\ u_j} \in L^1$），

$$\partial_u^2 V_{i,q}(u, u_j) = \frac{1}{q^2} \int_{\mathbb{R}} f''\left(\frac{|x-u|}{q}\right) w_{q,u_j}(x)\, dx. \tag{10}$$

一致严格余　　性。由于$f''(0) < 0$且f''在 0 处连续，存在 $\delta > 0$和 $\gamma > 0$，使得

$$f''(t) \le -\gamma \quad \text{for all } t \in [0, \delta].$$

由于 ρ 可积，我们可以选择$R_0 > 0$，使得

$$\int_{|x|>R_0} \rho(x)\, dx < \varepsilon$$

对于某个待确定的小 $\varepsilon > 0$，利用（9）可知，w_{q,u_j} 的质量中有正比例位于 $[-R_0,R_0]$,内，并且对 q 和u_j一致；而w_{q,u_j}在 $[-R_0, R_0]$ 之外的总质量至多为 ε。

选择 $Q_1 > 0$，使得 $\delta Q_1 > 2R_0$。那么，对于每个 $q \ge Q_1$，、每个 $u \in [-R_0,R_0]$, 以及每个 $x \in [-R_0,R_0]$，都有 $|x-u|/q \le \delta$，因此 $f''(|x-u|/q) \le -\gamma$ 在 $[-R_0, R_0]$上成立。将（10）中的积分拆分为 $|x| \le R_0$ 和 $|x| > R_0$,，得到

$$q^2\, \partial_u^2 V_{i,q}(u, u_j) \le -\gamma\, c_0 + M\varepsilon,$$

其中 $c_0 > 0$ 仅取决于 ρ（通过 w_{q,u_j} 在 $[-R_0, R_0]$中的质量），且 $M := \sup_{t\ge 0} |f''(t)| < \infty$。选择足够小的 $\varepsilon > 0$，使得 $M\varepsilon < \gamma c_0/2$，我们便能找到一个常数 $\kappa > 0$，使得

$$\partial_u^2 V_{i,q}(u, u_j) \le -\frac{\kappa}{q^2} < 0 \quad \text{for all } u \in [-R_0, R_0],\ q \ge Q_1,\ u_j \in \mathbb{R}.$$

因此，对于所有 $q \ge Q_1$，$K_0 := [-R_0, R_0]$ 上的 $V_{i,q}(\cdot, u_j)$ 都是严格凹函数。

一致有界性与最大值点的唯一性。对于每个 $q > 0$和 $u_j, V_{i,q}(\cdot, u_j)$ 在 $\mathbb{R}$.上至少能取得一个全局最大值。

接下来，利用 $f(0) = 1$、$f'(0) = 0$、$f''(0) < 0$ 以及关于 f'' 的可积性/有界性假设，对积分号下进行标准的泰勒展开，可得到常数 $Q_2 > 0$ 和 $C' > 0$，使得对于所有 $q \ge Q_2$ 以及所有 u、$u_j \in \mathbb{R}$,

$$V_{i,q}(u, u_j) = A(q, u_j) + \frac{f''(0)}{2q^2}\, J_w(u) + R_q(u, u_j), \tag{11}$$

其中$A(q, u_j)$与u无关，

$$J_w(u) := \int_{\mathbb{R}} (x-u)^2\, w_{q,u_j}(x)\, dx$$

严格凸且具有唯一极小值点，记为u_b；余项满足 $|R_q(u, u_j)| \le C'/q^3$，且关于u、u_j一致成立。

极小化元u_b 是w_{q,u_j}的重心:

$$u_b = \frac{\int_{\mathbb{R}} x\, w_{q,u_j}(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}} w_{q,u_j}(x)\, dx}.$$

利用 (9) 以及 ρ 的有限一阶矩，我们得到一致有界性 $|u_b| \le C_1$，其中$C_1 > 0$ 仅依赖于 ρ。此外，当 $|u| \ge R_1$ 时，有$J_w(u) - J_w(u_b) \ge c_1 > 0$；只需取足够大的$R_1 > 0$（例如$R_1 > 2C_1$），这由严格凸性和 (9) 得出。将此代入 (11)，可知存在 $Q_3 \ge Q_2$，使得对所有$q \ge Q_3$,

$$V_{i,q}(u, u_j) < V_{i,q}(u_b, u_j) \qquad \text{whenever } |u| \ge R_1.$$

因此，每个全局最大值点都位于

$$K' := [-R_1, R_1],$$

它只取决于（f、ρ），与q和u_j无关。

最后，令

$$K := [-R, R], \qquad R := \max\{R_0, R_1\}, \qquad Q := \max\{Q_1, Q_3\}.$$

对于每个 $q \geq Q$ 以及每个 u_j，$V_{i,q}(\cdot, u_j)$ 的任意全局最大值点都属于 $K' \subset K$，且 $V_{i,q}(\cdot, u_j)$ 在凸集 K 上严格凹。凸区间上的严格凹函数至多有一个全局最大值点，因此全局最大值点唯一且位于K中，证毕。

□

在定理 1 的非退化假设下，对称均衡沿此分支失去稳定性，是通过极化坐标d中的一个 $\mathbb{Z}_2$–等变叉形分岔发生的。特别地，当 $q > q_c$ 时，存在唯一的局部稳定的对称均衡；而当 $q < q_c$ 充分接近q_c 时，该均衡变得不稳定，并出现两个局部稳定、极化方向相反的均衡。特别地，一般而言，$q = q_c$ 处的分岔是关于d的超临界叉形分岔。

虽然引理 5 保证当q 较大时，最佳响应表现良好且唯一，但下一个引理表明，随着$q \to \infty$，这些最大值点会收敛到选民分布的均值 $\bar{x}$，且与对手的位置无关。

引理 6（大q 极限：向均值收敛）。假设假设*1–3*成立，且此外，

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^2 \rho(x)\, dx < \infty.$$

对于每个 $i \in \{1,2\}$ 和 $u_j \in \mathbb{R}$，引理 *5* 给出一个常数 $Q_0 > 0$，使得对于所有 $q \geq Q_0$，，函数 $u \mapsto V_{i,\,q}(u,\, u_j)$ 都有唯一的全局最大值点。将选民密度的均值定义为

$$\bar{x} := \int_{\mathbb{R}} x \rho(x)\, dx.$$

那么，对于每个固定的 $u_j \in \mathbb{R}$ 和 $i \in \{1,2\}$,

$$u_i(q, u_j) \longrightarrow \bar{x} \qquad as\ q \to \infty.$$

特别地，该极限与 u_j 以及参与者 i 无关。

证明。固定 $i \in \{1,2\}$ 和 $u_j \in \mathbb{R}$。回顾

$$V_{i,q}(u, u_j) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{|x-u|}{q}\right) w_{q,u_j}(x)\, dx,$$

$$w_{q,u_j}(x) := \left[1 - \tfrac{1}{2} f_q(|x - u_j|)\right]\rho(x),$$

并且

$$\tfrac{1}{2}\rho(x) \leq w_{q,u_j}(x) \leq \rho(x) \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R},\ q > 0. \tag{12}$$

由于$f_q(r) = f(r/q)$，且f连续，并且$f(0) = 1$，我们有$f_q(|x - u_j|) \to 1$对每个固定的x均成立，因此

$$w_{q,u_j}(x) \to \tfrac{1}{2}\rho(x) \qquad \text{for every } x \in \mathbb{R}.$$

此外，$|w_{q,u_j}| \leq \rho \in L^1$, 因此由控制收敛可得

$$\int_{\mathbb{R}} \left|w_{q,u_j}(x) - \tfrac{1}{2}\rho(x)\right| dx \longrightarrow 0 \qquad \text{as } q \to \infty. \tag{13}$$

固定x和q，定义$g_x(u) := f(|x - u|/q)$。直接计算可得，对于$u \neq x$,

$$\partial_u^2 g_x(u) = \frac{1}{q^2} f''\left(\frac{|x-u|}{q}\right),$$

并且根据控制收敛定理（利用$f'' \in L^\infty$ 和$w_{q,u_j} \in L^1$），

$$\partial_u^2 V_{i,q}(u,u_j) = \frac{1}{q^2}\int_{\mathbb{R}} f''\left(\frac{|x-u|}{q}\right) w_{q,u_j}(x)\,dx. \tag{14}$$

根据假设 1(c)，$f(0) = 1$，$f'(0) = 0$，$f''(0) < 0$，且$f \in C^3(\mathbb{R}_+)$。因此，对每个 $t \geq 0$，

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + r(t),$$

其中 $r(t) = o(t^2)$，当 $t \to 0$ 时。特别地，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得

$$|r(t)| \leq \varepsilon t^2 \qquad \text{whenever } 0 \leq t \leq \delta. \tag{15}$$

由于 f 有界，且 $t \mapsto t^2$ 至多呈二次增长，因此存在$C_\delta > 0$，使得

$$|r(t)| \leq C_\delta t^2 \qquad \text{for all } t \geq \delta. \tag{16}$$

代入 $t = |x-u|/q$，得到

$$f_q(|x-u|) = f\left(\frac{|x-u|}{q}\right) = 1 + \frac{1}{2}f''(0)\,\frac{|x-u|^2}{q^2} + r_q(x,u), \tag{17}$$

with

$$r_q(x,u) := r\left(\frac{|x-u|}{q}\right),$$

并且，由（15）–（16）可得，

$$|r_q(x,u)| \leq \begin{cases} \varepsilon\,\dfrac{|x-u|^2}{q^2}, & \text{if } \dfrac{|x-u|}{q} \leq \delta, \\ C_\delta\,\dfrac{|x-u|^2}{q^2}, & \text{if } \dfrac{|x-u|}{q} \geq \delta. \end{cases} \tag{18}$$

固定一个比较包含所有当q 充分大时的极大值点的$K \subset \mathbb{R}$ 区间，如引理 5 所述；必要时扩大K，还假设 $\bar{x} \in K$。对于$u \in K$ 且$q > 0$，记

$$V_{i,q}(u,u_j) = A_q(u_j) + \frac{1}{2}f''(0)\,\frac{1}{q^2}\int_{\mathbb{R}} |x-u|^2\, w_{q,u_j}(x)\,dx + R_q(u,u_j),$$

其中

$$A_q(u_j) := \int_{\mathbb{R}} w_{q,u_j}(x)\,dx$$

不依赖于u，且

$$R_q(u,u_j) := \int_{\mathbb{R}} r_q(x,u)\, w_{q,u_j}(x)\,dx.$$

利用式 (18)、估计$w_{q,u_j} \leq \rho$ 以及 ρ 的有限二阶矩，我们将定义R_q 的积分拆分到区域 $\{|x-u| \leq \delta q\}$ 和 $\{|x-u| > \delta q\}$ 上，并分别估计每一部分；由此得到

$$\sup_{u\in K} |q^2 R_q(u,u_j)| \longrightarrow 0 \qquad \text{as } q \to \infty. \tag{19}$$

接下来我们证明，

$$\int_{\mathbb{R}} |x-u|^2\, w_{q,u_j}(x)\,dx \longrightarrow \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |x-u|^2\,\rho(x)\,dx \tag{20}$$

当$q \to \infty$时，对$u \in K$一致成立。事实上，在固定球 $\{|x| \leq R\}$ 上使用 (13)（其中，对$u \in K$，$x-u|^2$ 一致有界），并利用 ρ 的有限二阶矩控制尾部 $\{|x| > R\}$，即可得到 (20) 两边之差对$u \in K$一致收敛于 0。

结合$V_{i,q}$的分解以及 (19) 和 (20)，对于$u \in K$且q足够大时，我们可以改写为：

$$V_{i,q}(u,u_j) = A_q(u_j) + \frac{f''(0)}{4q^2}\int_{\mathbb{R}} |x-u|^2\,\rho(x)\,dx + \widetilde{R}_q(u,u_j),$$

其中

$$\sup_{u\in K} |q^2\widetilde{R}_q(u,u_j)| \longrightarrow 0 \qquad \text{as } q\to\infty.$$

定义

$$J(u) := \int_{\mathbb{R}} |x-u|^2\,\rho(x)\,dx.$$

标准计算（在积分号下求导，并利用ρ的有限二阶矩）表明，J是C^2, 严格凸的，并且有唯一极小值点

$$\bar{x} = \int_{\mathbb{R}} x\,\rho(x)\,dx.$$

由于 $\bar{x} \in K$，J 在K 上的极小化元也是 $\bar{x}$。

根据引理 5，当q足够大时，极大值点$u_i^*(q, u_j)$唯一且属于K。$V_{i,q}$在K 上的一致展开以及J 的严格凸性，结合目标函数一致扰动下极大值点的连续性，进而推出

$$u_i(q,u_j) \longrightarrow \bar{x} \qquad \text{as } q\to\infty.$$

□

换言之　　当容忍度非常高时，满意化空间竞争实际上会简化为一个二次损失最小化问题，而两个政党都会选择选民密度的均值，以实现最优。

推论 2（对称基准：趋同至中位数）。除引理 6 的假设外，假设 ρ 关于某个 $m \in \mathbb{R}$ 对称，且 ρ 在 m 处有唯一中位数。那么均值满足 $\bar{x} = m$，因此，对于任意固定的 u_j，

$$u_i(q,u_j) \longrightarrow m \qquad as\ q\to\infty.$$

特别是在对称基准下，对角线上的唯一均衡分支会随着容忍度 $q \to \infty$ 增大而趋同于中位选民。

6. 非对称选民示例

现在，我们用一个非对称双群体选民的情形来说明前面的分析。我们假设满意化核为高斯分布：

$$f(x) = e^{-x^2/2}.$$

选民密度 $\rho(x)$ 是两个高斯群体的混合：

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma_1+\sigma_2)}\left[e^{-(x+d_1)^2/(2\sigma_1^2)} + e^{-(x+d_2)^2/(2\sigma_2^2)}\right],$$

其位置 d_1, d_2 和离散度 σ_1, σ_2 可以各不相同。这一设定刻画了两个意识形态集团在规模和分布范围上均不相等的选民群体，使重心偏离原点，并打破基准情形中的对称性。

对于这一类密度函数，经过适当的变量替换后，政党收益的一阶条件可以写成闭式表达式。记

$$x = v-u, \qquad y = v+u,$$

并引入简写

$$A_i = q^2+\sigma_i^2, \qquad B_i = q^2+2\sigma_i^2, \qquad i\in\{1,2\},$$

V_1的偏导数$_q$ 和V_2的偏导数$_q$ 可简洁地写成

$$(\sigma_1+\sigma_2)q^2\frac{\partial V_{1,q}}{\partial u}(u,v) = -\sum_{i=1}^{2}\frac{q^3\sigma_i}{A_i^{3/2}}(u+d_i)\exp\left[-\frac{(u+d_i)^2}{2A_i}\right] + \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{q^3\sigma_i}{4B_i^{3/2}}(y+2d_i) - \frac{q\sigma_i}{4\sqrt{B_i}}x\right]\exp\left[-\frac{(y+2d_i)^2}{4B_i} - \frac{x^2}{4q^2}\right],$$

$$(\sigma_1+\sigma_2)q^2\frac{\partial V_{2,q}}{\partial v}(v,u) = -\sum_{i=1}^{2}\frac{q^3\sigma_i}{A_i^{3/2}}(v+d_i)\exp\left[-\frac{(v+d_i)^2}{2A_i}\right] + \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{q^3\sigma_i}{4B_i^{3/2}}(y+2d_i) + \frac{q\sigma_i}{4\sqrt{B_i}}x\right]\exp\left[-\frac{(y+2d_i)^2}{4B_i} - \frac{x^2}{4q^2}\right].$$

因此，政党均衡位置可通过求解以下方程组得到： $\partial_u V_{1,q}(u,v) = 0$和 $\partial_v V_{2,q}(v,u) = 0$，并将其视为容忍度参数$q$的函数。

在一般的非对称设定（d_1,d_2, σ_1, σ_2）下，我们不再能得到u_*和q_c的闭式表达式，但上述显式一阶条件使我们能够通过数值计算求出均衡分支，并直观展示投票率混合中的非对称性如何改变叉形结构，以及如何产生伴有滞后现象的强极化；见图4。

在高容忍度极限$q \to \infty$下，一阶条件 $\partial_u V_{1,q}(u,v) = 0$和 $\partial_v V_{2,q}(v,u) = 0$化简为线性方程组

$$\sigma_1(u+d_1)+\sigma_2(u+d_2)=0,$$
$$\sigma_1(v+d_1)+\sigma_2(v+d_2)=0,$$

其解为选民密度 $\rho(x)$的均值x，正如引理 6所预示的那样：

$$u = v = \bar{x} = -\frac{d_1\sigma_1+d_2\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} \quad \text{as } q\to\infty.$$

图5展示了这一结果：随着q 增大，两个均衡解都收敛至$u = v$，渐近趋近均值 $\bar{x}$，而非中位数——这与经典空间模型中的预期一致。当 $\rho(x)$为对称分布时， $\sigma_1 = \sigma_2$，且$d_1 = -d_2$, 均值 $\bar{x} = 0$ 与中位数重合；在$q > q_c$时，中位数即为政党的均衡位置。

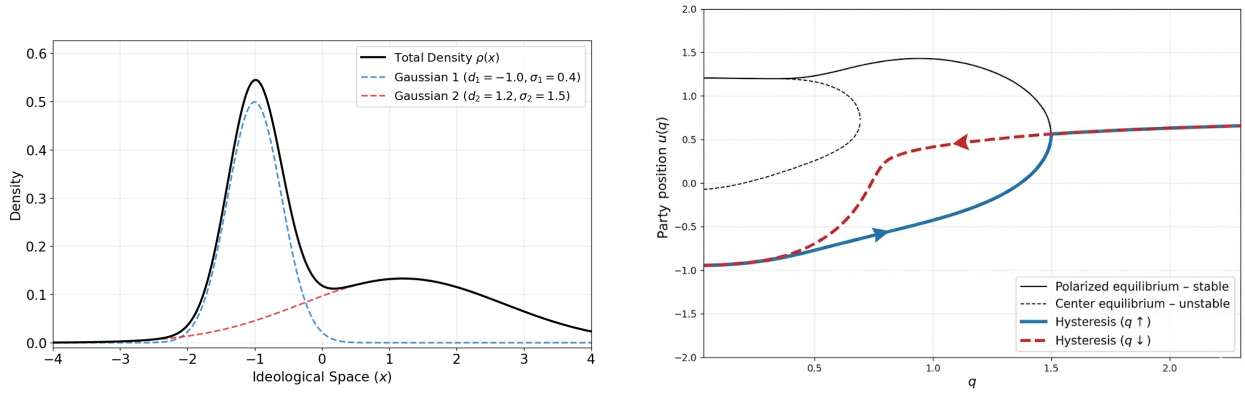
7. 对称情形的证明

现在我们聚焦于偶对称选民密度 ρ 所刻画的对称情形。由此得到的一维约化给出了分岔系数的显式积分公式，使我们能够严格分析容忍度参数 q 变化时的线性项和三次项。我们证明，该系统在临界值 q_c 处发生一次对称叉形分岔；当容忍度超过这一阈值时，唯一的稳定均衡是分布的中位数，而在这一对称情形下，它与均值重合。

由引理1可知，$F_q^+(m,0)$ 是关于 m 的奇函数，因此对所有 $q > 0$， $m = 0$ 都是一个零点。在假设该零点为单一且唯一的前提下，中心均衡分支为 $m_0(q) \equiv 0$，而二维系统 $(F_q^+, F_q^-) = (0,0)$ 可约化为关于极化距离 d 的单个标量方程。由于 F_q^+ 关于 d 为偶函数，对所有 d，我们有 $F_q^+(0,d) \equiv 0$，因此分岔动力学完全由以下因素支配

$$F_q^-(0,d) = 0,$$

这是一个关于距离参数 d 的一维问题。



(a) 选民分布 $\rho(x)$（高斯混合）。

(b) 容忍度q 变化时，政党位置$u(q)$的滞后现象。

图4：非对称选民群体与滞后现象。图a显示选民密度是两个高斯分布的混合。图b显示政党1的均衡位置如何随q 变化，其中非对称高斯混合的参数为$(d1, \sigma_1) = (1, 0.8)$和$(d2, \sigma_2) = (-1.2, 1.4)$，并突出展示$u(q)$中的滞后回线。蓝色实线表示$q$增大时的响应：沿着较低的非对称稳定分支移动至左侧折叠分岔，随后跳转至中央稳定分支。红色虚线表示q减小时的响应：沿中央分支（起初稳定，随后不稳定）向下移动至右侧折叠分岔，并在那里重新连接至非对称分支。

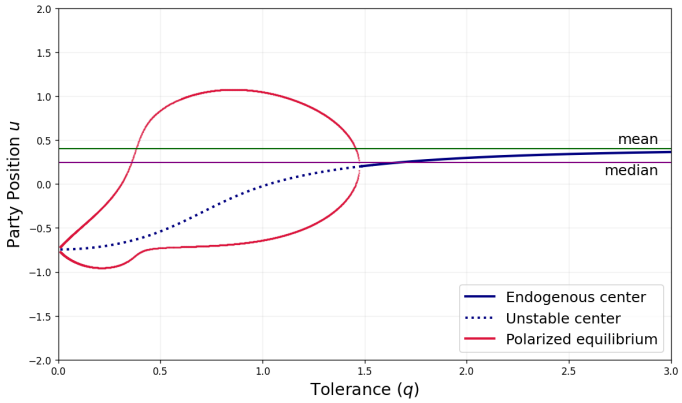


图5：参数为$(d1, \sigma_1) = (1, 0.8)$和$(d2, \sigma_2) = (-1.2, 1.4)$时满意化空间模型的分岔图。蓝色实线表示对称均衡分支$u_1 = u_2,$，红色实线表示非对称均衡分支。当$q \geq 1$时，绿色虚线和洋红色点线分别表示选民分布的均值和中位数。

设满意化函数为 $f_q(x) := f(x/q)$，且选民密度 ρ 为偶函数。由于两个政党的满意化核相同，我们将政党1的收益简记为 $V_q(u,v)$，其预期得票份额已知为

$$V_q(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \Big[f_q(|x-u|) - \tfrac{1}{2} f_q(|x-u|) f_q(|x-v|) \Big] \rho(x)\, dx.$$

然后，我们考察该收益沿反对角线解 $v = -u$ 的导数，并令其为

$$\begin{aligned} \Psi_q(u) &:= \frac{\partial V_q}{\partial u}(u,-u) \\ &= -\frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}} f'\Big(\tfrac{|x-u|}{q}\Big)\, \operatorname{sgn}(x-u) \Big(1 - \tfrac{1}{2} f\Big(\tfrac{|x+u|}{q}\Big)\Big) \rho(x)\, dx. \end{aligned}$$

利用对称性$V_{2,q}(u,v) = V_q(v,u)$以及 ρ的偶性，并注意到沿着分支$m = 0$ 有$d = u$，通过变量替换可知 Ψ_q 是奇函数，且

$$F_q^-(0,u) = \tfrac{1}{2}(\Psi_q(u) - \Psi_q(-u)) = \Psi_q(u) \qquad \text{for all } u \in \mathbb{R}.$$

因此，在对称基准下，分岔分析归结为研究奇函数 Ψ_q的零点，其中$u = 0$对所有$q > 0$都是一个解。

7.1. 叉形分岔条件

当这一平凡解在$u = 0$ 处改变稳定性时，就会发生叉形分岔。由于 $\Psi_q(u)$是奇函数，其在$u = 0$ 处的泰勒展开为

$$\Psi_q(u) = \mu(q)\,u + \beta(q)\,u^3 + o(u^3), \qquad u \to 0.$$

注意，在这 种对称情形下，$m_0(q) \equiv 0$ 且分支曲率为零， $\beta_{\text{eff}}(q)$与 $\beta(q$相同).

定理 2 （一维叉形分岔）。设 $\Psi_q(u)$ 为 C^3，且对所有 q 都有 $\Psi_q(0) = 0$。若 q_c 满足以下条件，则在$(u,q) = (0, q_c)$处发生叉形分岔：

（a）线性横截性：线性系数$ffi\ \mu(q)$：$= \Psi'_q(0)$ 在 $q = q$ 处横截地穿过零 $_c$：

$$\mu(q_c) = 0 \quad and \quad \mu'(q_c) \neq 0.$$

(b) 三次非退化性：三次系数 $\beta(q) := \frac{1}{6}\Psi'''_q(0)$ 在 q_c 处非零：

$$\beta(q_c) \neq 0.$$

$\mu'(q_c)$和 $\beta(q_c)$的符号决定分岔是超临界还是亚临界。

我们的任务是验证模型是否满足这两个条件。

7.2. 线性系数$\mu(q)$的计算

命题 1. 线性系数 $\mu(q) = \Psi'_q(0)$</style}由下式给出

$$\mu(q) = \frac{2}{q}\int_0^\infty \Big[f''(t)\Big(1 - \tfrac{1}{2}f(t)\Big) + \tfrac{1}{2}(f'(t))^2\Big]\rho(qt)\,dt. \tag{21}$$

在对称基准中，若 $m_0(q) \equiv 0$，此定义与一般定义 $\mu(q) = \partial_d \bar{F_q}(m,0)\big|_{m=0}$一致。证明。我们对其求导 $\Psi_q(u)$ 在 $u = 0$ 处使用积分内的乘积法则。令

$$\Psi_q(u) = -\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\tfrac{1}{q}\,f'\Big(\tfrac{|x-u|}{q}\Big)\,\mathrm{sgn}(x-u)}_{=:A(u,x)}\ \underbrace{\Big(1 - \tfrac{1}{2}f\Big(\tfrac{|x+u|}{q}\Big)\Big)}_{=:B(u,x)}\rho(x)\,dx.$$

Then

$$\mu(q) = \Psi'_q(0) = -\int_{\mathbb{R}} \partial_u\big[A(u,x)B(u,x)\big]\big|_{u=0}\,\rho(x)\,dx.$$

项 *(I)*： $\partial_u A(u,x)|_{u=0}\,B(0,x)$。利用分布导数：

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big(f'\Big(\tfrac{|x-u|}{q}\Big)\,\mathrm{sgn}(x-u)\Big) = -\frac{1}{q}\,f''\Big(\tfrac{|x-u|}{q}\Big) - 2\,f'\Big(\tfrac{|x-u|}{q}\Big)\delta(x-u).$$

乘以 $1/q$ 并在$u = 0$处求值：

$$\begin{aligned}\partial_u A(u,x)|_{u=0} &= \Big[\partial_u\Big(\tfrac{1}{q}f'\Big(\tfrac{|x-u|}{q}\Big)\,\mathrm{sgn}(x-u)\Big)\Big]_{u=0}\\ &= -\tfrac{1}{q^2}\,f''\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big) - \tfrac{2}{q}\,f'\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big)\delta(x).\end{aligned}$$

项 (I) 的积分为

$$-\int\Big[-\tfrac{1}{q^2}f''\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big) - \tfrac{2}{q}\,f'\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big)\delta(x)\Big]\Big(1 - \tfrac{1}{2}f\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big)\Big)\rho(x)\,dx.$$

含有 $\delta(x)$ 的项在 $x = 0$ 处取值，但 $f'(0) = 0$ （因为 f 在 0 处取得最大值），因此该项消失。剩下

$$\text{(I)} : \frac{1}{q^2}\int_{\mathbb{R}} f''\left(\tfrac{|x|}{q}\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}f\left(\tfrac{|x|}{q}\right)\right)\rho(x)\,dx.$$

项（*II*）：$A(0,x)\partial_u B(u,x)|_{u=0}$。对$B(u,x)$关于$u$ 求导，并在$u = 0$处取值，可得

$$\begin{aligned}\partial_u B(u,x)|_{u=0} &= \left[-\tfrac{1}{2q}f'\left(\tfrac{|x+u|}{q}\right)\operatorname{sgn}(x+u)\right]_{u=0}\\ &= -\tfrac{1}{2q}f'\left(\tfrac{|x|}{q}\right)\operatorname{sgn}(x).\end{aligned}$$

此外，$A(0,x) = \frac{1}{q}f'\left(\frac{|x|}{q}\right)\operatorname{sgn}(x)$。项（II）的积分为

$$-\int\left[\tfrac{1}{q}f'\left(\tfrac{|x|}{q}\right)\operatorname{sgn}(x)\right]\left[-\tfrac{1}{2q}f'\left(\tfrac{|x|}{q}\right)\operatorname{sgn}(x)\right]\rho(x)\,dx.$$

由于 $\operatorname{sgn}(x)^2 = 1$ （对于$x \neq 0$，这足以进行积分），这可简化为

$$\text{(II)} : \tfrac{1}{2q^2}\int_{\mathbb{R}}\left(f'\left(\tfrac{|x|}{q}\right)\right)^2\rho(x)\,dx.$$

合并项（I）和项（II），得到 $\mu(q)$ 的表达式：

$$\mu(q) = \frac{1}{q^2}\int_{\mathbb{R}}\left[f''\left(\tfrac{|x|}{q}\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}f\left(\tfrac{|x|}{q}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left(f'\left(\tfrac{|x|}{q}\right)\right)^2\right]\rho(x)\,dx.$$

令$t = x/q$，并利用 ρ的奇偶性，可将其化简为公式（21）。 □

7.3. 分岔点 q_c 的存在性

现在我们证明 $\mu(q)$ 必须穿过零，从而保证 q_c 的存在。

定理 3 （$\mu(q)$ 的符号变化）。设 f 为 C^2，且 $f(0) = 1$，$f'(0) = 0$，$f''(0) < 0$，$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$，并且 $f' \in L^2(0,\infty)$。设 ρ 为偶的有界概率密度，在原点连续且满足 $\rho(0) > 0$。定义

$$\psi(t) := f''(t)\left(1 - \tfrac{1}{2}f(t)\right) + \tfrac{1}{2}(f'(t))^2.$$

那么，线性系数 $\mu(q) := \frac{2}{q}\int_0^\infty \psi(t)\,\rho(qt)dt$ 在 $(0,\infty)$ 上连续，并满足

$$\lim_{q\to 0^+} q\mu(q) = 2\rho(0)\int_0^\infty (f'(t))^2 dt > 0 \quad (\mu(q) > 0 \text{ as } q \to 0^+),$$

$$\lim_{q\to\infty} q^2\mu(q) = \psi(0) = \tfrac{1}{2}f''(0) < 0 \qquad (\mu(q) < 0 \text{ as } q \to \infty).$$

根据介值定理，至少存在一个 $q_c > 0$，使得 $\mu(q_c) = 0$。

注 *7*（超临界分岔）。定理 *3* 中确立的 $\mu(q)$ 的符号变化意味着，若 q_c 是 $\mu(q)$ 的单零点——尤其是当它是第一个正根时——则存在 q_c 的一个邻域，使得对于 $q < q_c$，$\mu(q) > 0$；而对于 $q > q_c$，$\mu(q) < 0$。在这种情况下，必有 $\mu'(q_c) < 0$。因此，在非退化条件 $\beta(q_c) \neq 0$成立的情况下，附加要求 $\beta(q_c) < 0$ 保证 $q = q_c$ 处的叉形分岔为超临界分岔。特别是，存在 q_c 的一个邻域，使得当 $q > q_c$时，中心均衡分支局部稳定；而当 $q < q_c$ 时，它失去稳定性，并出现两个对称的极化均衡分支，且二者均局部稳定。

证明。结构恒等式。令 U(t) := f ′(t)(1 − $\frac{1}{2}$f (t))。则 U′(t) = f ′′(t)(1 − $\frac{1}{2}$f (t)) − $\frac{1}{2}$(f ′(t))^2。因此， ψ(t) = U′(t) + (f ′(t))^2。积分并利用边界条件（ f ′(0) = 0, f ′(∞) = 0, f (∞) = 0），可得

$$\int_0^\infty \psi(t)\,dt = [U(t)]_0^\infty + \int_0^\infty (f'(t))^2\,dt = \int_0^\infty (f'(t))^2\,dt.$$

Sin由于 f 不是常数，该积分严格为正。我们还假设 $f' \in L^2$, , 因此该积分有限。

μ(q)的连续性。令 I(q) := $\int_0^\infty \psi$(s/q)g(s)ds。由于 ψ 有界（f、f ′、f ′′ 也有界），且 $\rho \in L^1$, , 控制收敛定理表明 I(q) 对 q > 0连续。由于 μ(q) = (2/q^2)I(q)，μ(q) 对 q > 0也连续。q → 0$^+$时的渐近行为。我们分析 qμ(q) = 2 $\int_0^\infty \psi$(t)ρ(qt)dt。当 q → 0$^+$时，对每个 t， ρ(qt) → ρ(0)。直接应用控制收敛定理并不容易，因此需要更仔细的分析。令 T (q) = q$^{-1/2}$，则 T (q) → ∞ 且 qT (q) → 0。我们将积分拆分如下:

$$\frac{q\mu(q)}{2} = \int_0^{T(q)} \psi(t)\rho(qt)dt + \int_{T(q)}^\infty \psi(t)\rho(qt)dt.$$

令 $\omega(r) := \sup_{|x|\le r} |\rho(x) - \rho(0)| \to 0$ 当 $r \to 0$。第一项为 $\int_0^{T(q)} \psi(t)(\rho(0) + (\rho(qt) - \rho(0)))dt$。误差有如下界

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{T(q)} \psi(t)(\rho(qt) - \rho(0))dt\right| &\le \omega(qT(q)) \int_0^{T(q)} |\psi(t)|dt \\ &\le \omega(q^{1/2})\|\psi\|_1 \to 0.\end{aligned}$$

第二项的上界为

$$\|\rho\|_\infty \int_{T(q)}^\infty |\psi(t)|dt \to 0$$

因为 $T(q) \to \infty$ 且 $\psi \in L^1$。因此,

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 0^+} q\mu(q) &= 2 \lim_{q\to 0^+} \int_0^{T(q)} \psi(t)\rho(0)dt \\ &= 2\rho(0) \int_0^\infty \psi(t)dt = 2\rho(0) \int_0^\infty (f'(t))^2 dt > 0.\end{aligned}$$

关于 q 的渐近结果 → ∞. 我们采用 μ(q) = $\frac{2}{q^2}$ $\int_0^\infty \psi$(s/q)ρ(s)ds的形式。当 $q \to \infty$时，对每个 s， ψ(s/q) → ψ(0)。被积函数由 $\|\psi\|_\infty \rho(s)$控制；由于 $\bar{\rho} \in L^1$，该函数属于 $L^1(0,\infty)$。由控制收敛定理:

$$\lim_{q\to\infty} q^2\mu(q) = 2\int_0^\infty \lim_{q\to\infty} \psi(s/q)\rho(s)ds = 2\int_0^\infty \psi(0)\rho(s)ds.$$

利用 $\psi(0) = f''(0)(1 - \frac{1}{2}f(0)) + \frac{1}{2}(f'(0))^2 = \frac{1}{2}f''(0)$，以及 $\int_0^\infty \rho(s)ds = \frac{1}{2}$（因为 ρ 是偶概率密度）:

$$\lim_{q\to\infty} q^2\mu(q) = 2 \cdot (\tfrac{1}{2}f''(0)) \cdot (\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}f''(0) < 0.$$

由于 μ(q) 连续，在较小的 q 时为正，在较大的 q 时为负，根据介值定理，至少存在一个$q_c > 0$，使得 μ(q_c) = 0。 □

注 8（横截条件）。分岔的第二个条件是 $\mu'(q_c) \neq 0$。令 $D(q) := q\mu(q)/2$。求导得 $\mu'(q_c) = 2D'(q_c)/q_c$。因此，$\mu'(q_c) \neq 0$ 等价于 $D'(q_c) \neq 0$:

$$D'(q_c) = \frac{d}{dq}\int_0^\infty \psi(t)\rho(qt)dt\Big|_{q=q_c} = \int_0^\infty \psi(t)t\rho'(q_c t)dt \neq 0. \tag{22}$$

这是关于密度导数 ρ的一个一般性非退化条件；在积分号下求导的有效性，可以通过附加正则性假设来保证： ρ 在$\mathbb{R}$ 上绝对连续，并满足 $\int_0^\infty t\,|\rho'(t)|dt < \infty$。为此，固定 $q > 0$ 并考察差商：

$$\frac{D(q+h)-D(q)}{h} = \int_0^\infty \psi(t)\,\frac{\rho((q+h)t)-\rho(qt)}{h}\,dt.$$

由于 ρ 绝对连续，对于几乎处处的 $t \geq 0$，有

$$\frac{\rho((q+h)t)-\rho(qt)}{h} = t\int_0^1 \rho'((q+\theta h)t)\,d\theta.$$

因此，

$$\left|\psi(t)\,\frac{\rho((q+h)t)-\rho(qt)}{h}\right| \leq \|\psi\|_\infty\, t\int_0^1 \left|\rho'((q+\theta h)t)\right|\,d\theta.$$

当 $|h|$ 足够小时，对于所有 $\theta \in [0,1]$，有 $q+\theta h \geq q/2$。因此，对于每个 $\theta \in [0,1]$ 以及这样的 h，利用变量替换 $\tau = (q+\theta h)t$，可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t\,\left|\rho'((q+\theta h)t)\right|\,dt &= \frac{1}{(q+\theta h)^2}\int_0^\infty \tau\,|\rho'(\tau)|\,d\tau \\ &\leq \frac{4}{q^2}\int_0^\infty \tau\,|\rho'(\tau)|\,d\tau < \infty.\end{aligned}$$

因此，差商中的被积函数被一个 $L^1(0,\infty)$ 函数所控制（对 θ 一致，且 h 足够小时均如此），于是我们可以应用控制收敛定理，将 $h \to 0$ 的极限移入积分号内。由于

$$\lim_{h\to 0}\frac{\rho((q+h)t)-\rho(qt)}{h} = t\,\rho'(qt) \qquad \textit{for a.e. } t,$$

我们得出 D 可微，且公式（22）成立。

7.4. 三次系数$\beta(q)$的计算

命题 2. 三次系数 $\beta(q) = \frac{1}{6}\Psi_q'''(0)$ 为 -

$$\beta(q) = \frac{f^{(3)}(0)\rho(0)}{6q^3} - \frac{2}{q^3}\int_0^\infty \eta(t)\rho(qt)\,dt, \tag{23}$$

其中 $\eta(t)$ 定义为

$$\eta(t) := \frac{1}{4}\big(f''(t)\big)^2 - \frac{1}{3}f'(t)f^{(3)}(t) - \frac{1}{6}f^{(4)}(t)\Big(1-\tfrac{1}{2}f(t)\Big). \tag{24}$$

证明。令

$$\Psi_q(u) \;=\; -\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\tfrac{1}{q}\,f'\Big(\tfrac{|x-u|}{q}\Big)\,\mathrm{sgn}(x-u)}_{=:A(u,x)}\;\underbrace{\Big(1-\tfrac{1}{2}f\Big(\tfrac{|x+u|}{q}\Big)\Big)}_{=:B(u,x)}\,\rho(x)dx$$

并考虑在 $\mathrm{u} = 0$ 附近的泰勒展开 $\mathrm{A(u,x)} = \sum^3 \mathrm{k{=}0}\, \mathrm{A}_k(\mathrm{x})\mathrm{u}^k + \mathrm{O}(\mathrm{u}^4)$ 和 $\mathrm{B(u,x)} = \sum^3 \mathrm{k{=}0}\, \mathrm{B}_k(\mathrm{x})\mathrm{u}^k + \mathrm{O}(\mathrm{u}^4)$。利用分布导数处理绝对值（由于 $\mathrm{f'(0)} = 0$，不存在边界贡献），并收集乘积 $\mathrm{A(u,x)B(u,x)}$ 中的 u^3 项，我们得到

$$\begin{aligned}
A_3\,B_0 \;&=\; -\frac{1}{6q^4}\Big[f^{(4)}\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big) + 2q f^{(3)}\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big)\,\delta(x)\Big]\Big(1-\tfrac{1}{2}f\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big)\Big),\\
A_2\,B_1 \;&=\; -\frac{1}{4q^4}\,f^{(3)}\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big)\,f'\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big),\\
A_1\,B_2 \;&=\; +\frac{1}{4q^4}\Big(f''\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big)\Big)^2,\\
A_0\,B_3 \;&=\; -\frac{1}{12q^4}\,f'\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big)\,f^{(3)}\Big(\tfrac{|x|}{q}\Big).
\end{aligned}$$

将所有这些项归并后，u 中对 $A(u,x)B(u,x)$ 的三次贡献为

$$\frac{u^3}{q^4}\left\{\eta\left(\frac{|x|}{q}\right)-\frac{q}{3}f^{(3)}\left(\frac{|x|}{q}\right)\delta(x)\left[1-\frac{1}{2}f\left(\frac{|x|}{q}\right)\right]\right\}.$$

由于 $\Psi_q(u) = -\int_{\mathbb{R}} A(u,x)B(u,x)\,\rho(x)dx$，利用 $\rho(x)$ 的奇偶性及变量替换 $x = qt$，三次系数 $\beta(q) = \frac{1}{6}\Psi_q'''(0)$ 可由式 (23) 和式 (24) 得出。 □

7.5. 分岔条件总结

当 $q = q_c$ 时，发生叉形分岔；此时 $\mu(q_c) = 0$、$\mu'(q_c) \neq 0$，且 $\beta(q_c) \neq 0$。用积分条件表示，即：

1. $\mu(q_c) = 0$:

$$\int_0^\infty \underbrace{\left[f''(t)\left(1-\tfrac{1}{2}f(t)\right)+\tfrac{1}{2}(f'(t))^2\right]}_{=:\psi(t)}\rho(q_c t)\,dt = 0$$

2. $\mu'(q_c) \neq 0$:

$$\int_0^\infty \psi(t)\,t\rho'(q_c t)\,dt \neq 0$$

3. $\beta(q_c) \neq 0$:

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{4}(f''(t))^2-\frac{1}{3}f'(t)\,f^{(3)}(t)-\frac{1}{6}f^{(4)}(t)\left(1-\tfrac{1}{2}f(t)\right)\right]\rho(q_c t)\,dt \neq \frac{f^{(3)}(0)\rho(0)}{12}$$

4. 若 q_c 是 $\mu(q)$ 的单零点——尤其是第一个正根——则 $\mu'(q_c) < 0$，并且还需满足

$$\beta(q_c) < 0$$

这保证了在$q = q_c$ 处发生的叉形分岔是超临界的。因此，当$q > q_c$时，中心平衡态局部稳定；而当$q < q_c$时，两个对称极化平衡点局部稳定。

8. 对称选民群示例

本节将上述建立的抽象分岔理论应用于对称情形 $\rho(x) = \rho(-x)$下三种具体的满意化核f和选民密度ρ。对于每一对 (f, ρ)，我们计算线性系数 $\mu(q)$ 和 $\beta(q)$，找出一个临界值$q_c > 0$，使得 $\mu(q_c) = 0$，并验证非退化条件 $\mu'(q_c) \neq 0$ 和 $\beta(q_c) \neq 0$。这些条件保证极化距离的一维约化方程中出现叉形分岔。本节始终使用 $\mu(q)$ 的一般公式 (21) 以及 $\beta(q)$ 的表达式 (23)–(24)。特别是，在下文讨论的所有示例中，均有 $\mu'(q_c) < 0$ 和 $\beta(q_c) < 0$，因此叉形分岔是超临界的。

8.1. 情形 *1*：高斯–高斯

我们首先考虑满意化核和选民密度均为高斯分布的情形。对于这一选择，直接使用公式（21）进行计算，可得线性系数的显式表达式

$$\mu(q) = \frac{1}{2q\sqrt{q^2+2}} - \frac{q}{(q^2+1)^{3/2}}.$$

因此，容忍度参数q 的临界值可由 $\mu(q)$ 的根求得，这等价于求解（例如， [9]）

$$(q_c^2+1)^3 - 4q_c^4(q_c^2+2) = 0.$$

因此，分岔参数由该方程唯一的正根给出，

$$q_c \approx 0.807379,$$

对于 $\mu'(q_c) < 0$。

三次系数由方程（23）和（24）给出

$$\beta(q) = \frac{q}{2\,(q^2+1)^{5/2}} - \frac{1}{2q^3\sqrt{q^2+2}},$$

并满足 $\beta(q_c) < 0$，因此叉形分岔是超临界的，当$q < q_c$时，会出现两个稳定、对称且极化的均衡。

8.2. 情形 *2*：柯西–高斯

现在转　　向一种混合设定，其中满意化核呈柯西形，而选民密度仍然是高斯分布 分布。对于这一对分布，线性系数具有公式（21）给出的闭式

$$\mu(q) = \frac{e^{\frac{q^2}{2}}\left(q^6+24q^4+27q^2-6\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)-1\right]+\left(q^5+23q^3+6q\right)}{24q}.$$

$\mu(q)$ 的最小正根确定了分岔参数

$$q_c \approx 0.975328,$$

使得 $\mu'(q_c) < 0$。

三次系数由公式（23）和（24）得出

$$\beta(q) = -\frac{1}{240q^3}\left[e^{q^2/2}P_1(q)\sqrt{\pi/2}\,(\operatorname{erf}(q/\sqrt{2})-1) + qP_2(q)\right],$$

其中 $P_1(q)$ 和 $P_2(q)$ 由下式给出

$$P_1(q) = q^{10}+45q^8+245q^6+105q^4+60q^2-120,$$
$$P_2(q) = q^8+44q^6+203q^4-20q^2+120,$$

且满足 $\beta(q_c) < 0$，这表明叉形分岔是超临界的；当容忍度降至q_c以下时，便会产生极化。

8.3. 情形 *3*：柯西–柯西

最后，我们考虑柯西–柯西设定，其中满意化核和选民密度均为重尾分布。在这种情形下，线性系数化简为公式（21）给出的有理表达式。

$$\mu(q) = \frac{1-2q(2q^2+q-2)}{4q(q+1)^4}.$$

临界值q_c 由分子中的三次方程确定，其唯一正根的数值为

$$q_c \approx 0.906803,$$

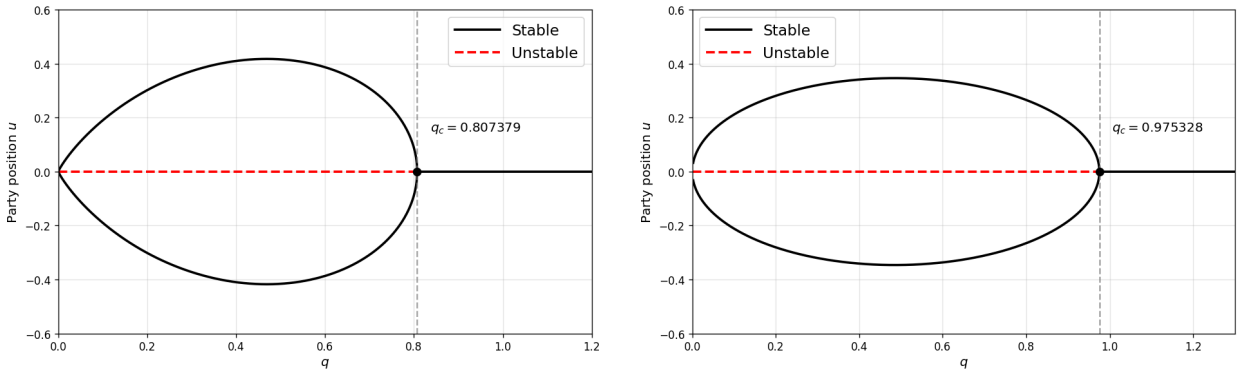
其中 $\mu'(q_c) < 0$。

同样，三次系数可由公式（23）和（24）推出，也得到一个有理表达式。

$$\beta(q) = \frac{2q^5-7q^4-20q^3-15q^2-6q-1}{2q^3(q+1)^6},$$

并满足 $\beta(q_c) < 0$，因此该叉形分岔是超临界的，且当 $q < q_c$ 时开始出现极化。

图 6 展示了本节所讨论的前两组核–选民群体组合所对应的隐式均衡条件 $\Psi_q(u) = 0$ 定义的分岔图，这两组组合具有一般行为的代表性。在这两种情况下，分析预测的临界值 q_c 标志着一次超临界叉形分岔：随着 q 降至 q_c以下，中心平衡态失去稳定性，并出现两个稳定的对称极化分支。第三个例子呈现出相同的定性分岔结构，因此为简洁起见不再列出。



(a) 高斯–高斯情形。

(b) 柯西核，高斯选民群体。

图6：代表性核–选民群体组合的分岔图。每个面板显示对称均衡分支$u(q)$，该分支由隐式均衡条件 $\Psi_q(u) = 0$ 定义，表示为容忍度参数q的函数；由解析方法推导的临界值q_c 以虚线竖线标出。所有情形均呈现超临界叉形分岔。

9. 结论

我们研究了一般的选举竞争满意化空间模型，其中意识形态分化由选民容忍度与策略定位之间的相互作用内生地产生。研究结果表明，趋同于中位选民并非普遍原则，而是特定机制下的结果：在对称基准中，一旦容忍度降至临界阈值以下，趋同于中心的状态就会通过超临界叉形分岔而消失。这一机制严谨地说明了意识形态分离如何在没有外生冲击的情况下出现，甚至无需假设候选人是极端主义者。

对于非对称选民群体，同一分岔可能展开为滞后回线，产生一种“锁定”效应：即使选民容忍度恢复，极化仍可能持续。更广泛地说，我们表明，滞后现象可以在一个简单的基于方程的模型中出现，从而补充了计算密集型的基于主体的极化研究方法[12, 13, 14]。

在高容忍度极限下，政党趋近于选民分布的均值，而非中位数，这表明，足够宽容的选民群体会引发一种质心（均值）逻辑，而非经典的中位选民逻辑。然而，在对称选民分布下，均值与中位数重合，因此，当容忍度足够高时，中位选民预测得以恢复。这些在一般正则性条件下确立的结果表明，政治中心的稳定性从根本上取决于选民满意度的几何结构，以及选民对意识形态距离的容忍度。

当然，该模型经过了有意的简化。我们假设意识形态空间是一维的，并通过令两个政党共享相同的满意化核f和容忍度参数 q，对政党技术施加对称性。这些设定旨在保留解析可处理性，并分离出选民容忍度在塑造均衡结构方面的作用。尽管模型十分简约，却仍能产生丰富的定性现象——包括对称性破缺、非对称极化和滞后现象——这表明，即使在结构极简的空间环境中，也可能出现复杂的政治动态。

未来研究似乎有几个颇具前景的拓展方向。首先，将分岔分析拓展到多维意识形态空间，可能会揭示更丰富的对称性破缺模式，尤其是在不同维度具有不等显著性或以非线性方式相互作用时。其次，允许政党在满意化核或容忍度参数方面存在差异，有助于阐明拥有不同活动人士基础的组织之间的策略性非对称。第三，纳入选民的感知扭曲——例如对意识形态距离的有偏或非对称表示——可能为情感极化模型提供一座桥梁。最后，引入政党位置随时间演化的显式动态，可以阐明滞后现象如何与缓慢的社会变迁、冲击、学习和制度约束相互作用。这些拓展中的每一项都将深化对满意化行为的数学结构与政治极化经验模式之间联系的理解。

参考文献

[1] H. 霍特林，《竞争中的稳定性》，《经济学杂志》39（153）（1929年）41–57。[2] A. 唐斯，《民主的经济理论》，Harper & Row，纽约，1957年。[3] J. H. Aldrich，《一个包含政党活动的唐斯式空间模型》，《美国政治科学评论》77（4）（1983）974–990。[4] D. P. Baron，《政府组建与内生政党》，《美国政治科学评论》87（1）（1993）34–47。[5] M. J. Hinich，M. C. Munger，《意识形态与政治选择理论》，密歇根大学出版社，安娜堡，1994年。[6] A. Alesina，《理性选民两党制中的可信度与政策趋同》，《美国经济评论》78（4）（1988）796–805。[7] A. Alesina，A. Cukierman，《模糊性的政治》，《经济学季刊》105（4）（1990）829–850。[8] A. Alesina，H. Rosenthal，《党派政治、分裂政府与经济》，剑桥大学出版社，纽约，1995年。[9] V. C. Yang，D. M. Abrams，G. Kernell，A. E. Motter，《为什么美国政党如此极化？一个“满意化”动力学模型》，《SIAM评论》62（3）（2020）646–657。[10] R. Venegeroles，《超越中位选民：意识形态维度如何塑造政党极化的模型》，《物理评论E》111（5）（2025）054316。[11] V. Guillemin，A. Pollack，《微分拓扑学》，Prentice–Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1974年。[12] M. W. Macy，M. Ma，D. R. Tabin，J. Gao，B. K. Szymanski，《极化与临界点》，《美国国家科学院院刊》118（50）（2021）e2102144118。[13] A. R. Vieira，C. Anteneodo，《阈值q选民模型》，《物理评论E》97（5）（2018）052106。[14] K. Sznajd-Weron，A. J.edrzejewski，B. Kami´nska，《走向理解社会滞后现象：来自基于主体的建模的洞见》，《心理科学展望》19（2）（2024）511–521。