arXiv:2601.07194v1 [math.DG] 12 Jan 2026

极小曲面的 Lu 猜想

WEIRAN DING[1], JIANQUAN GE[2], FAGUI LI[3,*], 以及 XIZE YANG[2]

Abstract. 继 Chern 关于单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$ 中紧致极小子流形的常数量曲率离散性的猜想 M^n 之后，Z. Q. Lu 基于对已知第一间隙定理的巧妙改进，提出了一个关于第二间隙的猜想。这一改进将 Simons 关于超曲面的第一间隙定理，与 Yau、Shen、Li 和 Li 等人针对高余维子流形建立的相应定理统一起来。本文证明了任意余维下极小 2-球面的 Lu 猜想，并证明了在满足关于法向标量曲率的某些较弱不等式条件时，任意极小曲面的 Lu 猜想。

1. Introduction

设 $f\colon M^n \to \tilde{M}^{n+q}(c)$ 是一个从 n 维子流形 M 到常截面曲率为 c 的 $(n+q)$ 维实空间形式 $\tilde{M}^{n+q}(c)$ 中的等距浸入。归一化标量曲率 ρ 和法向标量曲率 $\rho^\perp$ 定义为

$$\rho = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1=i<j}^{n} R(e_i, e_j, e_j, e_i),$$

$$\rho^\perp = \frac{1}{n(n-1)} \left|R^\perp\right| = \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{1=i<j}^{n} \sum_{1=r<s}^{q} \left\langle R^\perp(e_i, e_j)\xi_r, \xi_s \right\rangle^2 \right)^{1/2},$$

其中，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是切空间的一组标准正交基，R 是切丛的曲率张量。类似地，$\{\xi_1, \cdots, \xi_q\}$ 是法空间的一组标准正交基，$R^\perp$ 是法丛的曲率张量。设 h 为第二基本形式，$H = \frac{1}{n}\operatorname{Tr} h$ 为平均曲率向量场。由 De Smet、Dillen、Verstraelen 和 Vrancken 提出的 DDVV猜想 [6],断言以下逐点不等式:

$$\rho + \rho^\perp \leq |H|^2 + c. \tag{1.1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 15A45, 15B57, 53C24, 53C42.*Key words and phrases.* Lu 猜想, Simon猜想，极小曲面。* 通讯作者。J. Q. Ge 的研究部分得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12571049）和中央高校基本科研业务费的资助。F. G. Li 的研究部分得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12271040、12501061）和北京理工大学科研启动经费（项目编号：5640011253301）的资助。

由于 (1.1) 是关于 ρ、 $\rho^{\perp}$和 $|H|^2$的逐点不等式，根据高斯方程和里奇方程，它等价于以下代数不等式 [7]:

$$\sum_{r,s=1}^{q} \|[B_r, B_s]\|^2 \leq \left(\sum_{r=1}^{q} \|B_r\|^2\right)^2,$$

其中 B_1, $\cdots$, B_q是实对称矩阵， $\|\cdot\|^2$ 表示矩阵各项平方的和， $[A, B] = AB - BA$ 表示矩阵 A 与 B的交换子。第一个非平凡情形 $n = 3$由 Choi 和 Lu [5]证明。后来， [7]得到了适用于一般 n和 q 的一个较弱版本。最后，Ge 和 Tang [12] 以及 Lu [19]分别独立证明了 DDVV猜想。关于 DDVV 型不等式的更多细节，请参阅文献 [10, 11]。基于证明 DDVV猜想时所发展的方法，Lu 推导出若干挤压定理，并提出了以下猜想:

猜想 1.1 (Lu 猜想 [19])。 设 M^n 是单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$中的一个闭浸入极小子流形。设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_q$ 是基本矩阵$A = (a_{\alpha\beta}) = (\langle S_\alpha, S_\beta\rangle)$的特征值，其中 $\{S_\alpha\}_{\alpha=1}^{q}$ 是相对于标准正交基$\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^{q}$的形算子。若 $S + \lambda_2$ 为常数，且

$$S + \lambda_2 > n,$$

那么存在一个常数 $\epsilon(n, q) > 0$ 使得

$$S + \lambda_2 > n + \epsilon(n, q).$$

定理 1.1 基于 Lu [19]的以下刚性定理：设 M^n 是单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$中的闭极小子流形。若 $0 \leq S + \lambda_2 \leq n$，则 M要么是全测地的，要么是 $\mathbb{S}^{n+q}$中的某个克利福德环面 $M_{k,n-k}$ ($1 \leq k < n$)，或者是 $\mathbb{S}^{2+q}$中的维罗内塞曲面。上述挤压定理推广了 Simons [24], 、Chern、do Carmo、Kobayashi [4], 、Yau [30, 31], 、Shen [22], 以及 Li 和 Li [18], 等人此前建立的挤压定理。最近，Leng 和 Xu [16]将 Lu 的刚性定理推广到了具有平行平均曲率的子流形。此外，定理 1.1 可视为 Peng 和 Terng [20]建立的经典间隙定理的高余维推广。事实上，Peng 和 Terng [20], 解决了 $q = 1$ 的情形，这与著名的 Chern 猜想 [4, 25, 26]有关：设 M^n 是单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的闭浸入极小超曲面，且具有常数量曲率 R_M。那么，对于每个 n， R_M 的所有可能取值构成离散集。尽管人们为此付出了巨大努力，Chern 猜想仍未得到完整证明，不过在低维情形或附加曲率假设下已有一些部分结果。Simons [24], 建立了第一间隙定理，他证明若 $0 \leq S \leq n$，则要么 $S = 0$，要么 $S = n$在M上恒成立。最近的研究表明，对于某一类全纯子流形，假设$0 < S \leq n$ 会迫使该子流形成为 Clifford 环面 [13]。Chern 猜想的高余维表述同样仍是一个未解决的问题。对于二维常曲率极小曲面

，Calabi [3] 证明了 Chern 猜想对极小2-球面的情形，Bryant [2] 则证明了其对一般曲面的情形。据我们所知，对于三维或更高维的高余维子流形，关于第二间隙的 Chern 猜想和 Lu 猜想仍未解决。过去数十年来的后续研究探讨了第二间隙现象，并取得了许多重要成果（参见 [8, 17, 20, 27, 29]）。关于这一主题的全面综述及更多参考文献，请参阅 [14, 21] 。另一个著名的刚性问题与 Lu 猜想和 Chern 猜想都密切相关，由 Simon [23]提出：

猜想 *1.2*（*Simon*猜想 [23]）。设 M 是一个极小浸入于$\mathbb{S}^N$ 中的闭曲面，且其像不包含于 $\mathbb{R}^{N+1}$ 中的任何超平面内。若对于某个 $s \in \mathbb{N}$，有 $K(s+1) \leq K \leq K(s)$，其中 K 是 M 的曲率，且 $K(s) := s^2(s+1)$，则或者 $K = K(s+1)$，或者 $K = K(s)$。因此，该子流形是 *Calabi* 的 *2*-球面之一（[3], 另见定理 *3.5*），且环境空间的维数分别为 $N = 2s+2$ 或 $N = 2s$。

对于 $\mathbb{S}^N$中的极小曲面，曲率 K 与 h 的第二基本形式的平方范数 $S = |h|^2$ 之间满足关系 $2K = 2 - S$。因此， K 的刚性等价于定理 1.2中 S 的刚性。迄今为止，Simon 猜想仅在 $s = 1$ 和 $s = 2$ 的情形下得到解决（参见 [1, 9, 15]）。对于 $s \geq 3$的情形，读者可参阅综述文章 [28]以了解更多细节。

本文利用 $s = 2$ 情形下 Simon 猜想的结果，首先肯定地回答了关于 2-球面的 Lu 猜想，甚至给出了由 Calabi的2-球面所确定的最优第二间隙。

定理 1.3。设 M^2 是一个极小浸入于 $\mathbb{S}^{2+q}$ 中的 2-球面。

（1）若 $S + \lambda_2$ 为常数，则曲率 K 为常数，且该子流形是 *Calabi*的2-球面之一。（2）若 $S + \lambda_2 > 2$，则

$$\max_{p \in M} (S + \lambda_2)(p) \geq \frac{5}{2},$$

其中等号成立当且仅当 $q = 4$ ，且该子流形是曲率为 $K = \frac{1}{6}$ 的 *Calabi*2-球面。

对于一般曲面，我们引入法向标量曲率的一些钳制条件，并建立如下间隙刚性定理。

定理 1.4。设 M^2 是浸入 $\mathbb{S}^{2+q}$ 的闭极小曲面，其万有覆盖不与一个2维球面微分同胚。那么以下两种情况必有其一：

(1) $\max_{p \in M}(S + \lambda_2)(p) \geq \frac{8}{3}$;

(2) $\max_{p \in M}(S + \lambda_2)(p) \geq 3 - \sqrt{1 - \min_{p \in M} (\rho^{\perp})^2 (p)}$ *and* $\min_{p \in M} \rho^{\perp}(p) \leq 1$.

定理 1.5。 设 M^2 是浸入 $\mathbb{S}^{2+q}$ 的闭极小曲面，其万有覆盖不与一个2维球面微分同胚。则有

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)\geq 1+\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{Area}(M)}\int_M(\rho^\perp)^2}.$$

我们还得到了以下积分公式，它们推广了 [9中的公式].

定理 1.6。 设 M^2 是浸入 $\mathbb{S}^{2+q}$中的闭极小曲面。则

$$0\leq\int_M\left[S(3S-4)-(S-2\lambda_2)^2\right]=2\int_M\mathcal{B}_1, \tag{1.2}$$

and

$$\begin{aligned}0&\leq\int_M\left[S(3S-4)(3S-5)+\frac{1}{2}(16-9S)(S-2\lambda_2)^2\right]\\&=\int_M\left[\frac{S}{2}(S-2)(9S-20)+2(\rho^\perp)^2(9S-16)\right]\\&=2\int_M\left[\mathcal{B}_2+\frac{1}{2}|\nabla S|^2-S(2-S)^2+(8-5S)(\rho^\perp)^2\right],\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中， $\mathcal{B}_1=|\nabla h|^2$ 和 $\mathcal{B}_2=|\nabla^2 h|^2$ 分别是 h的一阶和二阶协变导数的长度平方。

作为定理 1.6 的应用，我们证明以下刚性结果。

定理 1.7。 设 M^2 是浸入 $\mathbb{S}^{2+q}$中的闭极小曲面。

(1) 若 $2\leq S\leq S_0$，其中 $S_0=\frac{40-9\gamma+\sqrt{81\gamma^2+432\gamma+1600}}{36}$，且对于某个 $0\leq\gamma\leq 4$，有 $\rho^\perp\leq\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}|K|$，则 $S\equiv 2$，并且 M 是 ***Clifford*** 环面 $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2})\times\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2})$。(2) 若 $S+\lambda_2>2$ 且 $\rho^\perp\leq\frac{1}{2}\sqrt{(S+\lambda_2-2)\gamma S}$ 对某个 $0\leq\gamma\leq\frac{2}{3}$ 成立，则

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)\geq\max_{p\in M}S(p)>\frac{40+12\gamma}{18+9\gamma}\geq 2.$$

定义

$$\hat{T}_A(\tau):=\frac{3-\tau}{2}\left(\frac{27-8\tau^2}{18-9\tau^2}+\frac{\sqrt{\left(8\tau^2-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{45}{4}}}{18-9\tau^2}\right)=:\frac{3-\tau}{2}T_A(\tau),$$

and

$$\hat{T}_B(\tau):=\frac{3-\tau}{2}\left(\frac{27-8\tau^2}{18-9\tau^2}-\frac{\sqrt{\left(8\tau^2-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{45}{4}}}{18-9\tau^2}\right)=:\frac{3-\tau}{2}T_B(\tau).$$

直接计算可得，对于 $\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{4}}\leq\tau\leq 1$，$\hat{T}_A(\tau)$ 是关于 τ 单调递增的函数，而 $T_B(\tau)$ 是关于 τ 单调递减的函数。此外，我们有

$$\frac{30+2\sqrt{5}}{11}-\frac{\left(15+\sqrt{5}\right)\sqrt{9+3\sqrt{5}}}{66}=\hat{T}_A\left(\frac{\sqrt{9+3\sqrt{5}}}{4}\right)\leq\hat{T}_A(\tau)\leq\hat{T}_A(1)=\frac{20}{9},$$

and

$$2=\hat{T}_B(1)\leq\hat{T}_B(\tau)\leq\hat{T}_B\left(\frac{\sqrt{9+3\sqrt{5}}}{4}\right)=\frac{30+2\sqrt{5}}{11}-\frac{\left(15+\sqrt{5}\right)\sqrt{9+3\sqrt{5}}}{66}.$$

定理 1.8. 设 M^2 是浸入 $\mathbb{S}^{2+q}$ 中的闭极小曲面。

(1) 若 $\rho^{\perp}\geq\frac{1}{2}\sqrt{1-\tau^2}S$ 对某个 $0\leq\tau\leq 1$ 成立，则

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)\geq(3-\tau)\left(1-\frac{2\pi\chi(M)}{\mathrm{Area}(M)}\right),$$

其中，$\chi(M)$ 为欧拉示性数，而 $\mathrm{Area}(M)$ 为曲面 M 的面积。

(2) 若 $\rho^{\perp}\leq\frac{1}{2}\sqrt{1-\tau^2}S$ 且 $S+\lambda_2>\hat{T}_B(\tau)$ 对某个 $\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{4}}\leq\tau\leq 1$ 成立，则

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)\geq\hat{T}_A(\tau)=\hat{T}_B(\tau)+\sigma(\tau),$$

其中，$\sigma(\tau)=\frac{3-\tau}{18-9\tau^2}\sqrt{\left(8\tau^2-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{45}{4}}$。特别地，若 M 的法丛是平坦的（即 $\rho^{\perp}=0$），且 $S+\lambda_2>2$，则

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)>\frac{20}{9}.$$

注 1.9. 我们指出，在定理 *1.8*(2) 中，若 $\rho^{\perp}\leq\frac{1}{2}\sqrt{1-\tau^2}S$ 且 $S+\lambda_2>\hat{T}_B(\tau)$，其中 $\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{4}}<0.991\leq\tau\leq 1$，则

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)\geq\hat{T}_A(\tau)\geq\hat{T}_B(\tau)+\sigma(0.991)>\hat{T}_B(1)+0.02=2.02.$$

2. Notation and Local Formulas

设 M 是浸入单位球面 $\mathbb{S}^{2+q}$ 的二维流形。我们采用以下指标约定：

$$\begin{aligned}1\leq i,j,k,\cdots\leq 2,\\ 3\leq\alpha,\beta,\gamma,\cdots\leq 2+q,\\ 1\leq A,B,C,\cdots\leq 2+q.\end{aligned}$$

设 (e_A) 是 $T(\mathbb{S}^{2+q})$ 上的局部标准正交标架，使得限制在 M 上时，(e_i) 和 (e_α) 分别属于切丛 $T(M)$ 和法丛 $T^{\perp}(M)$。我们将 (ω_A) 和 (ω_{AB}) 分别视为与 (e_A) 相关联的度量 1-形式场和联络形式场。令

$$S_\alpha=(h^\alpha_{ij})_{2\times 2},$$

其中 $\omega_{i\alpha}=h^\alpha_{ij}\omega_j$。于是我们有 $h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}$。下文将采用爱因斯坦求和约定。$M$ 的第二基本形式定义为 $h=h^\alpha_{ij}\omega_i\omega_j e_\alpha$。平均曲率法向量场 H 定义为 $2H=h^\alpha_{ii}e_\alpha$。如果 M 的平均曲率法向量场恒为零，则称该浸入为极小浸入。现在我们来考虑极小

情形。设 $\mathcal{B}_1 = |\nabla h|^2$ 和 $\mathcal{B}_2 = |\nabla^2 h|^2$ 分别为 h的一阶和二阶协变导数的平方长度。定义列向量

$$\begin{aligned} a = (a^\alpha) &\coloneqq (h^\alpha_{11}) = (-h^\alpha_{22}) \in \mathbb{R}^q, \\ b = (b^\alpha) &\coloneqq (h^\alpha_{12}) = (h^\alpha_{21}) \in \mathbb{R}^q, \\ a_i = (a^\alpha_i) &\coloneqq (h^\alpha_{11i}) \in \mathbb{R}^q, \\ a_{ij} = (a^\alpha_{ij}) &\coloneqq (h^\alpha_{11ij}) \in \mathbb{R}^q. \end{aligned}$$

我们使用以下记号:

$$\begin{aligned} A &\coloneqq (\langle S_\alpha, S_\beta\rangle) = 2aa^T + 2bb^T, \\ S &\coloneqq \mathrm{tr}A = |h|^2. \end{aligned}$$

为方便技术处理，我们定义

$$\rho_0^\perp \coloneqq \sum_{\alpha,\beta} |[S_\alpha, S_\beta]|^2 .$$

直接计算并利用 DDVV 不等式 (1.1)，可得

$$\rho_0^\perp = (2\rho^\perp)^2 \le S^2. \tag{2.1}$$

协变导数 h^α_{ijk}、 h^α_{ijkl} 和 h^α_{ijklm} 定义如下:

$$\begin{aligned} h^\alpha_{ijk}\omega_k &= dh^\alpha_{ij} + h^\alpha_{mj}\omega_{mi} + h^\alpha_{im}\omega_{mj} + h^\beta_{ij}\omega_{\beta\alpha}, \\ h^\alpha_{ijkl}\omega_l &= dh^\alpha_{ijk} + h^\alpha_{mjk}\omega_{mi} + h^\alpha_{imk}\omega_{mj} + h^\alpha_{ijm}\omega_{mk} + h^\beta_{ijk}\omega_{\beta\alpha}, \\ h^\alpha_{ijklm}\omega_m &= dh^\alpha_{ijkl} + h^\alpha_{njkl}\omega_{ni} + h^\alpha_{inkl}\omega_{nj} + h^\alpha_{ijnl}\omega_{nk} + h^\alpha_{ijkn}\omega_{nl} + h^\beta_{ijkl}\omega_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Codazzi方程和Ricci公式为

$$\begin{aligned} h^\alpha_{ijk} - h^\alpha_{ikj} &= 0, \\ h^\alpha_{ijkl} - h^\alpha_{ijlk} &= h^\alpha_{pj}R_{pikl} + h^\alpha_{ip}R_{pjkl} + h^\beta_{ij}R^\perp_{\beta\alpha kl}, \\ h^\alpha_{ijklm} - h^\alpha_{ijkml} &= h^\alpha_{pjk}R_{pilm} + h^\alpha_{ipk}R_{pjlm} + h^\alpha_{ijp}R_{pklm} + h^\beta_{ijk}R^\perp_{\beta\alpha lm}. \end{aligned}$$

拉普拉斯算子 $\triangle h^\alpha_{ij}$ 和 $\triangle h^\alpha_{ijk}$ 定义为

$$\triangle h^\alpha_{ij} = \sum_k h^\alpha_{ijkk} \quad \text{and} \quad \triangle h^\alpha_{ijk} = \sum_l h^\alpha_{ijkll},$$

分别由此可得

$$\triangle h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{mmij} + h^\alpha_{pi}R_{pmjm} + h^\alpha_{mp}R_{pijm} + h^\delta_{mi}R^\perp_{\delta\alpha jm}, \tag{2.2}$$

and

$$\begin{aligned} \triangle h^\alpha_{ijk} = (\triangle h^\alpha_{ij})_k &+ 2h^\alpha_{pjm}R_{pikm} + 2h^\alpha_{ipm}R_{pjkm} + h^\alpha_{ijp}R_{pmkm} \\ &+ h^\alpha_{pj}R_{pikmm} + h^\alpha_{ip}R_{pjkmm} + 2h^\delta_{ijm}R^\perp_{\delta\alpha km} + h^\delta_{ij}R^\perp_{\delta\alpha kmm}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

黎曼曲率张量、法曲率张量以及法曲率张量的一阶协变导数分别为

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(2-S)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{2.4}$$

$$R^{\perp}_{\alpha\beta kl} = h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{ml} - h^{\beta}_{km}h^{\alpha}_{ml}, \tag{2.5}$$

$$R^{\perp}_{\alpha\beta 12k} = 2(b^{\beta}a^{\alpha}_{k} + a^{\alpha}h^{\beta}_{12k} - b^{\alpha}a^{\beta}_{k} - a^{\beta}h^{\alpha}_{12k}). \tag{2.6}$$

设 $a_{\alpha\beta} = \langle S_\alpha,\ S_\beta\rangle$ 且 $A = (a_{\alpha\beta})$。记 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_q$ 为基本矩阵 A 的特征值。那么

$$S = \sum_{i,j,\alpha}(h^{\alpha}_{ij})^2 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_q.$$

单位球面中极小子流形的 Simons 恒等式为

$$\frac{1}{2}\triangle S = \mathcal{B}_1 + 2S - |A|^2 - \rho^{\perp}_0. \tag{2.7}$$

3. Lu's conjecture for minimal 2-spheres

首先，我们有以下引理。

引理 3.1. 设 M^2 是浸入 $\mathbb{S}^{2+q}$ 中的极小曲面。那么我们有

(1) $|A|^2 = 4|a|^4 + 4|b|^4 + 8\langle a,b\rangle^2$;
(2) $\rho^{\perp}_0 = 16|a|^2|b|^2 - 16\langle a,b\rangle^2$;
(3) $|\nabla S|^2 = 16\left(\langle a,a_1\rangle^2 + \langle b,a_2\rangle^2 + \langle a,a_2\rangle^2 + \langle b,a_1\rangle^2 + 2\langle a,a_1\rangle\langle b,a_2\rangle - 2\langle a,a_2\rangle\langle b,a_1\rangle\right)$;
(4) $2S^2 = \rho^{\perp}_0 + 2|A|^2$.

证明。 根据定义，我们有

$$\begin{aligned}|A|^2 &= \langle 2aa^T + 2bb^T, 2aa^T + 2bb^T\rangle \\ &= 4|a|^2|a|^2 + 4|b|^2|b|^2 + 8\langle a,b\rangle^2 \\ &= 4|a|^4 + 4|b|^4 + 8\langle a,b\rangle^2\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\rho^{\perp}_0 = \sum|[S_\alpha, S_\beta]|^2 &= 8\sum(a^\alpha b^\beta - a^\beta b^\alpha)^2 \\ &= 8|a|^2|b|^2 + 8|a|^2|b|^2 - 16\langle a,b\rangle^2 \\ &= 16|a|^2|b|^2 - 16\langle a,b\rangle^2.\end{aligned}$$

由于 $S = 2|a|^2 + 2|b|^2$，我们有

$$\begin{aligned}S_1 &= 4\left(\langle a,a_1\rangle + \langle b,a_2\rangle\right), \\ S_2 &= 4\left(\langle a,a_2\rangle - \langle b,a_1\rangle\right).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}|\nabla S|^2 &= S_1^2 + S_2^2 \\ &= 16\left(\langle a, a_1\rangle^2 + \langle b, a_2\rangle^2 + \langle a, a_2\rangle^2 + \langle b, a_1\rangle^2 + 2\langle a, a_1\rangle\langle b, a_2\rangle - 2\langle a, a_2\rangle\langle b, a_1\rangle\right).\end{aligned}$$

最后，经过直接计算可得 $2S^2 = \rho_0^\perp + 2|A|^2$，从而完成证明。 □

现在我们需要计算 A 的特征值。

引理 3.2. 设 M^2 是浸入 $\mathbb{S}^{2+q}$ 中的极小曲面。 A 的特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{S}{2} + \sqrt{\left(|a|^2 - |b|^2\right)^2 + 4\langle a, b\rangle^2} = \frac{S}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - \rho_0^\perp}, \\ \lambda_2 &= \frac{S}{2} - \sqrt{\left(|a|^2 - |b|^2\right)^2 + 4\langle a, b\rangle^2} = \frac{S}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - \rho_0^\perp}, \\ \lambda_3 &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda_q &= 0.\end{aligned}$$

证明. 我们有 $S = 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$，并且

$$A = \left(\sum_{i,j} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta\right)_{q\times q} = 2aa^T + 2bb^T.$$

对于任意列向量 $x \in \mathbb{R}^q$，我们有

$$Ax = 2\left(\langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b\right).$$

Then

$$\operatorname{range}(A) \subset \operatorname{span}\{a, b\} \quad \text{and} \quad \operatorname{rank}(A) \le 2.$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}Aa &= 2\left(\langle a, a\rangle a + \langle a, b\rangle b\right) \\ &= 2\left(|a|^2 a + \langle a, b\rangle b\right),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}Ab &= 2\left(\langle a, b\rangle a + \langle b, b\rangle b\right) \\ &= 2\left(\langle a, b\rangle a + |b|^2 b\right).\end{aligned}$$

因此，我们有 $(Aa,\ Ab) = (a,\ b)\mathcal{J}$，其中

$$\mathcal{J} = 2\begin{bmatrix} |a|^2 & \langle a, b\rangle \\ \langle a, b\rangle & |b|^2 \end{bmatrix}.$$

因此， A 的非零特征值恰好是这个 2×2 对称矩阵$\mathcal{J}$的特征值。根据

$$\begin{aligned}0&=\det\left(2\begin{bmatrix}|a|^2 & \langle a,b\rangle\\ \langle a,b\rangle & |b|^2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\\&=\det\begin{bmatrix}2|a|^2-\lambda & 2\langle a,b\rangle\\ 2\langle a,b\rangle & 2|b|^2-\lambda\end{bmatrix}\\&=(2|a|^2-\lambda)(2|b|^2-\lambda)-(2\langle a,b\rangle)^2\\&=\lambda^2-2(|a|^2+|b|^2)\lambda+4(|a|^2|b|^2-\langle a,b\rangle^2)\end{aligned}$$

以及引理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}&=\frac{2(|a|^2+|b|^2)\pm\sqrt{4(|a|^2+|b|^2)^2-16(|a|^2|b|^2-\langle a,b\rangle^2)}}{2}\\&=|a|^2+|b|^2\pm\sqrt{(|a|^2-|b|^2)^2+4\langle a,b\rangle^2}\\&=\frac{S}{2}\pm\sqrt{(|a|^2-|b|^2)^2+4\langle a,b\rangle^2}\\&=\frac{S}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{S^2-\rho_0^{\perp}}.\end{aligned}$$

其余特征值均为 0，重数为 $q-\mathrm{rank}\{a,b\}$。 □

接下来，我们需要以下引理，它建立了极小2-球面中向量 a与 b 之间的关键关系。

引理3.3。 设 M^2 是单位球面 $\mathbb{S}^{2+q}$中的一个2-球面极小浸入。我们有

(1) $|a|^2=|b|^2=\frac{S}{4}$与 $\langle a,b\rangle=0$。(2) $\lambda_1=\lambda_2=\frac{S}{2}$ 且
其余特征值为0。

证明。定义

$$\phi:=(|a|^2-|b|^2-2i\langle a,b\rangle)dz^4,$$

其中 z 是球面上的复坐标。于是， ϕ 是一个微分4-形式。可以验证， ϕ 与局部标架的选取无关，因此 ϕ 在 M 上全局定义。现在我们通过验证柯西-黎曼方程来证明 ϕ 是全纯的。首先有

$$\begin{aligned}&e_1(|a|^2-|b|^2)+e_2(2\langle a,b\rangle)\\&=2\langle a,a_1\rangle-2\langle b,b_1\rangle+2\langle a,b_2\rangle+2\langle b,a_2\rangle\\&=2\langle a,a_1\rangle-2\langle b,a_2\rangle-2\langle a,a_1\rangle+2\langle b,a_2\rangle\\&=0.\end{aligned}$$

类似的论证表明，$e_2(|a|^2-|b|^2)-e_1(2\langle a,\ b\rangle)=0$。因此，$\phi$ 是全纯的。但 2-球面上的任何全纯微分形式都必为零。结论 (1) 得证。结合定理 3.2，我们得到 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{S}{2}$ 和 $\lambda_3=\cdots=\lambda_q=0$。□

注 3.4. 采用相同的方法，我们也可以得到极小2-球面中 a_1 与 a_2之间的关系(参见 [9]).

此外，还需要以下定理。

定理 3.5 (Calabi [3]). 设 M^2 是一个具有常曲率 K黎曼度量的2-球面，且设 $X: M\to r\mathbb{S}^N\subset\mathbb{R}^{N+1}$ $(N\geq 2)$ 是 M 到半径为 r的球面上的等距极小浸入，且其像不包含在 $\mathbb{R}^{N+1}$ 的任何超平面内。那么

(1) 维数 N 为偶数，即 $N=2s$; (2) K 的值由下式唯一确定

$$K=\frac{2}{s(s+1)r^2}=:K(s,r);$$

(3) 浸入 X 在 $r\mathbb{S}^N$的刚性旋转下唯一确定，并且向量 X 的 N个分量构成 M上 s 阶球谐函数的一组适当归一化基。

浸入 $\Psi_{2,s}: S^2(K(s))\to\mathbb{S}^{2s}$ 称为 Calabi 二维球面，其中 $K(s)=K(s,1)$，$S^2(K(s))$ 是曲率为 $K(s)$ 的球面，且 $s=1,2,\cdots$。正如我们之前提到的，Simon 猜想目前仅在 $s=1$ 和 $s=2$这两种情形下得到证明。接下来，我们先陈述 Simon 猜想的第二间隙定理（参见 [9, 15]）：

定理 3.6 ([9, 15]). *Simon* 猜想对 $s=2$成立，即若 $\frac{4}{3}\leq S\leq\frac{5}{3}$，则要么$S=\frac{4}{3}$，要么 $S=\frac{5}{3}$。

现在我们可以给出定理 1.3 的证明。

定理 ***1.3*** 的证明. 由于 M 是一个闭极小二维球面，利用定理 3.3 可得 $\lambda_2=\frac{S}{2}$。由于 $S+\lambda_2$ 是常数，因此 S 是常数，这意味着 K 是常数。因此，定理 1.3 (1) 由定理 3.5 得出。

对于定理 1.3 (2)，即在 $S+\lambda_2>2$ 的情形下，我们证明如下。由定理 3.3，$\lambda_2=\frac{1}{2}S$，从而 $S+\lambda_2=\frac{3}{2}S$。令

$$S(s):=2-2K(s)=\frac{2(s-1)(s+2)}{s(s+1)},$$

如果定理 1.2 成立，并且对于某个 $s\in\mathbb{N}$，$\frac{3}{2}S(s)\leq S+\lambda_2=\frac{3}{2}S\leq\frac{3}{2}S\,s+1$，那么 $S=S(s)$ 或 $S=S(s+1)$。特别地，我们采用反证法，并假设 $\max_{p\in M}(S+\lambda_2)<\frac{5}{2}$。于是得到 $S+\lambda_2<\frac{5}{2}$，这意味着

$$2<S+\lambda_2=\frac{3}{2}S<\frac{5}{2}.$$

由此可知 $\frac{4}{3} < S < \frac{5}{3}$。然而，根据定理 3.6，这样的曲面不存在。因此我们得到 $\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p) \geq \frac{5}{2}$，当且仅当 $q=4$ 时等号成立；根据定理 3.5，此时子流形是曲率为 $K=\frac{1}{6}$ 的 Calabi 二维球面。□

4. Lu's conjecture for minimal surfaces

接下来我们考虑更一般的情形。为方便起见，定义

$$\mathfrak{u} := S+\lambda_2 = \frac{3}{2}S - \sqrt{\left(|a|^2-|b|^2\right)^2 + 4\langle a,b\rangle^2} = \frac{3}{2}S - \frac{1}{2}\sqrt{S^2-\rho_0^\perp} \leq \frac{3}{2}S. \tag{4.1}$$

由于 $0 \leq \rho_0^\perp \leq S^2$ 已由 DDVV 不等式在 (2.1) 中证明，我们定义函数 $t: M \to [0,1]$使得

$$\sqrt{S^2-\rho_0^\perp} = tS. \tag{4.2}$$

由 (4.1) 可得

$$\mathfrak{u} = S+\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(3S - \sqrt{S^2-\rho_0^\perp}\right) = \frac{3-t}{2}S \leq \frac{3}{2}S.$$

Thus

$$3S - 2\mathfrak{u} = \sqrt{S^2-\rho_0^\perp}. \tag{4.3}$$

由 (4.3) 可知

$$S = \frac{3}{4}\mathfrak{u} \pm \frac{\sqrt{\mathfrak{u}^2-2\rho_0^\perp}}{4}.$$

首先我们给出定理 1.4 和定理 1.5 的证明。

定理 *1.4* 的证明. 由于 M 的万有覆盖并非微分同胚于 2-球面，因此可得 $\max_{p\in M} S(p) \geq 2$。若 $S = \frac{3}{4}\mathfrak{u} - \frac{\sqrt{\mathfrak{u}^2-2\rho_0^\perp}}{4}$，则可得 $\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p) = \max_{p\in M}\mathfrak{u}(p) \geq \frac{8}{3}$。另一方面，若 $S = \frac{3}{4}\mathfrak{u} + \frac{\sqrt{\mathfrak{u}^2-2\rho_0^\perp}}{4}$且存在 $p\in M$ 使得$S(p)\geq 2$，则可得

$$(\mathfrak{u}(p)-3)^2 + \frac{\rho_0^\perp(p)}{4} - 1 \leq 0.$$

因此可得 $\rho^\perp(p) \leq 1$ 且

$$3 - \sqrt{1-\left(\rho^\perp\right)^2(p)} \leq (S+\lambda_2)(p) \leq 3 + \sqrt{1-\left(\rho^\perp\right)^2(p)},$$

即,

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p) \geq 3 - \sqrt{1-\min_{p\in M}\left(\rho^\perp\right)^2(p)},$$

至此，证明完成。□

定理 ***1.5*** 的证明。 由定理 3.2 可得

$$\begin{aligned} S+\lambda_2 &= S+\frac{S}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{S^2-\rho_0^{\perp}} \\ &= S+\frac{\rho_0^{\perp}}{2\left(S+\sqrt{S^2-\rho_0^{\perp}}\right)} \\ &\geq S+\frac{\rho_0^{\perp}}{4S}. \end{aligned}$$

首先，我们考虑 M 是可定向的情形。由高斯-博内公式和高斯方程 $2K=2-S$，可得

$$\begin{aligned} \int_M (S+\lambda_2) &\geq \int_M S+\int_M \frac{\rho_0^{\perp}}{4S} \\ &= 2\,\mathrm{Area}(M)+8\pi(g-1)+\int_M \frac{\rho_0^{\perp}}{4S} \\ &\geq 2\,\mathrm{Area}(M)+8\pi(g-1)+\frac{1}{4\max_{p\in M} S(p)}\int_M \rho_0^{\perp}, \end{aligned}$$

其中 g 表示 M的亏格。由于 M 与 2-球面不微分同胚，可得$g\geq 1$。因此

$$\begin{aligned} \max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p) &\geq 2+\frac{1}{4\max_{p\in M} S(p)\,\mathrm{Area}(M)}\int_M \rho_0^{\perp}+\frac{8\pi(g-1)}{\mathrm{Area}(M)} \\ &\geq 2+\frac{1}{4\max_{p\in M} S(p)\,\mathrm{Area}(M)}\int_M \rho_0^{\perp} \\ &\geq 2+\frac{1}{4\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)\,\mathrm{Area}(M)}\int_M \rho_0^{\perp}, \end{aligned}$$

由此可得

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)\geq 1+\sqrt{1+\frac{1}{4\,\mathrm{Area}(M)}\int_M \rho_0^{\perp}}=1+\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{Area}(M)}\int_M (\rho^{\perp})^2}.$$

一般而言，任意闭非定向曲面都微分同胚于 $\mathfrak{g}$ 个射影平面的连通和，其中 $\mathfrak{g}\geq 1$，且欧拉示性数 $\chi(M)=2-\mathfrak{g}$。若 $\mathfrak{g}=1$，则 M微分同胚于 $\mathbb{R}P^2$，此时 M 的万有覆盖微分同胚于一个 2-球面。因此，只需假设 $\mathfrak{g}\geq 2$，由此可得 $\chi(M)\leq 0$。于是我们有

$$\begin{aligned} \int_M (S+\lambda_2) &\geq \int_M \left(S+\frac{\rho_0^{\perp}}{4S}\right) \\ &\geq 2\,\mathrm{Area}(M)+\frac{1}{4\max_{p\in M} S(p)}\int_M \rho_0^{\perp}-4\pi\chi(M) \\ &\geq 2\,\mathrm{Area}(M)+\frac{1}{4\max_{p\in M} S(p)}\int_M \rho_0^{\perp}. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)\geq 2+\frac{1}{4\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)\,\mathrm{Area}(M)}\int_M \rho_0^{\perp},$$

这意味着其下界与可定向情形相同。 □

为了证明定理 1.6，我们需要以下引理。

引理 4.1 ([9]). 设 M^2 是浸入 $\mathbb{S}^{2+q}$ 的极小曲面。那么

$$\begin{aligned}(h^\alpha_{ijk}\triangle h^\alpha_{ij})_k &= \frac{1}{2}(4-3S)\mathcal{B}_1+(2-S)^2S+\frac{1}{2}(5S-8)(-S^2+|A|^2+\rho_0^{\perp})\\ &\quad-\frac{1}{4}|\nabla S|^2+32\langle a,a_2\rangle\langle b,a_1\rangle-32\langle a,a_1\rangle\langle b,a_2\rangle\\ &=\frac{1}{2}(2-S)S^2+(2-S)(S^2-|A|^2-\rho_0^{\perp})+\triangle S-\frac{3}{8}\triangle S^2\\ &\quad+8(\langle a,a_2\rangle+\langle b,a_1\rangle)^2+8(\langle a,a_1\rangle-\langle b,a_2\rangle)^2.\end{aligned}$$

证明。 参见 [9] 中定理 1 的证明里的 (2.17)。 □

引理 4.2。 设 M^2 是浸入 $\mathbb{S}^{2+q}$ 的极小曲面。那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle\mathcal{B}_1 &= h^\alpha_{ijk}\triangle h^\alpha_{ijk}+\mathcal{B}_2\\ &=\frac{1}{2}(14-9S)\mathcal{B}_1-\frac{3}{4}|\nabla S|^2+72\langle a,a_2\rangle\langle b,a_1\rangle-72\langle a,a_1\rangle\langle b,a_2\rangle\\ &\quad+4\left(\langle a,a_1\rangle^2+\langle a,a_2\rangle^2+\langle b,a_1\rangle^2+\langle b,a_2\rangle^2\right)+\mathcal{B}_2\\ &=\frac{1}{2}(14-9S)\mathcal{B}_1-\frac{7}{4}|\nabla S|^2+\mathcal{B}_2+20\left(\langle a,a_1\rangle-\langle b,a_2\rangle\right)^2+20\left(\langle a,a_2\rangle+\langle b,a_1\rangle\right)^2.\end{aligned}\tag{4.4}$$

证明。 由 (2.3)，我们得到

$$\begin{aligned}h^\alpha_{ijk}\triangle h^\alpha_{ijk} &= (h^\alpha_{ijk}\triangle h^\alpha_{ij})_k-\sum(\triangle h^\alpha_{ij})^2+2h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{pj}R_{pikmm}+h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{ijp}R_{pmkm}\\ &\quad+4h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{pjm}R_{pikm}+2h^\alpha_{ijk}h^\beta_{ijm}R^{\perp}_{\beta\alpha km}+h^\alpha_{ijk}h^\beta_{ij}R^{\perp}_{\beta\alpha kmm}.\end{aligned}$$

由 (2.4)，可得

$$\begin{aligned}2h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{pj}R_{pikmm} &= -h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{pj}(\delta_{pk}\delta_{im}-\delta_{pm}\delta_{ik})S_m\\ &=-h^\alpha_{ijm}h^\alpha_{ij}S_m\\ &=-\frac{1}{2}|\nabla S|^2,\end{aligned}$$

and

$$4h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{pjm}R_{pikm}+h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{ijp}R_{pmkm}=5\left(1-\frac{S}{2}\right)\mathcal{B}_1.$$

由 (2.5) 可得

$$\begin{aligned}2h^\alpha_{ijk}h^\beta_{ijm}R^{\perp}_{\beta\alpha km} &= 16(a^\alpha_1a^\beta_2-a^\alpha_2a^\beta_1)(a^\beta b^\alpha-a^\alpha b^\beta)\\ &=32\left(\langle a,a_2\rangle\langle b,a_1\rangle-\langle a,a_1\rangle\langle b,a_2\rangle\right).\end{aligned}$$

由 (2.6) 可得

$$\begin{aligned}
h^\alpha_{ijk}h^\beta_{ij}R^\perp_{\beta\alpha kmm} &= h^\alpha_{ij1}h^\beta_{ij}R^\perp_{\beta\alpha 122} - h^\alpha_{ij2}h^\beta_{ij}R^\perp_{\beta\alpha 121}\\
&= 4(a^\alpha_1a^\beta + a^\alpha_2b^\beta)(a^\beta_2b^\alpha - a^\beta a^\alpha_1 - a^\alpha_2b^\delta + a^\alpha a^\beta_1)\\
&\quad - 4(a^\alpha_2a^\beta - a^\alpha_1b^\beta)(a^\beta_1b^\alpha + a^\beta a^\alpha_2 - a^\alpha_1b^\beta - a^\alpha a^\beta_2)\\
&= -\frac{1}{2}S\mathcal{B}_1 + 8\langle a,a_2\rangle\langle b,a_1\rangle - 8\langle a,a_1\rangle\langle b,a_2\rangle\\
&\quad + 4\left(\langle a,a_1\rangle^2 + \langle a,a_2\rangle^2 + \langle b,a_1\rangle^2 + \langle b,a_2\rangle^2\right).
\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}
(h^\alpha_{ijk}\triangle h^\alpha_{ij})_k - \sum(\triangle h^\alpha_{ij})^2 &= h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{pik}R_{pljl} + h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{lpk}R_{pijl} + h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{pi}R_{pljlk}\\
&\quad + h^\alpha_{ijk}h^\alpha_{lp}R_{pijlk} + h^\alpha_{ijk}h^\delta_{lik}R^\perp_{\delta\alpha jl} + h^\alpha_{ijk}h^\delta_{li}R^\perp_{\delta\alpha jlk}\\
&= (2-S)\mathcal{B}_1 + 16\langle a,a_2\rangle\langle b,a_1\rangle - 16\langle a,a_1\rangle\langle b,a_2\rangle - \frac{1}{2}|\nabla S|^2\\
&\quad - \frac{1}{2}S\mathcal{B}_1 + \frac{1}{4}|\nabla S|^2 + 16\langle a,a_2\rangle\langle b,a_1\rangle - 16\langle a,a_1\rangle\langle b,a_2\rangle\\
&= (2-S)\mathcal{B}_1 - \frac{1}{4}|\nabla S|^2 - \frac{1}{2}S\mathcal{B}_1 + 32\langle a,a_2\rangle\langle b,a_1\rangle - 32\langle a,a_1\rangle\langle b,a_2\rangle.
\end{aligned}$$

结合上述计算，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\triangle\mathcal{B}_1 &= h^\alpha_{ijk}\triangle h^\alpha_{ijk} + \mathcal{B}_2\\
&= \frac{1}{2}(14-9S)\mathcal{B}_1 - \frac{3}{4}|\nabla S|^2 + 72\langle a,a_2\rangle\langle b,a_1\rangle - 72\langle a,a_1\rangle\langle b,a_2\rangle\\
&\quad + 4\left(\langle a,a_1\rangle^2 + \langle a,a_2\rangle^2 + \langle b,a_1\rangle^2 + \langle b,a_2\rangle^2\right) + \mathcal{B}_2.
\end{aligned}$$

最后，由定理 3.1 可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\triangle\mathcal{B}_1 &= \frac{1}{2}(14-9S)\mathcal{B}_1 - \frac{3}{4}|\nabla S|^2 + \mathcal{B}_2 + 4\left(\langle a,a_1\rangle^2 + \langle b,a_2\rangle^2 + \langle a,a_2\rangle^2 + \langle b,a_1\rangle^2\right)\\
&\quad + 72\left(\langle a,a_2\rangle\langle b,a_1\rangle - \langle a,a_1\rangle\langle b,a_2\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}(14-9S)\mathcal{B}_1 - \frac{7}{4}|\nabla S|^2 + \mathcal{B}_2 + 20\left(\langle a,a_1\rangle - \langle b,a_2\rangle\right)^2 + 20\left(\langle a,a_2\rangle + \langle b,a_1\rangle\right)^2.
\end{aligned}$$

这就证明了该引理。 □

引理 4.3。 设 M^2 是浸入 $\mathbb{S}^{2+q}$ 中的极小曲面，则

$$\mathcal{B}_2 = S(2-S)^2 - \frac{8-5S}{4}\rho_0^\perp + \mathcal{C}_1,$$

其中 $\mathcal{C}_1 = 2\left(|a_{11}-a_{22}|^2 + |a_{12}+a_{21}|^2\right)$。

证明。 根据定义，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &= 4\left(|a_{11}|^2+|a_{22}|^2+|a_{12}|^2+|a_{21}|^2\right)\\ &= 2\left(|a_{11}+a_{22}|^2+|a_{12}-a_{21}|^2\right)+2\left(|a_{11}-a_{22}|^2+|a_{12}+a_{21}|^2\right)\\ &= 2\left(|\triangle a|^2+|\triangle b|^2\right)+2\left(|a_{11}-a_{22}|^2+|a_{12}+a_{21}|^2\right)\\ &= 2\left(|\triangle a|^2+|\triangle b|^2\right)+\mathcal{C}_1,\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{C}_1 = 2\left(|a_{11}-a_{22}|^2+|a_{12}+a_{21}|^2\right)$。这里，由 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}\triangle a &= a(2-S)+2b\langle a,b\rangle-2a|b|^2,\\ \triangle b &= b(2-S)+2a\langle a,b\rangle-2b|a|^2.\end{aligned}$$

根据引理 3.1，有

$$\begin{aligned}|\triangle a|^2 &= (2-S)^2|a|^2+\frac{1}{4}|b|^2\rho_0^\perp-\frac{1}{4}(2-S)\rho_0^\perp,\\ |\triangle b|^2 &= (2-S)^2|b|^2+\frac{1}{4}|a|^2\rho_0^\perp-\frac{1}{4}(2-S)\rho_0^\perp.\end{aligned}$$

因此,

$$|\triangle a|^2+|\triangle b|^2 = \frac{1}{2}S(2-S)^2-\frac{1}{8}(8-5S)\rho_0^\perp.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &= 2\left(|\triangle a|^2+|\triangle b|^2\right)+\mathcal{C}_1\\ &= S(2-S)^2-\frac{8-5S}{4}\rho_0^\perp+\mathcal{C}_1,\end{aligned}\tag{4.5}$$

这就证明了该引理。 □

定理 ***1.6*** 的证明。 由 (4.1)，我们得到

$$(S-2\lambda_2)^2 = S^2-\rho_0^\perp.$$

利用 Simons 恒等式 (2.7) 和引理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle S &= \mathcal{B}_1+2S-|A|^2-\rho_0^\perp\\ &= \mathcal{B}_1+2S-S^2-\frac{1}{2}\rho_0^\perp\\ &= \mathcal{B}_1+2S-\frac{3}{2}S^2+2\left(\frac{3}{2}S-\mathfrak{u}\right)^2\\ &= \mathcal{B}_1-\frac{1}{2}S(3S-4)+\frac{1}{2}(S-2\lambda_2)^2.\end{aligned}\tag{4.6}$$

在等式两边对 M 进行积分并结合 $\mathcal{B}_1\geq 0$，我们证明了（1.2）。为证明（1.3），利用 Simons 恒等式（2.7），通过分部积分以及 M 的紧性，我们

得到

$$\int_M -\frac{1}{2}|\nabla S|^2 = \int_M \frac{1}{2}S\triangle S = \int_M \left(S\mathcal{B}_1 + (2-S)S^2 - \frac{S}{2}\rho_0^\perp\right).$$

于是，结合 (4.6)，可得

$$\begin{aligned}\int_M \frac{1}{2}(14-9S)\mathcal{B}_1 &= \int_M \left(7\mathcal{B}_1 - \frac{9}{2}S\mathcal{B}_1\right)\\ &= \int_M \left(7S^2 - 14S + \frac{7}{2}\rho_0^\perp + \frac{9}{4}|\nabla S|^2 + \frac{9}{2}(2-S)S^2 - \frac{9}{4}S\rho_0^\perp\right)\\ &= \int_M \left(\frac{9}{4}|\nabla S|^2 + 16S^2 - \frac{9}{2}S^3 - 14S + \frac{1}{4}(14-9S)\rho_0^\perp\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

对定理 4.1 两边在 M 上积分，得到

$$\begin{aligned}\int_M (2-S)\left(-\frac{3}{2}S^2 + |A|^2 + \rho_0^\perp\right) &= \int_M \left[8\left(\langle a, a_1\rangle - \langle b, a_2\rangle\right)^2 + 8\left(\langle a, a_2\rangle + \langle b, a_1\rangle\right)^2\right]\\ &= \int_M (2-S)\left(-\frac{3}{2}S^2 + \frac{2S^2-\rho^\perp}{2} + \rho_0^\perp\right)\\ &= \int_M (2-S)\left(-\frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{2}\rho_0^\perp\right).\end{aligned} \tag{4.8}$$

因此，结合定理 4.2、定理 4.3 以及 (4.7) 和 (4.8)，可得

$$\begin{aligned}0 &= \int_M \frac{1}{2}\triangle\mathcal{B}_1\\ &= \int_M \left[\frac{1}{2}(14-9S)\mathcal{B}_1 - \frac{7}{4}|\nabla S|^2 + \mathcal{B}_2 + \frac{5}{2}(2-S)\left(-\frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{2}\rho_0^\perp\right)\right]\\ &= \int_M \left[\frac{1}{2}|\nabla S|^2 + \frac{S}{2}(10-7S)(S-2) + \frac{1}{2}(3-2S)\rho_0^\perp + \mathcal{C}_1 + \frac{5}{2}(2-S)\left(\frac{1}{2}\rho_0^\perp - \frac{1}{2}S^2\right)\right]\\ &= \int_M \left[\frac{1}{2}|\nabla S|^2 + \frac{S}{4}(S-2)(20-9S) + \frac{1}{4}\rho_0^\perp(16-9S) + \mathcal{C}_1\right]\\ &= \int_M \left[\frac{1}{2}|\nabla S|^2 - \frac{S}{2}(3S-4)(3S-5) - (16-9S)\left(\frac{3}{2}S - \mathfrak{u}\right)^2 + \mathcal{C}_1\right].\end{aligned} \tag{4.9}$$

因此，结合定理 4.3、 $\mathcal{C}_1 \geq 0$ 和（4.9），我们得到

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_M \left[2\mathcal{C}_1 + |\nabla S|^2\right]\\ &= \int_M \left[S(3S-4)(3S-5) + \frac{1}{2}(16-9S)(S-2\lambda_2)^2\right]\\ &= \int_M \left[\frac{S}{2}(S-2)(9S-20) + 2(\rho^\perp)^2(9S-16)\right]\\ &= 2\int_M \left[\mathcal{B}_2 + \frac{1}{2}|\nabla S|^2 - S(2-S)^2 + (8-5S)(\rho^\perp)^2\right],\end{aligned} \tag{4.10}$$

这就证明了（1.3）。 □

现在我们可以给出定理 1.7 和定理 1.8 的证明。

***P*定理 *1.7* 的证明。** 首先，利用高斯方程 $2K = 2 - S$，我们得到

$$\rho_0^{\perp} \leq -\gamma K = -\frac{1}{2}\gamma(2-S) = \frac{\gamma}{2}(S-2).$$

然后，由定理 1.6 可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_M \left[\frac{1}{4}S(S-2)(9S-20) + \frac{1}{4}\rho_0^{\perp}(9S-16)\right] \\ &\leq \int_M \frac{S-2}{4}\left[9S^2 - 20S + \frac{\gamma}{2}(9S-16)\right] \\ &= \int_M \frac{S-2}{4}\left[S\left(9S - 20 + \frac{9}{2}\gamma\right) - 8\gamma\right] \\ &= \int_M \frac{S-2}{4}\left(S - S_0\right)\left(S - S_0'\right), \end{aligned}$$

其中 $S_0 = \frac{40-9\gamma+\sqrt{81\gamma^2+432\gamma+1600}}{36}$ 且 $S_0' = \frac{40-9\gamma-\sqrt{81\gamma^2+432\gamma+1600}}{36} \leq 0$，当 $0 \leq \gamma \leq 4$ 时成立。因此，由 $2 \leq S \leq S_0$ 可得 $S \equiv 2$ 或 $S \equiv S_0$。根据 Bryant 的分类 [2], ，球面中不存在满足 $S \equiv S_0 > 2$ 的极小曲面。因此， $S \equiv 2$ 且 M 是 Clifford 环面 $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1/2}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\sqrt{1/2}\right)$。为证明 (2)，只需假设 $\mathfrak{u} = S + \lambda_2 \leq \frac{20}{9}$，由此可得 $20 - 9S \geq 0$。由 $\rho^{\perp} \leq \frac{1}{2}\sqrt{(S+\lambda_2-2)\gamma S}$ 和 (2.1) 可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_M \left[\frac{S}{2}(S-2)(9S-20) + \frac{1}{2}\rho_0^{\perp}(9S-16)\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_M \left[S(\mathfrak{u}-2)(9S-20) + \rho_0^{\perp}(9S-16) + \frac{S(20-9S)\rho_0^{\perp}}{2S+2\sqrt{S^2-\rho_0^{\perp}}}\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\int_M \left[S(\mathfrak{u}-2)(9S-20) + \rho_0^{\perp}(9S-16) + \frac{20-9S}{2}\rho_0^{\perp}\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_M \left[S(\mathfrak{u}-2)(9S-20) + \frac{1}{2}\rho_0^{\perp}(9S-12)\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\int_M \left[S(\mathfrak{u}-2)\left(\frac{1}{2}(18+9\gamma)S - (20+6\gamma)\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

假设 $S \leq \frac{40+12\gamma}{18+9\gamma}$ 对~~于某个~~ $0 \leq \gamma \leq \frac{2}{3}$ 成立，~~由~~ (4.11) 和假设 $\mathfrak{u} > 2$ 可得，对于某个 $0 \leq \gamma \leq \frac{2}{3}$，~~有~~ $S \equiv \frac{40+12\gamma}{18+9\gamma} \geq 2$。若 $0 \leq \gamma < \frac{2}{3}$，则 $S \equiv \frac{40+12\gamma}{18+9\gamma} > 2$。同理，根据 Bryant [2], 不存在满足 $S \equiv \frac{40+12\gamma}{18+9\gamma} > 2$ 的球面中的~~极小~~曲面。因此，我们得到 $\gamma = \frac{2}{3}$，$S \equiv 2$ 且 M 是 Clifford 环面 $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1/2}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\sqrt{1/2}\right)$。于是我们有 $\lambda_2 = 0$ 和 $S + \lambda_2 \equiv 2$,

这与 $S+\lambda_2>2$矛盾。因此，我们得到

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)\geq\max_{p\in M}S(p)>\frac{40+12\gamma}{18+9\gamma}\geq 2,$$

由此完成证明。 □

定理 ***1.8*** 的证明。若 $\rho^{\perp}\geq\frac{1}{2}\sqrt{1-\tau^2}S$ 对某个 $0\leq\tau\leq 1$ 成立，则可得（4.2）中定义的函数 t 满足

$$0\leq t\leq\tau\leq 1.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p)&\geq\frac{1}{\operatorname{Area}(M)}\int_M(S+\lambda_2)\\&=\frac{1}{\operatorname{Area}(M)}\int_M\frac{1}{2}(3-t)S\\&\geq\frac{1}{\operatorname{Area}(M)}\int_M\frac{1}{2}(3-\tau)S\\&=\frac{3-\tau}{2\operatorname{Area}(M)}\left(2\operatorname{Area}(M)-4\pi\chi(M)\right)\\&=(3-\tau)\left(1-\frac{2\pi\chi(M)}{\operatorname{Area}(M)}\right).\end{aligned}$$

另一方面，若 $\rho^{\perp}\leq\frac{1}{2}\sqrt{1-\tau^2}S$ 对某个 $\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{4}}\leq\tau\leq 1$ 成立，则可得 $\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{4}}\leq\tau\leq t\leq 1$。由定理 1.6 可知

$$\begin{aligned}0&\leq\int_M\left[S(3S-4)(3S-5)+\frac{1}{2}(16-9S)(S-2\lambda_2)^2\right]\\&=\int_M\frac{S}{2}\left(18-9t^2\right)\left[\left(S-\frac{27-8t^2}{18-9t^2}\right)^2+\frac{\frac{45}{4}-\left(8t^2-\frac{9}{2}\right)^2}{\left(18-9t^2\right)^2}\right]\\&=\int_M\frac{S}{2}\left(18-9t^2\right)(S-T_B(t))(S-T_A(t))\\&=\int_M\frac{S}{2}\left(18-9t^2\right)\frac{4}{(3-t)^2}\left(\mathfrak{u}-\frac{3-t}{2}T_B(t)\right)\left(\mathfrak{u}-\frac{3-t}{2}T_A(t)\right)\\&=\int_M\frac{4S}{2(3-t)^2}\left(18-9t^2\right)\left(\mathfrak{u}-\hat{T}_B(t)\right)\left(\mathfrak{u}-\hat{T}_A(t)\right).\end{aligned}\tag{4.12}$$

因此，不可能满足

$$\hat{T}_B(t)<\mathfrak{u}=S+\lambda_2<\hat{T}_A(t).$$

由于当 $\tau\leq t\leq 1$ 时， $T_B(t)$ 单调递减，而 $T_A(t)$ 单调递增，因此由假设 $S+\lambda_2>T_B(\tau)$ 和 (4.12) 可知，存在 $p_0\in M$ 使得

$(S+\lambda_2)(p_0) \geq T_A(\tau)$，即，

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p) \geq \hat{T}_A(\tau) = \hat{T}_B(\tau) + \sigma(\tau),$$

其中

$$\sigma(\tau) = \hat{T}_A(\tau) - \hat{T}_B(\tau) = \frac{(3-\tau)\sqrt{\left(8\tau^2 - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}}}{18 - 9\tau^2}$$

是关于 $\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{4}} \leq \tau \leq 1$ 的单调递增函数。特别地，若 M^2 是具有平坦法丛的极小曲面，则有 $\rho^\perp = \rho_0^\perp = 0$。然后，利用定理 3.2，我们得到

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - \rho_0^\perp} = 0.$$

因此，我们可以取 $\tau = 1$，这意味着 $T_B(\tau) = T_B(1) = 2$。若 $S + \lambda_2 > 2$，则可得

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p) \geq \hat{T}_A(1) = \frac{20}{9}.$$

假设 $\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p) = \max_{p\in M} S(p) \leq \frac{20}{9}$，则 $S + \lambda_2 = S \leq \frac{20}{9}$。由于 $T_B(1) = 2 < S \leq \frac{20}{9} = T_A(1)$，根据 (4.12) 可得 $S \equiv \frac{20}{9}$。然而，根据 [2]，中的分类，不存在满足 $S \equiv \frac{20}{9}$ 的球面中的极小曲面。因此，

$$\max_{p\in M}(S+\lambda_2)(p) = \max_{p\in M} S(p) > \frac{20}{9},$$

至此，证明完成。 □

致谢。 作者衷心感谢加州大学欧文分校的陆志勤教授一直以来给予的鼓励与支持。

References

[1] K. Benko、M. Kothe、K. D. Semmler 和 U. Simon，拉普拉斯算子的特征值与曲率，Colloq. Math.，1979，42(1)：19–31。[2] R. Bryant， 中的常曲率极小曲面，Trans. Amer. Math. Soc.，1985，290(1)：259–271。 $\mathbb{S}^n$ E. Calabi，欧氏球面中的曲面极小浸入，J. Differential Geom.，1967，1(1-2)：111–125。[3] S. S. Chern、M. do Carmo 和 S. Kobayashi，具有常长度第二基本形式的球面极小子流形，载于：Functional Analysis and Related Fields：纪念 Marshall Stone 教授会议论文集，1968 年 5 月于芝加哥大学举行。柏林：Springer，1970，59–75。[4] T. Choi 和 Z. Q. Lu，关于 DDVV 猜想及校准几何中的共质量 I，Math. Z.，2008，260(2)：409–429。[5] P. J. De Smet、F. Dillen、L. Verstraelen 和 L. Vrancken，子流形理论中的一个逐点不等式，Arch. Math. (Brno)，1999，35(2)：115–128。[6] F. Dillen、J. Fastenakels 和 J. Veken，关于涉及法向标量曲率的不等式的评注，arXiv 预印本，2006，arXiv:math/0610721。[7] Q. Ding 和 Y. L. Xin，关于球面中极小超曲面刚性的 Chern问题，Adv. Math.，2011，227(1)：131–145。

[9] W. R. Ding、J. Q. Ge 和 F. G. Li，球面中极小曲面的钳制刚性，中国科学：数学，2025，68(9)：2189–2206。[10] J. Q. Ge、F. G. Li、Z. Z. Tang 和 Y. Zhou，DDVV 型不等式综述，数学进展（中国），2024，53(3)：449–467。[11] J. Q. Ge、F. G. Li 和 Y. Zhou，DDVV 和 BW 不等式的若干推广，Trans. Amer. Math. Soc.，2021，374(8)：5331–5348。[12] J. Q. Ge 和 Z. Z. Tang，DDVV猜想及其等号情形的一个证明，太平洋数学杂志，2008，237(1)：87–95。[13] J. Q. Ge、Y. Tao 和 Y. Zhou，一类全纯子流形上的法向标量曲率不等式，待刊于 Math. Z.，arXiv:2410.17761。[14] J. R. Gu、H. W. Xu、Z. Y. Xu 等，子流形几何与拓扑中的刚性问题综述，载于：第六届华人数学家大会论文集。数学高级讲座，第 37 卷。北京—波士顿：高等教育出版社—国际出版社，2016，79–99。[15] M. Kozlowski 和 U. Simon，二维流形到球面的极小浸入，Math. Z.，1984，186(3)：377–382。[16] Y. Leng 和 H. W. Xu，具有平行平均曲率子流形的广义 Lu 刚性定理，数学手稿，2018，155(1)：47–60。[17] L. Lei、H. W. Xu 和 Z. Y. Xu，关于球面中具有常平均曲率超曲面的广义 Chern 猜想，中国科学：数学，2021，64(7)：1493–1504。[18] A. M. Li 和 J. M. Li，球面中极小子流形的内蕴刚性定理，巴塞尔数学档案，1992，58(6)：582–594。[19] Z. Q. Lu，法向标量曲率猜想及其应用，泛函分析杂志，2011，261(5)：1284–1308。[20] C. K. Peng 和 C. L. Terng，球面中极小超曲面的数量曲率，数学年刊，1983，266(1)：105–113。[21] M. Scherfner、S. Weiss 和 S. T. Yau，球面中等距超曲面的 Chern 猜想综述，载于：几何分析进展，数学高级讲座，第 21 卷。北京—波士顿：高等教育出版社—国际出版社，2012，175–187。[22] Y. B. Shen，关于球面中极小子流形的内蕴刚性，中国科学 A 辑，1989，32(7)：769–781。[23] U. Simon，拉普拉斯算子的特征值与球面中的极小浸入，载于：微分几何，蒙特利尔：Pitman，波士顿，MA，1985，131：115–120。[24] J. Simons，黎曼流形中的极小簇，数学年刊（2），1968，88(1)：62–105。[25] Z. Z. Tang、D. Y. Wei 和 W. J. Yan，超曲面为等距超曲面的一个充分条件，东北数学杂志（2），2020，72(4)：493–505。[26] Z. Z. Tang 和 W. J. Yan，关于等距超曲面的 Chern 猜想，中国科学：数学，2023，66(1)：143–162。[27] H. W. Xu 和 Z. Y. Xu，关于极小超曲面的 Chern 猜想与自收缩子的刚性，泛函分析杂志，2017，273(11)：3406–3425。[28] X. W. Xu，对称空间中具有常曲率的极小二维球面（中文），中国科学：数学，2025，55(1)：1–14。[29] H. C. Yang 和 Q. M. Cheng，极小超曲面上的 Chern 猜想，Math. Z.，1998，227(3)：377–390。[30] S. T. Yau，具有常平均曲率的子流形 I，美国数学杂志，1974，96(2)：346–366。[31] S. T. Yau，具有常平均曲率的子流形 II，美国数学杂志，1975，97(1)：76–100。

[1]School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510000, P. R. CHINA.*Email address*: dingwr0806@m.scnu.edu.cn[2]School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, BeijingNormal University, Beijing 100875, P. R. CHINA.*Email address*: jqge@bnu.edu.cn[3,*]Frontier Interdisciplinary Domain, Beijing Institute of Technology, Zhuhai, Guangdong 519088

,

P. R. CHINA.*Email address*: lifagui@bitzh.edu.cn[2]School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, BeijingNormal University, Beijing 100875, P. R. CHINA.*Email address*: yangxize@mail.bnu.edu.cn