arXiv:2601.07168v1 [math.RT] 12 Jan 2026

# 李代数及其对偶空间中的乔丹分解

LOREN SPICE 和 CHENG-CHIANG TSAI

Abstract. 我们尽可能以统一的方式讨论约化群的李代数及其对偶李代数中的 Jordan 分解。我们举出一个反例，说明对偶李代数上的 Jordan 分解并非唯一，并给出其不唯一程度的上界。我们还证明了关于 $G$ 的伴随作用和余伴随作用的 GIT 商的一些切瓦莱限制型论断。

## 1. Introduction

对于在域上的仿射代数群领域工作的研究者而言，李代数中的 Jordan 分解概念广为人知。举例来说，它使人们能够将对李代数任意元素的中心化子的研究，归结为对性质良好的半单元素的中心化子以及幂零元素的中心化子的研究。较少为人所知的是对偶 李代数中的 Jordan 分解概念。这个概念似乎要求对我们所考虑其对偶李代数的群施加某种限制——我们始终采用的限制是约化性——即便如此，其中仍涉及一些微妙之处。必要的定义（半单性、幂零性和 Jordan 分解）见注2.1 。

以往文献曾声称，在比本文略为严格的条件下，对偶李代数上的 Jordan 分解存在且唯一。存在性这一说法是正确的，但我们给出一个反例，或者更准确地说，一族反例，来否定唯一性。参见 §7。因此，我们认为有必要尽可能以统一的方式，简要讨论约化群的李代数及其对偶李代数上的 Jordan 分解。这意味着，尽管我们可能需要针对这两种情形分别处理不同的特殊情况，但只要可能，我们就对李代数和对偶李代数作出相同的陈述。我们将在下文的定理 1.1 中陈述主要结果。在此，我们欣然承认本文显然得益于 [KW76], ，我们的工作正是在其基础上展开的，同时修正了 [KW76中的一些陈述，即 §3.8 和定理 4] ，这些陈述只有在大特征下才能确保正确。

定理 1.1(iii) 为 Jordan 分解“非唯一到何种程度”给出了一个上界。这个上界足以满足某些用途，但并非最优。更精确的上界见定理 8.6 。

注释部分（v）、（vi）。尽管切瓦莱限制及其“对偶”类比在特征 2 中可能失效，但这些结果展示了如何修正它。

**定理 1.1**。设 $G$ 是代数闭域 $k$ 上的连通约化群。记 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^*$ 分别为 $G$ 的李代数和对偶李代数，或相应的向量群。

当 $V$ 是一个 $G$ 作用于其上的仿射簇时，我们将 *GIT* 商记为 谱 $\mathcal{O}(V)^G$。

*(i)* $G$ 中的一个 $\mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{g}^*$ 轨道是闭的，当且仅当它由半单元素组成。*(ii)* $\mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{g}^*$ 中的每个元素都有一个 *Jordan* 分解（不过， $\mathfrak{g}^*$ 中的 *Jordan* 分解可能并不唯一；见第 *7* 节）。*(iii)* 对于 $\mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{g}^*$ 中的每个元素 $X$， $X$ 的 $G$ 轨道的闭包中都有一个唯一的闭轨道，而这个闭轨道包含每个 *Jordan* 分解 $X = X_{ss} + X_{nil}$ 的半单部分 $X_{ss}$。*(iv)* 考虑 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^*$ 中半单元素的可构造子集的闭包 $\mathfrak{g}^{ss}$ 和 $(\mathfrak{g}^*)^{ss}$。对于每个极大环面 $T \subset G$，有 $\mathfrak{g}^{ss}$ 是 $\mathfrak{t}$ 与 $\mathfrak{g}$ 中对应于在 $\mathfrak{t}^*$ 上非零的根 $T$ 的所有根空间之和；而 $(\mathfrak{g}^*)^{ss}$ 是 $(\mathfrak{g}^*)^T$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 中对应于根 $\alpha$ 的所有权空间之和，其中相应的余根 $h_\alpha := d\alpha^\vee(1)$ 在 $\mathfrak{t}$ 上非零。若 $k$ 的特征不为 *2*，则 $\mathfrak{g}^{ss}$ 等于 $\mathfrak{g}$，且 $(\mathfrak{g}^*)^{ss}$ 等于 $\mathfrak{g}^*$。若 $k$ 的特征等于 *2*，则 $\mathfrak{g}^{ss}$ 是 $G$ 中所有非 $Sp_{2n}$ 型直因子的李代数之和（其中 $n$ 为某个正整数），并且每个 $Sp_{2n}$ 直因子都对应一个典范的 $\mathfrak{so}_{2n}$ 直和项；而 $(\mathfrak{g}^*)^{ss}$ 是 $G$ 中所有非 $SO_{2n+1}$ 型直因子的对偶李代数之和（其中 $n$ 为某个正整数），并且每个 $SO_{2n+1}$ 直因子都对应一个典范的 $\mathfrak{so}_{2n}^*$ 直和项。*(v)* 对于每个极大环面 $T \subset G$，若令 $W = N_G(T)/T$，则自然映射 $\mathfrak{t}//W \to \mathfrak{g}^{ss}//G$ （分别地， $\mathfrak{t}^*//W \to (\mathfrak{g}^*)^{ss}//G$）是一个同构。*(vi)* 自然映射 $\mathfrak{g}^{ss}//G \to \mathfrak{g}//G$ （分别地，$(\mathfrak{g}^*)^{ss}//G \to \mathfrak{g}^*//G$）在 $k$-点上是双射。

我们或许希望通过两种自然的方式来加强定理 1.1。为引起对它们的关注，我们将其表述为猜想 1.2 ，尽管猜想 1.2(ii) 可能值得商榷。除了定理1.1之外，本文并未在证明（或反驳）猜想 1.2方面取得进展。

**猜想 1.2**。

*(i)* 定理$\mathfrak{g}^{ss}//G \to \mathfrak{g}//G$ （分别地，$(\mathfrak{g}^*)^{ss}//G \to \mathfrak{g}^*//G$）中的映射 *1.1(vi)*是一个泛点态同胚。*(ii) GIT* 商 $\mathfrak{g}//G$ 和 $\mathfrak{g}^*//G$ 是仿射空间。

我们简要概述本文内容。在第 2 节中，我们约定一些记号并给出定义，利用几何约化性证明定理1.1(ii) 和(vi)，以及引理2.2；后者是定理 1.1(iii) 的较弱版本（并将使我们能够从定理1.1(i)推出后者）。在第 3 节中，我们作一些说明，以阐明我们的定义（即 [KW76] 中的定义）：半单元和幂零元素，以及 Jordan 分解，并将这些定义与 [CM93] 中的定义作比较。在第 4 节中，我们解释为何要完成定理 1.1 的证明，只需考察一类“坏的”伴随作用和一类“坏的”余伴随作用，且二者都处于特征 2 下。（这类“坏的”余伴随作用正是 [KW76] 中指出有问题并因此被排除的那一类。）我们在第 5 节和6节分别给出两种论证来处理这两类作用，因为我们认为它们提供了颇为不同的视角。在第 7 节中，我们给出一小类反例，其中的 Jordan 分解

在 $\mathfrak{g}^*$ 中并不唯一；随后，在第 8 节中，我们将定理1.1(iii) 提升为定理 8.6，该定理表明第 7 节中的反例就是仅有的可能情形。定理 8.6 恢复了我们在定理1.1(ii)的表述中失去的统一性：它关于 $\mathfrak{g}^*$ 给出一个结果，描述了其中 Jordan 分解可能出现的不唯一性；而该结果在 $\mathfrak{g}$ 上的对应版本则表明其中的 Jordan 分解是唯一的。最后，在第9节中，我们证明半单元或幂零元素的 Jordan 分解只有显而易见的平凡形式，因此，第 7 节中的不唯一性在这一特殊情形下并非问题。

## 2. Notation and preparation

以下记号大多与定理 1.1中的相同，但我们在此引入这些记号，以便在全文中引用。

设 $k$ 是一个代数闭域。设 $G$ 是定义在 $k$上的连通约化群，$\mathfrak{g}$ 是它的李代数，$\mathfrak{g}^*$ 是它的对偶李代数。一般而言，如果我们用大写罗马字母表示一个群，就用相应的小写花体字母表示它的李代数；例如，给定群 $T$ 和 $B$后，我们将它们的李代数记为 $\mathfrak{t}$和 $\mathfrak{b}$。为提高可读性，也可以用 Lie(·)代替花体记号。

当 $V$ 是一个仿射簇且 $G$ 作用于其上时，我们用 $V/\!/G$ 表示 GIT 商 $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(V)^G$。有时我们也会用 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^*$ 表示相应的向量群，这样记号 $\mathfrak{g}/\!/G$ 和 $\mathfrak{g}^*/\!/G$ 便有意义。

除非另有说明，我们所说的方案在 $k$ 上的元素和点，均指 $k$-点。不过，中心化子（例如元素 $X$ 属于 $G$、$\mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{g}^*$ 时的 $C_G(X)$）和中心（例如 $Z(G)$）始终指概形中心化子和概形中心。

固定一个极大环面 $T \subset G$。$T$-不变子空间 $(\mathfrak{g}^*)^T$ 嵌入 $\mathfrak{g}^*$，是商 $\mathfrak{g}^* \twoheadrightarrow \mathfrak{t}^*$ 的一个分裂；我们将其视为 $\mathfrak{t}^*$ 嵌入 $\mathfrak{g}^*$。那么，$\mathfrak{t}^*$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 的子空间，其元素在 $\mathfrak{g}$ 中 $\mathfrak{t}$ 的唯一 $T$-稳定补空间上取值为零。

用 $\Phi(G,\ T)$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中 $T$ 的根集，并用 $\Phi^\vee(G,\ T)$ 表示对偶根系。对于每个 $\alpha \in \Phi(G,\ T) \subset X^*(T)$，我们都有一个 $X_*(T)$ 中的元素 $\alpha^\vee \in \Phi^\vee(G,\ T)$，以及一个元素 $h_\alpha := d\alpha^\vee(1)$，它属于 $\mathfrak{t}$ （通过赋值同构$X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} k \to \mathfrak{t}$ 与 $\alpha^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} 1$ 相对应）。我们将两者都称为“余根”，并根据上下文或明确使用记号 $\alpha^\vee$ 或 $h_\alpha$来区分。

设 $B$ 是包含 $T$ 的博雷尔子群，$B$ 的幺正根基为 $U$，并将它们的李代数分别记为 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{u}$。

注2.1 重新陈述了 [KW76，§3，第 140]中 Jordan 分解的定义 $\mathfrak{g}^*$，采用了一种等价形式，也是本文始终采用的形式。

注记 2.1. 设 $X$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 中任意一个元素。根据定义，当且仅当 $X_{\mathrm{ss}} \in \mathfrak{g}^*$ 的半单部分 $C_G(X_{\mathrm{ss}})^\circ$ 包含 $G$ 中的一个极大环面时，元素 $X_{\mathrm{ss}} \in \mathfrak{g}^*$ 才是半单的。于是，KW76 的引理 3.1ii) 表明：当且仅当对于 $C_G(X_{\mathrm{ss}})^\circ$ 中某个极大环面 $T$ 以及包含 $T$ 的 $G$ 的某个博雷尔子群 $B$，$X_{\mathrm{ss}}$ 在 $\mathfrak{b}$ 上与 $X_{\mathrm{ss}}$ 一致，并且 $X$ 在 $\mathrm{Lie}(C_G(X_{\mathrm{ss}})^\circ)$ 于 $\mathfrak{g}$ 中的唯一 $T$-稳定补空间上平凡时，$X_{\mathrm{ss}}$ 才是 $X$ 的 Jordan 分解的半单部分。（注意，补空间可能取决于 $T$ 的选择；参见 Spi21 的注记 3.2]。）

从这个角度来看，当且仅当一个元素 $X$ 的 Jordan 分解的半单部分平凡时，我们称其为幂零元素；也就是说，当且仅当存在 $G$ 的某个博雷尔子群 $B$，使得 $X$ 在 $\mathfrak{b}$ 上消失。

由于李代数一侧的 Jordan 分解概念适用于任意代数群，而不仅限于约化代数群，我们可以将 [Bor91，命题 11.8] 中的 $B$ 替换为 $G$，据此得出：$\mathfrak{b}$ 的每个元素都存在 Jordan 分解，其半单部分与 $B$ 中某个极大环面相切，因此属于 $\mathfrak{t}$ 的某个 $B(k)$-共轭。对于 $\mathfrak{g}^*$，类似的结论是：$(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$ 的每个元素都存在 Jordan 分解，其半单部分属于 $\mathfrak{t}^*$ 的某个$B(k)$-共轭。[KW76, §3.8] 通过对根系和 Chevalley 常数进行抽象计算证明了这一点；即使去掉 [KW76, §3] 中要求 $G$ 为几乎单群且在 $k$ 的特征等于 2 时不能属于 $\mathrm{SO}_{2n+1}$ 型的限制，该论证仍然成立。根据 [Bor91，关于 $\mathfrak{g}$ 的命题 14.25]，以及 [Spi21，关于 $\mathfrak{g}^*$ 的命题 3.3]，$G$ 的每条轨道都与 $\mathfrak{b}$ 相交，而 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$ 也如此，因此我们得到关于 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^*$ 中任意元素的轨道的类似结论。这就证明了定理 1.1(ii)。若 $X$ 是 $\mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{g}^*$ 中的一个元素，其 Jordan 分解为 $X = X_{\mathrm{ss}} + X_{\mathrm{nil}}$，则 $X_{\mathrm{ss}}$ 包含在 $X$ 的 $G$- 轨道闭包中（对于 $\mathfrak{g}^*$，由 [Spi21，命题 3.8] 得出；对于 $\mathfrak{g}$，则可用类似论证），所以 $G$ 在 $\mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{g}^*$ 中的闭轨道本身已经由半单元素组成。

由于 $G$ 是约化的，因而也是几何约化的 [Hab75, Theorem 5.2]，对于每个有限型仿射 $G$-簇 $V$，我们都有 $V/\!/G$ 仍为有限型[Nag64, p. 372, Main Theorem]；每个轨道闭包都包含唯一的闭轨道；并且，经过 $V(k)$ 中各点的闭轨道与 $(V/\!/G)(k)$ 中的点一一对应。这证明了定理 1.1(vi)，而 (iii) 可由 (i) 推出。这也证明了定理 1.1(v) 的一个较弱版本，即其中出现的映射在 $k$-点上是双射。我们的讨论还证明了引理 2.2，它是定理 1.1(iii) 的一个较弱版本。

**引理 2.2.** $\mathfrak{g}^*$ 中任意一个 $G$-轨道的闭包都包含唯一的闭轨道，该轨道由半单元素组成。

## 3. Remarks on Jordan decompositions

我们希望读者会认同，在$\mathfrak{g}$上定义 Jordan 分解的概念是合理的，尤其是它与矩阵代数中的经典 Jordan 分解 $\mathfrak{gl}_n$ 之间存在极其紧密的联系，而后者源自对忠实表示 $G \to \mathrm{GL}_n$的选择。承认这一点后，注记3.1 指出，在 $\mathfrak{g}^*$ 上定义 Jordan 分解的概念同样合理，因为任何 $G$-等变的 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 之间的同一化，都会将其与在 $\mathfrak{g}$上定义的 Jordan 分解概念对应起来。

注 3.1. 定理 1.1(iii) 表明，$\mathfrak{g}^*$ 的半单元素恰好是那些 $G$-轨道闭合的元素；下文的注 9.1（以及 [Spi21, Proposition 3.8]）表明，$\mathfrak{g}^*$ 的幂零元素恰好是那些在其 $G$-轨道的闭包中包含 0 的元素。对于 $\mathfrak{g}$，这两个事实的类似结果见 [SS70, Corollary 3.6] 和[Bor91, Theorem 10.6(4) and Proposition 14.25]。（实际上，[SS70, Corollary 3.6] 仅针对半单群陈述。除我们的定理 1.1(i) 外，我们未能找到针对约化群的参考文献。）特别地，如果存在一个 $G$-等变

$\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$之间的同构，那么它将两者中的半单元素和幂零元素分别对应起来。此外，若 $X_{\mathrm{ss}} \in \mathfrak{g}$ 是半单元素，且其像为 $X_{\mathrm{ss}}^* \in \mathfrak{g}^*$，则 $C_G(X_{\mathrm{ss}})$ 等于 $C_G(X_{\mathrm{ss}}^*)$；对于每个固定 $X_{\mathrm{ss}}$的极大环面 $T$，空间 Lie$(C_G(X_{\mathrm{ss}}))$ 与 $(\mathfrak{g}/_T\mathrm{Lie}(C_G(X_{\mathrm{ss}}^*))^\perp)^*$ 相对应，其中 $_T\mathrm{Lie}(C_G(X_{\mathrm{ss}}^*)^\circ)^\perp$是 $\mathfrak{g}$中 Lie$(C_G(X_{\mathrm{ss}}^*)^\circ)$ 的唯一 $T$-稳定补空间。这表明，这样的同构也会对应 $\mathfrak{g}$和 $\mathfrak{g}^*$中的元素的 Jordan 分解。

备注3.2 讨论了我们对半单性和幂零性的定义与特征 0 中有时采用的定义是否相容。

备注 3.2。 在 [CM93, §1.3], 中给出了半单性和幂零性的其他定义 $\mathfrak{g}^*$。这些定义仅在 $\mathbb{C}$上给出；这里我们讨论它们在多大程度上适用于任意域，以及它们与我们所用概念的关系。

半单性的定义涉及一些特定于 $k$ 具有特征 0 的情形的选择，例如群与李代数之间的紧密对应，以及在这种情形下，所有仿射代数 $k$-群都是光滑的这一事实。对该定义的一种合理且不依赖特征的重新解释是： $X^*$ 是半单的，当且仅当 $C_G($ $X^*)^\circ$ 是（光滑且）约化的。按照 [KW76]意义下的半单性，根据 [KW76，引理 3.1iii)]，蕴含这一意义下的半单性。我们不知道反向蕴含是否成立。

[CM93, §1.3] 中幂零性的定义是：当且仅当一个 $X^* \in \mathfrak{g}^*$ 元素$C_G$在 Lie$(X^*($ $])$ 上作用为零时，它才是幂零的。在小特征下，按 76] KW [ 意义定义的幂零性未必能推出按93], CM $k$ 意义定义的幂零性，反之亦然。例如，设 $X^*$ 的特征为 2。$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mapsto c$ :$\mathfrak{sl}_2^*$ 中的 [元素76]按$C_G$KW$X^*$意义是幂零的；但是 Lie( $\mathfrak{sl}_2($ $X^*$ )) 等于$C_G$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto a+c+d$ 而$X^*$在 Lie( [(93])) 上并非处处作用为零，因此按 $X^*$ CM 意义并非幂零。另一方面， $\mathfrak{pgl}_2^*$ 中的$C_G$:$X^*$具有这样的性质：Lie( $\mathfrak{g}($ $X^*$ )) 是 $X^*$ 的严格上三角子代数，而 [在其上作用为零，因此93]按 $X^*$ CM [意义是幂零的；但是76]的 Jordan 分解的半单部分是迹映射，因此根据下文的注 9.1，按KW意义并非幂零。

**引理3.3**。 如果对于每个满秩约化子群 $H$ *of* $G$，到 李$(Z(H))$ 的限制给出一个单射 $(\mathfrak{h}^*)^H \to$李$(Z(H))$，那么按 [CM93] 的意义下的幂零性蕴含按 [KW76] 的意义下的幂零性。

证明。假设按照 [CM93] 的定义， $X^* \in \mathfrak{g}^*$ 是幂零的。由定理 1.1(ii) 和注记 2.1，存在 $G$ 中的一个极大环面 $T$ 、一个包含 $T$ 的博雷尔子群 $B$，以及一个元素 $X_{\mathrm{ss}}^* \in \mathfrak{t}^*$，使得 $X^*$ 在 $\mathfrak{b}$ 上与 $X_{\mathrm{ss}}^*$ 一致；并且，若令 $H = C_G(X_{\mathrm{ss}}^*)^\circ$，那么 $X^*$ 在 $\mathfrak{g}$ 中 $\mathfrak{h}$ 的唯一 $T$- 稳定补空间 $_T\mathfrak{h}^\perp$ 上是平凡的。由于限制到 $\mathfrak{h}$ 给出了一个 $H$-等变同构 $(\mathfrak{g}/_T\mathfrak{h}^\perp)^* \to \mathfrak{h}^*$，特别地，$X^*$ 被 $Z(H)$ 固定，因而被 Lie$(Z(H))$ 湮灭。也就是说，Lie$(Z(H))$ 包含于 Lie$(C_G(X^*))$，进而包含于 ker$(X^*)$；但 Lie$(Z(H))$ 也包含于 $\mathfrak{t}$，因而包含于 $\mathfrak{b}$，所以 $X_{\mathrm{ss}}^*$ 在 Lie$(Z(H))$ 上与 $X^*$ 一致，故在该处为零。由于 $X_{\mathrm{ss}}^*$ 属于 $(\mathfrak{h}^*)^H$，根据我们的单射假设，它是平凡的，因此按照 [KW76] 的定义， $X^*$ 是幂零的。□

注记3.4 表明，Jordan 分解可以从 $\mathfrak{g}^*$ 的满秩约化子群的对偶李代数膨胀到 $G$。

注 3.4. 设 $H$ 是 $G$ 的一个满秩约化子群，$X_H^*$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 的一个元素，且 $X_H^* = X_H^*\text{ss} + X_H^*\text{nil}$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 中的一个 Jordan 分解。则存在 $H$ 中的一个极大环面 $T$ 和 $H$ 中一个包含 $T$ 的博雷尔子群 $B_H$，使得 $X_H^*$ 在 $\mathfrak{b}_H$ 上与 $X_H^*\text{ss}$ 一致，$X_H^*\text{ss}$ 被 $T$ 固定，并且 $X_H^*$ 在 $\mathfrak{h}$ 中 $\text{Lie}(C_H(X_H^*\text{ss}))$ 的唯一 $T$-不变补空间 ${}_T\text{Lie}(C_H(X_H^*\text{ss}))^\perp$ 上平凡。记 ${}_T\mathfrak{h}^\perp$ 为 $\mathfrak{g}$ 中 $\mathfrak{h}$ 的唯一 $T$-不变补空间，并记 $X^*$ 为将 $X_H^*$ 平凡延拓至 ${}_T\mathfrak{h}^\perp$ 上所得的延拓；$X_{\text{ss}}^*$ 和 $X_{\text{nil}}^*$ 也类似。设 $G$ 中有一个包含 $B_H$ 的博雷尔子群 $B$。则 $X_{\text{ss}}^*$ 被 $T$ 固定；由于 $\mathfrak{b}_H + {}_T\mathfrak{h}^\perp$ 包含 $\mathfrak{b}$，我们有 $X^*$ 在 $\mathfrak{b}$ 上与 $X_{\text{ss}}^*$ 一致；并且由于 ${}_T\text{Lie}(C_H(X_H^*\text{ss}))^\perp + {}_T\mathfrak{h}^\perp$ 包含 $\mathfrak{g}$ 中 $\text{Lie}(C_G(X_{\text{ss}}^*))$ 的唯一 $T$-不变补空间，因此 $X^*$ 在该补空间上平凡。也就是说，$X^* = X_{\text{ss}}^* + X_{\text{nil}}^*$ 是 $X^*$ 的一个 Jordan 分解。

## 4. Reduction to $\mathfrak{sp}_{2n}$ and $\mathfrak{so}_{2n+1}^*$

我们证明，定理 1.1 和猜想 1.2(i) 可归结为以下情形：$k$ 具有特征 2，且我们考虑 $_{2n}$ 的伴随作用（记作 $\text{Sp}_{2n} \curvearrowright \mathfrak{sp}_{2n}$）或 $\text{SO}_{2n+1}$ 的余伴随作用（记作 $\text{SO}_{2n+1} \curvearrowright \mathfrak{so}_{2n+1}^*$），其中 $n$为某个正整数。

正如 [Jan04第 83], 页所述，[SS70，II.3.17'] 中的证明认为 $\mathfrak{t}//W \to \mathfrak{g}//G$ 是一个同构；该处的证明假设 $G$是伴随的，但实际上只要求 $T$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的任何根，当视为 $\mathfrak{t}^*$的元素时都不为 0。我们将在本节末尾说明如何处理相反的情形。

[KW76 定理 4]的结果是在以下假设下陈述的：$G$ 是几乎单的（[KW76，第 1 节，第 136] 页中提出），并且 $p$ 不等于 2，或者 $G$ 不是任意正整数 $n$ 下的 $\text{SO}_{2n+1}$ 型（[KW76，第 3 节，第 140]页中提出）。对于任意约化群 $G$，存在一个从 $G$ 的中心环面与其几乎单因子的乘积映到 $G$ 上的等价，但其导映射在$p$较小时可能具有核。因此，移除第一个假设并非形式上的论证，不过我们将在下文说明如何实现。移除第二个假设则需要修改 [KW76 定理 4]的陈述。事实上，即使在 [KW76] 所设定的情形下，我们也有一些其中间结果的反例。我们将在下文描述这一情况。

对于每个 $\alpha \in \Phi(G,T)$，我们都有一个属于 $\mathfrak{t}$ 的元素 $h_\alpha := d\alpha^\vee(1)$。暂且假设这些元素都非零。这正是确保 $\mathfrak{t}^*$ 中正则（在 $\mathfrak{g}^*$ 中）半单元素的集合稠密且为开集所需的条件；也就是说，半单元素不落在任何余根超平面上。该集合在 [KW76, §3, p. 140], 中记作 $\Omega$，并且在 $\mathfrak{t}^*$ 中稠密且为开集。于是，[KW76, §3] 中的论证仍然成立，但有两处例外。第一，[KW76, 引理3.1i)] 中关于 $\Phi(C_{\mathfrak{g}}(X^*)^\circ T)$ 对每个 $X^* \in \mathfrak{t}^*$ 在 $\Phi(G,T)$ 中是闭集的说法，在小特征下可能不成立。第二，[KW76, §3.8i)] 中关于从博雷尔子群的一个商到仿射空间的某个映射是同构的断言也可能不成立。第 7 节给出了这种情况的一个例子（特征 2 下的 $G = \text{Sp}_4$）；我们还证明了 [KW76, §3.8ii)], 中所断言的连通中心化子的包含关系，以及 [KW76, 定理 4iv)], 中所断言的唯一性，都可能不成立。

因此，我们必须去掉 [KW76, 定理 4iv)], 中的唯一性，并且完全舍弃 [KW76,§3。8] 除此之外，除 [KW76, §3。8] 和 [KW76, 定理 4iv)], 外， [KW76, 定理 4] 的其余证明均成立，且对 $G$ 没有任何限制，只需每个余根 $h_\alpha$ 都非零。

剩下的情形是存在某个 $\alpha \in \Phi(G,T)$，使得 $h_\alpha \in \mathfrak{t}$等于 0，因此，对于每个 $\chi \in X^*(T)$， $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle$ 在 $k$ 中的像 $\chi(h_\alpha)$ 都为 0。特别地，由于 $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle$ 等于 2， $k$ 的特征为 2；并且不存在这样的根$\beta$ ，使得整数 $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ 为奇数。检查 Dynkin 图可知，这意味着 $\Phi(G,T)$ 中包含 $\alpha$ 的分支属于 $\mathrm{B}_n$ 型，其中 $n$ 可以取任意值，也可能是 $n=1$。如果相应的 $G$ 的几乎单因子 $G'$ 是单连通的，那么 $\alpha \in \Phi(G',T')$（其中 $T' := T \cap G'$）在 $X_*(T')$ 中不能被 2 整除，因为任何根在根格中都不可约。特别地， $h_\alpha$ 在 $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g}$ 中非零，这就产生了矛盾。因此，该因子实际上是伴随的，也就是说，它是 $G$ 的一个 $\mathrm{SO}_{2n+1}$ 型直因子。

现在我们证明，类似地，切瓦莱限制定理（针对 $\mathfrak{g}$）失效也可归因于辛群直因子的存在。因此，反过来假设存在某个 $\alpha \in \Phi(G, T)$，其微分 $d\alpha$作为 $\mathfrak{t}^*$中的一个元素等于 0。若记 $G^*$ 为 $G$ 的对偶群（将其视为 $k$-群，而非 $\mathbb{C}$-群），并记 $T^*$为与 $T$对应的 $G^*$的极大环面，那么前述论证表明，存在某个正整数 $n$ ，使得 $G^*$ 以 $\mathrm{SO}_{2n+1}$ 为直因子，且 $\alpha \in \Phi^\vee(\mathrm{SO}_{2n+1}, T^*)$。由此可知， $G$ 以 $\mathrm{SO}^*_{2n+1} = \mathrm{Sp}_{2n}$ 为直因子，且 $\alpha \in \Phi(\mathrm{Sp}_{2n}, T)$。

## 5. 第一种方法

假设 $k$ 的特征为 2。我们讨论 $G = \mathrm{SO}_{2n+1} \curvearrowright \mathfrak{so}^*_{2n+1}$这一情形；$\mathrm{Sp}_{2n} \curvearrowright \mathfrak{sp}_{2n}$ 的情形几乎完全相同，只是在某些地方更简单。

如第 2节所述，固定 SO $T$ 中的一个极大环面 $_{2n+1}$，并将 $\mathfrak{t}^*$ 与 $T$ 的不动子空间对应起来。存在一个等价 $\mathfrak{so}^*_{2n+1}$ $f : \mathrm{SO}_{2n+1} \to \mathrm{Sp}_{2n}$ ，它诱导 $T$ 与 $\mathrm{Sp}_{2n}$ 中某个极大环面之间的同构，并将 $\mathrm{Sp}_{2n}$ 的短根映至 $\mathrm{SO}_{2n+1}$ 的长根，但将 $\mathrm{Sp}_{2n}$ 的长根映至 $\mathrm{SO}_{2n+1}$ 的短根的两倍，按 [Spr09，定理 9.65] 的意义而言。

若 $v_0 \in \mathfrak{t}^*$ 位于所有不对 $\mathfrak{t}^*$平凡作用的 Weyl 元素之不动子空间的补空间中，且对所有满足以下条件的 $\alpha \in \Phi(\mathrm{SO}_{2n+1}, T)$，均有 $v_0(h_\alpha) \neq 0$： $h_\alpha$作为 $\mathfrak{t}$中的元素非零，则 $C_{\mathrm{SO}_{2n+1}}(v_0)$ 等于 $C_{\mathrm{SO}_{2n+1}}(\mathfrak{t}^*)$。由于 $W(\mathrm{SO}_{2n+1}, T)(k)$ 中平凡作用于 $\mathfrak{t}^*$的子群由根$\alpha \in \Phi(\mathrm{SO}_{2n+1}, T)$ 上的反射生成，且这些根满足 $h_\alpha$ 在 $\mathfrak{t}$中等于 0，因此 $H := C_{\mathrm{SO}_{2n+1}}(\mathfrak{t}^*)$ 是连通的。于是， [KW76，引理 3.1] 表明 $H$ 是一个约化群。具体而言，$H$ 同构于 $(\mathrm{SO}_3)^n$，并由 $T$ 及其在 $\mathrm{SO}_{2n+1}$中的短根群生成；等价地，它是 $\mathrm{SO}_{2n+1} \twoheadrightarrow \mathrm{Sp}_{2n}$ 下 $(\mathrm{Sp}_2)^n \subset \mathrm{Sp}_{2n}$ 的原像。集合

$$\mathfrak{t}' := \{ v \in \mathfrak{t}^* \mid C_G(v) = H \}$$

是稠密开集。

由于 $H$ 是一个连通约化群，且 $C_G(H)$ 包含于 $C_G(T) = T \subset H$，因此 $N_G(H)$ 的单位连通分支为 $(H \cdot C_G(H))^\circ = H$。由此，$N_G(H)$ 是光滑的，因此由 $N_G(T)$ 和 $H$ 生成。Tits 提升（相对于

某个固定的正根系）中的简单长根反射生成一个 $S_n$ 的副直和补空间，与 $H$ 一起构成 $N_G(H)$ 中的补空间。

从每一对相反的短根中各选一个，便得到 $\mathfrak{t}^*$ 的一组基，因此存在同构 $\mathfrak{t}^* \cong \mathbb{A}^n$，在该同构下 $N_G(H)/H \cong S_n$ 通过置换坐标来作用，而 $\mathfrak{t}'$ 是坐标互异且非零的轨迹。

特别地，$V := \operatorname{im}(df^* : \mathfrak{sp}_{2n}^* \to \mathfrak{so}_{2n+1}^*$ 是 $f$ 的微分的对偶的像，它是 $\mathfrak{t}^*$ 与 $T$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上对应于 $T$ 在 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ 上的长根的权空间之和。（在第6节中，我们将 $V$ 认作 $\mathfrak{so}_{2n}^*$。）由于 $V$ 包含 $\mathfrak{t}^*$ 且在 $\mathrm{SO}_{2n+1}$ 作用下不变，$\mathfrak{so}_{2n+1}^*$ 的所有半单元素都属于 $V$。

考虑作用映射

$$c : \mathrm{SO}_{2n+1} \times_{N_G(H)} \mathfrak{t}^* \to V.$$

这将限制为一个同构：从 $\mathrm{SO}_{2n+1} \times_{N_G(H)} \mathfrak{t}'$ 映到其像；该像在 $V$ 中是开集，因为微分非奇异（这是因为 $C_{\mathfrak{so}_{2n+1}}(v) = \mathfrak{h}$ 对每个 $v \in \mathfrak{t}'$ 都成立）。特别地，$c$ 是双有理的，且 $c$ 的像在 $V$ 中稠密，从而证明了定理1.1(iv)。考虑映射

$$\bar{c} : \mathfrak{t}^* /\!/ S_n \to V /\!/ \mathrm{SO}_{2n+1}\,.$$

我们将仿照 [SS70, II.3.17'] 中的证明构造其逆映射，从而证明它是一个同构。由于两边都是仿射簇，我们可以在环同态层面构造映射；也就是说，给定一个 $S_n$-不变正则函数 $f$，我们将构造一个定义在 $V$ 上的 $\mathrm{SO}_{2n+1}$-不变正则函数。事实上，$f$ 在 $c$ 的定义域上定义了一个函数，因而也定义了 $V$ 上的一个有理函数；也就是说，存在互素多项式 $g$、$h \in \mathcal{O}(V)$，使得 $f \times c^*(h) = c^*(g) \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_{2n+1} \times_{N_G(H)} \mathfrak{t}^*)$。由于 $f$ 按构造是 $\mathrm{SO}_{2n+1}$-不变的，$g/h$ 也如此。由于 $\mathrm{SO}_{2n+1}$ 是半单的，且 $\mathcal{O}(V)$ 是多项式环，这意味着 $g$ 和 $h$ 都是 $\mathrm{SO}_{2n+1}$-不变的。由于 $f$ 在 $T$ 上是一个同构，因此 $g$ 在 $\mathfrak{t}^*$ 上 $h$ 的零点集上消失，故 $g$ 在 $h$ 的零点集中的每个半单元素上都消失。现在任取一个属于 $h$ 的零点集的 $v \in V$。根据引理 2.2，$v$ 的 $\mathrm{SO}_{2n+1}$-轨道的闭包包含一个半单元素 $v_{\mathrm{ss}}$，它必然属于 $V$，于是 $g(v_{\mathrm{ss}})$ 等于 $g(v)$，且 $h(v_{\mathrm{ss}})$ 等于 $h(v)$。特别地，$h(v_{\mathrm{ss}})$ 等于 $h(v) = 0$，所以 $g(v) = g(v_{\mathrm{ss}}) = h(v_{\mathrm{ss}})$ 也等于 0。

由希尔伯特零点定理可知，这意味着 $h \mid g$，也就是说，我们可以假设 $h = 1$。容易验证，$f \mapsto g$ 便是所需的逆映射，因此 $\bar{c}$ 是一个同构。这就证明了定理 1.1(v)。

映射 $\bar{c}$ 是单射，这尤其表明，任意两个半单轨道在 $V /\!/ \mathrm{SO}_{2n+1}$ 中都对应不同的点，因此根据引理 2.2，它们必为闭轨道。这就完成了定理 1.1(i)的证明。

## 6. Second approach

我们概述另一种证明定理 1.1(i)、(iv)和(v)的方法。我们继续假设 $k$ 的特征为 2。

设 $n$ 为一个正整数，设 $q$ 为定义在一个 $(2n+1)$ 维 $k$ 向量空间 $V$ 上的二次型，使得若记 $b$ 为 $q$ 的极化 $(x, y) \mapsto q(x+y) - q(x) - q(y)$，并记 $\ell$ 为根基 $\{x \in V \mid b(x, y) = 0$（对于 $b$ 的所有 $y \in V\}$），则 $\ell$ 是 1-[illegible] 维的。那么 $b$ 在 $V := V/\ell$ 上给出一个非退化交替形式 $b$，每个

¯SO($V$， $q$) 的元素都保持 $\ell$ 不变，而所得映射 SO($V$， $q$) $\to$ GL($V$) 实际上就是¯ ¯我们在上一节中使用的等价 $f$： SO($V$， $q$) $\to$ Sp($V$， $b$)。

暂时固定 $V$ 中的一个补空间 $V'$ to $\ell$。在 $\ell$ 上作平凡延拓可得到一个映射 SO($V', q$) $\to$ SO($V, q$)，我们将其视为一个嵌入。我们也可以将 $b$ 输送到 $V'$，于是 SO($V', q$) 包含于 Sp($V', b$) 中。于是相关映射可组成一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(V,q) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Sp}(\bar{V},\bar{b}) \\ \uparrow & & \downarrow\wr \\ \mathrm{SO}(V',q) & \hookrightarrow & \mathrm{Sp}(V',b). \end{array}$$

我们很快就会在 SO($V', q$) 中固定一个极大环面，但目前我们希望能够使用任意选择。

若 $T$ 是 SO($V', q$) 中的一个极大环面，则 SO($V', q$) 由 $T$ 及其在 SO($V, q$) 中的长根子群生成； $T$ 的像是 Sp($V, b$) 中的一个极大环面，¯ ¯而 SO($V', q$) 在 Sp($V, b$) 中的像是后者中由 _ _$f$($T$) 及其在 Sp($V, b$) 中的短根子群生成的子群；并且 $f$ 限制为从 SO($V', q$) 到其像上的一个同构。SO($V', q$) 作为 SO($V, q$) 的子群，以及它在 Sp($V, b$) 中的同构像，取决于 $V'$ 的选择。然而，李代数 $\mathfrak{so}(V', q) \to \mathfrak{sp}(V, b)$ 的嵌入像并不取决于 $V'$ 的选择。事实上，由于补空间 $\{X \in \mathfrak{so}(V, q) \mid XV' \subset \ell\}$ 到 $\mathfrak{so}(V, q)$ 中（ $\mathfrak{so}(V'$, $q)$ 的像）的部分被 $\mathfrak{so}(V, q) \to \mathfrak{sp}(V, b)$ 湮灭，我们有 $\mathfrak{so}(V', q)$ 和 $\mathfrak{so}(V, q)$ 在 $\mathfrak{sp}(V, b)$ 中的像相等。这个公共像可描述为：对于所有 $\bar{v} \in V\}$， $\{X \in \mathfrak{sp}(V, b) \mid b(X\bar{v}, \bar{v})$，而无需引用 $V'$¯ ¯ ¯ ¯ ¯。

现在我们将 $\mathfrak{so}(V, q)$ 记作 $\mathfrak{so}_{2n}$，并将其记为 $\mathfrak{so}_{2n}$。因此，我们有一个 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 的子 Sp$_{2n}$-表示 $\mathfrak{so}_{2n}$，对偶地，也有一个 $\mathfrak{sp}^*_{2n}$ 的商 Sp$_{2n}$-表示 $\mathfrak{so}^*_{2n}$。当然，商 SO$_{2n+1} \twoheadrightarrow$ Sp$_{2n}$ 使我们能够将 Sp$_{2n}$ 的任意表示膨胀为 SO$_{2n+1}$ 的表示。于是，我们将 SO$_{2n+1}$-表示 $\mathfrak{so}^*_{2n}$ 识别为 $\mathfrak{sp}^*_{2n}/\ker(\mathfrak{sp}^*_{2n} \to \mathfrak{so}^*_{2n+1})$，从而也识别为 $\mathrm{im}(\mathfrak{sp}^*_{2n} \to \mathfrak{so}^*_{2n+1})$。由于复合映射 $\mathfrak{so}_{2n} \to \mathfrak{so}_{2n+1} \to \mathfrak{sp}_{2n}$ （其先验地依赖于 $V'$ 的选择）是嵌入 $\mathfrak{so}_{2n} \to \mathfrak{sp}_{2n}$ （它不依赖于该选择），复合映射 $\mathfrak{sp}^*_{2n} \to \mathfrak{so}^*_{2n+1} \to \mathfrak{so}^*_{2n}$ 也是商映射 $\mathfrak{sp}^*_{2n} \to \mathfrak{so}^*_{2n}$。也就是说，$\mathrm{im}(\mathfrak{sp}^*_{2n} \to \mathfrak{so}^*_{2n+1})$ 是 $\mathfrak{so}^*_{2n+1}$ 中 $\mathfrak{so}^*_{2n}$ 的典范提升，我们据此将 $\mathfrak{so}^*_{2n}$视为 $\mathfrak{so}^*_{2n+1}$ 的子 SO$_{2n+1}$-表示。

现在固定 SO($V', q$) 中的一个极大环面 $T$。那么 $T$也是 SO$_{2n+1}$ 中的一个极大环面，而等价 SO$_{2n+1} \to$ Sp$_{2n}$ 将 $T$ 同构到 Sp$_{2n}$ 中的一个极大环面。我们稍微滥用记号，也用 $T$ 表示这个像环面。因此， $\mathfrak{t}$ 包含于 $\mathfrak{so}_{2n}$ 中。注意， $f$ 限制为一个同构 $N_{\mathrm{SO}_{2n+1}}(T)/T \to N_{\mathrm{Sp}_{2n}}(T)/T$，它交织了二者在 $T$ 上的作用。记 $W'$ 为 $N_{\mathrm{SO}(V',q)}(T)/T$，并记 $W$ 为 $N_{\mathrm{SO}_{2n+1}}(T)/T$ 及其同构像 $N_{\mathrm{Sp}_{2n}}(T)/T$。于是 $W'$ 是 $W$ 的正规子群，并且 $W$ 中存在 $W'$ 的一个补空间，它在 $X_*(T)$ 的一组基上作用为符号变化，因而在 $\mathfrak{t} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ 和 $\mathfrak{t}^*$ 上作用平凡。也就是说， $\mathfrak{t}//W'$ 等于 $\mathfrak{t}//W$，而 $\mathfrak{t}^*//W'$ 等于 $\mathfrak{t}^*//W$。回忆一下，存在函数 $a_0$、.....、 $a_n \in k[\mathfrak{so}_{2n}]$，使得对每个 $X \in \mathfrak{so}_{2n}$，若将 $X$ 视为 $\mathfrak{gl}_{2n}$ 的一个元素，则 $X$ 的特征多项式为

元素 $(a_0(X) + a_1(X)\lambda + \cdots + a_n(X)\lambda^n)^2$，属于 $k[\lambda]$。由于 $k$ 的特征为 2，这些函数是唯一确定的。特别地，它们不仅是 $\mathrm{SO}(V',q)$-不变的，而且实际上是 $\mathrm{Sp}_{2n}$-不变的。由于 $a_0|_{\mathfrak{t}}$、……、$a_n|_{\mathfrak{t}}$ 是 $\mathfrak{t}$ 中元素的对角项的初等对称多项式，它们生成 $k[\mathfrak{t}]^{W'} = k[\mathfrak{t}]^W$。因此，限制映射 $k[\mathfrak{so}_{2n}]^{\mathrm{SO}(V',q)} \to k[\mathfrak{t}]^{W'} = k[\mathfrak{t}]^W$ 限制在 $k[\mathfrak{so}_{2n}]^{\mathrm{Sp}_{2n}}$ 上时已经是满射；但定理 1.1(v) 表明它是一个同构，所以 $k[\mathfrak{so}_{2n}]^{\mathrm{Sp}_{2n}}$ 等于 $k[\mathfrak{so}_{2n}]^{\mathrm{SO}(V',q)}$，而限制映射 $k[\mathfrak{so}_{2n}]^{\mathrm{Sp}_{2n}} \to k[\mathfrak{t}]^W$ 是 $k$-代数的一个同构；也就是说，对偶映射 $\mathfrak{t}/\!/W \to \mathfrak{so}_{2n}/\!/\mathrm{Sp}_{2n}$ 是概形的一个同构。我们将在后文用此证明定理 1.1(v)。

由于 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 中的每个半单元素都属于某个极大环面的李代数（见 $\mathrm{Sp}_{2n}$ [Bor91，命题 11.8]）；由于 $\mathrm{Sp}_{2n}$ 中的任意两个极大环面都是 $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$-共轭的；又由于 $\mathfrak{so}_{2n}$ 是 $\mathfrak{sp}_{2n}$的一个子 $\mathrm{Sp}_{2n}$表示，因此$\mathfrak{so}_{2n}$ 包含 $\mathfrak{sp}_{2n}$中的所有半单元素。也就是说，我们有包含关系 $\mathfrak{so}_{2n}^{\mathrm{ss}} \subset \mathfrak{sp}_{2n}^{\mathrm{ss}} \subset \mathfrak{so}_{2n}$。特别地，由于定理 1.1(iv)（对于 $\mathrm{SO}(V',q) \curvearrowright \mathfrak{so}(V',q) = \mathfrak{so}_{2n}$）表明 $\mathfrak{so}_{2n}^{\mathrm{ss}}$ 等于 $\mathfrak{so}_{2n}$，因此 $\mathfrak{sp}_{2n}^{\mathrm{ss}}$ 也等于 $\mathfrak{so}_{2n}$。这证明了定理 1.1(iv)（对于 $\mathrm{Sp}_{2n} \curvearrowright \mathfrak{sp}_{2n}$）。因此，$\mathfrak{t}/\!/W \to \mathfrak{so}_{2n}/\!/\mathrm{Sp}_{2n}$ 是同构这一事实，恰好就是 $\mathrm{Sp}_{2n} \curvearrowright \mathfrak{sp}_{2n}$的定理 1.1(v)。

由于 Jordan 分解的函子性 [Bor91、定理 4.4(4)] 保证了 $\mathfrak{so}_{2n}$ 中的一个元素是半单的，当且仅当它作为 $\mathfrak{sp}_{2n}$中的元素也是半单的，因此有等式 $\mathfrak{so}_{2n}^{\mathrm{ss}} = \mathfrak{sp}_{2n}^{\mathrm{ss}}$。现在，$\mathfrak{so}_{2n}/\!/\mathrm{SO}(V',q) = \mathfrak{so}_{2n}/\!/\mathrm{Sp}_{2n}$ 的 $k$- 点一方面恰好是 $\mathfrak{so}_{2n}$ 上的闭 $\mathrm{SO}(V',q)$- 轨道，而这些轨道正是经过 $\mathfrak{so}_{2n}^{\mathrm{ss}} = \mathfrak{sp}_{2n}^{\mathrm{ss}}$中元素的 $\mathrm{SO}(V',q)$-轨道；另一方面，它们也恰好是 $\mathfrak{so}_{2n}$上的闭 $\mathrm{Sp}_{2n}$-轨道。这说明，经过 $\mathfrak{sp}_{2n}^{\mathrm{ss}}$ 中元素的 $\mathrm{Sp}_{2n}$-轨道是闭的。引理 2.2 给出了逆命题，从而证明了定理 1.1(i)。

几乎相同的论证也适用于 $\mathrm{SO}_{2n+1} \curvearrowright \mathfrak{so}_{2n+1}^*$，但存在两个主要问题。首先，我们不知道如何简明、具体地描述 $k[\mathfrak{so}_{2n}^*]^{\mathrm{SO}(V',q)}$，从而看出它等于 $k[\mathfrak{so}_{2n}^*]^{\mathrm{SO}_{2n+1}}$。其次，尽管 $\mathfrak{so}_{2n+1}^*$ 中的每个半单元素都属于 $\mathrm{SO}_{2n+1}$中的某个极大环面 $T_1$ 的 $\mathfrak{t}_1^*$，并且属于 $\mathfrak{so}_{2n}^*$，但我们无法事先保证可以选取 $\mathrm{SO}(V',q)$中的极大环面 $T_1$。也就是说，尽管有嵌入 $(\mathfrak{so}_{2n+1}^*)^{\mathrm{ss}} \subset \mathfrak{so}_{2n}^*$，但不再明显的是，嵌入 $(\mathfrak{so}_{2n}^*)^{\mathrm{ss}} \subset (\mathfrak{so}_{2n+1}^*)^{\mathrm{ss}}$ 是否为等式。解决这些问题的一个简单方法是从对偶侧回到原始侧。

我们通过在$\mathfrak{so}_{2n}$上构造一个 $\mathrm{SO}_{2n+1}$ 不变的非退化双线性形式来实现这一点。首先考虑 $\mathfrak{sp}_{2n,\mathbb{Z}}$ 上的二次型在 [Kot16, §I.3], 中定义的极化形式 $B_{\mathbb{Z}}$，该文中记作 $Q_2$。具体而言，不难证明（尽管我们并不需要用到这一点），对于所有 $X, Y \in \mathfrak{sp}_{2n,\mathbb{Z}}$，$B_{\mathbb{Z}}(X,Y)$ 等于 $\mathrm{Tr}(XY)$。暂且记 $\mathfrak{sp}_{2n,\mathbb{Z}}$ 中由 $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}} := X_*(T)$ 以及对应于 $T_{\mathbb{Z}}$的短根子空间张成的子空间为 $\mathfrak{so}_{2n,\mathbb{Z}}$。这是记号上的滥用，因为$\mathfrak{so}_{2n,\mathbb{Z}}$ 并不是 $\mathfrak{sp}_{2n,\mathbb{Z}}$的子代数；但是，$\mathfrak{so}_{2n,\mathbb{Z}} + 2\mathfrak{sp}_{2n,\mathbb{Z}}$ 是一个 $\mathrm{Sp}_{2n,\mathbb{Z}}$ 稳定的子代数，在其上，[Kot16, Lemma I.2(1) 和 §I.5] 表明 $B_{\mathbb{Z}}$ 取值于 $2\mathbb{Z}$，因此我们可以将 $B'_{\mathbb{Z}}$ 记作 $1/2$乘以 $B$的限制。于是，$B'_{\mathbb{Z}}$ 是一个取值于 $\mathbb{Z}$的形式。接着，将 $\mathfrak{so}_{2n} = \left((\mathfrak{so}_{2n,\mathbb{Z}} + 2\mathfrak{sp}_{2n,\mathbb{Z}})/2\mathfrak{sp}_{2n,\mathbb{Z}}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ 上由 $B'_{\mathbb{Z}}$诱导的取值于 $k$的形式记作 $B'$。具体而言，对于任意 $X, Y \in \mathfrak{so}_{2n}$，我们可以在 $\mathfrak{so}_{2n,\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} W(k)$ 中分别选取 $X$和 $Y$的提升 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$。那么 $\mathrm{Tr}(\tilde{X}\tilde{Y})$ 属于 $2W(k)$，而 $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tilde{X}\tilde{Y})$ 在 $k$中的像为 $B'(X,Y)$。

配对 $B'$ 是 $\mathrm{Sp}_{2n}$ 不变的，因而也是 $\mathrm{SO}_{2n+1}$ 不变的，因为原形式 $B$ 是 $\mathrm{Sp}_{2n,\mathbb{Z}}$ 不变的（或者也可以根据具体描述直接验证）。它在 $\mathfrak{t}$ 上非退化，因为它是韦伊不变的，因此 $\mathfrak{t}$ 的基（由 $\Phi(\mathrm{Sp}_{2n}, T)$ 中长根对应的余根组成）是正交的；并且 [Kot16, Lemma I.1] 表明，若 $\alpha \in \Phi(\mathrm{Sp}_{2n}, T)$ 是长根，则 $B'(h_\alpha, h_\alpha)$ 等于 1。再结合[Kot16, §I.5], 以及 [Kot16, §I.4], 中的显式描述，可知它在 $\mathfrak{so}_{2n}$中 $\mathfrak{t}$ 的正交补上也非退化。

现在我们有了 $\mathrm{SO}_{2n+1}$的表示的对偶同构 $\mathfrak{so}_{2n} \to \mathfrak{so}_{2n}^*$ ，因此有一个 $k[\mathfrak{so}_{2n}]^{\mathrm{Sp}_{2n}} = k[\mathfrak{so}_{2n}]^{\mathrm{SO}_{2n+1}}$ 与 $k[\mathfrak{so}_{2n}^*]^{\mathrm{SO}_{2n+1}}$ 之间的同构，该同构限制为 $k[\mathfrak{so}_{2n}]^{\mathrm{SO}(V',q)}$ 与 $k[\mathfrak{so}_{2n}^*]^{\mathrm{SO}(V',q)}$ 之间的同构。由于我们已经证明 $k[\mathfrak{so}_{2n}]^{\mathrm{SO}(V',q)}$ 等于 $k[\mathfrak{so}_{2n}]^{\mathrm{Sp}_{2n}}$，所以可得 $k[\mathfrak{so}_{2n}^*]^{\mathrm{SO}(V',q)}$ 等于 $k[\mathfrak{so}_{2n}^*]^{\mathrm{SO}_{2n+1}}$。也就是说， $\mathfrak{so}_{2n}^*/\!/\mathrm{SO}(V',q)$ 等于 $\mathfrak{so}_{2n}^*/\!/\mathrm{SO}_{2n+1}$。因此，与 $\mathrm{Sp}_{2n} \curvearrowright \mathfrak{sp}_{2n}$的情形一样，$\mathrm{SO}_{2n+1} \curvearrowright \mathfrak{so}_{2n+1}^*$ 的定理 1.1(i)、(v) 将由 $\mathrm{SO}(V',q) \curvearrowright \mathfrak{so}_{2n}^*$ 的相应结果推出，只要我们证明定理 1.1(iv)，即 $(\mathfrak{so}_{2n+1}^*)^{\mathrm{ss}}$ 等于 $(\mathfrak{so}_{2n}^*)^{\mathrm{ss}}$。

首先，记住我们已将 $\mathfrak{t}^*$ 与 $\mathfrak{so}_{2n}^*$ 和$\mathfrak{so}_{2n+1}^*$的 $T$-不动子空间相识别；而商 $\mathfrak{so}_{2n+1}^* \to \mathfrak{so}_{2n}^*$ 在 $\mathfrak{t}^*$上的限制是恒等映射。从这个意义上说，我们可以说，作为 $\mathfrak{so}_{2n+1}^*$的一个子 $\mathrm{SO}_{2n+1}$表示， $\mathfrak{so}_{2n}^*$包含 $\mathfrak{t}^*$。显然，$(\mathfrak{so}_{2n}^*)^{\mathrm{ss}} := \mathrm{Ad}^*(\mathrm{SO}(V',q))\mathfrak{t}^*$ 包含于$(\mathfrak{so}_{2n+1}^*)^{\mathrm{ss}} = \mathrm{Ad}^*(\mathrm{SO}_{2n+1})\mathfrak{t}^*$。对于反向包含，如注 3.1 所述，我们将 $\mathfrak{so}_{2n}$ 与 $\mathfrak{so}_{2n}^*$ 相识别的 $\mathrm{SO}_{2n+1}$-等变同构限制为一个 $\mathrm{SO}_{2n+1}$-等变双射 $\mathfrak{sp}_{2n}^{\mathrm{ss}} = \mathfrak{so}_{2n}^{\mathrm{ss}} \to (\mathfrak{so}_{2n}^*)^{\mathrm{ss}}$。由于 $\mathfrak{sp}_{2n}^{\mathrm{ss}}$ 在 $\mathrm{Sp}_{2n}$作用下不变，因而也在 $\mathrm{SO}_{2n+1}$作用下不变，$(\mathfrak{so}_{2n}^*)^{\mathrm{ss}}$同样如此。这就证明了 $\mathrm{Ad}^*(\mathrm{SO}_{2n+1})\mathfrak{t}^* = (\mathfrak{so}_{2n+1}^*)^{\mathrm{ss}}$ 包含于$(\mathfrak{so}_{2n}^*)^{\mathrm{ss}}$，从而得到两者相等。

## 7. Non-uniqueness of the Jordan decomposition

假设存在根 $\alpha, \beta \in \Phi(G,T)$，使得 $\alpha+\beta$属于 $\Phi(G,T)$，但余根 $h_{\alpha+\beta}$ 不在余根 $h_\alpha$ 和 $h_\beta$的张成空间中。

注 7.1. $\Phi(G,T)$ 中包含 $\alpha$和 $\beta$的不可约分支不是单键的， $\alpha$ 或 $\beta$ 至少有一个是短根， $\alpha+\beta$ 是长根，并且 $\alpha+\beta$ 在$k$中的长度为 0。由于由 $\alpha$ 和 $\beta$ 生成的 $\Phi(G,T)$ 的闭子系 $\Phi_{\alpha,\beta} := \Phi(G,T) \cap (\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta)$ 的秩为 2，且不是单键的，因此 $k$的特征等于 2，且 $\Phi_{\alpha,\beta}$ 的类型为 $\mathrm{B}_2 = \mathrm{C}_2$；或者 $k$ 的特征等于 3，且 $\Phi_{\alpha,\beta}$ 的类型为 $\mathrm{G}_2$。现在我们逐一考察各种情况：首先为包含 $\alpha$的 $\Phi$ 选取一个单根系。然后考察各种可能性可知，在固定$\alpha$后， $\beta$有两种可能，它们在 $\mathrm{stab}_{W(\Phi_{\alpha,\beta})}(\alpha)$ 中共轭；并且 $\alpha$ 和$\beta$ 都是短根。因此，若将由 $T$ 和与 $\Phi_{\alpha,\beta}$中的根相对应的 $T$ 的根子群生成的 $G$ 的子群记作 $H$ ，则 $H$中存在一个包含 $T$的子群$H'$，使得 $\Phi(H',T)$ 恰好由$\Phi(H,T) = \Phi_{\alpha,\beta}$中的短根组成。具体而言，我们处于以下两种情形之一。

(1) $k$ 的特征为 2， $H$ 的导出子群为 $\mathrm{SO}_5$ 或 $\mathrm{Sp}_4$， $H'$ 的导出子群为 $\mathrm{PGO}_4$ 或 $\mathrm{SO}_4$， ，且 $\alpha$ 和 $\beta$ 是正交短根。那么，$\Phi_{\alpha,\ \beta}$ 是短根集合 $\pm\{\alpha,\beta\}$ 与长根集合$\pm\{\alpha+\beta, \alpha-\beta\}$ 的并集。

(2) $k$ 的特征为 3，$H$ 的导出子群为 $G_2$，$H'$ 的导出子群为 $\mathrm{PGL}_3$，，且 $\alpha$ 和 $\beta$ 是短根，它们的和是一个长根。那么，$\Phi_{\alpha,\,\beta}$ 是短根集合 $\pm\{\alpha,\beta,\alpha-\beta\}$ 与长根集合 $\pm\{\alpha+\beta,2\alpha-\beta,\alpha-2\beta\}$ 的并集。

备注7.1 表明 $U_\alpha$ 和 $U_{\alpha+\beta}$ 可交换。此外，对于每个非平凡的 $X_{-\alpha-\beta}\in\mathfrak{g}_{-\alpha-\beta}$ 以及每个 $k$-代数 $A$，映射 $U_\alpha(A)\to\mathfrak{g}_{-\beta}\otimes_k A$ 由 $u_\alpha\mapsto(\mathrm{Ad}(u_\alpha)-1)X_{-\alpha-\beta}$ 给出，是一个同构。

现在，由于 $h_{\alpha+\beta}$ 不属于 $h_\alpha$ 和 $h_\beta$的张成空间，存在某个 $X^*_{\mathrm{ss}}\in\mathfrak{t}^*$在 $h_\alpha$ 和 $h_\beta$上取零，但满足 $X^*_{\mathrm{ss}}(h_{\alpha+\beta})=1$。特别地，$X^*_{\mathrm{ss}}$ 被$U_\alpha$ [KW76, 引理 3.1ii)]固定。设 $X^*_{\mathrm{nil}}$ 是 $\beta$-权空间$T$在 $\mathfrak{g}$中的一个非零元素，因此 $X^*_{\mathrm{nil}}$ 在 $\mathfrak{g}_{-\beta}$于 $\mathfrak{g}$中的 $T$-稳定补空间上取零。由于 $-2\alpha-\beta$不属于 $\Phi(G,T)$，我们有 $U_{\alpha+\beta}$固定了 $X^*_{\mathrm{nil}}$。于是，$X^*:=X^*_{\mathrm{ss}}+X^*_{\mathrm{nil}}$有一个显然的 Jordan 分解。

现在，Chevalley 交换关系表明，由 $u_{\alpha+\beta}\mapsto(\mathrm{Ad}^*(u_{\alpha+\beta})-1)X^*_{\mathrm{ss}}$ 给出的映射 $U_{\alpha+\beta}(k)\to(\mathfrak{g}_{-\alpha-\beta})^*$ 是一个 $T(k)$-等变同构；特别地，对于 $U_{\alpha+\beta}$ 上的 $T$-不变线性结构，它是线性的。并且，根据上文对 $\Phi_{\alpha\text{ 的描述},\ \beta}$，由 $u_\alpha\mapsto(1-\mathrm{Ad}^*(u_\alpha))X^*_{\mathrm{nil}}$ 给出的映射 $U_\alpha(k)\to(\mathfrak{g}_{-\alpha-\beta})^*$ 也是一个同构；这次它不是 $T(k)$- 等变的，但对于 $U_\alpha$ 上的 $T$- 不变线性结构，它仍然是线性的。因此，我们得到一个向量群的同构 $f:U_{\alpha+\beta}\to U_\alpha$。

记住，$U_\alpha$ 和 $U_{\alpha+\beta}$ 可交换。特别地，由 $u_{\alpha+\beta}\mapsto f(u_{\alpha+\beta})u_{\alpha+\beta}$ 给出的映射 $U_{\alpha+\beta}\to G$ 是一个同态。设 $A$ 是一个 $k$-代数。对于每个元素 $u_{\alpha+\beta}\in U_{\alpha+\beta}(A)$，若令 $u_\alpha=f(u_{\alpha+\beta})$，那么由于 $U_\alpha$ 固定 $X^*_{\mathrm{ss}}$，且 $U_{\alpha+\beta}$ 固定 $X^*_{\mathrm{nil}}$，我们有如下等式

$$(1-\mathrm{Ad}^*(u_\alpha u_{\alpha+\beta}))X^*_{\mathrm{nil}}=(1-\mathrm{Ad}^*(u_\alpha))X^*_{\mathrm{nil}}=(\mathrm{Ad}^*(u_{\alpha+\beta})-1)X^*_{\mathrm{ss}}=(\mathrm{Ad}^*(u_\alpha u_{\alpha+\beta})-1)X^*_{\mathrm{ss}}.$$

也就是说，我们的同态 $U_{\alpha+\beta}\to G$ 实际上落在 $C_G(X^*)$ 中，因此也落在 $C_G(X^*)^\circ_{\mathrm{red}}$ 中。此外，如果 $A$ 等于 $k$ 且 $u_{\alpha+\beta}$ 非平凡，那么 $\mathrm{Ad}^*(u_\alpha u_{\alpha+\beta})X^*_{\mathrm{ss}}=\mathrm{Ad}^*(u_{\alpha+\beta})X^*_{\mathrm{ss}}$是 $X^*$ 的一个半单部分，且不同于 $X^*_{\mathrm{ss}}$。注意，这表明下列每一项断言都可能不成立：

- [KW76 §3.8i)] 中的断言，即该处定义的映射 $B/C_B(X^*_{\mathrm{ss}})\to\mathbb{A}^m$（通过对某些根向量求值给出）是一个同构；
- [KW76 §3.8ii)], 中的断言，即我们有该处所写的包含关系 $C_G(X^*)^\circ\subset C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ$（但实际上，考虑到隐含地取了极大约化子概形，所指的是 $C_G(X^*)^\circ_{\mathrm{red}}\subset C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ$）；以及

- 关于 [KW76，定理 4iv)], Jordan 分解是唯一的断言。

到目前为止，我们的计算都是抽象的。现在让我们给出一个具体例子。设 $k$ 为特征 2 的代数闭域，并设 $G=\mathrm{Sp}_4$ 为 $\mathrm{GL}_4$ 中稳定辛形式的闭子群：

$$\left\langle\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}\right\rangle=x_1y_4+x_2y_3+x_3y_2+x_4y_1.$$

$T$ 中的对角矩阵子群是一个极大环面。对于 $G$ 中对角矩阵群的特征 $\epsilon_1$、……、$\epsilon_4$，采用一种显然的记号，

$\mathrm{GL}_4$, ，使得 $\epsilon_3$ 和 $\epsilon_4$ 在 $T$ 上的限制与 $-\epsilon_2$ 和$-\epsilon_1$的限制一致，因此这里我们将使用 $\alpha=\epsilon_1-\epsilon_2$ 和 $\beta=\epsilon_1+\epsilon_2$。

$G$ 到 $\mathrm{GL}_4$ 的嵌入给出了 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{gl}_4$的嵌入，因此有商$\mathfrak{gl}_4^* \to \mathfrak{g}^*$。我们进一步通过迹配对将 $\mathfrak{gl}_4^*$ 与 $\mathfrak{gl}_4$ 等同。随后，我们将用 $4\times 4$ 矩阵以非唯一的方式表示 $\mathfrak{sp}_4^*$ 中的元素。我们滥用记号，用等号表示选取一个代表元，这使我们可以例如写成

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

其中所有空白项均填入 0，这是 $\mathfrak{sp}_4^*$中的一个元素。它显然具有如下 Jordan 分解:

$$X^* = X^*_{\mathrm{ss}} + X^*_{\mathrm{nil}}, \ \text{where} \ X^*_{\mathrm{ss}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \ X^*_{\mathrm{nil}} = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

态射 $U_{\alpha+\beta} \to U_\alpha$ 由下式给出

$$\begin{bmatrix} 1 & & & t \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

S具体而言，考虑由下式给出的元素 $u_\alpha \in U_\alpha(k)$ 和 $u_{\alpha+\beta} \in U_{\alpha+\beta}(k)$

$$u_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \ u_{\alpha+\beta} = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

它们满足 $u_\alpha u_{\alpha+\beta} = u_{\alpha+\beta} u_\alpha$ 和 $u_\alpha^2 = u_{\alpha+\beta}^2 = \mathrm{Id}$。由于 $\mathfrak{sp}_4 \hookrightarrow \mathfrak{gl}_4$ ，因此$\mathfrak{gl}_4^* \twoheadrightarrow \mathfrak{sp}_4^*$ 是 $\mathrm{Sp}_4$-等变的，我们计算得

$$\mathrm{Ad}^*(u_\alpha) X^*_{\mathrm{ss}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = X^*_{\mathrm{ss}}.$$

此外，很容易看出 $\mathrm{Ad}^*(u_{\alpha+\beta}) X^*_{\mathrm{nil}} = X^*_{\mathrm{nil}}$。另一方面，我们有

$$\mathrm{Ad}^*(u_{\alpha+\beta}) X^*_{\mathrm{ss}} = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \neq X^*_{\mathrm{ss}}, \ \mathrm{Ad}^*(u_\alpha) X^*_{\mathrm{nil}} = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & 1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \neq X^*_{\mathrm{nil}}.$$

特别地，$\mathrm{Ad}^*(u_\alpha u_{\alpha+\beta}) X^* = X^*$，但 $\mathrm{Ad}^*(u_\alpha u_{\alpha+\beta}) X^*_{\mathrm{ss}} \neq X^*_{\mathrm{ss}}$。

注 7.3。人们或许会想， $\mathfrak{g}^*$上是否存在某种“受限对偶李代数”结构，也就是说，是否存在一种类似于受限李代数所带的 $p$ 次幂映射。对于每个极大环面 $T$，在 $\mathfrak{t}^*$ 上都有这样一种运算：对于每个 $Y^* \in \mathfrak{t}^*$，我们记得 $p$ 次幂映射 $(\cdot)^{[p]}$ 在 $\mathfrak{t}$ 上是双射，设其逆映射为 $(\cdot)^{-[p]}$，然后对每个 $h \in \mathfrak{t}$定义 $(Y^*)^{[p]}(h) = \left(Y^*(h^{-[p]})\right)^p$。这一结构显然具有函子性。此外，对于 $G$ 中的每个极大环面 $T$ 以及每个 $\alpha \in \Phi(G,T)$，我们有 $h_\alpha^{[p]}$等于 $h_\alpha$；因此，对于每个 $Y^* \in \mathfrak{t}^*$，有$\{\alpha \in \Phi(G,T) \mid Y^*(h_\alpha) = 0\}$等于 $\{\alpha \in \Phi(G,T) \mid (Y^*)^{[p]}(h_\alpha) = 0\}$，故由[KW76，引理 3.1] 可得 $C_G(Y^*)^\circ$ 等于 $C_G((Y^*)^{[p]})^\circ$。

若 $Y^* \in \mathfrak{g}^*$ 是半单的，且 $T_1$ 和 $T_2$ 是 $C_G(Y^*)^\circ$中的极大环面，并且我们将所得的 $p$次幂分别记为 $(Y^*)_1^{[p]} \in \mathfrak{t}_1^* \subset \mathfrak{g}^*$ 和 $(Y^*)_2^{[p]} \in \mathfrak{t}_2^* \subset \mathfrak{g}^*$，那么存在某个 $g \in C_G(Y^*)^\circ(k) = C_G((Y^*)_1^{[p]})(k)$，使得 $gT_1g^{-1}$ 等于 $T_2$，且 $g$ 既固定 $(Y^*)_1^{[p]}$，又将其映到 $(Y^*)_2^{[p]}$。也就是说，$(Y^*)_1^{[p]}$ 等于 $(Y^*)_2^{[p]}$，因此 $C_G(Y^*)^\circ$中的 $p$次幂 $(Y^*)^{[p]}$ 与极大环面的选择无关。

因此，我们可以询问，在所有的 $\mathfrak{g}^*$ 上是否存在某种 $p$ 次幂运算，使其满足以下性质，类似于受限李代数中的相应性质：

- 它关于 $G(k)$ 的余伴随作用是等变的；
- 它限制在 $(\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{ss}}$ 上时，退化为我们刚刚定义的运算；
- 它保持 Jordan 分解；并且
- $\mathfrak{g}^*$ 的每个幂零元都被该运算的某次迭代所湮灭。

遗憾的是，并不存在这样的运算。若存在，那么对于上面的元素 $X^* \in \mathfrak{g}^*$，当 $N$ 足够大时，我们将有 $(X^*)^{[p]^N}$ 同时等于 $(X_{\mathrm{ss}}^*)^{[p]^N}$ 和 $\mathrm{Ad}^*(u_\alpha u_{\alpha+\beta})(X_{\mathrm{ss}}^*)^{[p]^N}$，从而 $C_G(X_{\mathrm{ss}}^*)^\circ = C^G((X_{\mathrm{ss}}^*)^{[p]^N})^\circ$ 等于 $C_G(\mathrm{Ad}^*(u_\alpha u_{\alpha+\beta})(X_{\mathrm{ss}}^*)^{[p]^N})^\circ = C_G(\mathrm{Ad}^*(u_\alpha u_{\alpha+\beta})X_{\mathrm{ss}}^*)^\circ = (u_\alpha u_{\alpha+\beta})C_G(X_{\mathrm{ss}}^*)^\circ(u_\alpha u_{\alpha+\beta})^{-1}$。最终可推出 $C_G(X_{\mathrm{ss}}^*)^\circ = u_\alpha^{-1}C_G(X_{\mathrm{ss}}^*)^\circ u_\alpha$ 等于 $u_{\alpha+\beta}C_G(X_{\mathrm{ss}}^*)^\circ u_{\alpha+\beta}^{-1}$，但这是错误的，因为 $u_{\alpha+\beta}Tu_{\alpha+\beta}^{-1}$ 不包含在 $C_G(X_{\mathrm{ss}}^*)^\circ$ 中（因为 $\mathrm{Lie}(u_{\alpha+\beta}Tu_{\alpha+\beta}^{-1})$ 到 $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ 的 $T$-等变投影是非平凡的）。

## 8. Uniqueness of the Jordan decomposition

本节中，设 $X^*$ 是 $\mathfrak{g}^*$的一个元素。

我们先提出一个粗略的观察，见备注8.1，讨论半单部分属于某个不变极大环面的对偶李代数的 Jordan 分解的唯一性。

备注 8.1. 设 $T$ 是一个极大环面，且 $X_1^*$ 和 $X_2^*$ 都是属于 $T$ 的 $X^*$ 的半单部分。那么， $X_1^*$ 和 $X_2^*$ 在 $\mathfrak{t}$ 上都与 $X^*$ 一致，并且在 $\mathfrak{g}$ 中唯一的 $\mathfrak{t}$ -不变补空间上都为零，因此二者相等。

引理 8.2 在定理 (iii) 的唯一性结论证明中，用来提供一个方便的“参照”Jordan 分解。

**引理 8.2**。 若 $T$ 是 $C_G(X^*)$ 的可对角化子群，则 $X^*$ 存在一个 *Jordan* 分解，其半单部分属于 $(\mathfrak{g}^*)^T$。

证明。 我们有 $X^*$ 属于 $(\mathfrak{g}^*)^T$，这是 $\mathfrak{g}^*$ 的子空间，其元素在 $\mathfrak{g}$中 $\mathrm{Lie}(C_G(T)^\circ)$ 的唯一 $T$-稳定补空间上取值为零，并且与 $C_G(T)^\circ$ 等变

地通过限制到 Lie$(C_G(T)^\circ)$，与 Lie$(C_G(T)^\circ)^*$相识。注 3.4 表明，Lie$(C_G(T)^\circ)^*$ 中 Jordan 分解在 $(\mathfrak{g}^*)^T$ 上的拉回，是 $\mathfrak{g}^*$中的 Jordan 分解。于是，由定理 1.1(ii) 可得结论，其中以 $C_G(T)^\circ$ 代替$G$。□

令 $X^*_{\mathrm{ss}}$ 为 $X^*$的 Jordan 分解中的半单部分。根据注记 2.1，存在 $C_G(X^*_{\mathrm{ss}})$中的一个极大环面 $T$，以及 $G$ 的一个博雷尔子群 $B$，使其包含 $T$，且 $X^*$ 在 $\mathfrak{b}$ 上的取值与 $X^*_{\mathrm{ss}}$一致，而 $X^*$ 在 $\mathfrak{g}$中 Lie$(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ)$ 的 $T$-稳定补空间上为零。根据 [KW76，引理 3.1]，$\Phi(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ, T)$恰好是满足 $X^*_{\mathrm{ss}}(h_\alpha)$为零的 $\alpha \in \Phi(G,T)$的集合；等价地，$X^*(h_\alpha)$为零。

记 $Z$ 为 $C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ$的概形中心，并令 $H = C_G(Z)^\circ$。这里我们看到了就我们的目的而言，李代数与对偶李代数之间的主要区别。也就是说，$H$ 可能严格大于 $C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ$；但李代数一侧的类似构造总是给出 $C_G(Z(C_G(X_{\mathrm{ss}})^\circ))^\circ = C_G(X_{\mathrm{ss}})^\circ$，其中 $X_{\mathrm{ss}}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个半单元素。

根据 [Spi21，注 3。2]，存在一个 $H$-稳定补空间 $\mathfrak{h}^\perp$，它补足 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$中的部分。它是 $Z$ 在 $\mathfrak{g}$上的非平凡权空间之和。由于 $\mathfrak{h}^\perp$ 包含 $T$-稳定的补空间，该补空间补足 Lie$(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ)$ 在 $\mathfrak{g}$中的部分，因此 $X^*$ 在 $\mathfrak{h}^\perp$上作用平凡，故由$Z$不变。

在特征 0 下，半单元素的中心化子是一个利维子群，因此，除非该利维子群就是整个 $G$，否则它具有非平凡的中心环面。在正特征下，这种情况未必会发生。这里有两种失效情形。设 $k$ 的特征为 2，且 $G$ 等于 $\mathrm{Sp}_4$。那么，式 (7.2) 中给出的元素 $X^*_{\mathrm{ss}}$ 具有如下性质：$C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ$ 等于 $\mathrm{SO}_4$，其中心为 $Z(G)$。这种情况只有在元素 $X^*_{\mathrm{ss}}$ 不被 $G$中的所有元素不变时才会发生；此时，$C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ$ 的根系在 $G$的根系中不是闭合的。因此，这种情况只能在特征 2 和 3 下显现（见注7.1），并可通过从 $C_G(X^*_{\mathrm{ss}})$转到 $H$来处理。另一种失效情形出现在 $X^*_{\mathrm{ss}}$ 由 $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & c \\ i & j & -f & -b \\ n & i & -e & -a \end{pmatrix} \mapsto a$给出时。此时，$C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ$ 和$H$ 都等于 $\mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_2$，其中心是有限的。然而，在这种情况下，中心至少是一个非平凡的连通群。这种现象可能出现在特征 5 下，也可能出现在特征 2 和 3 下。引理 8.3 表明，这是可能发生的最坏情况。

**引理 8.3.** 如果 $H$ 不等于 $G$，那么$(Z(H)/Z(G))^\circ$ 是非平凡的。

证明. 我们通过对 $G$的维数进行归纳来证明该结论。当维数为 0 时，该结论显然成立。假设我们已经证明了该结论对所有维数小于 $G$的群都成立。

如果 $H$ 的半单秩 $\dim(T) - \dim(Z(H))$ 小于 $G$ 的半单秩 $\dim(T) - \dim(Z(G))$，那么 $\dim(Z(H)/Z(G)) = \dim(Z(H)) - \dim(Z(G))$ 为正，因此结论成立。否则，根据 [SS70, I.4.5]，存在 $T$ 在 $G$ 中的一组简单根 $\Delta$（不一定是由 $B$ 导出的那组），以及一个元素$\beta \in \Delta$，使得 $\beta$ 在 $\Phi(G,T)$ 中其所属分支的最高根 $\tilde{\alpha}$ 中的系数 $p$ 是素数，并且 $H(T)$ 包含于 $\mathbb{Z}(\{\tilde{\alpha}\} \cup \Delta \setminus \{\beta\})$。系数 $p$ 可能是也可能不是 $k$ 的特征。记 $\varpi^\vee$ 为 $T/Z(G)$ 中对应于 $\beta$ 的基本余权。注意，$H$ 包含于群 $C_G(\varpi^\vee(\mu_p))^\circ$，

其维数小于 $G$。如果该包含关系不是等号，那么我们可以用 $C_G(\varpi^\vee(\mu_p))^\circ$ 替换 $G$，并用归纳法推理。因此，我们可以且确实假设两者相等。特别地， $\mathbb{Z}\Phi(H, T)$ 等于 $\mathbb{Z}(\{\tilde{\alpha}\} \cup \Delta \setminus \{\beta\})$；所以$X^*(h_\beta)$ 非零。

记 $\ell$ 为 $\Phi(G,T)$ 上的归一化平方长度函数，因此 $\ell$ 的取值属于 $\{1,2,3\}$；当 $\alpha$ 属于 $\Phi(G,T)$ 的单键分支，或在其分支中为短根时， $\ell(\alpha)$ 等于 1。于是，由 $\alpha \mapsto \ell(\alpha)\alpha^\vee$ 给出的映射 $\Phi(G,T) \to \mathbb{Z}\Phi^\vee(G,T)$ 可延拓为同态 $\mathbb{Z}\Phi(G,T) \to \mathbb{Z}\Phi^\vee(G,T)$。我们有 $p\beta$属于 $\mathbb{Z}\Phi(H,T) = \mathbb{Z}\Phi(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ, T)$，因此 $p\ell(\beta)\beta^\vee$ 是各种 $\ell(\alpha)\alpha^\vee$ 的线性组合，其中 $\alpha \in \Phi(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ, T)$。由于对于每个 $\alpha \in \Phi(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ, T)$， $X^*(h_\alpha)$ 都等于零，但 $X^*(h_\beta)$ 非零（因为 $\beta$不属于 $\Phi(H, T)$，因而不属于 $\Phi(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ, T)$），所以 $p$或 $\ell(\beta)$在 $k$中的像等于零。

如果 $p$ 在 $k$ 中的像等于零，那么 $\varpi^\vee(\mu_p)$ 是 $Z(H)/Z(G)$ 的非平凡连通子群。

因此，我们可以并且确实假设 $p$ 的像非零，所以 $\ell(\beta)$ 的像等于零。通过检查 Dynkin 图，这意味着 $k$ 的特征为 2， $\Phi(G,T)$ 中包含 $\beta$ 的分支属于 $\mathsf{F}_4$, 型；并且按照 Bourbaki 编号 [（Bourbaki 1968，第八图版 ]）， $\beta$ 等于 $\alpha_2$。于是， $\Phi(H,T)$ 的每个分支都是单键的（事实上属于 $\mathsf{A}_2$ 型），所以 $\Phi(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ, T) = \Phi(C_H(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ, T)$ 在 $\Phi(H,T)$ 中是闭的。又因为 $\mathbb{Z}\Phi(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ, T)$ 等于 $\mathbb{Z}\Phi(H,T)$，所以实际上 $\Phi(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ, T)$ 等于 $\Phi(H,T)$，从而 $C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ$ 等于 $H$。继续使用 Bourbaki 编号，可得 $3\beta = 3\alpha_2$ 等于 $\tilde{\alpha} - 2\alpha_1 - 4\alpha_3 - 2\alpha_4$。仍使用（Bourbaki 1968，第八图版 ], ），我们有 $\alpha_1$、 $\alpha_2$ 和 $\tilde{\alpha}$ 是长根，而 $\alpha_3$ 和 $\alpha_4$ 是短根，因此 $6\beta^\vee$ 等于 $2\tilde{\alpha}^\vee - 4\alpha_1^\vee - 4\alpha_3^\vee - 2\alpha_4^\vee$，从而 $3\beta^\vee$ 等于 $\tilde{\alpha}^\vee - 2\alpha_1^\vee - 2\alpha_3^\vee - \alpha_4^\vee$。特别地， $X^*_{\mathrm{ss}}(h_\beta) = 3X^*(h_\beta)$ 属于 $\{X^*_{\mathrm{ss}}(h_\alpha) \mid \alpha \in \Phi(H,T)\}$ 的张成空间；由于 $H$ 等于 $C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ$，该张成空间就是单元素集合 0。因此 $X^*_{\mathrm{ss}}(h_\beta)$ 等于 0，于是 $\beta$ 属于 $\Phi(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})^\circ, T) = \Phi(H,T)$。这是矛盾。□

猜想8.4(i) 与引理8.2有关；若 Jordan 分解的半单部分是唯一的，则可由该引理推出这一猜想。鉴于第7节，猜想8.4(ii)是对 Jordan 分解所能期待的最强唯一性结论。

**猜想 8.4**。

*(i)* 群 $C_G(X^*_{ss})^\circ$ 包含 $C_G(X^*)^\circ$中的一个极大环面。*(ii)* $X^*$ 的每个半单部分都属于 $X^*_{ss}$的 $C_G(X^*)^\circ(k)$-轨道。

我们无法证明猜想8.4，但可以证明一个比定理1.1(iii)更强的唯一性结果。我们将在下文将其表述为定理8.6 。首先需要一些引理。

首先，我们证明引理8.5。鉴于我们对定理8.6的证明，这似乎很可能成为最终证明猜想8.4(ii)时一个有用的引理。

**引理 8.5**。 乘法型群 $Z$ 包含于 $C_G(X^*)$中；约化连通中心化子 $C_G(X^*)^\circ_{\mathrm{red}}$ 包含于 $H$中；并且，对于 $G$的每个中心子群 $\mathcal{Z}$，李代数李$(C_G(X^*)/\mathcal{Z})$ 包含于李$(H/\mathcal{Z})$中。

证明。 $X^*$ 在 $\mathfrak{h}^*$ 中的像显然被 $Z$不变，因此 $X^*$ 本身被 $Z$不变，所以$Z$ 包含于 $C_G($ $X^*)$。

自然映射 Lie($G$) $\to$ Lie($G/\mathcal{Z}$) 将 $\mathfrak{h}^\perp$ 限制为到 Lie($G/\mathcal{Z}$) 中 Lie($H/\mathcal{Z}$) 的一个补空间的同构。设 $Y \in$ Lie($H/\mathcal{Z}$) 且 $Y^\perp \in \mathfrak{h}^\perp$ 满足 $Y^\perp \neq 0$ 和 $Y + Y^\perp \in$ Lie($C_G(X^*)/\mathcal{Z}$)，于是 ad$^*(Y^\perp)(X^*)$ 等于–ad$^*(Y)(X^*)$。

设 $\alpha$ 是最低根（相对于由 $B$ 确定的 $\Phi(G, T)$ 上的高度而言），使得 $T$-等变投影将 $Y^\perp$ 投影到 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上时非零。存在唯一的 $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$，使得 $T$-等变投影将 $[Y^\perp, e_{-\alpha}]$ 投影到 $\mathfrak{t}$ 上等于 $h_\alpha$。于是 $[Y^\perp, e_{-\alpha}]$ 属于 $h_\alpha + \mathfrak{b}$，因此 ad$^*(Y^\perp)(X^*)(e_{-\alpha})$ $= -X^*([Y^\perp, e_{-\alpha}])$ 等于 $-X^*_{\mathrm{ss}}(h_\alpha) \neq 0$。另一方面，由于 $-[Y, e_{-\alpha}]$ 属于 $\mathfrak{h}^\perp$，而 $X^*$ 在其上为零，我们有 –ad$^*(Y)(X^*)(e_{-\alpha})$ $= X^*([Y, e_{-\alpha}])$ 等于 0。这就产生了矛盾。

由此可知，对于 $G$ 的所有中心子群$\mathcal{Z}$，Lie($C_G(X^*)/\mathcal{Z}$) 都包含于 Lie($H/\mathcal{Z}$)。特别地，Lie($C_G(X^*)$) 包含于 Lie($H$)。现在，$C_G(X^*)_{\mathrm{red}} \cap H$等于$C_{C_G(X^*)_{\mathrm{red}}}(Z)$，因此是光滑的 [CGP15, 命题 A.8.10(2)], ，故等于$C_H(X^*)_{\mathrm{red}}$。特别地，Lie($C_H(X^*)^\circ_{\mathrm{red}}$) $=$Lie($C_H(X^*)_{\mathrm{red}}$) 等于 Lie($C_G(X^*)_{\mathrm{red}}$) $\cap H$) $=$Lie($C_G(X^*)_{\mathrm{red}}$)$\cap$Lie($H$)；根据前面的论证，这等于 Lie($C_G(X^*)_{\mathrm{red}}$)。因此，$C_H(X^*)^\circ_{\mathrm{red}}$ 等于 $C_G(X^*)^\circ_{\mathrm{red}}$ [Mil17, 命题 10.15], ，所以 $C_G(X^*)^\circ_{\mathrm{red}}$ 包含于 $H$。□

由于 $H$等于 $C_G(X^*_{\mathrm{ss}})$ 当且仅当 $\Phi(C_G(X^*_{\mathrm{ss}})\ T)$ 在 $\Phi(G, T)$ 中是闭的，因此定理 8.6 表明，第 7 节讨论的 Jordan 分解不唯一的情形就是所有可能的情形。由于当 $X_{\mathrm{ss}} \in \mathfrak{g}$ 是半单时，$\Phi(C_G(X_{\mathrm{ss}})\ T)$ 总是在 $\Phi(G, T)$ 中闭合，我们由此看到，定理 8.6 的李代数类比间接断言了 Jordan 分解的唯一性。因此，定理 8.6 可视为一种统一的描述方式，同时说明李代数上 Jordan 分解的唯一性，以及对偶李代数上唯一性可能失效的程度。

**定理 8.6.** 在 $X^*_{ss}$ 的 $H$-轨道的闭包中存在唯一的闭轨道，且它包含 $X^*$ 的每一个 *Jordan* 分解的半单部分。

证明.我们对 dim($G$) 使用归纳法。若 $G$ 是零维的，结论显然成立。我们假设，对于所有维数小于 $G$ 的群，该结论均已成立。

由于限制到 $H$ 给出了 $H$-等变同构，将闭的、 $H$-稳定子空间（$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}^\perp$）$^*$ 从 $\mathfrak{g}^*$ 映到 $\mathfrak{h}^*$，由定理 1.1(iii)可知存在唯一的闭轨道。根据 [Spi21，引理 3.6] 可知，$X^*_{\mathrm{ss}}$ 属于这条唯一的闭轨道，因此只需证明 $X^*$ 的每个 Jordan 分解的半单部分都与 $H(k$共轭于 $X^*_{\mathrm{ss}}$。

设 $X^{*\prime}_{\mathrm{ss}}$是 $X^*$的另一个 Jordan 分解的半单部分。记 $Z'$ 为 $C_G(X^{*\prime}_{\mathrm{ss}})^\circ$的概形中心，并令 $H' = C_G(Z')$。引理 8.5 给出包含关系 $Z' \subset C_G(X^*)$，故 Lie($Z'/Z(G)$) $\subset$ Lie($C_G$ ($X^*$)/$Z(G)$)；且 Lie($C_G(X^*)/Z(G)$) $=$ Lie($C_{G/Z(G)}(X^*)$) $\subset$ Lie($C_{G/Z(G)}(Z)$) $=$Lie($H/Z$ ($G$))。因此，Lie(($Z' \cap H)/Z(G)$) $=$ Lie($Z'/Z(G)$) $\cap$ Lie($H/Z(G)$) 等于 Lie($Z'/Z(G)$)，由引理 8.3 可知它非平凡；所以 $Z' \cap H$ 不包含于 $Z(G)$。

由引理 8.2， $X^*$ 存在一个由 $\langle Z$ 不变的半单部分 $Y^*_{\mathrm{ss}}\ Z' \cap H\rangle$。特别地， $Y^*_{\mathrm{ss}}$ 属于 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}^\perp)^*$。将 $C_G(Y^*_{\mathrm{ss}})$ 的概形中心记为 $Z_{Y^*_{\mathrm{ss}}}$。

由于 $\mathfrak{h}$ 中 $X^*_{\mathrm{ss}}$ 和 $Y^*_{\mathrm{ss}}$ 是 $X^*$的限制的 Jordan 分解中半单部分的限制，根据定理1.1(iii) ，我们有

$X^*_{\mathrm{ss}}$ 和 $Y^*{}_{\mathrm{ss}}$，因而 $X^*_{\mathrm{ss}}$ 和 $Y^*_{\mathrm{ss}}$ 本身，彼此共轭于 $H(k)$ 中的某个元素。特别地， $Z_{Y^*_{\mathrm{ss}}}$ 与 $H(k)$-共轭，因此等于 $Z$。

由于 $Z' \cap H$ 不包含于 $Z(G)$ 中，我们有 $C_G(Z' \cap H)^\circ$ 是 $G$ 的真子群。注意，$C_{C_G(Z' \cap H)^\circ}(Z')^\circ$ 等于 $H'$。因此，根据我们的归纳结果， $X^{*\prime}_{\mathrm{ss}}$ 和 $Y^*{}_{\mathrm{ss}}$ 被 $H'(k)$ 中的某个元素共轭。特别地， $Z_{Y^*{}_{\mathrm{ss}}}$ 与 $Z'$ 是 $H'(k)$-共轭的，因而二者相等。

因此，我们有 $Z$ 和 $Z'$ 都等于 $Z_{Y^*_{\mathrm{ss}}}$，从而彼此相等；于是 $H$ 等于 $H'$；因此 $X^*_{\mathrm{ss}}$、$Y^*{}_{\mathrm{ss}}$ 和 $X^{*\prime}_{\mathrm{ss}}$ 全都属于同一个 $H(k)$-轨道，正如所需。□

## 9. Uniqueness of Jordan decompositions for semisimple and nilpotentelements

由于我们在 $\mathfrak{g}$ 上有 Jordan 分解的无条件唯一性，本节只讨论 $\mathfrak{g}^*$ 上的 Jordan 分解。

正如我们在注 9.1 中所观察到的，我们的第一个唯一性结果定理 1.1(iii)表明，一个幂零元只能具有平凡的 Jordan 分解。（见注 9.1）。即使是我们改进后的唯一性结果定理 8.6 也不能立即排除半单元素具有非平凡 Jordan 分解的可能性。这一事实可由猜想 8.4(ii)推出，但我们无法证明该猜想。尽管如此，我们在引理 9.2 中证明了这种病态情形并不会出现。

注 9.1。 定理 1.1(iii) 表明，如果 $X^* \in \mathfrak{g}^*$ 是幂零的，那么 $X^*$ 的每个 Jordan 分解的半单部分都是平凡的。

**引理 9.2**。 设 $X^* \in \mathfrak{g}^*$ 为半单元素。那么 $X^*$ 的每个 *Jordan* 分解的幂零部分都是$0$。

证明。 令 $X^* = X^{*\prime}_{\mathrm{ss}} + X^{*\prime}_{\mathrm{nil}}$ 为一个 Jordan 分解。

根据 [Spi21 引理 3.6],，存在 $C_G(X^{*\prime}{}_{\mathrm{ss}})$ 的余特征 $\lambda$，使得 $\lim_{t\to 0}\mathrm{Ad}^*(\lambda(t))X^{*\prime}_{\mathrm{nil}}$等于 0，因此 $\lim_{t\to 0}\mathrm{Ad}^*(\lambda(t))X^*$ 等于 $X^{*\prime}_{\mathrm{ss}}$。由于 $X^*$ 的轨道由定理 1.1(i)知是闭的，我们有 $X^{*\prime}_{\mathrm{ss}}$ 属于 $\mathrm{Ad}^*(G)X^*$。特别地，由 $t \mapsto \mathrm{Ad}^*(\lambda(t))X^*$ 给出的映射$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to \mathrm{Ad}^*(G)X^*$可延拓为映射 $\mathbb{A}^1 \to \mathrm{Ad}^*(G)X^*$。将这条像曲线记为 $\mathcal{C}$ 。

令 $T$ 为 $C_G(X^{*\prime}_{\mathrm{ss}})$ 中包含 $\lambda$ 的像的一个极大环面。假设 $X^{*\prime}_{\mathrm{nil}}$ 不等于 0。于是存在某个根 $\alpha \in \Phi(C_G(X^{*\prime}{}_{\mathrm{ss}})^\circ, T)$，使得 $T$-等变投影 $(X^{*\prime}_{\mathrm{nil}})_\alpha$ of $X^{*\prime}{}_{\mathrm{nil}}$ 到 $(\mathfrak{g}^*)_\alpha$ 上非平凡。我们可以并且确实选择使 $\langle \alpha, \lambda\rangle$ 在这类根中取最小值的 $\alpha$ 。于是 $\langle \alpha, \lambda\rangle$ 为正。

根据 [KW76，引理3.1iv)], 李$(C_G(X^{*\prime}_{\mathrm{ss}})_{\mathrm{red}})$ 等于 $C_{\mathfrak{g}}(X^{*\prime}_{\mathrm{ss}})$，也就是说 $C_G(X^{*\prime}_{\mathrm{ss}})$ 是光滑的。因此（例如参见 [Bor91，第98页，命题6.7]），切空间 $T_{X^{*\prime}{}_{\mathrm{ss}}}(\mathfrak{g}^*)$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 的典范同一将 $T_{X^{*\prime}_{\mathrm{ss}}}(\mathrm{Ad}^*(G)X^*)$ 与 $\mathrm{ad}^*(\mathfrak{g})X^{*\prime}{}_{\mathrm{ss}}$ 对应起来。此外，$T_{X^{*\prime}_{\mathrm{ss}}}(\mathcal{C})$ 对应于一个子空间，其 $T$-等变投影到 $(\mathfrak{g}^*)_\alpha$ 上包含 $(X^{*\prime}_{\mathrm{nil}})_\alpha$，故非平凡。然而，$\mathrm{ad}^*(\mathfrak{g})X^{*\prime}{}_{\mathrm{ss}}$ 到 $(\mathfrak{g}^*)_\alpha$ 上的 $T$-等变投影是平凡的，矛盾。□

注记3.4 表明，我们可以从任意满秩子群的对偶李代数提升 Jordan 分解。推论 9.3 给出了部分逆命题。

**推论 9.3**。 假设 $H$ 是 $G$ 的满秩子群，使得 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中具有一个 $H$-稳定的补空间 $\mathfrak{h}^\perp$，并且 $X^* \in \mathfrak{g}^*$ 分别是半单的、幂零的，且

在 $\mathfrak{h}^\perp$ 上平凡。于是，将 $X^*$ 限制到 $\mathfrak{h}$ 后，得到 $\mathfrak{h}^*$ 的一个分别为半单的、幂零的元素。

证明。记 $X_H^*$ 为 $X^*$ 在 $\mathfrak{h}$上的限制，并令 $X_H^* = X_{H\,\mathrm{ss}}^* + X_{H\,\mathrm{nil}}^*$ 为一个 Jordan 分解。将 $X_{H\,\mathrm{ss}}^*$ 和 $X_{H\,\mathrm{nil}}^*$ 平凡地延拓到 $\mathfrak{h}^\perp$ 上的元素 $X_{\mathrm{ss}}^*$ 和 $X_{\mathrm{nil}}^*$（属于）$\mathfrak{g}^*$，得到一个 Jordan 分解 $X^* = X_{\mathrm{ss}}^* + X_{\mathrm{nil}}^*$（由注3.4），故引理 9.2 给出：若 $X^*$ 为半单，则 $X_{\mathrm{nil}}^*$ 是平凡的；或者由注 9.1 可知，若 $X^*$ 为幂零，则 $X_{\mathrm{ss}}^*$ 是平凡的。这意味着 $X_H^* = X_{H\,\mathrm{ss}}^* + X_{H\,\mathrm{nil}}^*$ 分别等于$X_{H\,\mathrm{ss}}^*$和 $X_{H\,\mathrm{nil}}^*$，因而分别为半单和幂零。□

**致谢**。感谢 Sean Cotner 和 Stephen DeBacker 进行极富启发性的讨论，也感谢 David Hansen、Friedrich Knop、David Benjamin Lim 和 Jason Starr 对 MathOverflow 上一个问题提出宝贵意见 [hct]。L. Spice 的研究得到西蒙斯基金会赠款的支持，编号为 636151。C.-C. Tsai 的研究得到 NSTC 资助，项目编号为 114-2115-M-001-009 和 114-2628-M-001-003。

## References

[Bor91] Armand Borel，《线性代数群》，第二版，数学研究生教材，第126卷，施普林格出版社，纽约，1991。MR 1102012 (92d:20001)[Bou68]N. Bourbaki，《数学元素》XXXIV 分册：《群与李代数》。第四章：考克斯特群与蒂茨系。第五章：由反射生成的群。第六章：根系，《科学与工业论丛》[《科学与工业论丛》卷号1337，Hermann，巴黎，1968。MR 240238[CGP15]Brian Conrad、Ofer Gabber 和 Gopal Prasad，《伪约化群》，第二版，新数学专著，第26卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015。MR 3362817[CM93] David H. Collingwood 和 William M. McGovern，《半单李代数中的幂零轨道》，范·诺斯特兰德·莱因霍尔德数学丛书，Van Nostrand Reinhold Co.，纽约，1993。MR 1251060[Hab75] W. J. Haboush，《约化群是几何约化的》，《数学年刊》第二辑102卷（1975），第1期，67–83。MR 382294[hct] CHENG-CHIANG TSAI (https://mathoverflow.net/users/31327/cheng-chiang tsai)，仿射簇中的闭 $G$-轨道，MathOverflow，网址：https://mathoverflow.net/q/495402（版本：2025-05-30）。[Jan04] Jens Carsten Jantzen，《表示论中的幂零轨道》，《李理论》，《数学进展》，第228卷，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2004年，第1–211页。MR 2042689[Kot16] Robert E. Kottwitz，《约化群、ε 因子与韦伊指标》，arXiv 电子预印本（2016），arXiv:1612.05550。[KW76] V. Kac 和 B. Weisfeiler，《半单代数群的余伴随作用与特征 $p$下包络代数的中心》，Indag. Math. 38 (1976)，第2期，136–151，Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 79。MR 417308[Mil17] J. S. Milne，《代数群》，剑桥高等数学研究丛书，第170卷，剑桥大学出版社，剑桥，2017年，有限型域上群概形理论。MR 3729270[Nag64] Masayoshi Nagata，《仿射环中的群不变量》，《京都大学数学杂志》3（1963/64），369–377。MR 179268[Spi21] Loren Spice，《p 进调和分析中的显式渐近展开 II》，2021，https://arxiv.org/abs/2108.12935v3。[Spr09] T. A. Springer，《线性代数群》，第二版，Modern Birkhäuser Classics，Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2009。MR 2458469

[SS70] T. A. Springer 和 R. Steinberg，《共轭类》，《代数群及相关有限群研讨会》（普林斯顿高等研究院，新泽西州普林斯顿，1968/69），数学讲义，第131卷，Springer，柏林，1970年，第167–266页。MR 0268192 (42 #3091)

2840 W. Bowie St., Fort Worth, TX 76109电子邮件地址: l.spice@tcu.edu

Institute of Mathematics, Academia Sinica, 6F, Astronomy-Mathematics Building, No. 1, Sec. 4, Roosevelt Road, Taipei, Taiwan

also Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-Sen University, and Department of Mathematics, National Taiwan University电子邮件地址: chengchiangtsai@gmail.com