arXiv:2601.07116v1 [math.RA] 12 Jan 2026

半环簇区间 $[\mathsf{V}(S_7),\ \mathsf{V}(B_2^1)]$ 具有连续统基数

Zi Dong Gao、Miao Miao Ren 和 Meng Ya Yue

摘要。 我们证明，在加法幂等半环（ai-半环）簇格中，区间 $[\mathsf{V}(S_7), \mathsf{V}(B_2^1)]$ 具有连续统基数，其中 S_7 是最小的非有限基加法幂等半环（一个三元代数），而 B_2^1 是乘法约化为六元 Brandt 幺半群的 ai-半环。

数学主题分类。 16Y60,03C05, 08B15.
关键词。 半环、簇、子簇格。

1. 引言

簇是一个对取子代数、同态像和任意直积封闭的代数类。根据 Birkhoff 定理，一个代数类是簇，当且仅当它是一个等式类，也就是说，它由所有满足某组恒等式的代数组成。

对于代数类 $\mathcal{K}$，我们用 $\mathsf{V}(\mathcal{K})$ 表示由 $\mathcal{K}$ 生成的簇，也就是包含 K 的最小簇。特别地，$\mathsf{V}(A)$ 表示由单个代数 A 生成的簇。如果一个簇可以用有限组恒等式定义，则称其为有限基簇；否则称其为非有限基簇。相应地，如果代数 A 生成的簇 $\mathsf{V}(A)$ 是有限基簇或非有限基簇，则称该代数是有限基或非有限基。代数类的有限基问题是泛代数中最重要的问题之一，关注的是根据其成员是否为有限基，对这些成员进行分类。

对于簇 $\mathcal{V}$，其所有子簇构成一个关于包含关系的完备格；我们将其记作 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$。如果 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$的子簇，那么由 $\mathcal{W}$ 与 $\mathcal{V}$之间所有簇组成的区间 $[\mathcal{W}, \mathcal{V}]$是 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$的一个完备子格。

理解子簇格 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$的结构，是研究簇的一项基本问题。这个问题的一个核心方面

是确定格中区间的大小。此类描述不仅揭示了 $\mathcal{V}$的内部复杂性，也往往反映了其所包含代数的重要代数性质和逻辑性质。

一个加法幂等半环（简称 ai-半环）是一个代数 $(S,+,\cdot)$，配备两个二元运算 $+$和 $\cdot$，使得加法约化 $(S,+)$ 是交换幂等半群，乘法约化 $(S,\cdot)$ 是半群，并且满足分配律

$$x(y+z)\approx xy+xz,\quad (x+y)z\approx xz+yz$$

成立。这类代数在数学中无处不在，并广泛应用于诸如代数几何 [2], 、热带几何 [20], 、信息科学 [11],和理论计算机科学 [12]等不同领域。

设 S 是一个 ai-半环。则在 S 上定义的关系 $\leq$为

$$a\leq b\Leftrightarrow a+b=b$$

一个偏序，使得 $(S,\leq)$ 构成一个上半格，其中任意两个元素 a 和 b 的上确界为 $a+b$。因此，加法约化 $(S,+)$ 由该半格序唯一确定。因此，通过 $(S,\leq)$ 的哈斯图来直观表示加法通常是很方便的。此外，很容易看出，序 $\leq$ 与乘法相容，这也解释了为什么这种代数也被称为半格序半群。

过去二十年来，关于加法幂等半环的有限基问题及其他簇论性质得到了深入研究和充分发展（参见 [3, 5, 7, 9, 19, 21, 23–28, 31,33–35]）。特别是，Pastijn 等人 [9,21]证明，满足恒等式 $x^2\approx x$ 的 ai-半环簇恰有 78 个，且它们均为有限基。Ren 等人 [26, 28] 随后证明，满足恒等式$x^3\approx x$ 的 ai-半环簇恰有 179 个，并且它们也都为有限基。最近，Volkov 等人 [27]表明，对于任意整数 $n\geq 4$，满足$x^n\approx x$ 的不同簇有 $2^{\aleph_0}$ 个，其中大多数为非有限基。

表 1. S_7 的凯莱表

$+$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	0
1	0	0	1

$\cdot$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	0	a
1	0	a	1

另一方面，Zhao等人 [35] 证明，阶至多为三的所有 ai-半环都有有限基，但半环 S_7可能是个例外；其凯莱表见表 1table.1。Jackson等人 [19]后来证明， S_7 本身是非有限基的。事实上，他们证明了 S_7能将这一性质传递给许多其他有限 ai-半环。这类例子包括其簇包含 S_7的有限平坦半环，以及乘法约化为六元 Brandt 幺半群的 ai-半环B_2^1 。

回顾一下， B_2^1 的元素是这些矩阵：

$$\underset{0}{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}} \quad \underset{1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}} \quad \underset{a}{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}} \quad \underset{b}{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}} \quad \underset{ab}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}} \quad \underset{ba}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

其乘法由通常的矩阵乘法定义。其加法约化由图1中的哈斯图确定。Perkins [22]证明了 B_2^1 的乘法约化不是有限基的；事实上，它是第一个非有限基有限半群的例子，有时也称为Perkins半群。

很容易验证， B_2^1 包含 S_7的一个副本；因此，$\mathrm{V}(S_7)$是$\mathrm{V}(B_2^1)$的一个子簇，区间 $[\mathrm{V}(S_7),\ \mathrm{V}(B_2^1)]$ 是定义良好的。我们指出，Volkov [33]也独立地以不同的方法解决了B_2^1 的有限基问题。

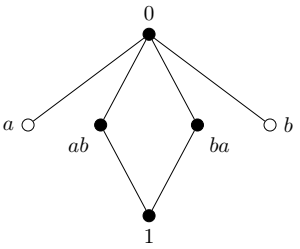


图1. B_2^1的加法序

近年来，有限 ai-半环 S_7 和 B_2^1 已成为研究 ai-半环簇的关键对象。Gusev 和 Volkov [14–16]指出了若干温和条件，在这些条件下，簇包含 B_2^1 的有限 ai-半环不是有限基的。Gao 等人 [7] 证明，$\mathrm{V}(S_7)$本身包含$2^{\aleph_0}$ 个不同子簇，其中只有六个是有限基的。最近，他们 [8] 进一步证明，区间 $[\mathrm{V}(S_7),\ \mathrm{V}(B_2^1)]$ 中的每个簇都不是有限基的。

这些进展置身于更广阔的历史背景之中。Dolinka [4] 此前证明，区间 $[\mathrm{V}(\Sigma_7),\ \mathrm{V}(\mathbf{Rel}(2))]$ 的基数也为 $2^{\aleph_0}$，其中 Σ_7 是通过向 B_2^1 添加一个新元素而得到的 7 元 ai-半环，该元素既是加法最小元，也是乘法零元；$\mathbf{Rel}(2)$ 则是 2 元集合上所有二元关系构成的半环。据我们所知，$\mathbf{Rel}(2)$ 是第一个其簇拥有 $2^{\aleph_0}$ 个不同子簇的有限 ai-半环实例，而 Σ_7 本身则是第一个非有限基有限 ai-半环实例（见 [3]）。注意，区间 $[\mathrm{V}(B_2^1),\ \mathrm{V}(\Sigma_7)]$ 的基数也为 $2^{\aleph_0}$ （见 [8]）。

这些结果共同描绘了 ai-半环簇内部错综复杂的图景。然而，关于区间 $[\mathrm{V}(S_7),\ \mathrm{V}(B_2^1)]$ 的一个基本问题仍未得到解答：尽管已知其中所有成员都是非有限基的，但它的确切基数是多少？具体来说，

它是否也达到了 $2^{\aleph_0}$ 所能达到的最大基数，还是严格小于它？本文探讨了这一未决问题。我们的主要成果如下定理。

定理 1.1. 区间 $[\mathsf{V}(S_7), \mathsf{V}(B_2^1)]$ 的基数为 $2^{\aleph_0}$。

对于一个 ai-半环 S，我们用 $\mathsf{V}_s(S)$ 表示由 S 的乘法半群约化所生成的半群簇。我们为半群簇得到了一个相应的结果。

定理 1.2. 区间 $[\mathsf{V}_s(S_7), \mathsf{V}_s(B_2^1)]$ 的基数为 $2^{\aleph_0}$。

以下命题概括了文献中广泛使用的一种标准方法，用于证明一个簇具有 $2^{\aleph_0}$ 个不同子簇（参见 [4,10,13,17,18,23,32]）。虽然这一基本思想经常被隐式地用于构造子簇格中的大区间，但很少有人将其明确表述为一个正式且独立的结果；为方便读者并供后续参考，我们在此给出该命题。对于集合 I，令 $\mathcal{P}(I)$ 表示由 I 的所有子集按包含关系构成的格。

命题1.3。设 $\mathcal{V}$ 为一个簇，且 I 为一个可数无限集。则以下陈述等价：

（a）格 $\mathcal{P}(I)$ 嵌入子簇格 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ 中。（b）存在代数族 $(A_i)_{i\in I}$，其中的代数属于 $\mathcal{V}$；并且存在恒等式族 $\{\sigma_i\}_{i\in I}$，使得对所有 i、$j \in I$，A_i 满足 σ_j 当且仅当 $i \neq j$。

当任一条件（因而两个条件）成立时，格 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ 具有 $2^{\aleph_0}$的基数；此外，若 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个子簇，并且对于所有 $i \in I$，$\mathcal{W}$ 都包含于 $\mathsf{V}(A_i)$，则区间 $[\mathcal{W}, \mathcal{V}]$ 也具有 $2^{\aleph_0}$的基数。

证明。假设条件（a）成立。则存在一个嵌入映射 φ: $\mathcal{P}(I) \to \mathcal{LV}$。这意味着 φ 和 φ^{-1} 都是保序的。对于每个 $i \in I$，令 A_i 为簇 $\varphi(\{i\})$ 中、以一个可数无限集为自由生成元集的自由代数。根据一个标准事实（见 [1, 引理11.8]），$\varphi(\{i\}) = \mathsf{V}(A_i)$。由于 $\varphi(\{i\})$ 不包含于 $\varphi(I \setminus \{i\}) = \mathsf{V}(\{A_j \mid j \in I \setminus \{i\}\})$，因此存在一个恒等式 σ_i，它在每个具有 $j \neq i$ 的 A_j 中成立，但在 A_i中不成立。这就证明了条件（b）。

反过来，假设 (b) 成立。考虑映射

$$\varphi\colon \mathcal{P}(I) \to \mathcal{L}(\mathcal{V}), \quad M \mapsto \mathsf{V}(\{A_m \mid m \in M\}).$$

根据假设，对于任意 $M \subseteq I$ 和任意 $i \in I$，簇 $\varphi(M)$ 满足 σ_i当且仅当 $i \notin M$。因此，对于任意 M，$N \subseteq I$我们有，$M \subseteq N$当且仅当 $\varphi(M) \subseteq \varphi(N)$。因此，$\varphi$是一个格嵌入映射，所以$\mathcal{P}(I)$ 嵌入到 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ 中。

最后，假设条件（a）或（b）成立，则 $\mathcal{P}(I)$ 嵌入 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$。由于 I 是可数无限集，因此立即可知 $\mathcal{P}(I)$ 的基数为 $2^{\aleph_0}$。由此，$\mathcal{L}(\mathcal{V})$ 的基数为 $2^{\aleph_0}$。此外，若 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个子簇，且对所有 $i \in I$，它都包含于 $\mathsf{V}(A_i)$ 中，那么上述映射 φ 可视为从 $\mathcal{P}(I)$ 到区间 $[\mathcal{W}, \mathcal{V}]$ 的映射，由此可知该区间的基数也为 $2^{\aleph_0}$。□

2. 预备知识

本节将为主定理的证明奠定基础，并给出必要的定义。

平坦半环是一种 ai-半环 S，其乘法约化含有零元 0，且其加法满足 $a+b=0$，对所有互不相同的 $a,b\in S$ 均成立。Jackson等人 [19, 引理 2.2] 指出，带零元 0 的半群是平坦半环，当且仅当它是 0-消去的，也就是说，$ab=ac\neq 0$ 蕴含 $b=c$，且 $ab=cb\neq 0$ 蕴含 $a=c$，对所有 $a,b,c\in S$ 均成立。

下列代数构成了一类重要的平坦半环。设 W 是自由半群的一个非空子集，并令 $S(W)$ 表示 W 中各词的所有非空子词与一个新符号 0 组成的集合。在 $S(W)$ 上定义二元运算 $\cdot$，规则如下：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\begin{cases}\mathbf{uv} & \text{if } \mathbf{uv}\in S_c(W)\setminus\{0\},\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

于是，$(S(W)\ \cdot)$ 构成一个带零元 0 的交换半群。容易验证，$(S(W)\ \cdot)$ 是 0-消去的，因此 $S(W)$ 成为平坦半环。特别地，如果 W 仅由一个词$\mathbf{w}$ 组成，我们将 $S(W)$ 记作 $S(\mathbf{w})$。如果在这一构造中允许空词 ε，那么乘法约化就是一个幺半群。在这种情况下，使用记号 $M(W)$ 和 $M(\mathbf{w})$。如果 a 是一个字母，那么 $M(a)$ 同构于 S_7。特别地，$M(\varepsilon)$（在 [31], 中记作 M_2）可以嵌入 S_7。

令 X^+ 表示在可数无限集 X 上由变量构成的自由半群。根据分配律，X 上的所有 ai-半环项都可以表示为 X^+ 中词的有限和。X 上的 *ai*-半环恒等式 是形如

$$\mathbf{u}\approx\mathbf{v},$$

的表达式，其中 u 和 v 是 X 上的 ai-半环项。设 u ≈ v 是字母表 $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ 上的 ai-半环恒等式。若某个 ai-半环 S 满足 u ≈v，或 u ≈v 在 S 中成立，则称其具有此性质；也就是说，对于所有 $a_1,a_2,\dots,a_n\in S$，都有 u$(a_1,a_2,\dots,a_n)$ =v$(a_1,a_2,\dots,a_n)$。这里，u$(a_1,a_2,\dots,a_n)$ 表示在 S 中按照赋值 $x_i\to a_i$ 对 u 求值的结果；v$(a_1,a_2,\dots,a_n)$ 的含义类似。

设 $\mathbf{p}$ 是 X^+ 中的一个词。那么 $c(\mathbf{p})$ 表示 $\mathbf{p}$ 中出现的所有变量的集合。对于每个 $\mathbf{u}_i\in X^+$ 都满足条件的 ai-半环项 $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\cdots+\mathbf{u}_n$，我们用 $c(\mathbf{u})$ 表示 $\mathbf{u}$ 中出现的所有变量的集合，也就是说，

$$c(\mathbf{u})=\bigcup_{1\leq i\leq n}c(\mathbf{u}_i).$$

根据 [31, 引理 1.1], M_2 满足 ai-半环恒等式 $\mathbf{u}\approx\mathbf{v}$，当且仅当$c(\mathbf{u})=c(\mathbf{v})$。

对于任意 ai-半环项$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{v}$，令$\mathbf{u}\preceq\mathbf{v}$ 表示恒等式$\mathbf{u}+\mathbf{v}\approx\mathbf{v}$。我们称$\mathbf{u}\preceq\mathbf{v}$ 为一个不等式。设 S 为一个 ai-半环。若S 满足恒等式$\mathbf{u}\preceq\mathbf{v}$，则记作$\mathbf{u}\preceq_S\mathbf{v}$。若$\mathbf{u}\preceq_S\mathbf{w}$ 蕴含$\mathbf{u}=\mathbf{w}$ 对每个词$\mathbf{u}$都成立，则称词$\mathbf{w}$ 对 S 是极小的。等价地，词$\mathbf{w}$ 对 S 是极小的，当且仅当它是 S的一个同恒词；也就是说，S 不满足任何形如$\mathbf{w}\approx\mathbf{u}$的非平凡恒等式

对于任意 ai-半环项$\mathbf{u}$。如果$\mathbf{w}$ 是 S的一个同恒词，那么从$\mathbf{w}$ 的某个子词得到的、通过重命名其中字母而形成的每个词，也都是 S的同恒词。

引理 2.1 ([23, 引理5.6]). 设 $\mathbf{w}$ 是一个词， S 是一个 *ai*-半环。那么， $\mathbf{w}$ 是 S 的同恒词，当且仅当平坦半环 $S(\mathbf{w})$ 属于$\mathsf{V}(S)$。

设 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是词。若 $\varphi(\mathbf{u})$ 是 $\mathbf{v}$ 的一个子词（对于某个代换 φ），则$\mathbf{v}$ 包含 $\mathbf{u}$ ； 否则， $\mathbf{v}$ $\mathbf{u}$-自由。现在设 $\mathbf{v}$ 是$\mathbf{u}$-自由的。那么，平坦半环 $S(\mathbf{v})$ 满足恒等式

$$\mathbf{u}x \approx x\mathbf{u} \approx \mathbf{u},$$

其中 x 是一个未在$\mathbf{u}$中出现的变量。这个恒等式简记为$\mathbf{u} \approx 0$。显然，平坦半环 $S(\mathbf{u})$ 不满足恒等式 $\mathbf{u} \approx 0$。现在得到如下结论：

命题 2.2. 设 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 是一个词集。假设词 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$两两自由。那么对于任意 i、 $j \in I$，平坦半环 $S(\mathbf{w}_i)$ 满足恒等式 $\mathbf{w}_j \approx 0$ ，当且仅当 $i \neq j$。

设 S 为 ai-半环。根据命题 1.3thm.1.3 和 2.2thm.2.2，结合引理 2.1thm.2.1，为证明簇 $\mathsf{V}(S)$ 具有 $2^{\aleph_0}$ 个不同子簇，只需找出一个两两自由的词组成的无限集合，使其中所有词都是 S 的同恒词。

3. [V( ]$\mathsf{V}(S_7), \mathsf{V}(B_2^1)$[]] 的基数

在本节中，我们应用命题 1.3thm.1.3 证明 [$\mathsf{V}(S_7)$,$\mathsf{V}(B_2^1)$] 包含 $2^{\aleph_0}$ 个不同的簇。在全文中， $\mathbb{N}$ 表示正整数集合。

回顾一下，Zimin 字 $\mathbf{z}_n$ 通过以下归纳方式定义：对所有整数 $n \geq 1$, 由 $\mathbf{z}_1 = x_1$ 以及 $\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_n x_{n+1} \mathbf{z}_n$ 定义。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathbf{w}_n$ 表示词

$$y_0 x_1 x_2 y_0 \left(\prod_{i=1}^{n} (y_i x_{i+2} y_i) \right) y_{n+1} x_{n+3} x_{n+4} y_{n+1}. \tag{3.1}$$

这个词由 Sapir 和 Volkov 引入， [30], 由 n 个彼此不相交的 Zimin 字 $\mathbf{z}_2$ 组成，这些字位于中央部分；其开头和结尾则各由词 yx_1x_2y 的一个彼此不相交的副本夹住。它构成了 [17] 中许多构造的基础，也曾在 [23, 例 5.7] 中用于证明 ai-半环簇 $\mathsf{V}(M(abacdc))$ 具有 $2^{\aleph_0}$ 个不同子簇。

引理 3.1. 设 $m, n \in \mathbb{N}$。则平坦半环 $S(\mathbf{w}_n)$ 满足恒等式$\mathbf{w}_m \approx 0$ 当且仅当 $n \neq m$。

证明。 如果 $n \neq m$，那么词 $\mathbf{w}_n$ 是 $\mathbf{w}_m$-自由的。为此，只需注意到， $\mathbf{w}_n$ 中长度大于 1 的每个子词都恰好出现一次。因此，任何将 $\mathbf{w}_m$ 映射到 $\mathbf{w}_n$的某个子词的半群代换，都必须将字母映射为字母。显然，只有当 $n = m$ 时，这种字母到字母映射才有可能。□

交换 x_1 和 x_2的位置后，我们得到 $\mathbf{w}_n$的一个副本：

$$\mathbf{w}'_n = y_0x_2x_1y_0\left(\prod_{i=1}^{n}(y_ix_{i+2}y_i)\right)y_{n+1}x_{n+3}x_{n+4}y_{n+1}.$$

引理 3.2。 设 $m, n \in \mathbb{N}$。那么平坦半环 $S(\mathbf{w}_n)$ 满足恒等式

$$\mathbf{w}_m \approx \mathbf{w}'_m \tag{3.2}$$

当且仅当 $n \neq m$。

证明。 容易看出， $S(\mathbf{w}_m)$ 不满足恒等式 (3.2equation.3.2)。若 $n \neq m$，则由引理 3.1thm.3.1， $\mathbf{w}_m \approx 0$ 和 $\mathbf{w}'_m \approx 0$ 均在 $S(\mathbf{w}_n)$ 中成立。因此， $S(\mathbf{w}_n)$ 满足恒等式 (3.2equation.3.2)。□

定理 3.3。 设 S 是一个 *ai*-半环。若 $\mathsf{V}(S)$ 包含 S_7 ，且每个词$\mathbf{w}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 都是 S 的同恒词，则区间 $[\mathsf{V}(S_7),\mathsf{V}(S)]$ 的基数为$2^{\aleph_0}$。

证明。由于 $\mathsf{V}(S)$ 包含 S_7，可立即推出 $\mathsf{V}(S_7)$ 是 $\mathsf{V}(S)$ 的一个子簇，因此区间 $[\mathsf{V}(S_7),\mathsf{V}(S)]$ 是定义良好的。对每个 $n \in \mathbb{N}$，由于 $\mathbf{w}_n$ 是 S 的同恒词，引理 2.1thm.2.1 表明平坦半环 $S(\mathbf{w}_n)$ 属于 $\mathsf{V}(S)$。令 A_n 表示 S_7 与 $S(\mathbf{w}_n)$ 的直积。那么，簇 $\mathsf{V}(A_n)$ 是区间 $[\mathsf{V}(S_7), \mathsf{V}(S)]$ 中的一个成员。容易看出，对于所有 $m \geq 1$， S_7 都满足恒等式 $\mathbf{w}_m \approx \mathbf{w}'_m$，因为 S_7 的乘法约化是交换的。由引理 3.2thm.3.2，对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$，代数 A_n 满足 $\mathbf{w}_m \approx \mathbf{w}'_m$ 当且仅当 $n \neq m$。因此，命题 1.3thm.1.3 表明区间 $[\mathsf{V}(S_7), \mathsf{V}(S)]$ 包含 $2^{\aleph_0}$ 个不同的簇。□

Ren 等人 [23, 例 5.7] 证明，每个词 $\mathbf{w}_n$ 都是平坦半环 $M(abacdc)$ 的同恒词。由于 $M(abacdc)$ 包含 S_7 的一个副本，定理 3.3thm.3.3 立即推出以下推论。

推论 3.4。 区间 $[\mathsf{V}(S_7), \mathsf{V}(M(abacdc))]$ 的基数为 $2^{\aleph_0}$。

为了证明区间 $[\mathsf{V}(S_7),\mathsf{V}(B_2^1)]$ 的基数为 $2^{\aleph_0}$，根据定理 3.3thm.3.3，只需证明每个词 $\mathbf{w}_n$ 都是B_2^1的同恒词。为此，我们首先建立一个充分条件，使给定 ai-半环中的每个 $\mathbf{w}_n$ 都是同恒词。

设 $\mathbf{w}$ 是 X^+ 中的一个词，且 L 是 X的子集。对于任意词$\mathbf{w} \in X^+$ 和任意子集 $L \subseteq X$，我们用 $\mathbf{w}(L)$ 表示从$\mathbf{w}$ 中删除所有不属于 L 的变量后得到的词。等价地， $\mathbf{w}(L) = \varphi_L(\mathbf{w})$，其中 $\varphi_L\colon X \to X^*$ 是一个幺半群代换，定义如下：

$$\varphi_L(x) = \begin{cases} x, & x \in L, \\ \varepsilon, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特别是，如果 $L = c(\mathbf{u}) \setminus \{x\}$ 对某个 $x \in X^+$成立，我们就将 $\mathbf{u}_x$ 记作 $\mathbf{u}(L)$.

设 S 是具有乘法单位元 1 的 ai-半环。对于 $c(\mathbf{v})$ 的任意真子集 L ，若 $\mathbf{u}(L) \neq \varepsilon$，则 $\mathbf{u}(L) \preceq_S \mathbf{v}(L)$。若 $\mathbf{u}(L) = \varepsilon$,

我们记作 $\varepsilon \preceq_S \mathbf{v}(L)$，表示对于每个代换$\varphi$: $X \to S$, $1 \leq \varphi(\mathbf{v}(L))$ 都成立。

命题 3.5。设 S 是具有乘法单位元 1 的 *ai*-半环。如果$M_2 \in \mathsf{V}(S)$，且 $xyxztz$ 是 S的同恒词，那么每个 $\mathbf{w}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 都是 S的同恒词。

证明。设 $n \in \mathbb{N}$。要证明$\mathbf{w}_n$ 是 S的同恒词，只需证明$\mathbf{w}_n$ 对于 S是极小的。假设对于某个词$\mathbf{u}$，有$\mathbf{u} \preceq_S \mathbf{w}_n$。由于$M_2 \in$V($S$)，可得

$$c(\mathbf{u}) \subseteq c(\mathbf{w}_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+4}\} \cup \{y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}\}.$$

对于任意 $1 \leq i < j \leq n+4$，因为 S 含有乘法单位元 1，所以$\mathbf{u}(\{x_i, x_j\})$ $\preceq_S \mathbf{w}_n(\{x_i, x_j\}) = x_i x_j$。由于 $xyxztz$ 是 S的同恒词，可知 $x_i x_j x_i$ 和 $x_i x_j$ 都是 S的同恒词，因此$\mathbf{u}(\{x_i, x_j\}) = \varepsilon$ 或$\mathbf{u}(\{x_i, x_j\}) = x_i x_j$。若$\mathbf{u}(\{x_i, x_j\}) = \varepsilon$，则 $\varepsilon \preceq_S x_i x_j$，从而 $x_i \preceq_S x_i x_j x_i$，矛盾。因此$\mathbf{u}(\{x_i, x_j\}) = x_i x_j$。所以，

$$\mathbf{u}(\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+4}\}) = x_1 x_2 \cdots x_{n+4}. \tag{3.3}$$

接下来，我们证明每个 y_i 在$\mathbf{u}$ 中恰好出现两次，且其顺序与$\mathbf{w}_n$中的相同；此外，出现在每个 y_i 两次出现之间的 x_j，恰好就是$\mathbf{w}_n$中的那些。注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\{y_0, y_1, x_i, x_3\}) &\preceq_S \mathbf{w}_n(\{y_0, y_1, x_i, x_3\}), \\ \mathbf{u}(\{y_n, y_{n+1}, x_{n+2}, x_j\}) &\preceq_S \mathbf{w}_n(\{y_n, y_{n+1}, x_{n+2}, x_j\}), \\ \mathbf{u}(\{y_k, y_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}\}) &\preceq_S \mathbf{w}_n(\{y_k, y_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}\}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $i \in \{1, 2\}$、 $j \in \{n+3, n+4\}$ 和 $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$。

根据 (3.3equation.3.3)，(3.4equation.3.4) 中所有左端都是非空词，而相应的右端分别为 $y_0 x_i y_0 y_1 x_3 y_1$、 $y_n x_{n+2} y_n y_{n+1} x_j y_{n+1}$ 和 $y_k x_{k+2} y_k y_{k+1} x_{k+3} y_{k+1}$。这些词仅在字母名称上与 $xyxztz$ 不同。由于 $xyxztz$ 是 S 的同恒词，(3.4equation.3.4) 中每个不等式的两端必定相同。因此$\mathbf{u} = \mathbf{w}_n$，所以$\mathbf{w}_n$ 是 S的极小元，证毕。□

根据 [6, 引理 5.3], , 每个 Zimin 字$\mathbf{z}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 都是 ai-半环 B_2^1 的极小词。利用这一点，我们现在证明以下推论。

推论 3.6. 每个$\mathbf{w}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 都是 *ai*-半环 B_2^1 的同恒词。

证明。容易看出，B_2^1 是一个以 1 为乘法单位元的 ai-半环。此外，B_2^1 包含 M_2 的一个副本，因此 $M_2 \in$V(B_2^1)。根据命题 3.5thm.3.5，只需证明词 $xyxztz$ 是B_2^1 的同恒词。

现在假设$\mathbf{u}$ $\preceq_{B_2^1}$ $xyxztz$，其中$\mathbf{u}$是一个非空词。由于$M_2 \in$V(B_2^1)，我们得到 $c(\mathbf{u}) \subseteq c(xyxztz) = \{x, y, z, t\}$。由于 B_2^1具有乘法单位元，因此$\mathbf{u}_x \preceq_{B_2^1} yztz$。注意，$yztz$ 与$\mathbf{z}_3$ 的一个子词仅在字母名称上不同。因此，$yztz$ 对于B_2^1是极小的，于是$\mathbf{u}_x = \varepsilon$ 或$\mathbf{u}_x = yztz$。

若$\mathbf{u}_x = \varepsilon$，考虑代换 φ：由 φ定义的 $X \to B_2^1$ 满足 $\varphi(y) = a$,$\varphi(z) = \varphi(t) = 1$。那么 $1 \le \varphi(yztz) = a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = a$，这就产生了矛盾。因此$\mathbf{u}_x = yztz$。类似的论证表明$\mathbf{u}_z = xyxt$。因此，$\mathbf{u}$ 必定是 $xyxztz$ 或 $xyzxtz$。

现在假设 $\mathbf{u} = xyzxtz$。令 ψ：$X \to B_2^1$ 为一个代换，定义为 $\psi(x) = \psi(t) = a$ 且 $\psi(y) = \psi(z) = b$。于是

$$0 = \psi(xyzxtz) = \psi(\mathbf{u}) \le \psi(xyzxtz) = ab,$$

这是不可能的。因此 $\mathbf{u} = xyxztz$，所以 $xyxztz$ 是 B_2^1的同恒词。 □

定理 1.1thm.1.1 和 1.2thm.1.2的证明。由定理 3.3thm.3.3 和推论 3.6thm.3.6，定理 1.1thm.1.1 的证明完成。回忆一下，若半群 S 满足 S 任何形如 $\mathbf{w} \approx \mathbf{q}$ 的非平凡恒等式（其中 $\mathbf{q}$为任意一个词），则词 $\mathbf{w}$ 是其同恒词。由 [29, 引理 3.3.32], $\mathbf{w}$ 是 S 的同恒词，当且仅当半群 $S(\mathbf{w})$属于 $\mathsf{V}(S)$。由定理 3.3thm.3.3 的证明，可以推得定理 1.2thm.1.2。□

4. 结论

我们证明了区间 $[\mathsf{V}(S_7),\ \mathsf{V}(B_2^1)]$ 包含 $2^{\aleph_0}$ 个不同的簇。这一结果进一步阐明了 $\mathsf{V}(B_2^1)$ 的子簇格结构，并展示了这一层级体系所固有的丰富复杂性。

截至目前，已知 $\mathsf{V}(\mathbf{Rel}(2))$ 的子簇格包含一串连续区间，每个区间的基数均为 $2^{\aleph_0}$:

$$[\mathbf{T}, \mathsf{V}(S_7)], \quad [\mathsf{V}(S_7), \mathsf{V}(B_2^1)], \quad [\mathsf{V}(B_2^1), \mathsf{V}(\Sigma_7)], \quad \text{and} \quad [\mathsf{V}(\Sigma_7), \mathsf{V}(\mathbf{Rel}(2))],$$

其中$\mathbf{T}$ 表示平凡簇。

虽然存在一些有限基有限半群，其簇具有 $2^{\aleph_0}$ 个不同子簇（例如，半群 $M(aba)$；参见 [17, 定理 3.2]），但此前尚不清楚是否存在一个有限基有限 ai-半环，使其簇能够具有 $2^{\aleph_0}$ 个不同子簇。最近，我们发现了这样一个恰好含有三个元素的例子；相关细节将另行发表。

致谢
作者感谢 Marcel Jackson 教授对本文提出的宝贵建议。

声明

伦理审批 不适用。**利益冲突** 不适用。**作者贡献**
不适用。**数据和材料的可获得性**不适用。

经费资助 第二作者的研究得到中国国家自然科学基金资助，资助编号 12371024和12571020。

参考文献

[1]Burris, S., Sankappanavar, H.P.：《泛代数教程》。Springer-Verlag，纽约（1981）[2] Connes, A., Consani, C.：关于绝对代数几何的仿射情形。Adv. Math. **390**，107909（2021）[3] Dolinka, I.：一个非有限基的有限半环。Internat. J. Algebra Comput.**17**，1537–1551（2007）[4] Dolinka, I.：半环簇格中的一个不可数区间。Acta Sci. Math.**74**，85–93（2008）[5] Dolinka, I.：一类本质上非有限基的半环。Algebra Universalis **60**，19–35（2009）[6] Dolinka, I., Gusev, S.V., Volkov, M.V.：有限半格的自同态半环的有限基。Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin（即将发表）。预印本 arXiv:2508.01212[7] Gao, Z.D., Jackson, M., Ren, M.M., Zhao, X.Z.：与 S_7相关的加法幂等半环的有限基问题。预印本 arXiv:2501.19049[8] Gao, Z.D., Jackson, M., Ren, M.M., Zhao, X.Z.：半环簇格中的一个连续统：区间 [V(S), V(S^0)]。准备中的手稿。[9]Ghosh, S., Pastijn, F., Zhao, X.Z.：有序带生成的簇 I。Order **22**，109–128（2005）[10] Glasson, D.：Rees商幺半群生成一个具有不可数多个子簇的簇。Semigroup Forum **109**，476–481（2024）[11]Głazek, K.：《半环及其在数学和信息科学中应用的文献指南》。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特-波士顿-伦敦（2001）[12] Golan, J.S.：《半环理论及其在数学和理论计算机科学中的应用》。Longman Scientific and Technical，哈洛（1992）[13] Gusev, S.V.：生成具有不可数多个子簇的较小幺半群。Semigroup Forum **110**，255–259（2025）[14] Gusev, S.V., Volkov, M.V.：幂群的半环恒等式和对合恒等式。J. Aust. Math. Soc. **115**，354–374（2023）[15]Gusev, S.V., Volkov, M.V.：有限逆半群的半环恒等式。Semigroup Forum**106**，403–420（2023）[16]Gusev, S.V., Volkov, M.V.：有限链的自同态半环的有限基问题。Int. J. Algebra Comput（即将发表）。预印本 arXiv:2312.01770[17] Jackson, M.：其簇具有不可数多个子簇的有限半群。J. Algebra **228**，512–535（2000）[18] Jackson, M., Lee, E.W.H.：具有极端性质的幺半群簇。Trans. Am. Math. Soc. **370**，4785–4812（2018）[19] Jackson, M., Ren, M.M., Zhao, X.Z.：具有有限基半群约化的非有限基ai-半环。J. Algebra **611**，211–245（2022）[20] Maclagan, D., Sturmfels, B.：《热带几何导论》，Grad. Stud. Math.，第161卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州（2015）

[21] Pastijn, F.：由有序带生成的簇 II. Order **22**, 129–143 (2005)[22] Perkins, P.：半群等式理论的基. J. Algebra **11**, 298–314 (1969)[23] Ren, M.M., Jackson, M., Zhao, X.Z., Lei, D.L.：群的平坦扩张与加法幂等半环的极限簇. J. Algebra **623**, 64–85 (2023)[24] Ren, M.M., Liu, J.Y., Zeng, L.L., Chen, M.L.：四阶加法幂等半环的有限基问题，I. Semigroup Forum**110**, 422– 457 (2025)[25] Ren, M.M., Liu, Z.X., Yue, M.Y., Chen, Y.Z.：四阶加法幂等半环的有限基问题，III. Semigroup Forum, https://doi.org/10.1007/s00233-025-10584-5 (2025)[26] Ren, M.M., Zhao, X.Z.：满足 $x^3 \approx x$ 和 $xy \approx yx$的半格序半群的簇. Period. Math. Hungar. **72**, 158–170 (2016)[27] Ren, M.M., Zhao, X.Z., Volkov, M.V.：将周期群拟簇的格嵌入加法幂等半环簇的格：代数证明. 预印本 arXiv:2507.09141[28] Ren, M.M., Zhao, X.Z., Wang, A.F.：满足$x^3 \approx x$的 ai-半环簇. Algebra Universalis **77**, 395–408 (2017)[29]Sapir, M.V.：组合代数：语法与语义. Springer 数学专著丛书，Springer，Cham (2014)[30] Sapir, M.V., Volkov, M.V.：HFB性质与半群结构. Contrib. Gen. Algebra **6**, 303–310 (1988)[31] Shao, Y., Ren, M.M.：由二阶 ai-半环生成的簇. Semigroup Forum**91**, 171–184 (2015)[32] Trahtman, A.N.：六元素半群生成一个含有不可数多个子簇的簇. 载于“代数系统及其簇”，斯维尔德洛夫斯克，第138–143页 (1988)。（俄文）[33] Volkov, M.V.：Brandt幺半群的半环恒等式. Algebra Universalis**82**, 42 (2021)[34]Yue, M.Y., Ren, M.M., Zeng, L.L., Shao, Y.：四阶加法幂等半环的有限基问题，II. Algebra Universalis **86**, 33 (2025)[35] Zhao, X.Z., Ren, M.M., Crvenković, S., Shao, Y., Đapić, P.：由三阶 ai-半环生成的簇. Ural Math. J.**6**, 117–132 (2020)

Zi DongGao 西北大学数学
学院 中华人民共和国陕西省
西安市 710127 电子邮箱:
zidonggao@yeah.net

Miao MiaoRen 西北大学数学学院 中华人民共和国陕西
省西安市 710127 网址：
https://math.nwu.edu.cn/info/1269/6520.htm 电子邮
箱：miaomiaoren@yeah.net

Meng Ya Yue 数学学院
西北大学 西安 710127 陕
西 中华人民共和国 电子
邮箱：
myayue@yeah.net