arXiv:2601.07203v1 [math.FA] 12 Jan 2026

正正规性与根问题

C.S. KUBRUSLY 和 H.M. STANKOVI ´C

Abstract. 本文通过将若干类希尔伯特空间算子纳入正拟正规算子类，推广了关于 n 次根问题的三个结果。例如，文中证明了：(i) 对于共正拟正规算子，若 T 是超正规且 T^n 是拟正规，则 T 是正规的；(ii) 对于正拟正规算子，若 T 是 k-拟拟亚正规且 T^n 是正规，则 T 是正规的。此外，(iii) 还证明了后一结果不受底层希尔伯特空间可分性的限制；即使 T 不是正拟正规，在这种情况下，T 也是一个正规算子与一个幂零算子的直和。

1. 引言

希尔伯特空间上正规算子幂的所谓 n 次根问题，旨在描述这样一些希尔伯特空间算子类 T：若 T^n 是正规算子，则 T 也为正规算子。对这一问题的系统研究可追溯至20世纪60年代，至今仍在继续。本文将在定义这些希尔伯特空间算子类的同时，讨论文献中的重要实例。

我们将正正规算子纳入 n 次根问题。通常针对该问题研究的算子类将与正正规算子类相交，从而推广关于 n 次根问题的一些现有结果。

正正规算子是一个非常大的希尔伯特空间算子类，其中包含所有可逆算子和次正规算子，但不包含超正规算子。与正正规算子类相关的各种算子类，例如准正拟正规算子，已在第 4 节中作了总结。

本文证明的与上述算子类相关的核心结果是定理 5.4、5.6、5.8 和 6.5。特别地，本文建立了以下推论。

- 假设 T^* 是正正规的。若对于某个正整数 n，T是超正规的，且 T^n 是拟正规的，则 T 是正规的（推论 5.5）。
- 若对于某个正整数 n，T^* 是正正规算子且 T^n 是次正规算子，则对每个正整数 n，$\mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{*n})$（推论 5.7 ）。
- 设 T 是正正规算子。若对于某个正整数 n，T 是 k-拟拟亚正规算子且 T^n 是正规算子，则 T 是正规算子（推论 6.6）。

此外，文中证明，最近在 [25,定理3.2] 中所要求的可分性假设可以取消，从而得到以下更强的结果。

- 若 k是 T^n -拟拟亚正规算子且 T^n 是正规算子，则 $T = N \oplus L$，其中 N 是正规算子，而 L 是指标至多为 $\min\{n, k+1\}$ 的幂零算子（定理 6.3）。

$n = 2$ 的特殊情形在定理 6.4 中重新讨论；定理 6.7 则考虑了值域稠密（或可逆——这是正正规且余正正规的一个特例）的 k-拟亚正规算子。

本文还分为 5 个部分。第 2 节介绍基本术语和记号。第 3 节探讨从正规算子到正规拟态算子的经典算子类链。第 4 节简要综述

Date: 2026 年 1 月 11 日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 47B15，47B20。*Keywords.* 正规算子，n次根问题，拟正规算子，正拟正规算子。

正拟正规算子。第 5 节研究正正规性和 n 次根问题。第 6 节讨论 k-拟拟亚正规算子的情形。

2. Basic Terminology and Notation

设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间。除一个例子外，本文中 $\mathcal{H}$ 始终是无限维的。若 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 的线性流形，则 $\mathcal{M}^-$ 表示 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{H}$ 中的闭包，而 $\mathcal{M}^\perp$ 表示 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{H}$. 中的正交补。$\mathcal{H}$ 的子空间是 $\mathcal{H}$. 的闭线性流形。本文所说的算子，是指从 $\mathcal{H}$ 到其自身的有界线性变换。令 $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ 表示 $\mathcal{H}$. 上所有算子构成的 C^*-代数。若 $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$，则 $T^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ 表示 T. 的伴随算子。非零算子 T 若满足：存在某个整数 $j > 1$ 使得 $T^j = O$，且对每个正整数 $i < j$ 都有 $T^i \neq O$，则称其为指标为 j 的幂零算子，其中 O 表示零算子。未指定指标的幂零算子，其指标为 2。恒等算子记作 I，而 $\oplus$ 表示子空间或算子的正交直和。设 $\mathcal{N}(T) = T^{-1}(\{0\})$ 和 $\mathcal{R}(T) = T(\mathcal{H})$ 分别为 T 的核和值域；$\mathcal{N}(T)$ 是 $\mathcal{H}$ 的子空间，而 $\mathcal{R}(T)$ 是 $\mathcal{H}$. 的线性流形。算子 $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ 若为单射（$\mathcal{N}(T) = \{0\}$）且为满射（$\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$），则称其可逆。根据开映射定理，其逆算子 T^{-1} 属于 $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$；若 $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ 是单射且具有稠密值域（$\mathcal{R}(T)^- = \mathcal{H}$），则称其拟可逆；等价地，若 T 和 T^* 是单射，则 T 和 T^* 同时拟可逆。

3. The Chain from Normal to Normaloid

希尔伯特空间上的算子 T 若与其伴随算子可交换（即 $T^*T = TT^*$），则称为正规算子。在希尔伯特空间中，算子 T是等距算子，当且仅当 $T^*T = I$；而 T是余等距算子，当 T^* 是等距算子时成立。酉算子是可逆的等距同构，也就是说，它是满射等距算子；等价地，它是正规等距算子，即同时为等距算子和余等距算子（即 $T^*T = TT^* = I$）。算子 T若与其伴随算子相等（即 $T^* = T$），则称为自伴算子。因此，

$$\text{Unitary} \cup \text{Self-adjoint} \subset \text{Normal}.$$

若算子与 T^*T可交换（即 $(T^*T - TT^*)T = O$），则称为拟正规；若它是某个正规算子在一个不变子空间上的限制（即它具有正规扩张），则称为亚正规；若 $TT^* \leq T^*T$（即 $T^*T - TT^* \geq O$），则称为次正规；若对每个 $x \in \mathcal{H}$都有$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\| \, \|x\|$，则称为超正规；若对所有正整数 n 都有 $\|T^n\| = \|T\|^n$（等价地，$r(T) = \|T\|$，其中 $r(T)$表示T的谱半径），则称为正规型。这些类之间存在真包含关系，由此形成了从正规算子到正规拟态算子的经典链，

$$\text{Normal} \subset \text{Quasinormal} \subset \text{Subnormal} \subset \text{Hyponormal} \subset \text{Paranormal} \subset \text{Normaloid}. \quad (\star)$$

等距算子是拟正规算子。如果一个算子的伴随算子是拟正规、亚正规、次正规或超正规算子，则分别称该算子为余拟正规、余亚正规、余次正规或余拟次正规算子。

4. A Summary of Posinormal Operators

定义：作用于希尔伯特空间上的算子 T 是

$$\textit{posinormal} \text{ if } \mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{R}(T^*),$$

$$\textit{quasiposinormal} \text{ if } \mathcal{R}(T)^- \subseteq \mathcal{R}(T^*)^-.$$

如果其伴随算子分别是正正规或拟正拟正规，则称其为余正正规或余拟正正规。因此， T 是

$$\text{coposinormal} \ \text{ if and only if } \ \mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathcal{R}(T),$$
$$\text{coquasiposinormal} \ \text{ if and only if } \ \mathcal{R}(T^*)^- \subseteq \mathcal{R}(T)^-.$$

因此， T 是

$$\text{posinormal and coposinormal} \ \text{ if and only if } \ \mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T^*),$$

拟正像正规与共拟正像正规，当且仅当 $\mathcal{R}(T)^- = \mathcal{R}(T^*)^-$.

关于上述定义，回顾一下 $\{0\}^\perp = \mathcal{H}$, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M} \Longrightarrow \mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{L}^\perp$,

$$\mathcal{R}(T^*)^\perp = \mathcal{N}(T), \quad T = T^{**}, \quad \mathcal{M}^- = \mathcal{M}^{\perp\perp}, \quad \text{and} \quad \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T)^-$$

对于 $\mathcal{H}$ 上的每个算子 T 以及 $\mathcal{H}$ 的任意线性流形 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{M}$，使得

$$\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{R}(T^*) \implies \mathcal{R}(T)^- \subseteq \mathcal{R}(T^*)^- \iff \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^*), \tag{†}$$

并且，当将包含关系替换为等式时，这些表达式仍然成立。因此，

(i) 正正规算子是拟正拟正规算子；(ii) T是拟正拟正规当且仅当 $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^*)$；(iii) T是余拟正正规当且仅当 $\mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(T)$；(iv) T是拟正拟正规且余拟正正规当且仅当 $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$；(v) 当 $\mathcal{R}(T)$闭时，正正规算子与拟正拟正规算子的类相同。

正正规是一个非常大的希尔伯特空间算子类。例如，

单射算子是拟正拟正规算子，满射算子是余正正规算子，可逆算子既是正正规算子也是余正正规算子，拟可逆算子既是拟正拟正规算子也是余拟正正规算子。

正正规算子类由 Rhaly [20] 于1994年提出并加以研究。据观察，每个次正规算子都是正正规算子 [20, 推论 2.1]。事实上，正正规算子包含次正规算子，但不包含于正规型算子类中；而拟正规算子不一定是正正规算子（这些不包含关系见 [15, 第5节，第 .137]页）。实际上，

$$\textsc{Hyponormal} \subset \textsc{Posinormal},$$
$$\textsc{Paranormal} \not\subset \textsc{Posinormal} \text{ 和 } \textsc{Posinormal} \not\subset \textsc{Normaloid}.$$

因此，如果将正拟正规算子插入链 (⋆) 中，那么链可以延伸到这里：

$$\textsc{Normal} \subset \textsc{Quasinormal} \subset \textsc{Subnormal} \subset \textsc{Hyponormal} \subset \textsc{Posinormal} \subset \textsc{Quasiposinormal}. \ (\S)$$

正拟正规算子有许多等价定义；例如，按时间顺序参见 [20, 定理 2.1], [9, 定理 B], [11, 定理 1], [15,命题 1], [16, 定义 1]。关于正拟正规算子的全面论述，可参见例如 [20] 和 [15]。下一个命题汇集了正拟正规算子的一些基本性质，这些性质将在全文中用到。

命题 4.1。设 T 是作用于希尔伯特空间上的一个算子。

(a) 若 T是正拟正规算子，则 $\mathcal{N}(T)$约化 T [20, 推论 2.3]。

(b) 当且仅当 $\mathcal{N}(T)$约化 T时， T是拟正拟正规（ [15, 引理1]的证明）。(c) 将正拟正规算子限制到不变子空间上，所得算子仍是正拟正规算子[11, 命题 4]。(d) 若 T没有非平凡的不变子空间，则它是拟正拟正规 [15, p. 139]。(e) 若 T是拟正拟正规，则 $\mathcal{N}(T^2) = \mathcal{N}(T)$——对于正拟正规算子，见 [11, 命题 3]（另见[15, 注释 2]）；同一证明也适用于拟正拟正规算子——因此，若 T是拟正拟正规，则对所有 n., $\mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T)$。(f) T 是正拟正规，并不意味着 T^2 是正拟正规 [16, 例 1]。(g) 若 T是拟正拟正规，则对每个正整数n [16, , T^n 都是拟正拟正规 5]定理 5]。(h) 若 T是正拟正规且 $\mathcal{R}(T)$是闭的，则对每个正整数 n [21, , T^n 是正拟正规，且 $\mathcal{R}(T^n)$是闭的 n [21, 推论 14]（另见 [3, 主定理]）。(i) 若 T 具有闭值域且是次正规，则对每个正整数 n [3, , T^n 都具有闭值域 n [3, 推论 2.3]。

由于闭值域正拟正规算子是拟正拟正规的，(h) 是 (g) 的一个非平凡特例，而 (i) 是 (h) 的推论。结论 (e) 对超正规算子也成立。闭值域正拟正规算子的乘积在 [4] 中得到了研究。

注 4.2. 一个算子与其伴随算子要么同时是正规算子，要么同时是正规型算子。此外，

若一个算子既是次正规的又是余次正规的，那么它就是正规的，

因此，若它既是亚正规的又是余次正规的，或既是拟正规的又是余拟正规的，那么它就是正规的。关于超正规算子，最初试图沿这一思路得到结果时，采用了正正规性假设。 [1, 定理 5] 证明了

若 T 是超正规且余拟次正规的，并且 $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$，则 T 是正规的。

随后给出了 [10, 定理 8.3。47]，其证明类似，但条件稍微更严格（参见（†）），即:

若 T是超正规且余拟次正规，并且 $\mathcal{R}$（T） $= \mathcal{R}$（T^*），则 T是正规算子。

请注意，这些结果可以分别改写如下:

若一个算子是超正规且余拟次正规，并且它是拟正拟正规与余拟正正规，则它是正规算子；并且

若一个算子是超正规且余拟次正规，并且它是正正规与余正正规，则它是正规算子。

然而，上述正正规性条件可以去掉:

如果一个算子既是超正规又是余拟次正规，那么它就是正规，

正如后来在 [27, 推论 3]中所证明的。

5. Posinormality and the nth Root Problem

在本节中， $\mathcal{H}$ 表示一个希尔伯特空间，算子作用于希尔伯特空间。上述定义的一个直接推论如下。

命题 5.1. 若 T 是拟正拟正规且余拟正正规，则

$$T = O \oplus S \quad on \quad \mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp},$$

其中 $\mathcal{M} = \mathcal{N}(T)$、 $\mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{R}(T)^{-}$，且 $S = T|_{\mathcal{R}(T)^{-}}$ 是拟可逆的。

证明。设 T 是拟正拟正规且余拟正正规（特别地，是正正规且余正正规的），从而 $\mathcal{R}(T)^{-} = \mathcal{R}(T^{*})^{-}$，等价地， $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^{*})$。由于对每个算子都有 $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^{*})^{\perp}$，因此 $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^{*})^{\perp} = \mathcal{R}(T)^{\perp}$.。根据命题 4.1(b)， $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$ 约化 T，因此 $\mathcal{R}(T)^{-} = \mathcal{R}(T)^{\perp\perp}$ 约化 $T.$。于是

$$T = O \oplus T|_{\mathcal{R}(T)^{-}} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^{-}.$$

由于 $\mathcal{R}(T)^{-}$ 约化 T 且与 $\mathcal{N}(T)$ 正交，$T|_{\mathcal{R}(T)^{-}}$: $\mathcal{R}(T)^{-} \to \mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{R}(T)^{-}$ 的值域稠密， $\mathcal{R}(T|_{\mathcal{R}(T)^{-}})^{-} = \mathcal{R}(T)^{-}$，且是单射， $\mathcal{N}(T|_{\mathcal{R}(T)^{-}})^{-} = \{0\}$，这意味着 $T|_{\mathcal{R}(T)^{-}} \in \mathcal{B}[\mathcal{R}(T)^{-}]$ 是拟可逆的。□

单射算子 T 是拟正拟正规且余拟正正规，当且仅当$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^{*}) = \{0\}.$这意味着 T是拟可逆的。在这种情况下，命题 5.1 的正交直和分解中不存在零部分 O 。

命题 5.1 引出了以下结果：如果一个拟正规算子是余拟正拟正规，那么它就是正规算子 [25, 引理 2.4]。这一结果将在后文中发挥重要作用。实际上， [25] 中的引理 2.4 如下所述：对于拟正规算子，(b) 蕴含 (a)，这是下一个引理的一部分。

引理 5.2。取一个算子 T，并考虑以下断言。

(a) T *is normal.*

(b) T *is coquasiposinormal* (*i.e.,* $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^{*})$, *or* $\mathcal{R}(T^{*})^{-} \subseteq \mathcal{R}(T)^{-}$).

(c) $\mathcal{R}(T)^{-}$ *reduces* T (*equivalently,* $\mathcal{N}(T^{*})$ *reduces* T).

对于任意算子 T，(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c)。如果 T 是拟正规算子，则 (c) $\Rightarrow$ (a)。因此，如果 T 是拟正规算子，则上述断言两两等价。

证明. (a) $\Rightarrow$ (b). 由于正规算子的伴随算子仍是正规算子，根据 (§) 中的链，(a) 蕴含 (b)。

(b) $\Rightarrow$ (c). 若 T是余拟正正规的，则根据命题 4.1(b)——或命题 5.1—— $\mathcal{N}(T^{*})$ 约化 T^{*}，因此它约化 $T.$。所以 (b) 蕴含 (c)。

(c) $\Rightarrow$ (a). 设 T是希尔伯特空间 $\mathcal{H}.$上的拟正规算子。假设 $\mathcal{R}(T)^{-}$约化 $T.$。由于 $(\mathcal{R}(T)^{-})^{\perp} = \mathcal{R}(T)^{\perp} = \mathcal{N}(T^{*})$ 对 $\mathcal{H}$上的每个算子都成立，

$$T = R \oplus S \quad \text{and} \quad T^{*} = R^{*} \oplus S^{*} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = \mathcal{N}(T^{*}) \oplus \mathcal{R}(T)^{-}.$$

若 T是拟正规的（即 $(T^{*}T - TT^{*})T = O$），则 $S = T|_{\mathcal{R}(T)^{-}}$: $\mathcal{R}(T)^{-} \to \mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{R}(T)^{-}$ 是拟正规的：$(S^{*}S - SS^{*})S = O.$。因此，对于 $\mathcal{R}(S)$ 中的每个 u，都有 $(S^{*}S - SS^{*})u = 0$；于是对于 $\mathcal{R}(S)$ 中的每个 u，都有 $(S^{*}S - SS^{*})u = 0$ （由连续性延拓）。但是 $\mathcal{R}(S)^{-} = \mathcal{R}(T|_{\mathcal{R}(T)})^{-} = \mathcal{R}(T)^{-}.$。所以 $\mathcal{R}(T)^{-}$上的 S是正规算子。此外，$R^{*} = T^{*}|_{\mathcal{N}(T^{*})} = O$，因此 $R = O.$。由此 $T = O \oplus S$ 是正规算子。于是 (c) 蕴含 (a)。□

由于可逆算子是正正规且余正正规的，因而也是拟正拟正规和余拟正正规的；又由于存在可逆的双边亚正规（非正规）加权移位算子（参见例如 [5, 第 60 页，注 5]），引理 5.2 中的等价关系在从拟正规推广到亚正规（进而到次正规）时并不成立。

可逆拟正规算子是正规的，这是一个显而易见（且广为人知）的结果。引理 5.2 立即导出了它的推广：

值域稠密的拟正规算子是正规算子；单射拟正规算子是正规算子。

n次根问题探讨具有如下性质的非正规算子 T 类：若 T^n 是正规算子，则 T 是正规算子。复希尔伯特空间上正规算子的函数演算保证，正规算子 N 有一个正规n次根。例如，若 $\psi\colon\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是将每个 $\zeta\in\mathbb{C}$ 映射为其主值 n次根的函数，即 $\psi(\zeta)=|\zeta|^{\frac{1}{n}}\exp\big(i\,\mathrm{Arg}(\zeta)\,\frac{1}{n}\big)$，那么对每个 $\zeta\in\mathbb{C}$都有 $\psi(\zeta)^n=\zeta$，且 $\psi(N)$是 N. 的一个正规 n次根。然而，正规算子也可能有非正规的平方根（例如，每个幂零算子都是零算子的平方根，而幂零算子除非为零算子，否则绝不正规）。此外，一个正规算子可能有多个正规平方根（一个简单例子是：I 和 $-I$ 都是恒等算子的正规平方根）。更多相关内容，参见例如 [7, 12]。

最初，引理 5.2 的一部分作为一种简单的 n 次根问题的另一种直接证明，在 [25, 引理 2.4] 中提出；该问题见 [25, 引理 2.3], ，内容如下。设 n 是任意一个正整数。

$$\textit{If } T \textit{ is quasinormal and } T^n \textit{ is normal, then } T \textit{ is normal.} \tag{5.1}$$

这是关于次正规算子的一个有用且众所周知结果的特例，并且有一个初等证明，见 [22, 定理 5]:

$$\textit{If } T \textit{ is hyponormal and } T^n \textit{ is normal, then } T \textit{ is normal,} \tag{5.2}$$

后来，这一结果被推广到拟正规算子，见 [1, 定理 6]:

$$\textit{If } T \textit{ is paranormal and } T^n \textit{ is normal, then } T \textit{ is normal.} \tag{5.3}$$

这些结果穷尽了链 $(\star)$ 所列算子类中“T^n-正规蕴含 T-正规”这一问题。当然，包含拟正规算子类且包含于正规拟态算子类的算子类有不可数多个，但本节不讨论它们。这个问题不能推广到正规拟态算子，因为正规拟态算子类过于宽泛。例如，若非零算子 L 是幂零压缩算子（即，若 $L^2=O$ 且 $0<\|L\|\leq 1$），则 L 不正规（它不是正规型），因此 $T=I\oplus L$ 不正规。然而，$T^2=I\oplus O$ 是非零正规算子，而 T 是正规型，且 $\|T\|=r(T)=1$，因为 $r(T^2)=1$（例如，取 $L=\left(\begin{smallmatrix}O & C\\ O & O\end{smallmatrix}\right)$ 使得 $0<\|C\|\leq 1$.）。特别地，

$$T=\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right) \text{ is a normaloid operator with } T^2 \text{ normal, but } T \text{ is not normal.}$$

事实上，T甚至不是超正规算子，因为 $T=I\oplus$（非零幂零算子）（另见 [25,例 2.6]）；尽管它具有闭值域，但既不是正正规的，也不是余正正规的。

关于链（$\star$）中拟正规类之外的算子类，另一种处理方法是将上文（5.1）–（5.3）中的“T^n 正规”替换为“T^n 拟正规”。回顾一下，若 T 是拟正规算子，则对每个正整数 n，T^n 都是拟正规算子（这是因为若T是拟正规算子，则对任意 n，T与 $T^{*n}T^n$ 可交换；例如参见 [13, 问题7.2(c)]）。最近，[17, 定理 6.3]证明了某种逆命题：

$$\textit{If } T \textit{ is subnormal and } T^n \textit{ is quasinormal, then } T \textit{ is quasinormal.} \tag{5.4}$$

（初等证明见 [23, 定理 2.2和推论 2.3], ；关于此类问题的多变量版本，见 [24]。）这一结果已推广到一个包含次正规算子的算子类，其定义如下。令 $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 且 $D = T^*T - TT^*$. 回顾一下， T是次正规的，当且仅当$D \geq O$；等价地， $|T|^2 \leq |T^*|^2$.。希尔伯特空间算子 T若满足 $T^*DT \geq O$，则称为拟次正规的；等价地， $|T|^4 \leq |T^2|^2$；若满足 $|T|^2 \leq |T^2|$.，则称为半拟次正规的。半拟次正规算子也称为 $\mathcal{A}$ 类算子。众所周知，这些算子类之间存在真包含关系（例如参见 [13, 第. 98]页）：

$$\text{Hyponormal} \subset \text{Quasihyponormal} \subset \text{Semi-quasihyponormal} \subset \text{Paranormal}. \qquad (\ddagger)$$

与超正规算子一样，拟次正规算子（因而半拟次正规算子）并不是正正规算子（见 [15, 例 1]）：

$$\text{Quasihyponormal} \not\subset \text{Posinormal}.$$

上述（5.4）中的结果在 [18, 定理 4.1]中从亚正规算子推广到了半拟次正规算子：

如果 T是半拟次正规且 T^n 是拟正规，那么 T是拟正规。（5.5）

根据（‡），（5.5）中的结果自然引出了下面的问题。

问题 5.3. 如果 T是超正规且 T^n 是拟正规，那么 T是拟正规吗?

然而，在余拟正正规性的假设下，如引理 5.2 所示，我们得到了肯定的答案（某方面有所局限，另一方面则更强）。

定理 5.4. 设 T是余拟正正规算子。若对于某个正整数 n， T是超正规算子且 T^n是拟正规算子，则 T 是正规算子。

证明。任取一个正整数 n.

(a) 根据命题 4.1(g)，若 T^*是拟正拟正规算子，则 T^{*n}. 也如此。等价地，若 T是余拟正正规算子，则 T^n 是余拟正正规算子。在这种情况下，若 T^n是拟正规算子，则根据引理 5.2，T^n 是正规算子。

(b) 不过，若 T是超正规算子且 T^n 是正规算子，则根据 (5.3)， T是正规算子。 □

定理 5.4 的一个具体且更简单的形式如下。

推论 5.5. 若 T是余正正规、超正规，且对于某个正整数 n， T^n 是拟正规，则 T 是正规。

由于拟正规算子的每个正整数次幂都是拟正规，因此推论 5.5 立即推出引理 5.2 的一部分：

余正正规拟正规算子是正规算子。

关于正正规族的一类根问题为本节作结。

但首先回顾一下，对于任意算子 A，对每个整数 $m \geq 0$都有 $\mathcal{N}(A^m) \subseteq \mathcal{N}(A^{m+1})$；如果对于某个整数 $m_0 \geq 0$有 $\mathcal{N}(A^{m_0}) = \mathcal{N}(A^{m_0+1})$，那么对于每个 $m \geq m_0$. 都有 $\mathcal{N}(A^m) = \mathcal{N}(A^{m_0})$。类似地，对于每个 $m \geq 0$都有 $\mathcal{R}(A^{m+1}) \subseteq \mathcal{R}(A^m)$；如果对于某个整数 $m_0 \geq 0$有$\mathcal{R}(A^{m_0+1}) = \mathcal{R}(A^{m_0})$，那么对于每个$m \geq m_0$. 都有 $\mathcal{R}(A^m) = \mathcal{R}(A^{m_0})$。如果存在这些整数，则满足 $\mathcal{N}(A^{m_0}) =$ 的最小整数为 m_0。

$\mathcal{N}(A^{m_0+1})$ 是 A 的上升，记作 asc(A)；满足$\mathcal{R}(A^{m_0+1}) = \mathcal{R}(A^{m_0})$ 的最小整数 m_0 是 A 的下降，记作 dsc(A)。

定理 5.6. 若对于某个整数 $n \geq 1$， T是余拟正正规且 T^n 是拟正拟正规，则对每个整数 $n \geq 1.$， T^n都是拟正拟正规与余拟正正规

证明. 如上所见， $\mathcal{N}(A^2) = \mathcal{N}(A)$ 蕴含对所有 $m \geq 1.$ 都有 $\mathcal{N}(A^m) = \mathcal{N}(A)$。现在，由于 T^* 和 T^n 都是拟正拟正规，根据命题 4.1(e)， $\mathcal{N}(T^{*2}) = \mathcal{N}(T^*)$ 且 $\mathcal{N}(T^{2n}) = \mathcal{N}(T^n)$。因此，对每个正整数 m,

$$\mathcal{N}(T^{*nm}) = \mathcal{N}(T^*) \quad \text{and} \quad \mathcal{N}(T^{nm}) = \mathcal{N}(T^n).$$

此外，由于 T^n 是拟正拟正规，根据命题 4.1(g)，可知 T^{nm} 是拟正拟正规。因此，由于 T^* 也是拟正拟正规，我们得到

$$\mathcal{N}(T^{nm}) \subseteq \mathcal{N}(T^{*nm}) \quad \text{and} \quad \mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(T).$$

因此， $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{nm}) \subseteq \mathcal{N}(T^{*nm}) = \mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(T)$，从而

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*).$$

那么，除了如上所见的 $\mathcal{N}(T^{*2}) = \mathcal{N}(T^*)$ 外，根据命题 4.1(e)，我们还得到 $\mathcal{N}(T^2) = \mathcal{N}(T)$。这意味着，对于每个 $n \geq 1$,

$$\mathcal{N}(T^{*n}) = \mathcal{N}(T^*) \quad \text{and} \quad \mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T),$$

因此 $\mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{*n})$（即， T^n 是拟正拟正规与余拟正正规）。 □

注：注意，如果对于某个整数 $n \geq 1$， T是拟正拟正规且 T^n 是余拟正正规，那么对于每个整数$n \geq 1$， T^n 都是拟正拟正规与余拟正正规（因为根据定理 5.6， T^{*n} 是拟正拟正规与余拟正正规）。

定理 5.6 的一个直接且有用的推论如下。

推论 5.7. 若 $\mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(T)$，且对某个正整数 n， T^n 是次正规的，则对每个正整数 $n.$，都有 $\mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{*n})$

下面给出定理 5.6 的一个推广（其中 lcm(k, ℓ) 表示 k 和 ℓ 的最小公倍数）。

定理 5.8. 若对于某一对正整数 k, ℓ， T^k 是拟正拟正规，且 T^ℓ 是余拟正正规，则对于每个 $m \geq m_0$， T^m 既是拟正拟正规，又是余拟正正规，其中 $m_0 = \text{lcm}(k, \ell)$。此外，

(a) 若 dsc(T) $= 1$，则 T 是拟正拟正规；(b) 若 asc(T) $= 1$，则 T 是余拟正正规。

证明。设 T^k 为拟正拟正规， T^ℓ为余拟正正规。令 $m_0 = \text{lcm}(k, \ell)$。由命题 4.1(g)可直接看出， T^{m_0} 既是拟正拟正规又是余拟正正规，即，

$$\mathcal{N}(T^{m_0}) = \mathcal{N}(T^{*m_0}).$$

现在令 m 为任意一个整数，使得 $m \geq m_0.$。因此，存在一个整数 $p \geq 1$，使得 $m \leq p\, m_0.$。然后，利用命题 4.1(e)、上述恒等式以及与之前相同的论证（参见定理 5.6 的证明），我们得到

$$\mathcal{N}(T^m) \subseteq \mathcal{N}(T^{p\, m_0}) = \mathcal{N}(T^{m_0}) = \mathcal{N}(T^{*m_0}) \subseteq \mathcal{N}(T^{*m}).$$

对偶地， $\mathcal{N}(T^{*m}) \subseteq \mathcal{N}(T^m)$。因此， $\mathcal{N}(T^m) = \mathcal{N}(T^{*m})$，所以对于每个 $m \geq m_0.$，T^m 既是拟正正规又是余拟正正规。此外，类似地论证可得，

(a) 若 $\operatorname{dsc}(T) = 1$，则对所有 $m \geq 1.$， $\mathcal{N}(T^{*m}) = \mathcal{N}(T^*)$（即 $\mathcal{R}(T^m)^- = \mathcal{R}(T)^-$）。由于 T^k is 拟正拟正规， $\mathcal{N}(T^k) \subseteq \mathcal{N}(T^{*k})$。因此 $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^k) \subseteq \mathcal{N}(T^{*k}) = \mathcal{N}(T^*)$。

(b) 同理，反过来，若 $\operatorname{asc}(T) = 1$，则对所有 $m \geq 1.$， $\mathcal{N}(T^m) = \mathcal{N}(T)$。由于 T^ℓ is 余拟正正规， $\mathcal{N}(T^{*\ell}) \subseteq \mathcal{N}(T^\ell)$。因此 $\mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(T^{*\ell}) \subseteq \mathcal{N}(T^\ell) = \mathcal{N}(T)$. □

6. The k-Quasiparanormal Case

设 $\mathcal{H}$ 为一个希尔伯特空间。（事实上，以下定义在赋范空间中同样成立。）考虑以下几类算子，它们都包含超正规算子类；当前文献中经常讨论并比较这些算子类。（有关这些算子的详细介绍，请参见 [25, 第 1] 节。）若算子 T作用于 $\mathcal{H}$，则称其为 k-超正规算子，如果对于每个 $x \in \mathcal{H}$，存在某个 $k \geq 0.$，使得 $\|Tx\|^{k+1} \leq \|T^{k+1}x\| \, \|x\|^k$。若一个算子在其值域上表现为超正规算子，则称其为拟拟亚正正规算子；也就是说，对于每个 $x \in \mathcal{H}.$，若 $\|T(Tx)\|^2 \leq \|T^2(Tx)\| \, \|Tx\|$，则它是拟拟亚正规的。同样地，若算子 T作用于 $\mathcal{H}$，则称其为k-拟拟亚正规算子，如果它在 T^k 的值域上表现为超正规算子；也就是说，若

$$\|T(T^k x)\|^2 \leq \|T^2(T^k x)\| \, \|T^k x\|$$

对每个 $x \in \mathcal{H}$，存在某个正整数 $k.$。换言之，如果

$$\|Ty\|^2 \leq \|T^2 y\| \, \|y\|$$

对每个 $y \in \mathcal{R}(T^k)$，等价地（由连续性），对每个 $y \in \mathcal{R}(T^k)^-.$

显然， $\mathcal{R}(T^k)$ 是 T-不变的， $\mathcal{R}(T^k)^-.$ 也如此。此外，对每个正整数 k，算子 T 是满射当且仅当 T^k 是满射，而 T 有稠密值域当且仅当 T^k 有稠密值域（也就是说，$\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$ 蕴含 $\mathcal{R}(T^k) = \mathcal{H}$，并且 $\mathcal{R}(T)^- = \mathcal{H}$ 蕴含 $\mathcal{R}(T^k)^- = \mathcal{H}$，对每个 k 均成立；这些结论很容易通过归纳法验证）。这些事实以及上述 k-拟拟亚正规性的定义，足以保证本节后面将要用到的以下辅助结果。

命题 6.1. 设 T 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}.$ 上的一个算子

(a) T 是 k-拟拟亚正规的，当且仅当 $T|_{\mathcal{R}(T^k)^-}$ 在 $\mathcal{R}(T^k)^-.$ 上是超正规的。(b) 若 T 有稠密值域（特别地，若它是满射），则下列断言两两等价。(i) T 是超正规的。(ii) 对每个 k， T 都是 k-拟拟亚正规的。(iii) 对某个 k， T 是 k-拟拟亚正规的。

另请注意，

- 0-超正规 $= \mathcal{B}[\mathcal{H}]$,
- 1-超正规 $=$ 超正规,
- 0-拟拟亚正规 $=$ 超正规,
- 1-拟拟亚正规 $=$ 拟拟亚正规,

对每个 $k =$ 超正规, • k-超正规,

- k-拟拟亚正规 $\subseteq k+1$-拟拟亚正规,

因此，如果 T是 k-拟拟亚正规的，那么对于每个整数 $m \geq k.$， T都是 m-拟拟亚正规的

k-超正规算子类属于第 3 节的链（$\star$），但 k-拟拟亚正规算子类并非如此。事实上，众所周知，

$$\text{Paranormal} \subset k\text{-Paranormal} \subset \text{Normaloid}$$

and

$$\text{Paranormal} \subset k\text{-Quasiparanormal} \not\subseteq \text{Normaloid}.$$

由于超正规算子并非正正规，因此本节定义的算子不是正正规。

关于 k-超正规和 k-拟拟亚正规算子的 n 次根结果，已在 [25, 定理 3.1 和 3.2] 中得到证明。

$$\textit{If } T \textit{ is } k\textit{-paranormal and } T^n \textit{ is normal, then } T \textit{ is normal.} \tag{6.1}$$

若 T 是可分希尔伯特空间上的 k-拟拟亚正规算子，且 T^n 是正规的，则
$T = N \oplus L$，其中 N 是正规的，L 是阶数至多为 $\min\{n, k+1\}$. 的幂零算子 (6.2)

注6.2. 有必要谈一谈可分性假设。

(a) 在 [25, 定理 3.2] 中 (6.2) 的原始证明里，使用了这样的事实：正规算子 T^n 作用于其上的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 是一个直积分。直积分是希尔伯特空间直和的一种推广，记作 $\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}_x \, d\mu$，其中 $\{\mathcal{H}_x\}_{x \in X}$ 是希尔伯特空间场，μ 是定义在博雷尔指标集 $X \subseteq \mathbb{C}$. 的子集博雷尔 σ-代数 $\mathcal{X}$ 上的任意博雷尔测度。

直积分的常见定义要求场 $\{\mathcal{H}_x\}_{x \in X}$由可分希尔伯特空间构成（也就是说，纤维空间是可分的）。不过，通常也会假设 $\mathcal{H}$ 本身是可分的，正如（6.2）中的情形。关于直积分的简要概述，参见例如 [8,第 4 节。1]（另见 [2]）；完整论述请参见 [6, 第二部分，第1章和 2]. 正如 [6, 第164页、第1条（iii）、第 3 节、第1章、第二部分], 中所介绍的，直积分的概念要求希尔伯特空间 $\mathcal{H}_x$.具有可分性。

假设 $\mathcal{H}$ 是可分的，就能保证每个 $\mathcal{H}_x$ 都是可分的，从而满足要求。然而，要求每个 $\mathcal{H}_x$ 都是可分的，并不意味着 $\mathcal{H}$ 是可分的。但这会排除诸如 $L^2(X, H, \mu)$ 这样的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$：它是从博雷尔子集 X 到任意不可分希尔伯特空间 H. 的所有平方可积函数的集合（相对于博雷尔测度 μ）。针对不可分希尔伯特空间场的重新表述已有研究。例如，文献 [26] 对直积分的无可分性要求的定义方法进行了细致讨论。

(b) 对于预先假定 $\mathcal{H}$ 可分的特殊情形，正规算子（例如（6.2）中的 T^n）相对于博雷尔测度μ 的直积分，通过谱定理自然地对应于将该正规算子表示为 $L^2(X, \mu)$上的乘法算子；当 $\mathcal{H}$ 可分时，这种测度 μ是有限的；若该算子作用于可分希尔伯特空间，则该测度与正规算子的标量谱测度一致（参见例如 [14, 推论3.14、引理4.7及其注释]）。

事实上，考虑谱定理的如下表述：“如果 N 是任意复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的正规算子，那么在由一族紧子集 $\Omega_\gamma \subset \mathbb{C}$ 的不交并 Ω 所构成的博雷尔子集的 σ-代数上，存在一个测度 μ，使得带重数的恒等函数 $\varphi: \Omega \to \mathbb{C} \in L^\infty(\Omega, \mu)$,

满足 N 与 $L^2(\Omega\ \mu)$ 上的乘法算子 M_φ 酉等价。”此外， $\varphi(\Omega)^- = \sigma(N)$ 是 $N.$ 的谱。其证明表明，由于 N 在 $\mathcal{H}$ 上正规， $\mathcal{H}$ 是子空间 $\mathcal{M}_\gamma$ 的正交直和 $\bigoplus_\gamma \mathcal{M}_\gamma$ ，其中这些子空间属于 $\mathcal{H}$,

$$\mathcal{M}_\gamma = \bigvee\nolimits_{m,n} \{N^n N^{*m} x_\gamma\}$$

对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}.$ 中的一族单位向量 $\{x_\gamma\}$ ，其中每个 $\mathcal{M}_\gamma$ 都由一个可数集张成，因此 $\mathcal{M}_\gamma$ 是可分的（参见例如 [14, 第（b）部分、定理 3.11] 的证明）。因此，如果 N 在 $\mathcal{H}$ 上是正规算子，那么 $\mathcal{H} = \bigoplus_\gamma \mathcal{M}_\gamma$ 是可分希尔伯特空间的一个（可能不可数的）直和。这表明，如果 N 在 $\mathcal{H}$ 上是正规算子，那么 $\mathcal{H}$ 是一个直积分。除了存在由可分希尔伯特空间组成的场 $\{\mathcal{M}_\gamma\}$ 之外，还需要验证可测性条件。赋予 L^2（Ω μ）测度的上述测度 μ 不一定是有限测度。保证 μ 为有限测度的一个充分条件是 $\mathcal{H}.$ 的可分性。这个可分情形已在 [2, 第 3], 节中讨论，下面将会看到。

（c）设 N 是可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}.$ 上的正规算子。因此我们可以假设 $\mathcal{H} = \int_X^\oplus \mathcal{H}_\lambda d\mu$ 是一个直积分。在这种情况下， N 由 $N = \int_X^\oplus \lambda\, I_\lambda d\mu$ 给出，其中 λ 属于 $X = \sigma$（N），即 N 的谱，并且每个 I_λ 都是 $\mathcal{H}_\lambda.$ 上的恒等算子。回忆一下， μ 是 σ-代数 $\mathcal{X}$（即紧集 $X = \sigma$（N）的博雷尔子集）上的博雷尔测度，因此 μ 是 $\mathcal{X}.$ 上的有限测度。由于 $\mathcal{H}$ 是可分的，上述（b）项中的测度 μ 也是有限测度。（有限测度可以归一化为概率测度。）如果 T^n 是正规的（如（6.2）中所示），且 $\mathcal{H}$ 是可分的，那么 $T^n = \int_\sigma^\oplus$ （T^n） $\lambda\, I_\lambda\, d\mu.$。由 T^n 生成的冯·诺依曼代数的一个关键性质是：其交换子中的每个算子都可表示为 $\mathcal{H} = \int_\sigma^\oplus$ （T^n） 上的可分解算子 $\mathcal{H}_\lambda\, d\mu.$。因此， $T = \int_\sigma^\oplus$ （T^n） $T_\lambda\, d\mu$ ，其中每个 T_λ 作用于每个 $\mathcal{H}_\lambda$；在 $\mathcal{H}$ 上的 T 是正规的，当且仅当 $\mathcal{H}_\lambda$ 上的每个算子 T_λ 都是正规的，并且 $T^n = \int_\sigma^\oplus$ （T^n） $T_\lambda^n\, d\mu.$。因此， $T_\lambda^n = \lambda\, I_\lambda.$

证明（6.2）的思路是确保：若 T^n 是正规算子，且 T是 k-拟拟亚正规算子，则 T_λ 是超正规算子。由于如上所见， $T_\lambda^n = \lambda I_\lambda$ 是正规算子，因此由（5.3）可知， T_λ 必为正规算子， $T.$ ■也同样如此。

实际上，（6.2）中的可分性要求源于其证明中应用了直积分。在下面的定理 6.3 中，我们通过避免使用直积分，消除对可分性的需要，从而允许希尔伯特空间是任意的。

定理 6.3. 若 T是 k-拟拟亚正规算子，且 T^n 是正规算子，则 $T = N \oplus L$，其中 N 是正规算子， L 是指标至多为 $\min\{n, k+1\}.$ 的幂零算子。

证明. 设 T是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的算子，并令 k 和 n 为任意正整数。假设 T是 k-拟拟亚正规算子，且 T^n 是正规算子。回忆一下，若 T^n 是正规算子，则对每个正整数 $m.$， T^{mn} 都是正规算子。因此，不失一般性，在本证明的（a）部分中，始终假设 T^n 对某个 $n \geq k.$是正规算子。

(a) 如前所述，显然 $\mathcal{R}(T^n)$ 是 T-不变的，$\mathcal{R}(T^n)^-.$ 也同样如此。由于 T 与正规算子 T^n 交换，Fuglede 定理保证 T 与 T^{n*} 交换（例如，参见 [14, 推论3.19]）。因此 $TT^{n*} = T^{n*}T$，从而 $T^n T^* = T^* T^n.$。于是 $\mathcal{R}(T^n)$ 是 T^*-不变的， $\mathcal{R}(T^n)^-.$ 也同样如此。因此，

$$\mathcal{R}(T^n)^- \text{ reduces } T.$$

因此，

$$T = T|_{\mathcal{R}(T^n)^-} \oplus T|_{\mathcal{R}(T^n)^\perp} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = \mathcal{R}(T^n)^- \oplus \mathcal{R}(T^n)^\perp,$$

以便

$$T^n = \left(T|_{\mathcal{R}(T^n)^-}\right)^n \oplus \left(T|_{\mathcal{R}(T^n)^\perp}\right)^n.$$

此外,

$$\left(T|_{\mathcal{R}(T^n)^-}\right)^n \text{ is a normal operator}$$

由于 T^n 是正规的。此外， T 是 n-拟拟亚正规算子，因为它是 k-拟拟亚正规算子，并且我们取了 $n \geq k$. （回顾：如果 T 是 k-拟拟亚正规算子，那么对于每个整数 $m \geq k.$， T 都是 m-拟拟亚正规算子。）因此，根据命题 6.1(a)，我们得到

$$T|_{\mathcal{R}(T^n)^-} \text{ is paranormal.}$$

然后，由于 $\left(T|_{\mathcal{R}\ (T^n)\ ^-}\right)^n$ 是正规的，根据（5.3）可知

$$T|_{\mathcal{R}(T^n)^-} \text{ is normal.}$$

至于直和项 $T|_{\mathcal{R}(T^n)\ ^\perp}$： $\mathcal{R}(T^n)^\perp \to \mathcal{R}(T^n)^\perp$，它必然是幂零的。事实上，回顾 $\mathcal{R}(T^n)^\perp = \mathcal{N}(T^{n*})$，因此对于 $\mathcal{R}(T^n)^\perp$ 中的每个 v，都有 $T^{n*}v = 0$，从而 $T^{n*}|_{\mathcal{R}(T^n)\ ^\perp} = O$，这意味着 $(T^n|_{\mathcal{R}(T^n)\ ^\perp})^* = O$，因为 $\mathcal{R}(T^n)^\perp$ 约化 T.所以

$$(T|_{\mathcal{R}(T^n)^\perp})^n = T^n|_{\mathcal{R}(T^n)^\perp} = O.$$

因此,

$$T = N \oplus L,$$

其中 $N = T|_{\mathcal{R}(T^n)^-}$ 是正规算子，而 $L = T|_{\mathcal{R}(T^n)^\perp}$ 是幂零算子，满足 $L^n = O$，因此当 $n \geq k$.时， L 是幂零指数为 $j \leq n$ 的幂零算子

(b) 为了验证 L 的幂零指数 j 满足 $j \leq \min\{n, k+1\}$，我们将证明分成两部分。

(b_1) 直和项 L 是 k-拟拟亚正规，因为 T 是 k-拟拟亚正规的。因此，对于每个整数 $m \geq k.$， L 都是 m-拟拟亚正规的。若 $L^{m+2} = O$，则根据 m-拟拟亚正规算子的定义，对于每个 $m \geq k.$，有 $L^{m+1} = O$。由此可推知，若对某个 $\ell \geq k+1$有 $L^\ell = O$，则 $L^{k+1} = O$，从而对所有 $\ell \geq k+1$.都有 $L^\ell = O$。由于 L 确实是幂零的， L 的幂零指数 j 满足 $j \leq k+1$.

(b_2) 此外，由于 $T^n = N^n \oplus L^n$ 是正规算子， L^n 也是正规算子。但 L^n 是幂零的，因为 L 是幂零的。因此 $L^n = O$，因为唯一的幂零正规型算子是零算子。所以， L 的幂零指数 j 满足 $j \leq n$. □

显然，定理 6.3 中的任一直和项都可以不出现在 T.的分解中。下面的定理 6.4 将 [25, 定理 3.5] 推广到不可分希尔伯特空间。

定理 6.4. 设 T 是一个 k-拟拟亚正规算子，并且假设 T^2 是正规算子。考虑定理 6.3 中 T 的分解。如果幂零部分 L非零，则它可表示为 $L = \left(\begin{smallmatrix} O & C \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$，其中 C是一个单射非负算子。

证明。设 T 是 k-拟拟亚正规且 T^2 正规。因此 $T = N \oplus L$ 由定理 6.3 得出。

首先回顾，由于 L 是幂零的，因此它是纯的（即它没有正规直和项），因为唯一的正规型幂零算子就是零算子。接下来，考虑 [19, 定理 1]中的以下结果。

> 一个算子是正规算子的平方根，当且仅当它具有 $A \oplus \left(\begin{smallmatrix} B & C \\ O & -B \end{smallmatrix}\right)$ 的形式，其中 A 和 B 是正规算子，且 C 是正的（即非负且为单射），并与 B 可交换。

由于 T^2 是正规算子， L^2 是正规的。由于 L 是纯的，上述斜体结果表明，
$L=\left(\begin{smallmatrix} B & C \\ O & -B \end{smallmatrix}\right)$ 中的 C 是一个与 B 可交换的正算子，其中 B 是正规的。根据定理 6.3，
$L \neq O$ 是幂零的，且指标不大于 $n=2.$。因此 $L^2=\left(\begin{smallmatrix} B^2 & O \\ O & B^2 \end{smallmatrix}\right)=O$，所以 $B^2=O.$。
由于它是正规且幂零的，因此 $B=O$。□

在拟正拟正规性的假设下，再次沿用引理 5.2中的思路，定理 6.3中的幂零直和项总是不存在。

定理 6.5. 设 T 是一个拟正正规算子。若 T 是 k-拟拟亚正规且 T^n 是正规算子，则 T 是正规算子。

证明。根据定理 6.3，若 T 在任意希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上是 k-拟拟亚正规算子，并且对于某个正整数 n， T^n 是正规算子，则

$$T=N\oplus L \quad \text{on} \quad \mathcal{H}=\mathcal{M}^{\perp}\oplus\mathcal{M}$$

对于 $\mathcal{H}$ 的某个约化 T的子空间 $\mathcal{M}$ ，其中 N 是正规算子，而 L 是指标小于或等于 $\min\{n,k+1\}.$ 的幂零算子。由于对于每个正整数 m， T^n 是正规算子当且仅当 T^{mn}是正规算子，因此再次取（不妨）一个足够大的n，使得 $L^n=O$，等价地， $\mathcal{N}(L^n)=\mathcal{M}.$ 若 T是拟正正规算子，则 L 也是拟正正规算子，因为 $\mathcal{R}(N^*)=\mathcal{R}(N)$。因此

$$\mathcal{N}(L)=\mathcal{N}(L^2)$$

由命题 4.1(e)可知。正如我们在定理 5.6 的证明中所见，这意味着

$$\mathcal{N}(L)=\mathcal{N}(L^n)=\mathcal{M} \quad \text{for every} \quad n\geq 1.$$

因此， $L=O$，因为它作用于 $\mathcal{M}.$。所以， $T=N\oplus O$ 是正规算子。 □

与推论 5.5 一样，下一个结果是定理 6.5 的一个较简单表述的特例。

推论 6.6. 假设 T 是正正规算子。若 T 是 k-拟拟亚正规算子，且 T^n 是正规算子，则 T 是正规算子。

我们以一个关于稠密值域 k-拟拟亚正规算子的结果结束本文，该结果关联到问题 5.3、定理 5.4 和定理 6.5。回顾一下，稠密值域算子是余拟正正规算子，而可逆算子既是正正规算子，也是余正正规算子。

定理 6.7. 设 T 是某个 $k.$的 k-拟拟亚正规算子

(a) 假设 T 可逆。那么 (a_1) T 和 T^{-1} 都是超正规算子（因此对任意 k，它们都是 k-拟拟亚正规算子）。(a_2) 如果对于某个 n， T^n 或 T^{-n} 中的一个是拟正规算子，那么另一个也是，而且 T 和 T^{-1} 都是正规算子。

更一般地，

(b) 如果 T 的值域稠密，且 T^n 是拟正规算子，那么 T 是正规算子。

证明。设 T 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}.$上的 k-拟拟亚正规算子

(a_1) 根据命题 6.1(b)，若一个算子可逆，则对任意 k，它是 k-拟拟亚正规当且仅当它是超正规。但可逆的超正规算子 T的逆算子也是超正规的， T^{-1} [10, 推论 7.1.9]。

(a$_2$) 如果 T可逆，那么 T^n 也可逆。如果可逆的 T^n 是拟正规，那么T^n 显然是正规的。但根据条目 (a$_1$)， T 是超正规的。因此根据 (5.3)， T 是正规的。可逆算子与其逆算子要么同时是拟正规的（因而也是正规的），所以 T^{-1}也有相同的结论。

(b) 若 T 是 k-拟拟亚正规且 $\mathcal{R}(T)^- = \mathcal{H}$，则根据命题 6.1， T 是超正规。然后应用定理 5.4，因为稠密值域算子是余拟正正规. □

References

1. T. Ando, *Operators with a norm condition*, Acta Sci. Math. (Szeged) 33 (1972), 169–178。2. E.A. Azoff 和 K.F. Clancey, *Spectral multiplicity for integrals of normal operators*, J. Op- erator Theory 3 (1980), 213–235。3. P.S. Bourdon、C.S. Kubrusly 和 D. Thompson, *Powers of posinormal Hilbert-space operators* 2022 2203 01473，( ) 可见于 https://arxiv.org/abs/ 。 .
4
P.S. Bourdon、C.S. Kubrusly、T. Le 和 D. Thompson, *Closed-range posinormal operators and their products*, Linear Algebra Appl. 671 (2023), 38–58。5. J.B. Conway, *The Theory of Subnormal Operators*, Mathematical Surveys and Monographs，第36卷，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，1991。6. J. Dixmier, *Von Neumann Algebras*, North-Holland，阿姆斯特丹，1981； *LesAlgèbres d'Opérateurs dans l'Espace Hilbertien*（*Algèbres de Von Neumann*）的译本，2 `eme ´ed.，Gauthier-Villars，巴黎，1969（1 `ere ´ed.，1957）。7. B.P. Duggal, *On nth roots of normal contractions*, Bull. London Math. Soc. 25 (1993), 74–80。8. A. Geondea, *When are products of normal operators normal*? Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie 52(100) (2009), 129–150。9. M. Itoh, *Characterization of posinormal operators*, Nihonkai Math. J. 11 (2000), 97–101。10. V.I. Istr˘at¸escu, *Introduction to Linear Operator Theory*, Marcel Dekker，纽约，1981。11. I.H. Jeon、S.H. Kim、E. Ko 和 J.E. Park, *On positive-normal operators*, Bull. Korean Math. Soc. 39 (2002), 33–41。12. L. K´erchy, *On roots of normal operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) 60 (1995), 439–449。13. C.S. Kubrusly, *Hilbert Space Operators: A Problem Solving Approach*, Birkh¨auser，波士顿，2003。14. C.S. Kubrusly, *Spectral Theory of Bounded Linear Operators*, Birkh¨auser-Springer-Switzer- land，查姆，2020。15. C.S. Kubrusly 和 B.P. Duggal, *On posinormal operators*, Adv. Math. Sci. Appl. 17 (2007), 131–148。16. C.S. Kubrusly、P.C.M. Vieira 和 J. Zanni, *Powers of posinormal operators*, Oper. Matrices 10 (2016), 15–27； *Erratum/Addendum*, Oper. Matrices 16 (2022), 1239–1242。17. P. Pietrzycki 和 J. Stochel, *Subnormal nth roots of quasinormal operators are quasinormal*, J. Funct. Anal. 280(12) (2021), #109001，14页。18. P. Pietrzycki 和 J. Stochel, *On nth roots of bounded and unbounded quasinormal operators*, Ann. Mat. Pura Appl. 202 (2023), 1313–1333。19. H. Radjavi 和 P. Rosenthal, *On roots of normal operators*, J. Math. Anal. Appl. 34 (1971), 653–664。20. H.C. Rhaly, Jr., *Posinormal operators*, J. Math. Soc. Japan 46 (1994), 587–605。21. P. Sam Johnson 和 A. Vinoth, *Product and factorization of hypo-EP operators*, Spec. Ma- trices 6 (2018), 376–382。22. J.G. Stampfli, *Hyponormal Operators*, Pacific J. Math. 12 (1962), 1453–1458。23. H. Stankovi´c, *Subnormal n-th root of matricially and spherically quasinormal pairs*, Filomat 3(16) (2023), 5325–5331。24. H. Stankovi´c, *Spherically quasinormal tuples: n-th root problem and hereditary properties*, Complex Anal. Oper. Theory, 19(6) (2025), 156:1–16。25. H. Stankovi´c 和 C.S. Kubrusly, *On roots of normal operators and extensions of Ando'sTheorem*, Ann. Funct. Anal. 16(4) (2025), 60:1–15。26. W. Wills, *Direct integrals of Hilbert spaces I*, Math. Scand. 26 (1970), 73–88。27. T. Yamazaki 和 M. Ynagida, *Relations between two inequalities and their application to paranormal operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) 69 (2003), 377–389。

Catholic University of Rio de Janeiro、 Rio de Janeiro、 Brasil
Email address: carlos@ele.puc-rio.br

Faculty of Electronic Engineering, University of Niš, Niš, Serbia
Email address: hranislav.stankovic@elfak.ni.ac.rs