arXiv:2601.07191v1 [math.RA] 12 Jan 2026

保持退化克利福德代数子空间的李群

Ekaterina Filimoshina 和 Dmitry Shirokov

摘要。 本文介绍了退化几何（克利福德）代数中的李群，这些李群在伴随表示和扭曲伴随表示下保持由分次对合与反转确定的四个基本子空间。我们证明，这些李群也可以等价地利用自旋群理论中应用于多向量的范数函数来定义。我们还研究了相应的李代数。其中一些李群和李代数与海森堡李群及其李代数密切相关。所介绍的群在物理学和计算机科学等诸多领域具有应用价值，尤其适用于构造等变神经网络。

数学主题分类（2010）。15A66, 11E88。
关键词。 几何代数，克利福德代数，退化几何代数，利普希茨群，Clifford群，自旋群，分次对合，反转，伴随表示，扭曲伴随表示，海森堡群。

1. 引言

本文研究任意维数和签名的退化与非退化实几何代数和复几何（克利福德）代数 $\mathcal{G}_{p,\ q,\ r}$ （对于复几何代数，可取 $q = 0$）。退化几何代数在物理学 [8, 9], 几何 [14, 26, 36],计算机视觉和图像处理 [4, 16, 30], 动作捕捉与机器人学[4, 34, 47], 神经网络和机器学习 [7, 38, 37], 等领域有应用。

自旋群理论中最重要的概念之一 [5,32, 35] 是扭曲伴随表示 $\check{}$ad。它用于描述自旋群对正交群的二重覆盖。Atiyah、Bott 和 Shapiro 首次在 [2] 中引入表示 $\check{}$ad，以处理自旋群相关背景下所需的一个特定情形。将此定义推广到一般情形主要有两种方法（见第3节）。本文针对这两种方法，回答了所有提出的问题，并将

˘ ¯扭曲伴随表示的两个版本分别记为 ad 和 ad。我们也考虑伴随表示，并将其记为 ad。众所周知（例如，参见 [2,5,32]），克利福德群 $\Gamma_{p,\,q,\,r}$ (3.1) 和 Lipschitz 群 $\Gamma^{\pm}_{p,\,q,\,r}$ (3.2) 分别在 ˘ad 和 ad 作用下保持 1 级子空间 $\mathcal{G}^1_{p,\,q,\,r}$ （向量子空间）不变。自旋群可视为 Lipschitz 群的归一化子群（参见 [5,32,35] 以及第 4 节中情形 $\mathcal{G}_{p,\,q,\,0}$ 的示例）。它们通过 Lipschitz 群元素 $T \in \Gamma^{\pm}_{p,\,q,\,r}$ 的范数函数 $\psi(T) := TT^{\curlywedge}$ 和 $\chi(T) := \tilde{T}T$ 来定义。

本文研究了克利福德群 $\Gamma_{p,q,r}$ 和 Lipschitz 群 $\Gamma^{\pm}_{p,q,r}$ 的类似群，并将它们称为广义克利福德群和 Lipschitz 群。这些群在 ad、ad、ad 下保持子空间 $\mathcal{G}^k_{p,q,r}$, $k = 0, 1, 2, 3$；这些子空间由分次对合和反转确定。类比克利福德群和 Lipschitz 群的记号，我们分别将这些群记为 $\Gamma^k_{p,q,r}$, $\check{\Gamma}^k_{p,q,r}$, 以及 $\tilde{\Gamma}^k_{p,q,r}$。字母上方的符号表示子空间在何种表示下保持不变。我们引入并研究李群族 $\mathrm{Q}^k_{p,q,r}$ 和 $\check{\mathrm{Q}}^k_{p,q,r}$, $k = 0, 1, 2, 3$，它们由对群元素的范数函数 ψ 和 χ 的取值所施加的条件定义。我们证明，在不同情况下，群 $\Gamma^k_{p,q,r}$, $\check{\Gamma}^k_{p,q,r}$ 和 $\tilde{\Gamma}^k_{p,q,r}$ 分别与群 $\mathrm{Q}^k_{p,q,r}$ 和 $\check{\mathrm{Q}}^k_{p,q,r}$ 重合（见定理 6.1 和 6.6）。在这些定理以及 $\mathrm{Q}^k_{p,q,r}$ 和 $\check{\mathrm{Q}}^k_{p,q,r}$ 的定义中，我们使用固定等级子空间 $\mathcal{G}^m_{p,q,r}$ 以及 $\mathcal{G}_{p,q,r}$ [20] 中子空间 $\mathcal{G}^k_{p,q,r}$ 的中心化子和扭中心化子。定理 6.1、6.6、8.1 以及引理 6.4、6.9 是新的。

–

当前工作推广了论文 [39] 和 [17],的结果。这些论文聚焦于非退化几何代数 $\mathcal{G}_{p,q,0}$，并分别考察在 ad 和 ˘ad 作用下保持 $\mathcal{G}^k_{p,q,0}$ 的群。在先前的工作中[18,19], ，我们考察了在 ˘ ¯ad、ad 和 ad 作用下保持偶子空间和奇子空间的群，涵盖任意退化和非退化的 $\mathcal{G}_{p,q,r}$ 情形（见 (5.1)–(5.7) 及上文注释）。论文 [21,22] 考察了在 ad、ad 和 ad 作用下保持其他子空间的群，涵盖任意 $\mathcal{G}_{p,q,r}$ 情形。在本工作中，我们展示了这些群与群 $\Gamma^k_{p,q,r}$、$\check{\Gamma}^k_{p,q,r}$ 以及 $\tilde{\Gamma}^k_{p,q,r}$ 之间的联系。本文完成了对几何代数中在伴随表示和扭曲伴随表示作用下保持固定子空间的李群的分类研究；这项研究始于先前的工作。

在低维情形下，本文引入的广义退化克利福德群与 Lipschitz 群，与众所周知的矩阵群有关（例子见第7节）。对于 Grassmann代数 $\mathcal{G}_{0,\,0,\,1}$ 和 $\mathcal{G}_{0,\,0,\,2}$这一特殊情形，所考虑的所有群都可以实现为上三角矩阵群 UT(2，$\mathbb{F}$) 和 UT(4，$\mathbb{F}$) 的子群。对于 $\mathcal{G}_{0,\,0,\,2}$，这些群与高维海森伯格群 Heis_4, 密切相关，该群应用于量子力学和计算领域（例如参见 [3,25]）。具体而言，群 $\mathrm{Q}_{00,\,0,\,2} = \mathrm{Q}_{20,\,0,\,2} = \check{\mathrm{Q}}_{10,\,0,\,2} = \check{\mathrm{Q}}^2_{0,0,2}$ 同构于一个矩阵群，其幺幂子群是

Heis_4的子群。我们还给出了所考虑的李群对应的李代数与经典矩阵李代数及其他李代数之间联系的例子。例如，在 $\mathcal{G}_{1,\,0,\,2}$、 $\mathcal{G}_{1,\,1,\,1}$ 和 $\mathcal{G}_{3,\,0,\,0}$ 的情形下，某些李代数同构于 $\mathfrak{su}(2)$、 $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{C})$、海森伯格李代数 $\mathfrak{heis}(3,\ \mathbb{F})$ 和 $\mathfrak{heis}(4,\ \mathbb{F})$ 以及庞加莱李代数 $\mathfrak{p}(1,\ 1)$ 的直和（例子见第8节）。

广义退化克利福德群与 Lipschitz 群可用于多种应用，例如神经网络、计算机视觉和量子力学。普通的退化 Lipschitz 群和克利福德群 [1,8,9,11,12] 可应用于构建克利福德群等变神经网络 [37] 和几何克利福德代数网络 [38],、量子力学中伽利略群的表示论 [9], 、基于转子的边缘检测 [15],等。广义 Lipschitz 群可用于构建广义利普希茨群等变神经网络[23, 24]。

本文的组织结构如下。第2节介绍与退化和非退化几何代数相关的所有必要记号$\mathcal{G}_{p,\,q,\,r}$。第3节回顾内自同构和扭曲内自同构，以及$\mathcal{G}_{p,\,q,\,r}$中的伴随表示和扭曲伴随表示的概念。第 4 节回顾中心化子和扭中心化子的概念，并将它们与后续各节讨论的群联系起来。第 5 节讨论关于在伴随表示和扭曲伴随表示下保持几何代数固定子空间的群的相关工作。第6节中，我们考虑群$\Gamma^k_{p,\,q,\,r}$、$\check{\Gamma}^k_{p,\,q,\,r}$以及$\tilde{\Gamma}^k_{p,\,q,\,r}$，$k=0,\ 1$、2、3，它们在 ad、ad 和 ad 下保持由分次对合和反转确定的子空间，并证明这些群与群 $\mathrm{Q}^k_{p,\,q,\,r}$ 和 $\check{\mathrm{Q}}^k_{p,\,q,\,r}$一致。第7节给出了本文讨论的所有群的若干示例。第8节研究相应的李代数。第9节给出结论。

2. 几何代数$\mathcal{G}_{p,q,r}$

考虑向量空间 V 上带有对称双线性型的几何（克利福德）代数 [28, 29, 32, 35] $\mathcal{G}(V)=\mathcal{G}_{p,q,r}$,$p+q+r=n\geq 1$，其中$V$可以是实数 $\mathbb{R}^{p,q,r}$，也可以是复数 $\mathbb{C}^{p+q,0,r}$。我们用 $\mathbb{F}$ 表示第一种情形下的实数域 $\mathbb{R}$，用 $\mathbb{F}$ 表示第二种情形下的复数域 $\mathbb{C}$。本文同时考虑非退化几何代数$\mathcal{G}_{p,q,0}$ 的情形，以及退化几何代数 $\mathcal{G}_{p,q,r},\ r\neq 0$ 的情形。我们用 Λ_r 表示子代数 $\mathcal{G}_{0,0,r}$，它是格拉斯曼（外）代数 [13, 32]。为简洁起见，在分别考虑任意 p,q,r、非退化几何代数情形和格拉斯曼代数情形时，我们分别记作 $\mathcal{G}:=\mathcal{G}_{p,q,r}$, $\mathcal{G}_{p,q}:=\mathcal{G}_{p,q,0}$ 和 $\Lambda:=\Lambda_r$，并在需要时注明指标。单位元记为 e，生成元记为e_a, $a=1,\ldots,n$。生成元满足以下条件：

$$e_ae_b+e_be_a=2\eta_{ab}e,\qquad \forall a,b=1,\ldots,n, \tag{2.1}$$

其中 $\eta =(\eta_{ab})$ 是对角矩阵：在实数情形 $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,\,q,\,r})$ 中，对角线上有 p 个 $+1$、q 个 -1 和 r 个 0；在复数情形 $\mathcal{G}(\mathbb{C}^{p+q,\,0,\,r})$ 中，对角线上有 $p+q$ 个 $+1$ 和 r 个 0。

考虑固定等级为 $\mathcal{G}^k$ $k=0$、.....、n 的子空间。其元素是基元素 $e_A = e_{a_1\ldots a_k}$：$= e_{a_1}\cdots e_{a_k}$, $a_1 <$ 的线性组合

$\cdots < a_k$，由长度为 k 的有序多重指标 A 标记，其中 $0 \leq k \leq n$。长度为零的多重指标 $k=0$ 对应于单位元e。0 级子空间始终记为不带下标的 $\mathcal{G}^0$ p、q、r，因为它不依赖于几何代数的签名。对于 $k<0$ 和 $k>n$，我们有$\mathcal{G}^k = \{0\}$。我们使用以下记号：

$$\mathcal{G}^{\geq k} := \mathcal{G}^k \oplus \mathcal{G}^{k+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}^n, \quad \mathcal{G}^{\leq k} := \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}^k \tag{2.2}$$

对于 $0 \leq k \leq n$。例如， $\mathcal{G}^{\geq 0} = \mathcal{G}^{\leq n} = \mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^{\geq n} = \mathcal{G}^n$。

空间 $\mathcal{G}^k_{p,\,q}$ 和 Λ^k_r, $k=0$、.....、n 可视为 $\mathcal{G}_{p,\,q,\,r}$ 的子空间。我们用 $\{\mathcal{G}^k_{p,q}\Lambda^l_r\}$ 表示由形如 ab 的元素张成的 $\mathcal{G}_{p,\,q,\,r}$ 子空间，其中 $a \in \mathcal{G}^k_{p,\,q}$ 且 $b \in \Lambda^l_r$。

在本文中，我们使用分次对合、反转及其复合运算，这种复合运算通常称为 Clifford 共轭。$\widehat{\ }$元素 $U \in \mathcal{G}$ 的分次反转记为 $\widetilde{U}$，反转记为$\widetilde{\ }$ U，克利福德共轭记为 $\overline{U}$。

分次对合定义了偶 $\mathcal{G}^{(0)}$ 和奇 $\mathcal{G}^{(1)}$ 子空间：

$$\mathcal{G}^{(k)} = \{U \in \mathcal{G}: \quad \widehat{U} = (-1)^k U\} = \bigoplus_{j=k \bmod 2} \mathcal{G}^j, \qquad k = 0, 1. \tag{2.3}$$

任意元素 $U \in \mathcal{G}$ 都可以表示为和式 $U = U_{(0)} + U_{(1)}$，其中$U_{(0)} \in \mathcal{G}^{(0)}$ 且 $U_{(1)} \in \mathcal{G}^{(1)}$。我们分别使用投影 $\langle\rangle_{(0)}$ 和$\langle\rangle_{(1)}$ 将元素投影到偶 $\mathcal{G}^{(0)}$ 和奇 $\mathcal{G}^{(1)}$ 子空间：

$$\langle U\rangle_{(0)} := U_{(0)}, \qquad \langle U\rangle_{(1)} := U_{(1)}. \tag{2.4}$$

对于任意子集 $\mathrm{H} \subseteq \mathcal{G}$，有

$$\langle \mathrm{H}\rangle_{(0)} := \mathrm{H} \cap \mathcal{G}^{(0)}, \qquad \langle \mathrm{H}\rangle_{(1)} := \mathrm{H} \cap \mathcal{G}^{(1)}. \tag{2.5}$$

分次对合和反转定义了四个子空间 $\mathcal{G}^{\bar{0}}$、$\mathcal{G}^{\bar{1}}$、$\mathcal{G}^{\bar{2}}$ 和 $\mathcal{G}^{\bar{3}}$（在论文 [41,42,43] 中，它们分别称为四元数类型 0，1，2 和 3 的子空间）：

$$\mathcal{G}^{\bar{k}} = \{U \in \mathcal{G}: \ \widehat{U} = (-1)^k U, \ \widetilde{U} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} U\}, \ \ k = 0, 1, 2, 3. \tag{2.6}$$

几何代数 $\mathcal{G}$ 可表示为直和 $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}^{\bar{1}} \oplus \mathcal{G}^{\bar{2}} \oplus \mathcal{G}^{\bar{3}}$，并可视为关于交换子与反交换子 [40]的 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-分次代数。为表示不同子空间的直和，我们使用上标多重指标，并省略直和符号。例如，$\mathcal{G}^{(1)\bar{2}\bar{4}} := \mathcal{G}^{(1)} \oplus \mathcal{G}^{\bar{2}} \oplus \mathcal{G}^{\bar{4}}$。

3. 几何代数中的内自同构与扭曲内自同构

我们使用上标 $\times$ 表示任意集合 $\mathrm{H}^\times$ 中所有可逆元组成的子集。考虑众所周知的（例如，参见 [2, 5, 32]）克利福德群和利普希茨群，它们定义如下：

$$\Gamma \;:=\; \Gamma_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad T\mathcal{G}^1T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^1\}, \tag{3.1}$$

$$\Gamma^\pm \;:=\; \Gamma^\pm_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widehat{T}\mathcal{G}^1T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^1\}. \tag{3.2}$$

考虑作用于所有可逆元群的伴随表示 $\mathsf{ad}\colon\ \mathcal{G}^\times \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$，定义为 $T \mapsto \mathsf{ad}_T$，其中 $\mathsf{ad}_T\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$:

$$\mathrm{ad}_T(U) := TUT^{-1}, \qquad U \in \mathcal{G}, \qquad T \in \mathcal{G}^\times. \tag{3.3}$$

再考虑扭曲伴随表示，该表示在文献 [2] 中的一个特定情形下已有介绍。文献中对扭曲伴随表示有两种可能的一般定义，我们分别用记号 $\check{}\,\mathsf{ad}$ 和 $\tilde{}\,\mathsf{ad}$ 表示[1]。这些运算定义为 $\check{}\,\mathsf{ad}$ $\tilde{}\,\mathsf{ad}\colon\ \mathcal{G}^\times \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$，即 $\check{}\,\tilde{}$ $\check{}\,\tilde{T} \mapsto \mathsf{ad}_T$, $T \mapsto \mathsf{ad}_T$，其中 ad_T, $\mathsf{ad}_T\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$:

$$\check{\mathrm{ad}}_T(U) := \widehat{T}UT^{-1}, \quad U \in \mathcal{G}, \quad T \in \mathcal{G}^\times, \tag{3.4}$$

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(U) := T\langle U\rangle_{(0)}T^{-1} + \widehat{T}\langle U\rangle_{(1)}T^{-1}, \quad \forall U \in \mathcal{G}, \quad T \in \mathcal{G}^\times. \tag{3.5}$$

对于固定奇偶性的元素，有

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(U_{(0)}) = \mathrm{ad}_T(U_{(0)}), \qquad \forall U_{(0)} \in \mathcal{G}^{(0)}, \qquad T \in \mathcal{G}^\times, \tag{3.6}$$

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(U_{(1)}) = \check{\mathrm{ad}}_T(U_{(1)}), \qquad \forall U_{(1)} \in \mathcal{G}^{(1)}, \qquad T \in \mathcal{G}^\times. \tag{3.7}$$

$\check{}\,\tilde{}$本文提出的关于 ad 和 ad 的所有问题的答案彼此密切相关。为方便读者，我们将同时考察这两种运算。

ad、$\check{}\,\mathsf{ad}$ 和 $\tilde{}\,\mathsf{ad}$ 的核具有以下形式（例如参见 [19]）：

$$\ker(\mathrm{ad}) = \{T \in \mathcal{G}^\times :\ TUT^{-1} = U,\ \forall U \in \mathcal{G}\} = \mathrm{Z}^\times, \tag{3.8}$$

$$\ker(\check{\mathrm{ad}}) = \{T \in \mathcal{G}^\times :\ \widehat{T}UT^{-1} = U,\ \forall U \in \mathcal{G}\} = \Lambda^{(0)\times}, \tag{3.9}$$

$$\ker(\tilde{\mathrm{ad}}) = \{T \in \mathcal{G}^\times :\ T\langle U\rangle_{(0)}T^{-1} + \widehat{T}\langle U\rangle_{(1)}T^{-1} = U,\ \forall U \in \mathcal{G}\} = \Lambda^\times. \tag{3.10}$$

4. 关于中心化子和扭中心化子的预备知识

本节中，我们考虑 $\mathcal{G}$ 中由分次对合和反转确定的固定等级子空间 $\mathcal{G}^m$ 及子空间 $\mathcal{G}^k$ 的中心化子和扭中心化子的概念。论文 [20]对这些中心化子和扭中心化子进行了详细讨论。在当前工作中，我们在第6节群的定义中使用了其中一些中心化子和扭中心化子，并需要给出它们的显式形式，以证明主要结论。

[1]我们还想指出，一位匿名审稿人明智地建议将 $\tilde{}\,\mathsf{ad}$ 称为 *superadjoint representation*，因为这是超代数的单位群在该超代数上的自然作用。

ˇ 令我们考虑 $\mathcal{G}$ 中固定等级 $\mathcal{G}^m$ 的子空间的中心化子 Z^m 和扭中心化子 $\check{\mathrm{Z}}^m$，其中 $m = 0, 1, \ldots\ldots, n$:

$$\mathrm{Z}^m := \{X \in \mathcal{G} : \quad XV = VX, \quad \forall V \in \mathcal{G}^m\}, \tag{4.1}$$

$$\check{\mathrm{Z}}^m := \{X \in \mathcal{G} : \quad \widehat{X}V = VX, \quad \forall V \in \mathcal{G}^m\}. \tag{4.2}$$

$\mathcal{G}$ 的中心也就是中心化子；我们将其记为 $\mathrm{Z} := \mathrm{Z}^1$。众所周知（例如，参见 [1,8]），

$$\mathrm{Z} = \begin{cases} \Lambda^{(0)} \oplus \mathcal{G}^n, & n \text{ is odd}, \\ \Lambda^{(0)}, & n \text{ is even}. \end{cases} \tag{4.3}$$

ˇˇ 对于 $m < 0$ 和 $m > n$，我们有 $\mathrm{Z}^m = \mathrm{Z}^m = \mathcal{G}$。$\mathrm{Z}^m$ 和 Z^m,$m = 0, \ldots, n$ 的显式形式见 [20]。对于集合 Z^m 和 ˇZ^m, $m = 0, \ldots, n$，投影 (2.5) 到偶子空间和奇子空间 $\mathcal{G}^{(l)}$, $l = 0$,1 的形式为

$$\langle \mathrm{Z}^m \rangle_{(l)} := \mathrm{Z}^m \cap \mathcal{G}^{(l)} = \{\langle X \rangle_{(l)} \mid X \in \mathrm{Z}^m\}, \tag{4.4}$$

$$\langle \check{\mathrm{Z}}^m \rangle_{(l)} := \check{\mathrm{Z}}^m \cap \mathcal{G}^{(l)} = \{\langle X \rangle_{(l)} \mid X \in \check{\mathrm{Z}}^m\}, \tag{4.5}$$

因为 Z^m 和 ˇZ^m 是特殊形式 [20] 的固定子空间的直和。投影 $\langle \mathrm{Z}^m \rangle_{(0)}$ 和 $\langle$ˇ $\mathrm{Z}^m \rangle_{(0)}$ 按定义相同:

$$\langle \mathrm{Z}^m \rangle_{(0)} = \langle \check{\mathrm{Z}}^m \rangle_{(0)}, \qquad \forall m = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.6}$$

注 4.1。此外，我们将使用以下由定理 3.6 [20] 推出的关于中心化子和扭中心化子的显式形式的事实:

$$\ker(\mathrm{ad}) = \mathrm{Z}^{1\times} \subseteq \mathrm{Z}^{m\times}, \quad \ker(\check{\mathrm{ad}}) = \Lambda^{(0)\times} \subseteq \check{\mathrm{Z}}^{m\times}, \quad m = 0, \ldots, n; \tag{4.7}$$

$$\mathrm{Z}^m \subseteq \mathrm{Z}^4, \qquad \check{\mathrm{Z}}^m \subseteq \mathrm{Z}^4, \qquad m = 1, 2, 3. \tag{4.8}$$

ˇ 我们还来考察子空间 $\mathcal{G}^m$ (2.6)、$m = \overline{0}$、1、2、3 在 $\mathcal{G}$ 中的中心化子 Z^m 和扭中心化子 Z^m :

$$\mathrm{Z}^{\overline{m}} := \{X \in \mathcal{G} : \quad XV = VX, \quad \forall V \in \mathcal{G}^{\overline{m}}\}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \tag{4.9}$$

$$\check{\mathrm{Z}}^{\overline{m}} := \{X \in \mathcal{G} : \quad \widehat{X}V = VX, \quad \forall V \in \mathcal{G}^{\overline{m}}\}, \quad m = 0, 1, 2, 3. \tag{4.10}$$

这些集合已在论文 [20]中作了详细研究。此外，我们还将使用下面这个关于它们显式形式的引理。

引理 4.2（定理 5.1 [20]）。我们有

$$\mathrm{Z}^{\overline{m}} = \mathrm{Z}^m, \quad \check{\mathrm{Z}}^{\overline{m}} = \check{\mathrm{Z}}^m, \quad m = 1, 2, 3;$$
$$\mathrm{Z}^{\overline{0}} = \mathrm{Z}^4, \quad \check{\mathrm{Z}}^{\overline{0}} = \langle \mathrm{Z}^4 \rangle_{(0)}.$$

我们来考察两个在自旋群理论中广泛使用的范数函数 [2,5,32]:

$$\psi(T) := \widetilde{T}T, \qquad \chi(T) := \widehat{\widetilde{T}}T, \qquad \forall T \in \mathcal{G}. \tag{4.11}$$

例如，对于非退化几何代数 $\mathcal{G}_{p,\,q}$，Pin 群$_{p,\,q}$ 和 Spin 群$_{p,\,q}$ 定义如下（[32,35]）：

$$\mathrm{Pin}_{p,q} := \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} :\ \psi(T) = \pm e\} = \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} :\ \chi(T) = \pm e\}, \tag{4.12}$$

$$\mathrm{Spin}_{p,\,q} := \{T \in \langle\Gamma^{\pm}_{p,q}\rangle_{(0)} :\ \psi\ (T)\ = \pm e\} = \{T \in \langle\Gamma^{\pm}_{p,q}\rangle_{(0)} :\ \chi\ (T)\ = \pm e\}. \tag{4.13}$$

考虑关于此类 $T \in \mathcal{G}$ 的引理 4.3：$\psi(T)$ 和 $\chi(T)$ 属于中心化子 Z^m (4.9) 和扭中心化子 $\check{\mathrm{Z}}^m$ (4.10)。定理 6.1 和 6.6 的证明基于此引理。

引理 4.3（引理 3.3 [22]）。对于任意 $T \in \mathcal{G}^{\times}$，在以下情形中：$(k,l) = (0,1),(1,0),(2,3),(3,2)$，有：

$$T\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{\overline{kl}} \Leftrightarrow \psi(T) \in \mathrm{Z}^{\overline{k}\times}, \qquad \widehat{T}\mathcal{G}^{\overline{k}}\overline{T}^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{\overline{kl}} \Leftrightarrow \chi(T) \in \check{\mathrm{Z}}^{\overline{k}\times},$$

而在 $(k,l) = (0、3)、(3、0)、(1、2)、(2、1)$ 这些情形下，我们有：

$$T\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{\overline{kl}} \Leftrightarrow \chi(T) \in \mathrm{Z}^{\overline{k}\times}, \qquad \widehat{T}\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{\overline{kl}} \Leftrightarrow \psi(T) \in \check{\mathrm{Z}}^{\overline{k}\times}.$$

5. 相关工作

在这项工作中，我们考察映射 ad_T (3.3)、$\tilde{\mathrm{ad}}_T$ (3.5) 和 $\check{\mathrm{ad}}_T$ (3.4)，它们在退化和非退化几何代数 $\mathcal{G}$ 中保持由分次对合与反转确定的子空间 $\mathcal{G}^k$ (2.6)、$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 不变。这项工作推广了论文 [39] 和 [17], 的结果，其中分别在非退化代数 $\mathcal{G}_{p,\,q}$ 的情形下，研究了关于 ad_T 和 ad_T 的相同问题。

论文 [19] 讨论了在退化和非退化 $\mathcal{G}$中，在伴随表示 ad 和扭曲的 $\check{\ }$ $\tilde{\ }$ 伴随表示 ad 与 ad 作用下保持固定奇偶性的子空间 $\mathcal{G}^{(0)}$ 和 $\mathcal{G}^{(1)}$ 的群。该论文引入了四个李群

$$\mathrm{P}^{\pm} := \mathrm{P}^{\pm}_{p,q,r} := \mathcal{G}^{(0)\times} \cup \mathcal{G}^{(1)\times}, \qquad \mathrm{P} := \mathrm{P}_{p,q,r} := \mathrm{P}^{\pm}\mathrm{Z}^{\times}, \tag{5.1}$$

$$\mathrm{P}^{\pm\Lambda} := \mathrm{P}^{\pm\Lambda}_{p,q,r} := \mathrm{P}^{\pm}\Lambda^{\times}, \qquad \mathrm{P}^{\Lambda} := \mathrm{P}^{\Lambda}_{p,q,r} := \mathrm{P}\Lambda^{\times}, \tag{5.2}$$

并证明

$$\mathrm{P} = \Gamma^{(1)} \subseteq \mathrm{P}^{\Lambda} = \Gamma^{(0)} = \tilde{\Gamma}^{(0)}, \tag{5.3}$$

$$\mathrm{P}^{\pm} = \check{\Gamma}^{(0)} \subseteq \mathrm{P}^{\pm\Lambda} = \check{\Gamma}^{(1)} = \tilde{\Gamma}^{(1)}, \tag{5.4}$$

其中，对于 $k = 0,\ 1$,

$$\Gamma^{(k)} := \Gamma^{(k)}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^{\times} :\ \mathrm{ad}_T(\mathcal{G}^{(k)}) \subseteq \mathcal{G}^{(k)}\}, \tag{5.5}$$

$$\check{\Gamma}^{(k)} := \check{\Gamma}^{(k)}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^{\times} :\ \check{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^{(k)}) \subseteq \mathcal{G}^{(k)}\}, \tag{5.6}$$

$$\tilde{\Gamma}^{(k)} := \tilde{\Gamma}^{(k)}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^{\times} :\ \tilde{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^{(k)}) \subseteq \mathcal{G}^{(k)}\}. \tag{5.7}$$

论文 [21, 22] 引入并研究了在任意退化或非退化的 $\mathcal{G}$ 中，关于 ad、$\check{\mathrm{ad}}$ 和 $\tilde{\mathrm{ad}}$ 保持子空间 $\mathcal{G}^k$, $k = 0,\ \overline{1},\ 2,\ 3$ 的直和的群。以下使用中心化子定义的群

（4.1）、扭中心化子（4.2）和范数函数（4.11）均在讨论之列 ：

$$\mathrm{A}^{\overline{01}} := \mathrm{A}^{\overline{01}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widetilde{T}T \in \mathrm{Z}^{1\times}\} = \psi^{-1}(\mathrm{Z}^{1\times}), \tag{5.8}$$

$$\mathrm{B}^{\overline{12}} := \mathrm{B}^{\overline{12}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widehat{\widetilde{T}}T \in \mathrm{Z}^{1\times}\} = \chi^{-1}(\mathrm{Z}^{1\times}), \tag{5.9}$$

$$\mathrm{A}^{\overline{23}} := \mathrm{A}^{\overline{23}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widetilde{T}T \in (\mathrm{Z}^2 \cap \mathrm{Z}^3)^\times\} = \psi^{-1}((\mathrm{Z}^2 \cap \mathrm{Z}^3)^\times), \tag{5.10}$$

$$\mathrm{B}^{\overline{03}} := \mathrm{B}^{\overline{03}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widehat{\widetilde{T}}T \in \mathrm{Z}^{3\times}\} = \chi^{-1}(\mathrm{Z}^{3\times}), \tag{5.11}$$

$$\check{\mathrm{A}}^{\overline{12}} := \check{\mathrm{A}}^{\overline{12}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widetilde{T}T \in (\check{\mathrm{Z}}^1 \cap \check{\mathrm{Z}}^2)^\times\} = \psi^{-1}((\check{\mathrm{Z}}^1 \cap \check{\mathrm{Z}}^2)^\times), \tag{5.12}$$

$$\check{\mathrm{A}}^{\overline{03}} := \check{\mathrm{A}}^{\overline{03}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widetilde{T}T \in (\mathrm{Z}^3 \cap \mathcal{G}^{(0)})^\times\} = \psi^{-1}((\mathrm{Z}^3 \cap \mathcal{G}^{(0)})^\times), \tag{5.13}$$

$$\check{\mathrm{B}}^{\overline{01}} := \check{\mathrm{B}}^{\overline{01}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widehat{\widetilde{T}}T \in (\mathrm{Z}^1 \cap \mathcal{G}^{(0)})^\times\} = \chi^{-1}((\mathrm{Z}^1 \cap \mathcal{G}^{(0)})^\times), \tag{5.14}$$

$$\check{\mathrm{B}}^{\overline{23}} := \check{\mathrm{B}}^{\overline{23}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widehat{\widetilde{T}}T \in (\check{\mathrm{Z}}^2 \cap \check{\mathrm{Z}}^3)^\times\} = \chi^{-1}((\check{\mathrm{Z}}^2 \cap \check{\mathrm{Z}}^3)^\times), \tag{5.15}$$

并且我们有

$$\mathrm{A}^{\overline{01}} = \Gamma^{\overline{01}}, \quad \mathrm{A}^{\overline{23}} = \Gamma^{\overline{23}}, \quad \mathrm{B}^{\overline{12}} = \Gamma^{\overline{12}}, \quad \mathrm{B}^{\overline{03}} = \Gamma^{\overline{03}}, \tag{5.16}$$

$$\check{\mathrm{A}}^{\overline{12}} = \check{\Gamma}^{\overline{12}}, \quad \check{\mathrm{A}}^{\overline{03}} = \check{\Gamma}^{\overline{03}}, \quad \check{\mathrm{B}}^{\overline{01}} = \check{\Gamma}^{\overline{01}}, \quad \check{\mathrm{B}}^{\overline{23}} = \check{\Gamma}^{\overline{23}}, \tag{5.17}$$

其中，对于 $k, l = 0, 1, 2, 3$,

$$\Gamma^{\overline{kl}} := \Gamma^{\overline{kl}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \mathrm{ad}_T(\mathcal{G}^{\overline{kl}}) \subseteq \mathcal{G}^{\overline{kl}}\}, \tag{5.18}$$

$$\check{\Gamma}^{\overline{kl}} := \check{\Gamma}^{\overline{kl}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \check{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^{\overline{kl}}) \subseteq \mathcal{G}^{\overline{kl}}\}. \tag{5.19}$$

我们展示了群 (5.3)–(5.4)、(5.16)–(5.17) 与本文第 6 节所讨论的群之间的联系。

6. 在 ˇ ˜分次对合和反转作用下，由 ad、ad 和 ad 确定的子空间的保持群

我们来考察子空间$\mathcal{G}^k$ (2.6)、 $k = 0, 1, 2, 3$ 在群 $\mathcal{G}^\times$ 中的集合稳定子（例如，参见 [31]），其中群作用为 ad、ˇad 和˜ad。对于伴随表示 ad (3.3) 下保持这些子空间的群，我们采用以下记号：

$$\Gamma^{\overline{k}} := \Gamma^{\overline{k}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \mathrm{ad}_T(\mathcal{G}^{\overline{k}}) := T\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{\overline{k}}\}. \tag{6.1}$$

注意，群 Γ^k 是 $\mathcal{G}^\times$中 $\mathcal{G}^{\overline{k}}$ 的正规化子。对于 $\mathcal{G}^k$、 $\overline{k} = 0, 1, 2, 3$ 在 $\mathcal{G}^\times$ 中的稳定子，在ˇ扭曲伴随表示 ad (3.4) 下采用以下记号：

$$\check{\Gamma}^{\overline{k}} := \check{\Gamma}^{\overline{k}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \check{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^{\overline{k}}) := \widehat{T}\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{\overline{k}}\}, \tag{6.2}$$

˜和 ad (3.5)：

$$\tilde{\Gamma}^{\overline{k}} := \tilde{\Gamma}^{\overline{k}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \tilde{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^{\overline{k}}) \subseteq \mathcal{G}^{\overline{k}}\}. \tag{6.3}$$

群 $\tilde{\Gamma}^k$、 $k=\bar{0}$、1、2、3 与群 Γ^k 和 $\check{\Gamma}^k$ 的关系如下：

$$\tilde{\Gamma}^{\bar{k}}=\begin{cases}\check{\Gamma}^{\bar{k}}, & k=1,3,\\ \Gamma^{\bar{k}}, & k=0,2,\end{cases} \tag{6.4}$$

由于在情形 $\bar{k}=0$，2 中，根据 (3.6) 有 $\tilde{\mathsf{ad}}_T(\mathcal{G}^k)=\mathsf{ad}_T(\mathcal{G}^k)$，而在情形 $k=1,3$ 中，根据 (3.7) 有 $\tilde{\mathsf{ad}}_T(\mathcal{G}^k)=\check{\mathsf{ad}}_T(\mathcal{G}^k)$。在第 6.1 节和第 6.2 节中，我们给出了群 Γ^k and $\check{\Gamma}^k$、 $k=0$，1，2，3 的等价定义。

6.1. 群 $\mathrm{Q}^{\bar{0}}$、$\mathrm{Q}^{\bar{1}}$、$\mathrm{Q}^{\bar{2}}$、$\mathrm{Q}^{\bar{3}}$ 和 $\Gamma^{\bar{0}}$、$\Gamma^{\bar{1}}$、$\Gamma^{\bar{2}}$ 和 $\Gamma^{\bar{3}}$

考虑群 $\mathrm{Q}^{\bar{1}}$、$\mathrm{Q}^{\bar{2}}$、$\mathrm{Q}^{\bar{3}}$ 和 $\mathrm{Q}^{\bar{0}}$：

$$\mathrm{Q}^{\bar{1}}:=\mathrm{Q}^{\bar{1}}_{p,q,r}:=\{T\in\mathcal{G}^\times:\ \widetilde{T}T\in\mathrm{Z}^{1\times}=\ker(\mathrm{ad}),\ \widehat{\widetilde{T}}T\in\mathrm{Z}^{1\times}=\ker(\mathrm{ad})\} \tag{6.5}$$

$$=\ \psi^{-1}(\mathrm{Z}^{1\times})\cap\chi^{-1}(\mathrm{Z}^{1\times}), \tag{6.6}$$

$$\mathrm{Q}^{\bar{2}}:=\mathrm{Q}^{\bar{2}}_{p,q,r}:=\{T\in\mathcal{G}^\times:\ \widetilde{T}T\in\mathrm{Z}^{2\times},\ \widehat{\widetilde{T}}T\in\mathrm{Z}^{2\times}\} \tag{6.7}$$

$$=\ \psi^{-1}(\mathrm{Z}^{2\times})\cap\chi^{-1}(\mathrm{Z}^{2\times}), \tag{6.8}$$

$$\mathrm{Q}^{\bar{3}}:=\mathrm{Q}^{\bar{3}}_{p,q,r}:=\{T\in\mathcal{G}^\times:\ \widetilde{T}T\in\mathrm{Z}^{3\times},\ \widehat{\widetilde{T}}T\in\mathrm{Z}^{3\times}\} \tag{6.9}$$

$$=\ \psi^{-1}(\mathrm{Z}^{3\times})\cap\chi^{-1}(\mathrm{Z}^{3\times}), \tag{6.10}$$

$$\mathrm{Q}^{\bar{0}}:=\mathrm{Q}^{\bar{0}}_{p,q,r}:=\{T\in\mathcal{G}^\times:\ \widetilde{T}T\in\mathrm{Z}^{4\times},\ \widehat{\widetilde{T}}T\in\mathrm{Z}^{4\times}\} \tag{6.11}$$

$$=\ \psi^{-1}(\mathrm{Z}^{4\times})\cap\chi^{-1}(\mathrm{Z}^{4\times}), \tag{6.12}$$

其中，ker(ad) (3.8) 是伴随表示 ad (3.3) 的核，$\mathrm{Z}^1,\mathrm{Z}^2,\mathrm{Z}^3$，和 Z^4 分别是在第 4 节中考察的子空间 $\mathcal{G}^1$、$\mathcal{G}^2$、$\mathcal{G}^3$ 和 $\mathcal{G}^4$ 的中心化子。根据 [20], ，我们有

$$\mathrm{Z}^1=\mathrm{Z}=\begin{cases}\Lambda^{(0)}\oplus\mathcal{G}^n, & n\text{ is odd},\\ \Lambda^{(0)}, & n\text{ is even},\end{cases}$$

$$\mathrm{Z}^2=\begin{cases}\Lambda\oplus\mathcal{G}^n, & r\neq n,\\ \Lambda, & r=n,\end{cases}$$

$$\mathrm{Z}^3=\begin{cases}\Lambda^{(0)}\oplus\Lambda^{n-2}\oplus\{\mathcal{G}^1_{p,q}(\Lambda^{n-3}\oplus\Lambda^{n-2})\}\oplus\{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-3}\}\oplus\mathcal{G}^n & n\text{ is odd},\\ \Lambda^{(0)}\oplus\Lambda^{n-1}\oplus\{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{\geq n-2}\}\oplus\{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-2}\}, & n\text{ is even},\end{cases}$$

$$\mathrm{Z}^4=\Lambda\oplus\{\mathcal{G}^1_{p,q}(\Lambda^{n-3}\oplus\Lambda^{n-2})\}\oplus\{\mathcal{G}^2_{p,q}(\Lambda^{n-4}\oplus\Lambda^{n-3})\}\oplus\mathcal{G}^n.$$

Z^2 和 $\check{\mathrm{Z}}^1$ 的情形也已在 [19]中进行了详细证明。

群 $\mathrm{Q}^{\bar{1}}$，$\mathrm{Q}^{\bar{2}}$，$\mathrm{Q}^{\bar{3}}$，和 $\mathrm{Q}^{\bar{0}}$ 是非退化的几何代数 $\mathcal{G}_{p,q}$ 中群 Q 和 Q′ [39] 在退化几何代数 $\mathcal{G}$ 情形下的推广；当 $r=0$时，它们与这些群重合：

$$\mathrm{Q}^{\bar{1}}_{p,q}=\mathrm{Q}^{\bar{3}}_{p,q}=\mathrm{Q},\quad \mathrm{Q}^{\bar{0}}_{p,q}=\mathrm{Q}^{\bar{2}}_{p,q}=\begin{cases}\mathrm{Q}, & n=1,2,3\bmod 4,\\ \mathrm{Q}', & n=0\bmod 4,\end{cases}\quad n\neq 2,3,$$

且当 $n=2,3$ 时，$\mathrm{Q}^1_{p,q}=\mathrm{Q}^2_{p,q}=\mathrm{Q}$。

定理 6.1. 在退化和非退化几何代数 $\mathcal{G}$ 中，我们有

$$\mathrm{Q}^{\overline{1}} = \Gamma^{\overline{1}}, \quad \mathrm{Q}^{\overline{2}} = \Gamma^{\overline{2}}, \quad \mathrm{Q}^{\overline{3}} = \Gamma^{\overline{3}}, \quad \mathrm{Q}^{\overline{0}} = \Gamma^{\overline{0}},$$

其中

$$\Gamma^{\overline{1}} \subseteq \Gamma^{\overline{m}} \subseteq \Gamma^{\overline{0}}, \qquad m = 0, 1, 2, 3. \tag{6.13}$$

证明。对于固定的 $k = 0$，1，2，3 mod 4 以及 $m = (k-1) \bmod 4$、$l = (k+1) \bmod 4$，我们得到

$$\begin{aligned} \Gamma^{\overline{k}} &= \{T \in \mathcal{G}^{\times} : \quad T\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq (\mathcal{G}^{\overline{km}} \cap \mathcal{G}^{\overline{kl}})\} && (6.14)\\ &= \{T \in \mathcal{G}^{\times} : \quad T\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{\overline{km}}, \quad T\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{\overline{kl}}\} && (6.15)\\ &= \{T \in \mathcal{G}^{\times} : \quad \widetilde{T}T \in \mathrm{Z}^{\overline{k}\times}, \quad \widehat{\widetilde{T}}T \in \mathrm{Z}^{\overline{k}\times}\} = \mathrm{Q}^{\overline{k}}, && (6.16) \end{aligned}$$

其中，在等式 (6.16) 的第一次等号处，我们使用了引理 4.3；在第二次等号处，我们根据引理 4.2 使用了 $\mathrm{Z}^k = \mathrm{Z}^k$, $k = 1$，2，3 和 $\mathrm{Z}^0 = \mathrm{Z}^4$。(6.13) 中的包含关系由定义 (6.5)–(6.11) 以及注 4.1 的陈述 (4.7) 和 (4.8) 得出。□

注 6.2。在低维情形 $n \leq 4$ 下，由于 $\mathcal{G}^1 = \mathcal{G}^1$，克利福德群 (3.1) 与群 Q^1 重合：

$$\Gamma = \mathrm{Q}^{\overline{1}}, \qquad n \leq 4. \tag{6.17}$$

因此，群 Q^k 可视为克利福德群的推广。

注 6.3。注意到，群 Q^0 (6.11)、Q^1 (6.5)、Q^2 (6.7) 和 Q^3(6.9) 根据定义，与本文 [22]（见第 5 节）中讨论的群 A^{01} (5.8)、B^{12} (5.9)、A^{23}(5.10) 和 B^{03} (5.11) 密切相关。具体而言，我们有

$$\mathrm{Q}^{\overline{1}} = (\mathrm{A}^{\overline{01}} \cap \mathrm{B}^{\overline{12}}), \qquad (\mathrm{A}^{\overline{23}} \cap \mathrm{B}^{\overline{03}}) \subseteq \mathrm{Q}^{\overline{3}}, \tag{6.18}$$

$$(\mathrm{A}^{\overline{01}} \cap \mathrm{B}^{\overline{03}}) \subseteq \mathrm{Q}^{\overline{0}}, \qquad (\mathrm{A}^{\overline{23}} \cap \mathrm{B}^{\overline{12}}) \subseteq \mathrm{Q}^{\overline{2}}, \tag{6.19}$$

对于群 Q^0,，我们利用 $\mathrm{Z}^1 \subseteq \mathrm{Z}^4$ 以及 $\mathrm{Z}^3 \subseteq \mathrm{Z}^4$,；对于群 Q^2,，我们利用 $\mathrm{Z}^1 \subseteq \mathrm{Z}^2$（见注 4.1）。

引理 6.4。群 Q^1 和 Q^2 与群 P (5.1) 和 P^{Λ} (5.2) 之间存在如下联系：

$$\mathrm{Q}^{\overline{1}} \subseteq \mathrm{P}, \qquad \mathrm{Q}^{\overline{2}} \subseteq \mathrm{P}^{\Lambda}. \tag{6.20}$$

证明。假设 $T \in \mathrm{Q}^1$；则 $\widetilde{T}T = W \in \mathrm{Z}^{1\times}$ 且 $\widetilde{T}T = U \in \mathrm{Z}^{1\times}$。因此，$\widetilde{T} = T^{-1}W$ 和 $T^{-1} = U^{-1}T$。我们得到 $T^{-1}T = (U^{-1}T)(T^{-1}W) = U^{-1}W \in \mathrm{Z}^{1\times} =$ 核(ad)。所以，$T \in \mathrm{P}$，由定理 4.8 [19] 得。

假设 $T \in \mathrm{Q}^2$；则 $\widetilde{T}T = W \in \mathrm{Z}^{2\times}$ 且 $\widetilde{T}T = U \in \mathrm{Z}^{2\times}$。因此，$\widehat{T^{-1}}T = \widehat{U^{-1}}W \in \mathrm{Z}^{2\times} = (\Lambda_r \oplus \mathcal{G}^n)^{\times}$，故由定理 4.7 [19]得 $T \in \mathrm{P}^{\Lambda}$。□

注 6.5。 利用引理 6.4、注 6.3、定理 6.1、定理 6.1 [19],和定理 4.1 [22],, 我们得到

$$\Gamma^{\overline{1}} = (\Gamma^{\overline{01}} \cap \Gamma^{\overline{12}}) \subseteq \Gamma^{(1)}, \qquad \Gamma^{\overline{1}} \subseteq \Gamma^{\overline{2}} \subseteq \Gamma^{(0)} = \tilde{\Gamma}^{(0)},$$
$$(\Gamma^{\overline{01}} \cap \Gamma^{\overline{03}} \subseteq \Gamma^{\overline{0}}, \qquad (\Gamma^{\overline{23}} \cap \Gamma^{\overline{12}}) \subseteq \Gamma^{\overline{2}}, \qquad (\Gamma^{\overline{23}} \cap \Gamma^{\overline{03}}) \subseteq \Gamma^{\overline{3}},$$

其中， $\Gamma^{(1)}$ 是在 ad 作用下保持奇子空间 $\mathcal{G}^{(1)}$ 的群， $\Gamma^{(0)} = \tilde{\Gamma}^{(0)}$ 是在 ad 和 $\tilde{}$ad 作用下保持 $\mathcal{G}^{(0)}$ 的群（参见 (5.3)–(5.4) 及上文注释；这些群在 [19] 中讨论）； Γ^{01}、 Γ^{12}、 Γ^{23}和 Γ^{03} 分别是在 ad 作用下保持子空间 $\mathcal{G}^{12}$、 $\mathcal{G}^{23}$和 $\mathcal{G}^{03}$ 的群（参见 (5.16) 及上文注释；这些群在 [22]中讨论）。

6.2. 群 $\check{}\mathrm{Q}^0$, $\check{}\mathrm{Q}^1$, $\check{}\bar{\mathrm{Q}}^2$, $\bar{}\mathrm{Q}^3$, $\bar{}\check{}\Gamma^0$、 $\check{}\bar{\Gamma}^1$、 $\bar{}\check{}\Gamma^2$和 $\check{}\Gamma^3$ $\bar{}$

考虑群 $\check{}\mathrm{Q}^1$, 、 $\check{}\mathrm{Q}^2$, 、 $\check{}\bar{\mathrm{Q}}^3$,和 $\check{}\mathrm{Q}^{\bar{0}}$:

$$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}} := \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \widetilde{T}T \in \check{\mathrm{Z}}^{1\times} = \ker(\tilde{\mathrm{ad}}),\ \widehat{\widetilde{T}}T \in \check{\mathrm{Z}}^{1\times} = \ker(\tilde{\mathrm{ad}})\} \tag{6.21}$$
$$= \quad \psi^{-1}(\check{\mathrm{Z}}^{1\times}) \cap \chi^{-1}(\check{\mathrm{Z}}^{1\times}), \tag{6.22}$$
$$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}} := \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widetilde{T}T \in \check{\mathrm{Z}}^{2\times}, \quad \widehat{\widetilde{T}}T \in \check{\mathrm{Z}}^{2\times}\} \tag{6.23}$$
$$= \quad \psi^{-1}(\check{\mathrm{Z}}^{2\times}) \cap \chi^{-1}(\check{\mathrm{Z}}^{2\times}), \tag{6.24}$$
$$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}} := \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widetilde{T}T \in \check{\mathrm{Z}}^{3\times}, \quad \widehat{\widetilde{T}}T \in \check{\mathrm{Z}}^{3\times}\} \tag{6.25}$$
$$= \quad \psi^{-1}(\check{\mathrm{Z}}^{3\times}) \cap \chi^{-1}(\check{\mathrm{Z}}^{3\times}), \tag{6.26}$$
$$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}} := \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{p,q,r} := \{T \in \mathcal{G}^\times : \quad \widetilde{T}T \in \langle \mathrm{Z}^4 \rangle^\times_{(0)}, \quad \widehat{\widetilde{T}}T \in \langle \mathrm{Z}^4 \rangle^\times_{(0)}\} \tag{6.27}$$
$$= \quad \psi^{-1}(\langle \mathrm{Z}^4 \rangle^\times_{(0)}) \cap \chi^{-1}(\langle \mathrm{Z}^4 \rangle^\times_{(0)}, \tag{6.28}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$其中，ker(ad) (3.10) 是扭曲伴随表示 ad (3.5) 的核，集合 $\check{}\mathrm{Z}^2$ 和 $\check{}\mathrm{Z}^3$ (4.2) 分别是子空间$\mathcal{G}^2$ 和 $\mathcal{G}^3$ 的扭中心化子，而 Z^4 是子空间 $\mathcal{G}^4$ 的中心化子（见第 4 节）。由 [20],可得

$$\check{\mathrm{Z}}^1 = \Lambda,$$
$$\check{\mathrm{Z}}^2 = \begin{cases} \Lambda^{(0)} \oplus \Lambda^n \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-1}\}, & n \text{ is odd}, \\ \Lambda^{(0)} \oplus \Lambda^{n-1} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\} \oplus \mathcal{G}^n, & n \text{ is even}, \ r \neq n, \\ \Lambda^{(0)} \oplus \Lambda^{n-1}, & n \text{ is even}, \ r = n, \end{cases}$$
$$\check{\mathrm{Z}}^3 = \Lambda \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{\geq n-2}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{\geq n-3}\},$$

and

$$\langle \mathrm{Z}^4 \rangle_{(0)} = \begin{cases} \Lambda^{(0)} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-3}\}, & n \text{ is odd}, \\ \Lambda^{(0)} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-3}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-4}\} \oplus \mathcal{G}^n, & n \text{ is even}, \ r \neq n, \\ \Lambda^{(0)}, & n \text{ is even}, \ r = n. \end{cases}$$

由于下文的定理 6.6，我们在群 (6.21)–(6.27) 的记号中使用 $\check{}$。

在非退化几何代数 $\mathcal{G}_{p,\,q}$ 的特殊情形下，我们得到 [17] 中讨论的群 $\mathrm{Q}^{\pm}$ 和 Q'：

$$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{p,q} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}_{p,q} = \mathrm{Q}^{\pm}, \quad \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{p,q} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{p,q} = \begin{cases} \mathrm{Q}^{\pm}, & n = 1, 2, 3 \bmod 4, \\ \mathrm{Q}', & n = 0 \bmod 4, \end{cases} \quad n \neq 1, 2,$$

以及 $\check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{p,\,q} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{p,\,q} = \mathrm{Q}^{\pm}$，如果 $n = 1,\ 2$。

定理 6.6。 在退化和非退化几何代数 $\mathcal{G}$ 中，我们有

$$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}} = \check{\Gamma}^{\overline{1}} \subseteq \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}} = \check{\Gamma}^{\overline{3}}, \qquad \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}} = \check{\Gamma}^{\overline{2}}, \qquad \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}} = \check{\Gamma}^{\overline{0}}.$$

证明。根据注 4.1，利用 $\check{\mathrm{Z}}^{\overline{1}} \subseteq \check{\mathrm{Z}}^{3}$ 可得 $\check{\mathrm{Q}}^{1} \subseteq \check{\mathrm{Q}}^{3}$，。对于固定的 $k = 0, 1, 2, 3 \bmod 4$ 以及 $m = (k-1) \bmod 4$、$l = (k+1) \bmod 4$，我们得到

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}^{\overline{k}} &= \{T \in \mathcal{G}^{\times} : \quad \widehat{T}\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq (\mathcal{G}^{\overline{km}} \cap \mathcal{G}^{\overline{kl}})\} && (6.29) \\ &= \{T \in \mathcal{G}^{\times} : \quad \widehat{T}\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{\overline{km}}, \quad \widehat{T}\mathcal{G}^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{\overline{kl}}\} && (6.30) \\ &= \{T \in \mathcal{G}^{\times} : \quad \widetilde{T}T \in \check{\mathrm{Z}}^{\overline{k}\times}, \quad \widetilde{\widehat{T}}T \in \check{\mathrm{Z}}^{\overline{k}\times}\} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{k}}, && (6.31) \end{aligned}$$

其中，在第一个等式 (6.31) 中我们使用引理 4.3；在第二个等式 (6.31) 中，我们根据引理 4.2 和 (4.6) 使用 $\check{\mathrm{Z}}^{k} = \check{\mathrm{Z}}^{k}$, $k = 1,\ 2,\ 3$ 以及 $\check{\mathrm{Z}}^{0} = \check{\mathrm{Z}}^{4} \cap \mathcal{G}^{(0)} = \mathrm{Z}^{4} \cap \mathcal{G}^{(0)}$。□

注 6.7。 在低维情形 $n \leq 4$中，利普希茨群 (3.2) 与 $\mathcal{G}^{1} = \mathcal{G}^{1}$所给出的群 $\check{\mathrm{Q}}^{1}$ 重合：

$$\Gamma^{\pm} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}, \qquad n \leq 4. \tag{6.32}$$

因此，群 $\check{\mathrm{Q}}^{k}$ 可以视为 Lipschitz 群的推广。

注 6.8。 群 $\check{\mathrm{Q}}^{1}$ (6.21)、$\check{\mathrm{Q}}^{2}$ (6.23)、$\check{\mathrm{Q}}^{3}$ (6.25) 和 $\check{\mathrm{Q}}^{0}$ (6.27)与群 $\check{\mathrm{A}}^{12}$ (5.12)、$\check{\mathrm{A}}^{03}$ (5.13)、$\check{\mathrm{B}}^{01}$ (5.14) 和 $\check{\mathrm{B}}^{23}$密切相关，这些群已在 [22] 中详细讨论（参见 (6.15) 第 5 节）：

$$(\check{\mathrm{A}}^{\overline{12}} \cap \check{\mathrm{B}}^{\overline{01}}) \subseteq \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}, \qquad (\check{\mathrm{A}}^{\overline{12}} \cap \check{\mathrm{B}}^{\overline{23}}) \subseteq \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}, \tag{6.33}$$

$$(\check{\mathrm{A}}^{\overline{03}} \cap \check{\mathrm{B}}^{\overline{23}}) \subseteq \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}, \qquad (\check{\mathrm{A}}^{\overline{03}} \cap \check{\mathrm{B}}^{\overline{01}}) \subseteq \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}, \tag{6.34}$$

其中，对于 $\check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}$, ，我们利用 $\mathrm{Z}^{3} \cap \mathcal{G}^{(0)} = \langle \mathrm{Z}^{3} \rangle_{(0)} = \langle \check{\mathrm{Z}}^{3} \rangle_{(0)} \subseteq \check{\mathrm{Z}}^{3}$, ；对于 $\check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}$, , 我们利用 $\langle \mathrm{Z}^{3} \rangle_{(0)} \subseteq \langle \mathrm{Z}^{4} \rangle_{(0)}$ 和 $\langle \mathrm{Z}^{1} \rangle_{(0)} \subseteq \langle \mathrm{Z}^{4} \rangle_{(0)}$（参见注 4.1 和公式 (4.6)）。

引理 6.9. 我们有以下包含关系：

$$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}} \subseteq \mathrm{P}^{\pm\Lambda}, \quad \check{\mathrm{Q}}^{\overline{m}} \subseteq \mathrm{Q}^{\overline{0}}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \quad \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}} \subseteq \mathrm{Q}^{\overline{2}}, \tag{6.35}$$

其中，$\mathrm{P}^{\pm\Lambda}$ 是公式 (5.2) 中定义并在 *[19]* 中讨论的群。

证明。 我们来证明 $\check{\mathrm{Q}}^{1} \subseteq \mathrm{P}^{\pm\Lambda}$。假设 $T \in \check{\mathrm{Q}}^{1}$; 那么 $\widetilde{T}T = W \in \ker(\widetilde{\mathrm{ad}})$ $\widetilde{\widehat{T}} = \widetilde{T}$ $\widetilde{\widehat{W}} = \widetilde{W}$ $\widehat{\widetilde{W}} = \widetilde{W}$ $\widehat{\widetilde{W}} = \widetilde{W}$且 $TT = U \in \ker(\mathrm{ad})$。因此，$T = T^{-1}W$且 $T^{-1} = U^{-1}T$。于是，

$\widehat{T^{-1}}T = (\widehat{U^{-1}}\widetilde{T})(\widetilde{T^{-1}}W) = \widehat{U^{-1}}W \in \ker(\check{}\mathrm{ad})$ 且 $T \in \mathrm{P}^{\pm\Lambda}$，由定理 4.7[19]。

(6.35) 中的其他包含关系可由群 $\check{}\mathrm{Q}^m$(6.21)–(6.27)、$m = 0,1,2,3$、$\bar{}\mathrm{Q}^0$ (6.11)、Q^2 (6.7)、$\check{}\mathrm{Z}^1 \subseteq \mathrm{Z}^2$, $\bar{}$的定义以及$\bar{}$注 4.1 得出。

□

注 6.10。利用引理 6.9、定理 6.6、注 6.5、定理6.1 [19],和定理 4.2 [22],，我们得到

$$(\check{\Gamma}^{\overline{12}} \cap \check{\Gamma}^{\overline{01}}) \subseteq \check{\Gamma}^{\overline{1}} \subseteq \check{\Gamma}^{(1)} = \tilde{\Gamma}^{(1)}, \qquad \check{\Gamma}^{\overline{1}} \subseteq \Gamma^{\overline{2}} \subseteq \Gamma^{(0)} = \tilde{\Gamma}^{(0)},$$
$$\check{\Gamma}^{\overline{m}} \subseteq \Gamma^{\overline{0}}, \qquad m = 0,1,2,3; \qquad (\check{\Gamma}^{\overline{12}} \cap \check{\Gamma}^{\overline{23}}) \subseteq \check{\Gamma}^{\overline{2}},$$

其中，$\check{}\Gamma^{(1)} = \tilde{\Gamma}^{(1)}$ 是在 $\check{}\mathrm{ad}$ 和 $\tilde{}\mathrm{ad}$ 作用下保持 $\mathcal{G}^{(1)}$ 的群，而 $\Gamma^{(0)} = \tilde{\Gamma}^{(0)}$ 是在 ad 和 $\tilde{}\mathrm{ad}$ 作用下保持 $\mathcal{G}^{(0)}$ 的群（参见 (5.3)–(5.4) 及上文注释；这些群在 [19] 中讨论）；$\check{}\Gamma^{12}$、$\check{}\Gamma^{01}$ 和 $\check{}\Gamma^{23}$ 分别是在 $\check{}\mathrm{ad}$ 作用下保持子空间 $\mathcal{G}^{12}$、$\mathcal{G}^{01}$ 和 $\mathcal{G}^{23}$ 的群（参见 (5.17) 及上文注释；这些群在 [22] 中讨论）。

7. 所讨论群的例子

注 7.1. 对于格拉斯曼代数 $\mathcal{G}_{0,0,n}$，我们有

$$\Lambda_n^\times = \mathrm{Q}^{\overline{2}}_{0,0,n} = \mathrm{Q}^{\overline{0}}_{0,0,n} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{0,0,n} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}_{0,0,n}$$

and

$$\mathrm{Q}^{\overline{1}}_{0,0,n} = \{T \in \Lambda_n^\times : \ \widetilde{T}T \in \ker(\mathrm{ad}), \ \widehat{\widetilde{T}}T \in \ker(\mathrm{ad})\}, \tag{7.1}$$
$$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{0,0,n} = \{T \in \Lambda_n^\times : \ \widetilde{T}T \in \ker(\check{\mathrm{ad}}), \ \widehat{\widetilde{T}}T \in \ker(\check{\mathrm{ad}})\}. \tag{7.2}$$

若 n 为奇数，则

$$\mathrm{Q}^{\overline{3}}_{0,0,n} = \{T \in \Lambda_n^\times : \ \widetilde{T}T \in (\Lambda_n^{(0)n} \oplus \Lambda_n^{n-2})^\times, \ \widehat{\widetilde{T}}T \in (\Lambda_n^{(0)n} \oplus \Lambda_n^{n-2})^\times\}, \tag{7.3}$$
$$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{0,0,n} = \{T \in \Lambda_n^\times : \ \widetilde{T}T \in \Lambda_n^{(0)n\times}, \ \widehat{\widetilde{T}}T \in \Lambda_n^{(0)n\times}\}. \tag{7.4}$$

若 n 为偶数，则

$$\mathrm{Q}^{\overline{3}}_{0,0,n} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{0,0,n} = \{T \in \Lambda_n^\times : \ \widetilde{T}T \in (\Lambda_n^{(0)} \oplus \Lambda_n^{n-1})^\times, \ \widehat{\widetilde{T}}T \in (\Lambda_n^{(0)} \oplus \Lambda_n^{n-1})^\times\},$$

and

$$\mathrm{Q}^{\overline{1}}_{0,0,n} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{0,0,n}. \tag{7.5}$$

注 7.2。下面我们列出本文中同样考虑的群 Q^k 和 $\check{}\mathrm{Q}^k$、$\bar{}k = 0$、1、2、3，以及低维情形下的群 $\mathrm{P}^{\pm}$、$\mathrm{P}^{\wedge}$、$\mathrm{P}^{\pm\wedge}$、$\mathrm{P}^{\wedge}$ (5.3)–(5.4) [19]和 A^{01}, A^{23}, $\check{}\mathrm{A}^{12}$, $\check{}\mathrm{A}^{03}$,B^{12}, B^{03}, $\check{}\mathrm{B}^{01}$, $\check{}\mathrm{B}^{23}$ (5.16)–(5.17) [22] 。这些群在低维（$n \le 6$）非退化代数 $\mathcal{G}_{p,\,q}$的情形下于 [39, 17] 中进行了研究。

如果 $n = 1$，那么对于非退化代数 $\mathcal{G}_{p,\ q}$，我们有两个不同的群：

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\times}_{p,q} &= \mathrm{P}_{p,q} = \mathrm{P}^{\Lambda}_{p,q} = \mathrm{Q}^{\overline{0}}_{p,q} = \mathrm{Q}^{\overline{1}}_{p,q} = \mathrm{Q}^{\overline{2}}_{p,q} = \mathrm{Q}^{\overline{3}}_{p,q} \\
&= \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{p,q} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}_{p,q} = \mathrm{A}^{\overline{01}}_{p,q} = \mathrm{A}^{\overline{23}}_{p,q} = \mathrm{B}^{\overline{12}}_{p,q} = \mathrm{B}^{\overline{03}}_{p,q} \\
&= \check{\mathrm{B}}^{\overline{01}}_{p,q} = \check{\mathrm{B}}^{\overline{23}}_{p,q}; \\
\mathcal{G}^{(0)\times}_{p,q} \cup \mathcal{G}^{(1)\times}_{p,q} &= \mathrm{P}^{\pm}_{p,q} = \mathrm{P}^{\pm\Lambda}_{p,q} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{p,q} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{p,q} = \check{\mathrm{A}}^{\overline{12}}_{p,q} = \check{\mathrm{A}}^{\overline{03}}_{p,q};
\end{aligned}$$

以及在格拉斯曼代数 $\mathcal{G}_{0,\ 0,\ 1}$ 的情况下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\times}_{0,0,1} &= \mathrm{P}_{0,0,1} = \mathrm{P}^{\pm\Lambda}_{0,0,1} = \mathrm{P}^{\Lambda}_{0,0,1} = \mathrm{Q}^{\overline{0}}_{0,0,1} = \mathrm{Q}^{\overline{1}}_{0,0,1} = \mathrm{Q}^{\overline{2}}_{0,0,1} \\
&= \mathrm{Q}^{\overline{3}}_{0,0,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{0,0,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}_{0,0,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{0,0,1} = \mathrm{B}^{\overline{12}}_{0,0,1} = \mathrm{B}^{\overline{03}}_{0,0,1} \\
&= \check{\mathrm{B}}^{\overline{01}}_{0,0,1} = \check{\mathrm{B}}^{\overline{23}}_{0,0,1} = \mathrm{A}^{\overline{01}}_{0,0,1} = \mathrm{A}^{\overline{23}}_{0,0,1} = \check{\mathrm{A}}^{\overline{12}}_{0,0,1}; \\
\mathcal{G}^{0\times}_{0,0,1} &= \mathrm{P}^{\pm}_{0,0,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{0,0,1} = \check{\mathrm{A}}^{\overline{03}}_{0,0,1}.
\end{aligned}$$

如果 $n = 2$，那么在非退化代数 $\mathcal{G}_{p,\ q}$ 的情况下，我们有两个不同的群：

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\times}_{p,q} &= \mathrm{Q}^{\overline{3}}_{p,q} = \mathrm{Q}^{\overline{0}}_{p,q} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{p,q} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}_{p,q} \\
&= \mathrm{B}^{\overline{12}}_{p,q} = \mathrm{B}^{\overline{03}}_{p,q} = \check{\mathrm{B}}^{\overline{01}}_{p,q} = \check{\mathrm{B}}^{\overline{23}}_{p,q}; \\
\mathcal{G}^{(0)\times}_{p,q} \cup \mathcal{G}^{(1)\times}_{p,q} &= \mathrm{P}^{\pm}_{p,q} = \mathrm{P}_{p,q} = \mathrm{P}^{\pm\Lambda}_{p,q} = \mathrm{P}^{\Lambda}_{p,q} = \mathrm{Q}^{\overline{1}}_{p,q} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{p,q} \\
&= \mathrm{Q}^{\overline{2}}_{p,q} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{p,q} = \mathrm{A}^{\overline{01}}_{p,q} = \mathrm{A}^{\overline{23}}_{p,q} = \check{\mathrm{A}}^{\overline{12}}_{p,q} = \check{\mathrm{A}}^{\overline{03}}_{p,q};
\end{aligned}$$

以及格拉斯曼代数$\mathcal{G}_{0,\ 0,\ 2}$：

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\times}_{0,0,2} &= \mathrm{P}^{\pm\Lambda}_{0,0,2} = \mathrm{P}^{\Lambda}_{0,0,2} = \mathrm{Q}^{\overline{0}}_{0,0,2} = \mathrm{Q}^{\overline{2}}_{0,0,2} = \mathrm{Q}^{\overline{3}}_{0,0,2} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{0,0,2} \\
&= \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{0,0,2} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}_{0,0,2} = \mathrm{B}^{\overline{12}}_{0,0,2} = \mathrm{B}^{\overline{03}}_{0,0,2} = \check{\mathrm{B}}^{\overline{01}}_{0,0,2} = \check{\mathrm{B}}^{\overline{23}}_{0,0,2} \\
&= \check{\mathrm{A}}^{\overline{12}}_{0,0,2} = \mathrm{A}^{\overline{23}}_{0,0,2}; \\
\mathcal{G}^{(0)\times}_{0,0,2} &= \mathrm{P}^{\pm}_{0,0,2} = \mathrm{P}_{0,0,2} = \mathrm{Q}^{\overline{1}}_{0,0,2} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{0,0,2} = \mathrm{A}^{\overline{01}}_{0,0,2} = \check{\mathrm{A}}^{\overline{03}}_{0,0,2};
\end{aligned}$$

以及在 $\mathcal{G}_{p,\ q,\ 1}$ 的情况下有三个不同的群（其中（$p,\ q$）$=$(1，0) 或 (0，1)）：

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\times}_{p,q,1} &= \mathrm{Q}^{\overline{3}}_{p,q,1} = \mathrm{Q}^{\overline{0}}_{p,q,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{p,q,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}_{p,q,1} \\
&= \mathrm{B}^{\overline{12}}_{p,q,1} = \mathrm{B}^{\overline{03}}_{p,q,1} = \check{\mathrm{B}}^{\overline{01}}_{p,q,1} = \check{\mathrm{B}}^{\overline{23}}_{p,q,1}; \\
(\mathcal{G}^{(0)\times}_{p,q,1} \cup \mathcal{G}^{(1)\times}_{p,q,1})\Lambda^{\times}_{1} &= \mathrm{P}^{\pm\Lambda}_{p,q,1} = \mathrm{P}^{\Lambda}_{p,q,1} = \mathrm{Q}^{\overline{2}}_{p,q,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{p,q,1} = \mathrm{A}^{\overline{23}}_{p,q,1} = \check{\mathrm{A}}^{\overline{12}}_{p,q,1}; \\
\mathcal{G}^{(0)\times}_{p,q,1} \cup \mathcal{G}^{(1)\times}_{p,q,1} &= \mathrm{P}^{\pm}_{p,q,1} = \mathrm{P}_{p,q,1} = \mathrm{Q}^{\overline{1}}_{p,q,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{p,q,1} = \mathrm{A}^{\overline{01}}_{p,q,1} = \check{\mathrm{A}}^{\overline{03}}_{p,q,1}.
\end{aligned}$$

下面给出一些例子，说明第6节中讨论的群与众所周知的矩阵群之间的联系。我们利用这样一个事实：任意退化几何代数 $\mathcal{G}_{p,\ q,\ r}$, $r \neq 0$ 都可以嵌入到更高维的非退化代数中（例如参见 [10] 中的克利福德–Jordan–Wigner 表示）。根据 Cartan 周期性定理（例如参见

[32,35]），任意非退化几何代数都同构于某个矩阵代数。我们来考察上三角矩阵群 UT(2，$\mathbb{F}$) 和 UT(4，$\mathbb{F}$) [3]:

$$\mathrm{UT}(2,\mathbb{F}) := \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{21} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}) \right\}, \tag{7.6}$$

$$\mathrm{UT}(4,\mathbb{F}) := \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{F}) \right\}, \tag{7.7}$$

以及 UT(2, $\mathbb{F}$) [3] 的幺幂子群 SUT(2, $\mathbb{F}$):

$$\mathrm{SUT}(2,\mathbb{F}) := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ x_{12} \in \mathbb{F} \right\}. \tag{7.8}$$

另考虑高维海森堡群 Heis_4 （例如，参见 [3]）：

$$\mathrm{Heis}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & 0 & x_{24} \\ 0 & 0 & 1 & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{F}) \right\}. \tag{7.9}$$

例。考虑格拉斯曼代数 $\Lambda_1 = \mathcal{G}_{0,0,1}$，它可以嵌入非退化代数 $\mathcal{G}_{1,1,0} \cong \mathrm{Mat}(2,\mathbb{F})$ 中。对于来自 Λ_1 的 e 和 e_1，我们有:

$$e \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e_1 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.10}$$

另考虑格拉斯曼代数 $\Lambda_2 = \mathcal{G}_{0,0,2}$，它可以嵌入 $\mathcal{G}_{2,2,0} \cong \mathrm{Mat}(4,\mathbb{F})$ 中。对于 Λ_2 的基元素 e_1、e_2 和 e_{12}，我们有:

$$e_1 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{12} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

注意

$$\Lambda_2^{(0)} \cong \left\{ \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & x_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 \end{bmatrix},\ x_0, x_1 \in \mathbb{F} \right\} \cong \left\{ \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ 0 & x_0 \end{bmatrix},\ x_0, x_1 \in \mathbb{F} \right\}.$$

根据注 7.2，我们得到 $\Lambda_1^{(0)\times} = \mathrm{P}^{\pm}_{0,\ 0,\ 1} = \check{\mathrm{Q}}_{00,\ \overline{0},\ 1} \cong \mathbb{F}^{\times}$,

$$\Lambda_1^{\times} = \mathrm{P}_{0,0,1} = \mathrm{Q}^{\overline{0}}_{0,0,1} = \mathrm{Q}^{\overline{1}}_{0,0,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{0,0,1} \cong \Lambda_2^{(0)\times} = \mathrm{P}^{\pm}_{0,0,2} = \mathrm{P}_{0,0,2} \tag{7.11}$$

$$= \mathrm{Q}^{\overline{1}}_{0,0,2} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{0,0,2} \cong \left\{ \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ 0 & x_0 \end{bmatrix},\ x_0, x_1 \in \mathbb{F},\ x_0 \neq 0 \right\}, \tag{7.12}$$

and

$$\Lambda_2^{\times} = \mathrm{P}^{\pm\Lambda}_{0,0,2} = \mathrm{Q}^{\overline{0}}_{0,0,2} = \mathrm{Q}^{\overline{2}}_{0,0,2} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{0,0,2} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{0,0,2} \tag{7.13}$$

$$\cong \left\{ \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 \end{bmatrix} : \; x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}, \; x_0 \neq 0 \right\}. \tag{7.14}$$

注意，在 Λ_1 和 Λ_2 的情形下，本文所考虑的所有群都可以实现为上三角矩阵群 UT(2，$\mathbb{F}$) (7.6) 和 UT(4，$\mathbb{F}$) (7.7) 的子群。幺三角群 SUT(2，$\mathbb{F}$) (7.8) 可以实现为群 (7.11)–(7.12) 的子群。(7.14) 的幺幂子群，即 (7.14) 中具有 $x_0 = 1$ 的子群，是海森堡群 Heis_4 (7.9) 的子群。

例子。 考虑实退化代数 $\mathcal{G}_{0,1,1}(\mathbb{R})$，它可以嵌入实非退化代数 $\mathcal{G}_{1,2,0}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ 中。对于基元素 $\mathcal{G}_{0,1,1}(\mathbb{R})$，我们有如下复矩阵：

$$e \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e_1 \mapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{12} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.15}$$

注意（见上例）

$$\mathcal{G}^{(0)\times}_{0,1,1}(\mathbb{R}) \cong \left\{ \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ 0 & x_0 \end{bmatrix}, \; x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \; x_0 \neq 0 \right\} \cong \Lambda_1^{\times}(\mathbb{R}) \cong \Lambda_2^{(0)\times}(\mathbb{R}). \tag{7.16}$$

我们得到如下同构：

$$\mathcal{G}^{\times}_{0,1,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Q}^{\overline{0}}_{0,1,1} = \mathrm{Q}^{\overline{3}}_{0,1,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}_{0,1,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}_{0,1,1} \tag{7.17}$$

$$\cong \left\{ \begin{bmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ 0 & x_0 - ix_1 \end{bmatrix}, \; x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \; (x_0)^2 + (x_1)^2 \neq 0 \right\}, \tag{7.18}$$

$$\mathcal{G}^{(0)\times}_{0,1,1}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{G}^{(1)\times}_{0,1,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Q}^{\overline{1}}_{0,1,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}_{0,1,1} \tag{7.19}$$

$$\cong \left\{ \begin{bmatrix} x_0 & ix_1 \\ 0 & x_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ix_0 & x_1 \\ 0 & -ix_0 \end{bmatrix}, \; x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \; x_0 \neq 0 \right\}, \tag{7.20}$$

$$\mathcal{G}^{12\times}_{0,1,1} \cup (\mathcal{G}^{(0)}_{0,1,1} \oplus \Lambda^1_1)^{\times} = \mathrm{Q}^{\overline{2}}_{0,1,1} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}_{0,1,1} \tag{7.21}$$

$$\cong \left\{ \begin{bmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ 0 & -ix_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}, \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \; x_1 \neq 0 \right\}. \tag{7.22}$$

注意，所有所考虑的群（7.17）、（7.19）和（7.21）都可以实现为上三角矩阵群 $\mathrm{UT}(2,\mathbb{C})$（7.6）的子群。幺三角群 $\mathrm{SUT}(2,\mathbb{C})$ 是矩阵群（7.18）和（7.22）的子群。

8. 所考虑李群的李代数

定理 8.1。 李群 Q^k 和 $\check{\mathrm{Q}}^k$、 $k = 0$、1、2、3的李代数列于表*1*中。

证明。为证明这些陈述，我们使用任意李群与相应李代数之间关系的众所周知的事实。例如，当 n 为偶数时，对Q^1 (6.5)的定义方程求微分得到$X+\widetilde{X}\in \mathsf{Z}^1=\Lambda^{(0)}$ 和 $X+\widetilde{X}\in \mathsf{Z}^1=\Lambda^{(0)}$ （对于 $X\in \mathfrak{q}^1$），再将X 投影到每个 $\mathcal{G}^m$上，我们发现，当且仅当$X\in\mathcal{G}^2\oplus\Lambda^0$时，这些方程成立。□

注 8.2. 表1中所列李代数的维数可通过以下方式计算：

$$\dim\mathcal{G}^{\overline{2}}=2^{n-2}-2^{\frac{n}{2}-1}\cos(\tfrac{\pi n}{4}),\quad \dim\mathcal{G}^n=1,$$
$$\dim\mathcal{G}^k_{p,q}=\tfrac{(p+q)!}{k!(p+q-k)!},\quad \dim\Lambda^k=\begin{cases}\frac{r!}{k!(r-k)!}, & r\geq k,\\ 0, & r<k,\end{cases}\quad 0\leq k\leq n,$$
$$\dim\Lambda^{(1)}=\begin{cases}2^{r-1}, & r\neq 0,\\ 0, & r=0,\end{cases}\quad \dim\Lambda^{\overline{0}}=\begin{cases}2^{r-2}+2^{\frac{r}{2}-1}\cos(\frac{\pi r}{4}), & r\neq 0,\\ 1, & r=0.\end{cases}$$

我们分别将李群 Q^k和 $\check{\mathsf{Q}}^k$, $k=0,1,2,3$的李代数记为 $\mathfrak{q}^k=\mathfrak{q}^k_{p,q,r}$ 和 $\check{\mathfrak{q}}^k=\check{\mathfrak{q}}^k_{p,q,r}$。

注 8.3. 对于非退化几何代数$\mathcal{G}_{p,q}$，当 $k=0,1,2,3$, $m=0,2$，以及 $l=1,3$ 时，

$$\mathfrak{q}^{\overline{k}}_{p,q}=\check{\mathfrak{q}}^{\overline{2}}_{p,q}=\check{\mathfrak{q}}^{\overline{3}}_{p,q}=\mathcal{G}_{p,q},\quad \check{\mathfrak{q}}^{\overline{1}}_{p,q}=\check{\mathfrak{q}}^{\overline{0}}_{p,q}=\mathcal{G}^0,\quad n=1; \tag{8.1}$$
$$\mathfrak{q}^{\overline{3}}_{p,q}=\mathfrak{q}^{\overline{0}}_{p,q}=\check{\mathfrak{q}}^{\overline{2}}_{p,q}=\check{\mathfrak{q}}^{\overline{3}}_{p,q}=\mathcal{G}_{p,q}, \tag{8.2}$$
$$\mathfrak{q}^{\overline{1}}_{p,q}=\mathfrak{q}^{\overline{2}}_{p,q}=\check{\mathfrak{q}}^{\overline{1}}_{p,q}=\check{\mathfrak{q}}^{\overline{0}}_{p,q}=\mathcal{G}^{(0)}_{p,q},\quad n=2; \tag{8.3}$$
$$\mathfrak{q}^{\overline{3}}_{p,q}=\mathfrak{q}^{\overline{0}}_{p,q}=\mathcal{G}_{p,q},\ \ \mathfrak{q}^{\overline{1}}_{p,q}=\mathfrak{q}^{\overline{2}}_{p,q}=\mathcal{G}^{0\overline{2}3}_{p,q},\ \ \check{\mathfrak{q}}^{\overline{k}}_{p,q}=\mathcal{G}^{(0)}_{p,q},\ \ n=3; \tag{8.4}$$
$$\mathfrak{q}^{\overline{m}}_{p,q}=\check{\mathfrak{q}}^{\overline{m}}_{p,q}=\mathcal{G}^{0\overline{2}n}_{p,q},\ \ \mathfrak{q}^{\overline{l}}_{p,q}=\check{\mathfrak{q}}^{\overline{l}}_{p,q}=\mathcal{G}^{0\overline{2}}_{p,q},\ \ n=0 \bmod 4,\quad n\geq 4; \tag{8.5}$$
$$\mathfrak{q}^{\overline{k}}_{p,q}=\mathcal{G}^{0\overline{2}n}_{p,q},\quad \check{\mathfrak{q}}^{\overline{k}}_{p,q}=\mathcal{G}^{0\overline{2}}_{p,q},\quad n=1 \bmod 2,\quad n\geq 5; \tag{8.6}$$
$$\mathfrak{q}^{\overline{k}}_{p,q}=\check{\mathfrak{q}}^{\overline{k}}_{p,q}=\mathcal{G}^{0\overline{2}}_{p,q},\quad n=2 \bmod 4,\quad n\geq 6. \tag{8.7}$$

请注意，所得李代数是在 [39, 17] 中考虑的。

我们来考虑众所周知的海森堡李代数 $\mathfrak{heis}(3,\mathbb{F})$ 和$\mathfrak{heis}(4,\mathbb{F})$（例如，参见 [27]）：

$$\mathfrak{heis}(3,\mathbb{F}) = \left\{\begin{bmatrix}0 & x_{12} & x_{13}\\ 0 & 0 & x_{23}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{F})\right\}, \tag{8.8}$$
$$\mathfrak{heis}(4,\mathbb{F}) = \left\{\begin{bmatrix}0 & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ 0 & 0 & 0 & x_{24}\\ 0 & 0 & 0 & x_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\in \mathrm{Mat}(4,\mathbb{F})\right\}. \tag{8.9}$$

TABLE 1. 李群及其对应的李代数[2]

李群	n 模 4	r	李代数
$\mathrm{Q}^{\overline{1}}$	$0, 2$		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}$	3		
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}$	0	n	
$\mathrm{Q}^{\overline{1}}$	$1, 3$		$\mathcal{G}^{\overline{2}n} \oplus \Lambda^{\overline{0}}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}$	0	$\neq n$	
$\mathrm{Q}^{\overline{2}} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}$	2		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}(1)}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}}$	$0, 1, 3$		
$\mathrm{Q}^{\overline{2}}, \mathrm{Q}^{\overline{0}}$	$0, 1, 3$	n	
$\mathrm{Q}^{\overline{2}}$	$0,\ 1,\ 3$	$\neq n$	$\mathcal{G}^{\overline{2}n} \oplus \Lambda^{\overline{0}(1)}$
$\mathrm{Q}^{\overline{3}}, \check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}$	2		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}} \oplus \Lambda^{n-1} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}$	0	n	
$\mathrm{Q}^{\overline{3}}$	3		$\mathcal{G}^{\overline{2}n} \oplus \Lambda^{\overline{0}} \oplus \Lambda^{n-2} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-3}\}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}$	$1, 3$		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}} \oplus \Lambda^{n} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-1}\}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}}$	0	$\neq n$	$\mathcal{G}^{\overline{2}n} \oplus \Lambda^{\overline{0}} \oplus \Lambda^{n-1} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}$	2		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-3}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-4}\}$
$\mathrm{Q}^{\overline{0}}$	3	$\neq n$	$\mathcal{G}^{\overline{2}n} \oplus \Lambda^{\overline{0}(1)} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-3}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-4}\}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{0}}$	1		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}} \oplus \mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-3}\}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}$	2		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}(1)} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-3}\}$
$\mathrm{Q}^{\overline{0}}$	0	$\neq n$	$\mathcal{G}^{\overline{2}n} \oplus \Lambda^{\overline{0}(1)} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-3}\}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}$	3		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}(1)} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-1}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-2}\}$
$\mathrm{Q}^{\overline{3}}$	0		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}} \oplus \Lambda^{n-1} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-2}\}$ $\oplus\{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-1}\}$
$\mathrm{Q}^{\overline{3}}$	1		$\mathcal{G}^{\overline{2}n} \oplus \Lambda^{\overline{0}} \oplus \Lambda^{n-2} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-3}\}$ $\oplus\{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-3}\} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\}$
$\mathrm{Q}^{\overline{0}}$	2		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}(1)} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-3}\} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\}$ $\oplus\{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-4}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-3}\}$
$\mathrm{Q}^{\overline{0}}$	1	$\neq n$	$\mathcal{G}^{\overline{2}n} \oplus \Lambda^{\overline{0}(1)} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-3}\} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\}$ $\oplus\{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-4}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-3}\}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}}$	$0, 1$		$\mathcal{G}^{\overline{2}} \oplus \Lambda^{\overline{0}(1)} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-2}\} \oplus \{\mathcal{G}^1_{p,q}\Lambda^{n-1}\}$ $\oplus\{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-3}\} \oplus \{\mathcal{G}^2_{p,q}\Lambda^{n-2}\}$

[2]表1的第一列列出了本文所考虑的李群。第四列根据分别列于第二列和第三列的 n模 4 和 r，给出了每个李群对应的李代数。对于无论 r 取何值都具有相同李代数的李群，第三列为空。第四列中的集合均是相对于交换子 $[U, V] = UV - VU$ 考虑的。

注 8.4。 在格拉斯曼代数 $\mathcal{G}_{0,\ 0,\ n}$ 的情形下，我们有

$$\mathfrak{q}^{\overline{0}}_{0,0,n} = \mathfrak{q}^{\overline{2}}_{0,0,n} = \check{\mathfrak{q}}^{\overline{1}}_{0,0,n} = \check{\mathfrak{q}}^{\overline{3}}_{0,0,n} = \Lambda_n, \qquad \check{\mathfrak{q}}^{\overline{0}}_{0,0,n} = \Lambda^{(0)}_n, \qquad \forall n; \tag{8.10}$$

$$\mathfrak{q}^{\overline{1}}_{0,0,n} = \check{\mathfrak{q}}^{\overline{2}}_{0,0,n} = \Lambda^{(0)n}_n, \qquad \mathfrak{q}^{\overline{3}}_{0,0,n} = \Lambda^{(0)n}_n \oplus \Lambda^{n-2}_n, \qquad n \text{ is odd}; \tag{8.11}$$

$$\mathfrak{q}^{\overline{1}}_{0,0,n} = \Lambda^{(0)}_n, \qquad \check{\mathfrak{q}}^{\overline{2}}_{0,0,n} = \mathfrak{q}^{\overline{3}}_{0,0,n} = \Lambda^{(0)}_n \oplus \Lambda^{n-1}_n, \qquad n \text{ is even}. \tag{8.12}$$

注意，所有李代数 (8.10)–(8.12) 都是可解且幂零的，以下李代数则是阿贝尔的：

$$\Lambda^{(0)}_n(\mathbb{F}) \cong \bigoplus^{2^{n-1}} \mathfrak{gl}(1,\mathbb{F}), \quad \forall n; \quad \Lambda^{(0)n}_n(\mathbb{F}) \cong \bigoplus^{2^{n-1}+1} \mathfrak{gl}(1,\mathbb{F}), \quad n \text{ is odd};$$

$$\Lambda^{(0)n}_n(\mathbb{F}) \oplus \Lambda^{n-2}_n(\mathbb{F}) \cong \bigoplus^{2^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}} \mathfrak{gl}(1,\mathbb{F}), \quad n \neq 3 \text{ is odd};$$

$$\Lambda^{(0)}_n(\mathbb{F}) \oplus \Lambda^{n-1}_n(\mathbb{F}) \cong \bigoplus^{2^{n-1}+n} \mathfrak{gl}(1,\mathbb{F}), \ \ n \geq 4 \text{ is even}.$$

另请注意，

$$\Lambda_2(\mathbb{F}) \cong \mathfrak{gl}(1,\mathbb{F}) \oplus \mathfrak{heis}(3,\mathbb{F}). \tag{8.13}$$

例。 我们有以下同构：

$$\check{\mathfrak{q}}^{\overline{0}}_{1,0,2}(\mathbb{F}) \cong \mathfrak{gl}(1,\mathbb{F}) \oplus \mathfrak{heis}(3,\mathbb{F}), \quad \check{\mathfrak{q}}^{\overline{0}}_{1,1,1}(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{gl}(1,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{p}(1,1), \tag{8.14}$$

$$\check{\mathfrak{q}}^{\overline{0}}_{3,0,0}(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{gl}(1,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{su}(2), \quad \check{\mathfrak{q}}^{\overline{0}}_{3,0,0}(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{gl}(1,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}), \tag{8.15}$$

$$\check{\mathfrak{q}}^{\overline{1}}_{1,0,2}(\mathbb{F}) \cong \mathfrak{gl}(1,\mathbb{F}) \oplus \mathfrak{heis}(4,\mathbb{F}), \tag{8.16}$$

并且，通过添加阿贝尔李子代数，我们得到

$$\mathfrak{q}^{\overline{1}}_{1,0,2}(\mathbb{F}) \cong \bigoplus^{2} \mathfrak{gl}(1,\mathbb{F}) \oplus \mathfrak{heis}(3,\mathbb{F}), \quad \mathfrak{q}^{\overline{1}}_{1,1,1}(\mathbb{R}) \cong \bigoplus^{2} \mathfrak{gl}(1,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{p}(1,1), \tag{8.17}$$

$$\mathfrak{q}^{\overline{1}}_{3,0,0}(\mathbb{R}) \cong \bigoplus^{2} \mathfrak{gl}(1,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{su}(2), \quad \mathfrak{q}^{\overline{1}}_{3,0,0}(\mathbb{C}) \cong \bigoplus^{2} \mathfrak{gl}(1,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}), \tag{8.18}$$

$$\check{\mathfrak{q}}^{\overline{3}}_{1,0,2}(\mathbb{F}) \cong \mathfrak{gl}(1,\mathbb{F}) \oplus \mathfrak{gl}(1,\mathbb{F}) \oplus \mathfrak{heis}(4,\mathbb{F}), \tag{8.19}$$

其中， $\mathfrak{heis}(3,\ \mathbb{F})$ (8.8) 和 $\mathfrak{heis}(4,\ \mathbb{F})$ (8.9) 是海森堡李代数，$\mathfrak{p}(1,\ 1)$ 是三维庞加莱李代数（例如参见 [33]），其由基元素 x_1、 x_2 和 x_3 的对易关系定义：

$$[x_1, x_3] = x_1, \quad [x_2, x_3] = -x_2, \quad [x_1, x_2] = 0, \tag{8.20}$$

and

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) \ = \ \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F}) : \quad \mathrm{tr}A = 0\}, \tag{8.21}$$

$$\mathfrak{su}(n) \ = \ \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) : \quad A^{\dagger} = -A, \quad \mathrm{tr}A = 0\}. \tag{8.22}$$

注意，利用表1，我们可以得到李代数的其他同构。

9. 结论

在本文中，我们考虑李群族 Γ^k (6.1)、$\check{}\Gamma^k$ (6.2) 和 $\tilde{\bar{\Gamma}}^k$(6.3)，它们在退化和非退化几何代数中，分别在伴随表示 ad 以及扭伴随表示 $\bar{\text{ad}}$ 和 $\tilde{\text{ad}}$ 下保持由级反转与反转确定的子空间 $\mathcal{G}^k$, $k = 0$、1、2、3 $\check{}$ $\tilde{}$

几何代数 $\mathcal{G}$。我们引入李群族 Q^k (6.5)–(6.11) 和 $\check{}\mathrm{Q}^k$ (6.21)–(6.27), $k = 0$、1、2、3，它们使用范数函数 ψ和χ (4.11) 定义。在这些李群的定义中，我们还使用中心化子 Z^m(4.1)、扭中心化子 $\check{}\mathrm{Z}^m$ (4.2) 及其性质。在定理 6.1 和 6.6 中，我们证明群 Q^k 和 $\check{}\mathrm{Q}^k$ 与群Γ^k、$\check{}\Gamma^k$和 $\tilde{\Gamma}^k$ 之间存在如下关系 [3]：

$$\Gamma^{\overline{k}} = \mathrm{Q}^{\overline{k}}, \qquad \check{\Gamma}^{\overline{k}} = \tilde{\Gamma}^{\overline{k}} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{k}}, \qquad k = 1, 3; \tag{9.1}$$

$$\Gamma^{\overline{k}} = \tilde{\Gamma}^{\overline{k}} = \mathrm{Q}^{\overline{k}}, \qquad \check{\Gamma}^{\overline{k}} = \check{\mathrm{Q}}^{\overline{k}}, \qquad k = 0, 2. \tag{9.2}$$

表 2 列出了本文所讨论的群及其定义条件。具体而言，第一列表示群，第二列则包含根据群的定义，其元素的范数函数 ψ 和 χ 所属的集合。

TABLE 2. 所讨论的李群

李群	TT, $\widehat{\widetilde{T}}T$
$\mathrm{Q}^{\overline{1}} = \Gamma^{\overline{1}}$	$\mathrm{Z}^{1\times}$ =核(ad)
$\mathrm{Q}^{\overline{2}} = \Gamma^{\overline{2}} = \tilde{\Gamma}^{\overline{2}}$	$\mathrm{Z}^{2\times}$
$\mathrm{Q}^{\overline{3}} = \Gamma^{\overline{3}}$	$\mathrm{Z}^{3\times}$
$\mathrm{Q}^{\overline{0}} = \Gamma^{\overline{0}} = \tilde{\Gamma}^{\overline{0}}$	$\mathrm{Z}^{4\times}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{1}} = \check{\Gamma}^{\overline{1}} = \tilde{\check{\Gamma}}^{\overline{1}}$	$\check{\mathrm{Z}}^{1\times}$ =核($\tilde{\mathrm{ad}}$)
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{2}} = \check{\Gamma}^{\overline{2}}$	$\check{\mathrm{Z}}^{2\times}$
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{3}} = \check{\Gamma}^{\overline{3}} = \tilde{\check{\Gamma}}^{\overline{3}}$	$\check{\mathrm{Z}}^{3\times}$
$\check{}\mathrm{Q}^0 = \check{}\Gamma^0$	$(\mathrm{Z}^4 \cap \mathcal{G}^{(0)})^\times$

在低维情形下，本文所研究的李群与众所周知的矩阵群有关。第7节给出了几个例子。例如，对于格拉斯曼代数Λ_1 和 Λ_2，本文中的所有群都可以实现为上三角矩阵群 UT(2，$\mathbb{F}$) 和 UT(4，$\mathbb{F}$) 的子群。此外，对于Λ_2，高维海森堡群 Heis_4 与所研究的某些群密切相关。具体而言，群 $\mathrm{Q}_{00,\,0,\,2} = \mathrm{Q}_{20,\,0,\,2} = \check{}\mathrm{Q}_{10,\,0,\,2} = \check{}\mathrm{Q}^2_{0,0,2}$同构于一个矩阵群，其幺幂子群是 Heis_4 的子群。

在定理 8.1 和表1中，我们研究了与所考察的李群族相对应的李代数族。这些

[3]我们还希望补充一条匿名审稿人关于这些等式的重要评论：'现在，我们有了这些广义克利福德群和利普希茨群的显式条件（可写成坐标的二次多项式）。这有助于推动它们在应用中的使用，也可能为今后研究它们作为代数群的性质提供支持'。

相应李代数与经典李代数之间关系的示例见第8节。例如，对于$\mathcal{G}_{1,0,2}$、$\mathcal{G}_{1,1,1}$和$\mathcal{G}_{3,0,0}$的情形，所考察的某些李代数同构于以下代数的直和：一般线性李代数、海森堡李代数 $\mathfrak{heis}(3,\mathbb{F})$ 和$\mathfrak{heis}(4,\mathbb{F})$、特殊酉李代数 $\mathfrak{su}(2)$、特殊线性李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，以及庞加莱李代数 $\mathfrak{p}(1,1)$（见 (8.14)–(8.19)）。对于任意维数和签名的 $\mathcal{G}$，所考察的李群和李代数与众所周知的李群和李代数之间的关系仍有待进一步研究。对于非退化几何代数$\mathcal{G}_{p,q}$这一特殊情形，[44, 45, 46]讨论了这一问题。

群 Γ^k、$\check{\Gamma}^k$ 和$\bar{\tilde{\Gamma}^k}$可视为克利福德群 Γ（3.2）和利普希茨群 $\Gamma^{\pm}$（3.2）的推广。在 $n \leq 4$ 情形下，其中一些群与克利福德群和利普希茨群重合（参见注 6.2 和 6.7）。所研究的群对于自旋群理论十分重要。类比普通自旋群，群 Γ^k、$\check{\Gamma}^k$ 和 $\tilde{\Gamma}^k$ 可利用范数函数 ψ 和 χ（4.11）进行归一化。这些归一化子群可视为广义退化自旋群，并具有重要的应用价值。研究这些群是未来研究的方向。此外，广义 Lipschitz 群 $\check{\Gamma}^k$ 和 $\tilde{\Gamma}^k$ 对于构造关于伪正交变换（旋转、反射等）等变的神经网络也很有意义。具体而言，由于普通 Lipschitz 群 $\Gamma^{\pm}$ 是广义 Lipschitz 群的子群，因此，映射关于这些群的等变性意味着其关于伪正交群的等变性。因此，任何关于广义 Lipschitz 群等变的映射参数化，都可用于构造新型等变神经网络架构 [23, 24]。因此，本文研究的李群族可应用于几何代数在物理学 [8, 9, 13, 29, 15],、量子力学 [9],、计算机科学（尤其是神经网络和机器学习 [6, 7, 38, 37, 23, 24, 48],、图像处理 [4, 30, 15],）以及其他领域中的应用。

致谢

本文的研究结果曾在2024年8月于荷兰阿姆斯特丹举行的第9届计算机科学与工程应用几何代数会议上报告。作者感谢本次会议的组织者和与会者所进行的富有成果的讨论。作者感谢审稿人认真审阅本文，并就如何改进文章的呈现提出了宝贵意见。

本研究得到俄罗斯科学基金会的资助（项目编号23-71-10028），网址：https://rscf.ru/en/project/23-71-10028/。

数据可用性 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

声明
利益冲突 作者声明不存在任何利益冲突。

附录 A. 符号汇总

为方便读者，我们在表 3–4 中汇总了全文使用的所有符号。这些表格列出了每个符号、其含义以及它首次出现的位置。

参考文献

[1] Ablamowicz, R.：与退化克利福德代数相关的自旋群结构。《数学物理杂志》27(1)，1–6（1986）[2] Atiyah, M., Bott, R., Shapiro, A.：克利福德模。《拓扑学》**3**，3–38（1964）[3] Baker, A.：《矩阵群：李群理论导论》。Springer，纽约（2002）[4] Bayro-Corrochano, E., Scheuermann, G.：《工程学与计算机科学中的几何代数计算》。Springer-Verlag，伦敦（2010）[5] Benn, I., Tucker, R.：《旋量与几何导论：及其在物理学中的应用》。布里斯托尔（1987）[6] Brandstetter, J., Berg, R.V., Welling, M., Gupta, J.K.：《用于偏微分方程建模的克利福德神经网络层》（2022），arXiv:2209.04934[7] Brehmer, J., De Haan, P., Behrends, S., Cohen, T.：《几何代数变换器》。神经信息处理系统进展 37，（2023），arXiv:2305.18415[8] Brooke, J.：《克利福德代数、自旋群与伽利略不变性——新视角》。论文，阿尔伯塔大学（1980）[9] Brooke, J.：《自旋的伽利略表述：I. 克利福德代数与自旋群》。《数学物理杂志》19，952–959（1978）[10] Catto, S., Choun, Y., Gurcan, Y., Khalfan, A., Kurt, L.：《超对称的格拉斯曼数与克利福德–约当–维格纳表示》。《物理学杂志：会议系列》，**411**（2013）[11]Crumeyrolle, A.：《正交与辛克利福德代数》。第1版。Springer，荷兰（1990）[12] Dereli, T., Kocak, S., Limoncu, M.：《作为半直积的退化自旋群》。应用克利福德代数进展 **20**，565–573（2010）[13] Doran, C., Lasenby, A.：《物理学家的几何代数》。剑桥大学出版社，英国剑桥（2003）[14]Dorst, L., De Keninck, S.：《平面几何代数 PGA 导览》。2.0版（2022）。网址：http://bivector.net/PGA4CS.html[15] Dorst, L., Doran, C., Lasenby, J.：《几何代数在计算机科学与工程学中的应用》。Birkhauser Boston，马萨诸塞州（2002）[16] Dorst, L., Fontijne, D., Mann, S.：《计算机科学中的几何代数：面向对象的几何方法》。Morgan Kaufmann，第1版（2008）

[17] Filimoshina, E., Shirokov, D.: 《利普希茨群与自旋群的推广》。《应用科学中的数学方法》，**47**(3)，1375–1400（2024）[18] Filimoshina, E., Shirokov, D.: 《退化几何代数中的若干李群》。载于：Eckhard Hitzer 与 Dietmar Hildenbrand（编），第一届国际会议，ICACGA 2022，美国科罗拉多州科罗拉多斯普林斯，2022，会议论文集。《计算机科学讲义》。Springer，Cham，13771，186–198，2024[19] Filimoshina, E., Shirokov, D.: 《退化克利福德几何代数中的若干李群》。应用克利福德代数进展，**33**(44)，29页（2023），arXiv: 2301.06842[20] Filimoshina, E., Shirokov, D.: 《关于克利福德代数中的中心化子与扭曲中心化子的札记》。应用克利福德代数进展，**34**(50)（2024），arXiv:2404.15169[21] Filimoshina, E., Shirokov, D.: 《广义退化克利福德群与 Lipschitz 群》。计算机图形学进展。CGI 2024。《计算机科学讲义》。Springer，Cham，15340，364–376，2025[22] Filimoshina, E., Shirokov, D.: 《几何代数中的广义退化克利福德群与 Lipschitz 群》。应用克利福德代数进展，**35**，29（2025）[23] Filimoshina, E., Shirokov, D.: 《采用几何代数的等变神经网络：一种新方法》。IEEE 会议论文集（即将发表），国际神经网络联合会议，2025[24] Filimoshina, E., Shirokov, D.: 《GLGENN：一种基于克利福德几何代数的轻参数等变神经网络新架构》。第42届国际机器学习会议论文集（加拿大温哥华，2025年 267，2025，17153 17188），机器学习研究论文集，–。[25] Gosson, M.: 《辛几何与量子力学》。Springer，巴塞尔（2006）[26] Gunn, C.: 《欧几里得几何的几何代数》。应用克利福德代数进展**27**，（2017）[27]Hall, B.: 《李群、李代数与表示》。Springer，Cham（2015）[28]Helmstetter, J., Micali, A.: 《二次映射与克利福德代数》。Birkh¨auser，巴塞尔（2008）[29] Hestenes, D., Sobczyk, G.: 《从克利福德代数到几何微积分——数理物理的统一语言》。Reidel 出版公司，多德雷赫特，荷兰（1984）[30]Hildenbrand, D.: 《几何代数计算导论》（第1版）。Chapman and Hall/CRC（2018）[31] Isaacs, I. M.: 《代数：研究生课程》。美国数学学会，516页（2009）[32]Lounesto, P.: 《克利福德代数与旋量》。剑桥大学出版社，英国剑桥（1997）[33] Nesterenko, M.: 《庞加莱代数 p(1, 1) 与 p(1, 2)：实现与变形》。《物理学杂志：会议系列》，**621**（2015）

[34] Perwass, C.：《几何代数在工程学中的应用》。Springer，柏林、海德堡（2009年）[35] Porteous, I.：《克利福德代数与经典群》。剑桥大学出版社，剑桥，英国（1995）[36] Roelfs, M., De Keninck, S.：《分级对称群：平面与简明》。Adv. Appl. Clifford Algebras**33**(30)（2023年）[37] Ruhe, D., Brandstetter, J., Forr´e, P.：《克利福德群等变神经网络》（2023年），arXiv:2305.11141[38] Ruhe, D., Gupta, J. K., De Keninck, S., Welling, M., Brandstetter, J.：《几何克利福德代数网络》。第40届国际机器学习大会论文集，29306–29337（2023年），arXiv:2302.06594[39] Shirokov, D.：《保持克利福德代数固定子空间的内自同构》。Adv. Appl. Clifford Algebras **31**(30)，（2021）[40] Shirokov, D.：《克利福德代数及其在李群和旋量中的应用》。载于：第19届几何、可积性与量子化国际会议论文集，Avangard Prima，索非亚，11-53（2018年）[41] Shirokov, D.：《按四元数类型对克利福德代数元素进行分类》。Dokl. Math.,**80**(1)，610–612（2009年）[42] Shirokov, D.：《克利福德代数元素的四元数类型划分》。Adv. Appl. Clifford Algebras, **22**(1)，243–256（2012）[43] Shirokov D. 克利福德代数元素四元数类型划分方法的发展。Adv. Appl. Clifford Algebras, **22**(2)，483-497（2012）[44] Shirokov, D.：《克利福德代数中的辛李群、正交李群与线性李群》。Adv. Appl. Clifford Algebras **25**(3)，707–718（2015年）[45] Shirokov, D.：《克利福德代数中包含自旋群的若干李群》。Journal of Geometry and Symmetry in Physics **42**，73–94（2016）[46] Shirokov, D.：《复化克利福德代数中特定类型李代数的分类》。Linear and Multilinear Algebra **66**(9)，1870–1887（2018年）[47] Sommer, G.：《克利福德代数的几何计算：理论基础及其在计算机视觉和机器人学中的应用》。Springer，柏林、海德堡（2001）[48] Zhdanov, M., Ruhe, D., Weiler, M., Lucic, A., Brandstetter, J., Forr´e, P.：《克利福德可操控卷积神经网络》。载于：第41届国际机器学习大会论文集，**235**，61203–61228（2024年）

Ekaterina Filimoshina
高等经济学院 莫斯科
101000 俄罗斯

电子邮箱：filimoshinaek@gmail.com

Dmitry
Shirokov 高等经
济学院，莫斯科
101000，俄罗斯，
以及

俄罗斯科学院信息传输问题研究所，莫斯科 127051，俄罗斯，电子邮件：
dm.shirokov@gmail.com

Table 3. 符号汇总（第 1 部分）

符号	含义	首次出现
$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{p,\ q,\ r}$	（克利福德）几何代数，定义在实数 $\mathbb{R}^{p,\ q,\ r}$ 或复数 $\mathbb{C}^{p+q,\ 0,\ r}$ 向量空间	第3页
$\mathbb{F}$	实数域或复数域 在以下情形中 $\mathbb{R}^{p,\ q,\ r}$ 以及 $\mathbb{C}^{p+q,\ 0,\ r}$ 分别	第3页
$\Lambda = \Lambda_r$	格拉斯曼子代数 $\mathcal{G}_{0,\ 0,\ r}$	第3页
$e_1, \ldots, e_n$	生成元 $\mathcal{G}_{p,q,r}$	第3页
$\mathcal{G}^0$	零级子空间	第4页
$\mathcal{G}^k = \mathcal{G}^k$	固定等级子空间 $k = 1,\ \ldots\ldots,\ n$	第4页
$\mathcal{G}^{\geq k}$, $\mathcal{G}^{\leq k}$	不同等级子空间的直和 大于/小于或等于 k	公式 (2.2)
$\{\mathcal{G}^k_{p,q}\Lambda^l\}$	由以下元素张成的 $\mathcal{G}_{p,\ q,\ r}$ 子空间 形如 ab 的元素，其中 $a \in \mathcal{G}^k_{p,q}$ 以及 $b \in \Lambda^l_r$	第4页
$\widehat{U}$	$U \in \mathcal{G}$ 的分次反转	第4页
$\widetilde{U}$	$U \in \mathcal{G}$ 的反转	第4页
$\widehat{\widetilde{U}}$	$U \in \mathcal{G}$ 的克利福德共轭	第4页
$\mathcal{G}^{(0)}$, $\mathcal{G}^{(1)}$	偶子空间和奇子空间	公式 (2.3)
$\langle\rangle_{(0)}$, $\langle\rangle_{(1)}$	投影到 $\mathcal{G}^{(0)}$, $\mathcal{G}^{(1)}$	公式 (2.4)–(2.5)
$\mathcal{G}^{\overline{k}}$	由分次确定的子空间 对合和反转	公式 (2.6)
$\mathcal{G}^{\overline{kl}}$	$\mathcal{G}^k$、$k = 0,\ 1,\ \overline{2},\ 3$ 的直和	第4页
$\mathrm{H}^\times$	所有可逆元素的子集 集合 H 的	第5页
Γ	Clifford群	公式 (3.1)
$\Gamma^{\pm}$	利普希茨群	公式 (3.2)
ψ, χ	$\mathcal{G}$ 元素的范数函数	公式 (4.11)
ad	伴随表示 $\mathrm{ad}_T(U) = TUT^{-1}$	公式（3.3）
$\check{\mathrm{ad}}$	扭曲伴随表示 $\check{\mathrm{ad}}_T(U) = \widehat{T}UT^{-1}$	公式（3.4）
$\tilde{\mathrm{ad}}$	扭曲伴随表示 $\tilde{\mathrm{ad}}_T(U) = TU_0T^{-1} + \widehat{T}U_1T^{-1}$	公式（3.5）
核(ad), $\ker(\mathrm{ad})$, $\ker(\tilde{\mathrm{ad}})$	ad 的核，$\check{\mathrm{ad}}$，以及 $\tilde{\mathrm{ad}}$	第 5 页
Z	$\mathcal{G}$的中心	公式（4.3）

TABLE 4. 符号汇总（第 2 部分）

记号	含义	首次提及
Z^m, $\check{\mathrm{Z}}^m$	中心化子与扭曲的 $\mathcal{G}^m$ 的中心化子，分别为 $m = 0, \ldots, n$	公式 (4.1)–(4.2)
$\mathrm{Z}^{\overline{k}}$, $\check{\mathrm{Z}}^{\overline{k}}$	中心化子和扭 $\mathcal{G}^k$ 的中心化子，分别为 $k = 0, 1, 2, 3$	公式 (4.9)–(4.10)
$\Gamma^{(l)}$, $\Gamma^{(0)}$, $\tilde{\Gamma}^{(l)}$	保持的群 $\mathcal{G}^{(l)}$, $l = 0, 1$, 在伴随作用下, $\check{\mathrm{ad}}$, and $\tilde{\mathrm{ad}}$	公式 (5.5)–(5.7)
P, $\mathrm{P}^{\pm\Lambda}$	保持 $\mathcal{G}^{(1)}$的群 在伴随作用下, $\check{\mathrm{ad}}$, and $\tilde{\mathrm{ad}}$	公式 (5.3)–(5.4)
$\mathrm{P}^{\pm}$, P^{Λ}	保持 $\mathcal{G}^{(0)}$的群 在伴随, $\check{\mathrm{ad}}$, and $\tilde{\mathrm{ad}}$	公式 (5.3)–(5.4)
$\Gamma^{\overline{kl}}$, $\check{\Gamma}^{\overline{kl}}$	保持的群 $\mathcal{G}^{kl}$ 在伴随 $\overline{\text{and } \check{\mathrm{ad}}}$	公式 (5.18)–(5.19)
$\mathrm{A}^{\overline{01}}$, $\mathrm{B}^{\overline{12}}$, $\mathrm{A}^{\overline{23}}$, $\mathrm{B}^{\overline{03}}$	保持 $\mathcal{G}^{kl}$的群 在伴随作用下	公式 (5.8)–(5.11)
$\check{\mathrm{A}}^{\overline{12}}$, $\check{\mathrm{B}}^{\overline{01}}$, $\check{\mathrm{A}}^{\overline{03}}$, $\check{\mathrm{B}}^{\overline{23}}$	保持 $\mathcal{G}^{kl}$的群 $\overline{\check{}}$在伴随	公式 (5.12)–(5.15)
$\Gamma^{\overline{k}}$, $\check{\Gamma}^{\overline{k}}$, $\tilde{\Gamma}^{\overline{k}}$	保持的群 $\mathcal{G}^k$ 在伴随下, $\check{\mathrm{ad}}$, and $\tilde{\mathrm{ad}}$	公式 (6.1) – (6.3)
$\mathrm{Q}^{\overline{k}}$	保持 $\mathcal{G}^k$ 的群 在 ad (if $k = 0, 1, 2, 3$) 下 以及在 $\tilde{\mathrm{ad}}$ (if $k = 0, 2$) 下	公式 (6.5)–(6.11)
$\check{\mathrm{Q}}^{\overline{k}}$	保持 $\mathcal{G}^k$ 的群 在……之下 $\check{\mathrm{ad}}$（若 $k = 0,1,2,3$） 以及在……下 $\tilde{\mathrm{ad}}$（若 $k = 1,3$）	公式 (6.21)–(6.27)
$\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$	大小为 n 的矩阵代数	第 15 页
$\mathrm{UT}(n, \mathbb{F})$	上三角群 矩阵	公式 (7.6)–(7.7)
$\mathrm{SUT}(n, \mathbb{F})$	$\mathrm{UT}(n, \mathbb{F})$ 的幺幂子群	公式 (7.8)
Heis_n	高维的 海森堡群	公式（7.9）
$\mathfrak{q}^{\overline{k}}$, $\check{\mathfrak{q}}^{\overline{k}}$	李群的李代数 群 Q^k 和 $\check{\mathrm{Q}}^k$	第 17 页
$\mathfrak{gl}(1, \mathbb{F})$	一般线性李代数	第 19 页
$\mathfrak{heis}(3, \mathbb{F})$, $\mathfrak{heis}(4, \mathbb{F})$	海森堡李代数	公式 (8.8) – (8.9)
$\mathfrak{p}(1, 1)$	庞加莱李代数	公式（8.14）
$\mathfrak{su}(2)$	特殊酉李代数	公式（8.15）
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	特殊线性李代数	公式（8.15）