arXiv:2601.07249v1 [stat.ME] 12 Jan 2026

复合线性失效率分布：性质、模拟与分析

SuchismitaDas [a,*], Akul Ameya [a], Cahyani Karunia Putri [a]

[a]*S P Jain* 全球管理学院，澳大利亚新南威尔士州悉尼卡特街*15*号，邮编*2141*

摘要

本文提出了线性失效率（LFR）模型的一种新扩展，以更好地拟合真实世界的寿命数据。该模型引入一个额外的形状参数，以提高灵活性。它有助于对一组线性失效率分布变量中的最小生存时间进行建模。我们定义了该模型，并推导了若干统计性质，例如平均剩余寿命、平均非活动时间、矩、分位数和次序统计量，同时还讨论了所提出分布的随机序结果。所提出的模型具有递增、浴盆形和反浴盆形风险率函数。我们采用最大似然估计法估计未知参数，并通过模拟研究考察估计量的表现。我们还使用三个真实数据集评估该模型，结果表明，与经典替代模型相比，该模型表现更优。

关键词：线性失效率分布、寿命分布、最大似然估计、次序统计量、随机序

1. 引言

在可靠性工程中，复杂系统往往会受到多个相互独立的应力源影响，从而导致整体退化并最终失效。对此类系统建模，需要建立一个概率框架，用以描述各个应力因素如何随时间变化并相互作用，进而决定系统的寿命。传统上，寿命分析

*通讯作者。电子邮箱：suchismita.das@spjain.org(Suchismita Das)

采用指数分布、瑞利分布和威布尔分布等经典概率分布及其各种推广形式。然而，描述更复杂失效行为的需求日益增长，推动了寿命分布推广方面的显著进展，使其在工程学、金融学、经济学和生物医学等多个领域得到广泛应用 [1–4]。

在此背景下，线性失效率分布（LFRD） [5], ，也称为线性指数分布（LED） [1], ，凭借其通过统一结构对恒定和递增失效率进行建模的能力，已成为一个重要框架。LFR 分布的累积分布函数（CDF）定义为

$$G_0(x) = 1 - \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2\right), \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0,$$

其中， α 和 β 为尺度参数。相应的风险函数为

$$h_0(x) = \alpha + \beta x, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0.$$

二次指数结构使 LFRD 能够表示具有渐进磨损机制的系统。值得注意的是，它是对两种经典分布的推广：当 $\beta = 0$时，它退化为指数分布（ED）；当 $\alpha = 0$时，它退化为瑞利分布（RD）。尽管具有很强的通用性，现实应用中的失效模式往往超出 LFRD 的建模能力，例如早期失效或浴盆形风险率。近期的方法学创新通过若干类策略扩展了模型的灵活性。

直接参数扩展包括广义线性失效率分布和广义 LED [6, 7], ，主要旨在提高形状灵活性。基于生成元的变换涵盖贝塔线性失效率分布、贝塔广义线性指数分布、库马拉斯瓦米广义线性失效率分布、库马拉斯瓦米线性指数分布和麦克唐纳广义线性失效率分布 [8–12], ，这些方法能够增强

分布偏度和尾部行为。指数化和变异方法，如指数化 GLED、变异 GLED、变异 LED、扩展 GLFRD 和指数化 Kumaraswamy LED[13–18] ，旨在引入更多风险率形状。组合与复合方法，包括扩展 LFRD、Marshall–Olkin GLED、泊松 LFRD 和几何 GLFRD [19–22], ，旨在对异质性和未观测混合进行建模。进一步的修正发展，例如修正 GLFRD 变体、新的 GLED 形式、奇广义指数 LFRD、反演 GLED、截断柯西幂 G LF RD 和修正 GLED [23–30], ，着重于改善尾部控制和风险率适应性。

本文提出一种新的三参数寿命分布，作为线性失效率模型的一种新型修正形式。Chakraborty 等人 [31] 提出了一种泊松复合最小寿命模型，以重尾 Burr 分布作为基准分布，用于复杂网络应用。然而，这类模型不太适用于可靠性数据，因为老化效应和风险率行为在其中起着重要作用。受此启发，我们提出一种复合线性失效率分布，用于建模生存数据。下面通过一个示例说明所提模型的物理依据。

假设一根飞机翼梁受到 $N > 0$ 独立应力源的作用，例如湍流、发动机振动和热应力。这些应力源中的每一个都可能独立地导致微裂纹扩展，并最终造成部件失效。设 X_1， X_2，…， X_N表示与 N 潜在冲击相关的潜在失效时间。除第一个冲击之外的潜在冲击数量服从均值为 $\lambda > 0$的泊松分布，这确保始终至少存在一次冲击，即 $N - 1 \sim$ 泊松分布(λ)。由于初始失效概率较小，每个 X_i 都是相互独立且同分布的LFRD变量，并由参数 α表征，该参数表示系统刚投入使用时固有的失效率。然而，随着

时间推移和应力暴露增加，失效率几乎随时间线性上升（βx）。因此，机翼翼梁的实际失效时间可建模为 $U = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$，这意味着当任一独立应力机制达到其临界失效阈值时，部件就会失效。

鉴于这一框架，我们建议采用这一“首次失效”方法的概率模型，评估多个应力因素作用下的部件性能。本研究将服从泊松分布的风险数量与服从线性失效率分布的潜在时间相结合，提出复合线性失效率分布（CLFRD）模型。该模型能够捕捉失效机制的变异性，从而灵活地表征现实世界中的寿命数据。因此，观测寿命由 $U = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ 给出，服从一个新的分布族，反映了此类系统中的首次失效机制。该模型能够准确预测寿命，并制定优化的维护与检查计划，以反映潜在的失效概率。

本文其余部分安排如下：第 2 节讨论我们新提出的 CLFRD模型，随后在第 3 节介绍其性质。第 4 节探讨参数估计，而第 5 节讨论模拟。第 6 节展示实证性能，最后，第 7 节给出一些总结性意见。

2. 复合线性失效率分布

设 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ 是来自 LFRD 和 $N - 1 \sim$Poisson(λ) 的随机样本，其中 $N \in \mathbb{N}$，并定义 $U = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$。$U$ 的生存函数为：

$$\bar{G}(x) = P(U \geq x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(U \geq x \mid N - 1 = n - 1) P(N - 1 = n - 1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right]^n \frac{\exp(-\lambda)\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \exp\left[-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 - \lambda + \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right], \\
&\quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta, \lambda > 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

因此，累积分布函数（CDF）为:

$$
\begin{aligned}
G(x) = 1 - \exp\left[-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 - \lambda + \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right], \\
x \geq 0, \quad \alpha, \beta, \lambda > 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

CLFRD(α, β, λ) 对应的概率密度函数（PDF）为:

$$
g(x) = \frac{(\alpha + \beta x)\left[1 + \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right]}{\exp\left[\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 + \lambda - \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right]}, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta, \lambda > 0. \tag{3}
$$

以下结果给出概率密度函数呈单峰且递减的若干条件。

定理 2.1. 设 U 为具有 *CLFRD*(α, β, λ) 的随机变量。U 的概率密度函数为:

(i) 当 $\alpha^2 < {}^{\beta}_{(1+\lambda)\ \lambda+(1+\lambda)^2}$ 时为单峰（众数位于零）。（*ii*）当 $\alpha^2 \geq {}^{\beta}_{(1+\lambda)\ \lambda+(1+\lambda)^2}$ 时递减。

证明。对 $g(x)$关于 x求导，得到:

$$
\begin{aligned}
g'(x) = \Bigg[\beta \left(1 + \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right) - \lambda(\alpha + \beta x)^2 \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 \right) \\
- (\alpha + \beta x)^2 (1 + \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 \right))^2 \Bigg] \exp\Bigg(-\alpha x - \frac{\beta}{2} x^2 - \lambda +
\end{aligned}
$$

$$\lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2\right)\Big).$$

代入 $y = \alpha x + \frac{\beta}{2}x^2$，得到

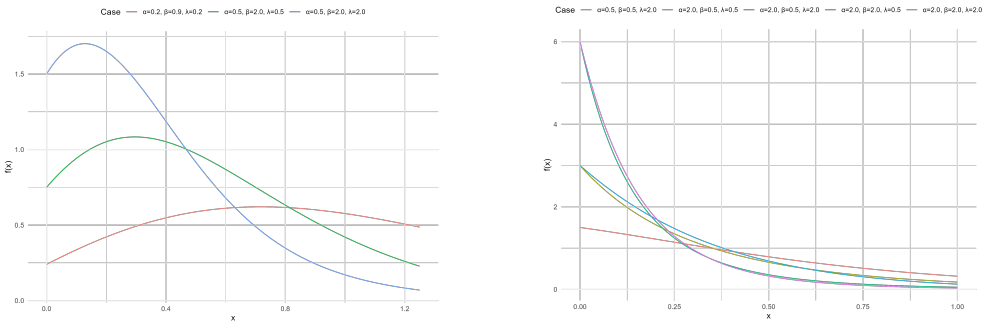
$$g'(y) = \theta(y)\exp(-y - \lambda(1 - \exp(-y))),$$

其中

$$\theta(y) = \beta[1 + \lambda\exp(-y)] - (\alpha^2 + 2\beta y)[\lambda\exp(-y) + (1 + \lambda\exp(-y))^2].$$

现在，$\theta(0) = \beta(1+\lambda) - \alpha^2(\lambda + (1+\lambda)^2)$，或者等价地，$g'(0) = \beta(1+\lambda) - \alpha^2(\lambda + (1+\lambda)^2)$，并且可以证明 $g'(y)$ 随 y 递减。因此，如果 $\alpha^2 \geq \frac{\beta(1+\lambda)}{\lambda+(1+\lambda)^2}$ 或 $\alpha^2 < \frac{\beta(1+\lambda)}{\lambda+(1+\lambda)^2}$ 在 ~~$(0,\infty)$~~ 上成立，~~则 $g'(y)$~~ 没有零点或只有一个零点。此外，由此可得 $g(0) = \alpha(1+\lambda)$ 且 $g(\infty) = 0$，并且 $g(x)$ 非负。因此，如果 $\alpha^2 < \frac{\beta(1+\lambda)}{\lambda+(1+\lambda)^2}$，~~则 $g(x)$~~ 为单峰；如果对所有 ~~$x \geq 0$~~，$\alpha^2 > \frac{\beta(1+\lambda)}{\lambda+(1+\lambda)^2}$，则其递减。 □

图 1 展示了给定的两种条件下的密度函数图。



单峰　　递增

图 1：不同参数取值对应的 CLFRD 密度函数图

风险率函数和反向风险率函数分别表示为

$U \sim$ CLFRD(α, β, λ):

$$h(x) = \frac{g(x)}{\bar{G}(x)} = (\alpha + \beta x)\left[1 + \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2\right)\right], \quad x \geq 0 \tag{4}$$

and

$$r(x) = \frac{g(x)}{G(x)} = \frac{(\alpha + \beta x)\left[1 + \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2\right)\right]}{\exp\left[\alpha x + \frac{\beta}{2}x^2 + \lambda - \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2\right)\right] - 1}, \quad x \geq 0. \tag{5}$$

以下结果给出了参数 α、β 和 λ的条件，这些条件描述了 CLFRD(α、β、λ) 的 $h(x)$ 可能呈现的形状。

定理 2.2. 设 $U \sim CLFRD(\alpha, \beta, \lambda)$。则在指定条件下，风险率函数$h(x)$ 呈现以下形状:

(i) 若满足以下条件，则 $h(x)$单调递增:

(a) $\alpha^2 < 3\beta$ *and* $0 < \log(2\lambda) \leq \frac{3\beta - \alpha^2}{2\beta}$, *or*

(b) $\alpha^2 \geq 3\beta$ *and* $\beta(1 + \lambda) \geq \lambda\alpha^2$;

(ii) 若满足以下条件，则 $h(x)$ 呈浴盆形，即先递减后递增:

(a) $\alpha^2 < 3\beta$, $\beta(1 + \lambda) \leq \lambda\alpha^2$, *and* $\log(2\lambda) > \frac{3\beta - \alpha^2}{2\beta}$, *or*

(b) $\alpha^2 \geq 3\beta$ *and* $\beta(1 + \lambda) \leq \lambda\alpha^2$;

(iii) 若满足以下条件，则 $h(x)$ 呈反浴盆形，即先递增、再递减、最后递增:

(a) $\alpha^2 < 3\beta$ *and* $\log(2\lambda) > \frac{3\beta - \alpha^2}{2\beta}$.

证明。 我们首先对风险率函数 $h(x)$ 关于 x 求导:

$$h'(x) = \beta + \lambda[\beta - (\alpha + \beta x)^2] \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2\right).$$

或者，令 $y = \alpha x + \frac{\beta}{2}x^2$ 进行代换，可得：

$$h'(y) = \beta + \lambda[\beta - \alpha^2 - 2\beta y]\exp(-y).$$

注意，初始值和极限分别为：

$$h'(0) = \beta + \lambda(\beta - \alpha^2) = \beta(1+\lambda) - \lambda\alpha^2, \quad \text{and} \quad \lim_{y\to\infty} h'(y) = \beta > 0.$$

二阶导数为 $h''(y) = \exp(-y)[2\beta y + \alpha^2 - 3\beta]$。

情况（i）： $h(x)$ 在所有 x 下均为递增函数，当且仅当 $h'(x) \geq 0$，等价地，对所有 y，$h'(y) \geq 0$。此情况发生于 $h'(0) \geq 0$ 且 $h'(y)$ 单调递增时。

现在，当 $h''(y) \geq 0$ 时，$h'(y)$ 为递增函数，这在以下条件下成立：

$$\exp(-y)[2\beta y + \alpha^2 - 3\beta] \geq 0, \quad \text{or equivalently,} \quad \alpha^2 \geq 3\beta.$$

当 $h''(y)$ 存在临界点，即 $h''(y) = 0$ 时，我们得到：

$$\exp(-y)[2\beta y + \alpha^2 - 3\beta] = 0, \quad \text{or} \quad y_0 = \frac{3\beta - \alpha^2}{2\beta} > 0, \quad \text{provided} \quad \alpha^2 \leq 3\beta.$$

在此临界点处：

$$\begin{aligned} h'(y_0) = h'\left(\frac{3\beta-\alpha^2}{2\beta}\right) &= \beta + \lambda\left[\beta - \alpha^2 - 2\beta\cdot\frac{3\beta-\alpha^2}{2\beta}\right]\exp(-y_0) \\ &= \beta + \lambda[\beta - \alpha^2 - 3\beta + \alpha^2]\exp(-y_0) = \beta - 2\beta\lambda\exp(-y_0). \end{aligned}$$

当 $0 < \log(2\lambda) \leq \frac{3\beta-\alpha^2}{2\beta}$ 时，此表达式非负。

因此，在以下条件下，$h(x)$ 递增：

(a) $\alpha^2 < 3\beta$ 且 $0 < \log(2\lambda) \leq \frac{3\beta-\alpha^2}{2\beta}$；

(b) $\alpha^2 \geq 3\beta$ 且 $\beta(1+\lambda) \geq \lambda\alpha^2$。

情况（ii）： $h(x)$呈现浴盆形，即先递减后递增，当且仅当$h'(y)$恰好有一个实零点。

以下任一条件成立时，都会出现这种情况：

(a) $h'(0) \le 0$ 且 $h'(y)$ 单调递增，或

(b) $h'(0) \le 0$ 且 $h'(y_0) \le 0$ （满足 $y_0 = \frac{3\beta-\alpha^2}{2\beta}$），而 $h'(y)$ 递增。

对于 $y > 0$，二阶导数在以下情况下为零：

$$h''(y) = e^{-y}\left[2\beta y + \alpha^2 - 3\beta\right] = 0.$$

因此，

$$y_0 = \frac{3\beta - \alpha^2}{2\beta} > 0, \qquad \text{provided } \alpha^2 < 3\beta.$$

此外，我们还要求：

$$h'(0) = \beta(1+\alpha) - \lambda\alpha^2 \le 0, \quad \text{and} \quad h'(y_0) = \beta - 2\lambda\beta\exp(-y_0) \le 0.$$

因此，当 $\alpha^2 < 3\beta$ 时，条件变为：

$$\beta(1+\alpha) - \lambda\alpha^2 \le 0, \quad \text{and} \quad \log(2\lambda) > \frac{3\beta - \alpha^2}{2\beta}.$$

当 $\alpha^2 \ge 3\beta$ 时，该条件简化为 $\beta(1+\alpha) - \lambda\alpha^2 \le 0$，其中 $h'(y)$ 随 y 递增。

情形（iii）： $h(x)$ 呈反浴盆形，即递增–递减–递增，当 $h'(0) > 0$ 且 $h'(y_0) < 0$ 时，$h'(y)$ 在超过 y_0 后递增。

这种行为出现在以下情况：

$$\alpha^2 < 3\beta, \quad \beta(1+\lambda) \ge \lambda\alpha^2, \quad \text{and} \quad \log(2\lambda) > \frac{3\beta - \alpha^2}{2\beta}.$$

这三种情形对应的风险率形状如图2所示。

□

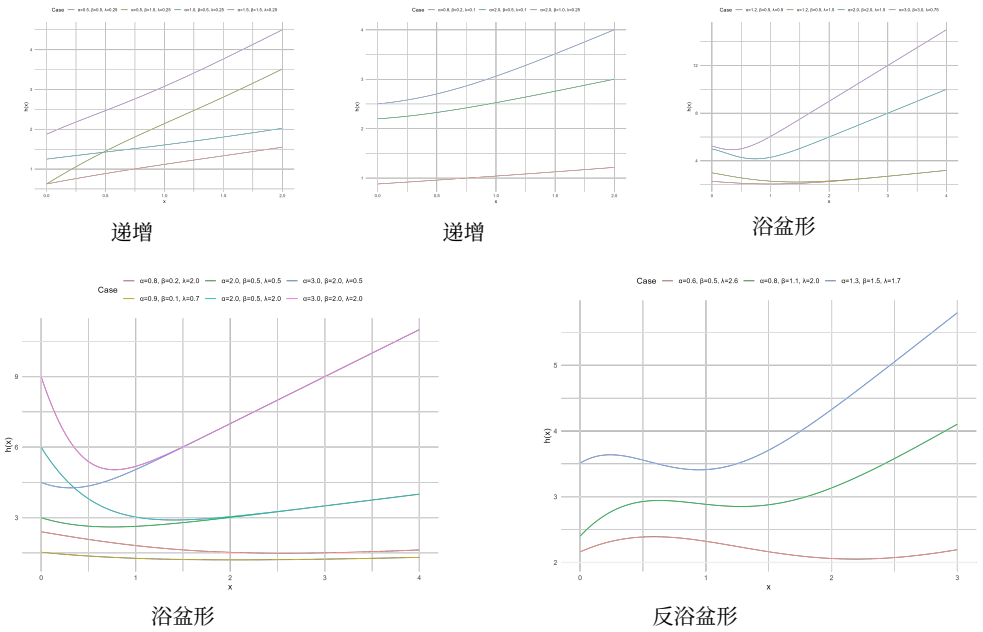


图2：不同参数取值下风险率函数的图示

3. 统计性质

在概率论与统计学中，人们已提出了不同寿命分布的各种刻画方式。本节研究了所提出模型的一些特征统计量，如平均剩余寿命（MRL）、平均失效时间（MIT）、矩和分位数，并给出了该模型关于随机序和次序统计量的相关结果。

3.1. 平均剩余寿命函数

平均剩余寿命（MRL）函数在可靠性和生存分析中非常重要。考虑一根处于观测中的飞机翼梁。假设在时刻 x 观测这根机翼翼梁，发现它尚未因任何独立应力源或冲击而失效。因此，感兴趣的变量是 $U_x = (U - x \mid U > x)$，称为剩余寿命。它表示在截至时刻 x尚未发生失效的条件下，该部件预期的剩余寿命。随机变量 $U \sim \text{CLFRD}(\alpha,\ \beta,\ \lambda)$ 的平均剩余寿命为：

$$M_U(x) = E[U - x \mid U > x] = \frac{1}{\bar{G}(x)} \int_0^\infty y\, g(y+x)\, dy$$

$$= \frac{1}{\exp\left[-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2 - \lambda + \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2\right)\right]} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j}{i} \frac{(-1)^{i+j}\lambda^j}{j!} \right.$$
$$\times \int_0^\infty y(\alpha + \beta(y+x)) \exp\left(-(i+1)\left(\alpha(y+x) + \frac{\beta}{2}(y+x)^2\right)\right) dy$$
$$+ \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j}{i} \frac{(-1)^{i+j}\lambda^j}{j!} \int_0^\infty y(\alpha + \beta(y+x))$$
$$\left. \times \exp\left(-(i+2)\left(\alpha(y+x) + \frac{\beta}{2}(y+x)^2\right)\right) dy \right].$$

Now, $$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j}{i} \frac{(-1)^{i+j}\lambda^j}{j!} \int_0^\infty y(\alpha + \beta(y+x))$$
$$\times \exp\left(-(i+1)\left(\alpha(y+x) + \frac{\beta}{2}(y+x)^2\right)\right) dy$$

$$= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \binom{j}{i} \lambda^j \beta^k 2^{-k} \frac{(-1)^{i+j+k}(i+1)^k}{j!k!} \int_0^\infty (y+x-x)(\alpha+\beta(y+x))(y+x)^{2k}$$
$$\times \exp(-(i+1)\alpha(y+x))\, dy$$

$$= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} b_{ijk} \left[\alpha \int_0^\infty (y+x)^{2k+1} \exp(-(i+1)\alpha(y+x))\, dy \right.$$
$$\left. + \beta \int_0^\infty (y+x)^{2k+2} \exp(-(i+1)\alpha(y+x))\, dy \right.$$

$$- \alpha x \int_0^\infty (y+x)^{2k} \exp(-(i+1)\alpha(y+x))\, dy$$
$$- \beta x \int_0^\infty (y+x)^{2k+1} \exp(-(i+1)\alpha(y+x))\, dy \Bigg]$$

$$= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} b_{ijk} \left[\frac{\alpha\Gamma(2k+2)}{[(i+1)\alpha]^{2k+2}} + \frac{\beta\Gamma(2k+3)}{[(i+1)\alpha]^{2k+3}} \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha x\Gamma(2k+1)}{[(i+1)\alpha]^{2k+1}} - \frac{\beta x\Gamma(2k+2)}{[(i+1)\alpha]^{2k+2}} \right].$$

因此，CLFRD(α，β，λ) 的平均剩余寿命为：

$$M_U(x) = \exp\left[\alpha x + \frac{\beta}{2}x^2 + \lambda - \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2\right)\right]$$
$$\times \left[\sum_{i,j,k=0}^{\infty} b_{ijk} \left(\frac{(\alpha+\beta x)\Gamma(2k+2)}{[(i+1)\alpha]^{2k+2}} - \frac{\alpha x\Gamma(2k+1)}{[(i+1)\alpha]^{2k+1}} + \frac{\beta\Gamma(2k+3)}{[(i+1)\alpha]^{2k+3}} \right) \right.$$
$$\left. + \lambda \sum_{i,j,k=0}^{\infty} b'_{ijk} \left(\frac{(\alpha+\beta x)\Gamma(2k+2)}{[(i+2)\alpha]^{2k+2}} - \frac{\alpha x\Gamma(2k+1)}{[(i+2)\alpha]^{2k+1}} + \frac{\beta\Gamma(2k+3)}{[(i+2)\alpha]^{2k+3}} \right) \right], \tag{6}$$

其中 $b_{ijk} = \binom{j}{i}\lambda^j\beta^k 2^{-k}(-1)^{i+j+k} \frac{}{k\binom{}{j}(i+1)^k)!!}$ 和 $b'_{ijk} = \binom{j}{i}\lambda^j\beta^k 2^{-k}(-1)^{i+j+k} \frac{}{k\binom{}{j}(i+2)^k)!!}$。

表 1 显示了 8 种不同参数组合在 $x = 0.5$ 处的平均剩余寿命值。

较大的 α 值会带来更高的平均剩余寿命，这意味着系统在 $x = 0.5$之后的平均使用寿命更长。较小的 α和 β 值会使平均剩余寿命显著增加，这意味着失效压力较小。

表 1： $x = 0.5$ 处的平均剩余寿命

α	β	λ	平均剩余寿命$_{0.5}$
2.0	2.0	2.0	0.2211234
		0.5	0.2668270
	0.5	2.0	0.2994618
		0.5	0.3773817
0.5	2.0	2.0	0.2831307
		0.5	0.3962282
	0.5	2.0	0.5214610
		0.5	0.7728661

3.2. 平均非活动时间函数

设有一根处于观测中的飞机翼梁。在大多数实际情况下，通常无法进行连续监测。假设在时刻 x观测机翼翼梁时，发现它已因任一独立冲击应力源而失效。因此，所关注的随机变量是 $U_x = (x - U \mid U \leq x)$，称为非活动时间 [32]。它表示部件在失效发生于时刻 x或之前的条件下，自失效以来经过的时间。非活动时间在维护策略的制定中发挥着重要作用。平均（期望）非活动时间，也称为反向平均剩余寿命或期望停止时间 [33], ，对于 CLFRD (α, β, λ) 定义如下：

$$
\begin{aligned}
m_U(x) = E[x - U \mid U \leq x] &= \frac{1}{G(x)} \left[\int_0^x (x-u)\, g(u)\, du \right] \\
&= \frac{1}{1 - \exp\left[-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2 - \lambda + \lambda \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{2}x^2\right)\right]} \\
&\quad \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j}{i} \frac{(-1)^{i+j} \lambda^j}{j!} \int_0^x y\, f(y)\, \bar{F}^i(y)\, dy \right]
\end{aligned}
$$

$$+\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j}{i}\frac{(-1)^{i+j}\lambda^j}{j!}\int_0^x y\,f(y)\,\bar{F}^{i+1}(y)\,dy\Bigg].$$

Now,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j}{i}\frac{(-1)^{i+j}\lambda^j}{j!}\int_0^x y\,f(y)\,\bar{F}^{i}(y)\,dy\\
&=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\binom{j}{i}\lambda^j\beta^k 2^{-k}\frac{(-1)^{i+j+k}(i+1)^k y^{2k}}{j!k!}\Bigg[\alpha\int_0^x y^{2k+1}\exp(-\alpha(i+1)y)\,dy\\
&\qquad+\beta\int_0^x y^{2k+2}\exp(-\alpha(i+1)y)\,dy\Bigg]\\
&=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\binom{j}{i}\lambda^j\beta^k 2^{-k}\frac{(-1)^{i+j+k}(i+1)^k y^{2k}}{j!k!}\Bigg(\frac{\alpha\gamma(2k+2,\alpha(i+1)x)}{[\alpha(i+1)]^{2k+2}}\\
&\qquad+\frac{\beta\gamma(2k+3,\alpha(i+1)x)}{[\alpha(i+1)]^{2k+3}}\Bigg).
\end{aligned}$$

因此，CLFRD(α，β，λ) 的 MIT 为：

$$\begin{aligned}
m_U(x) &= x-\frac{\exp\left[\alpha x+\frac{\beta}{2}x^2+\lambda-\lambda\exp\left(-\alpha x-\frac{\beta}{2}x^2\right)\right]}{\exp\left[\alpha x+\frac{\beta}{2}x^2+\lambda-\lambda\exp\left(-\alpha x-\frac{\beta}{2}x^2\right)\right]-1}\\
&\quad\times\Bigg[\sum_{i,j,k=0}^{\infty}b_{ijk}\left(\frac{\alpha\gamma(2k+2,\alpha(i+1)x)}{[\alpha(i+1)]^{2k+2}}+\frac{\beta\gamma(2k+3,\alpha(i+1)x)}{[\alpha(i+1)]^{2k+3}}\right)\\
&\quad+\lambda\sum_{i,j,k=0}^{\infty}b'_{ijk}\left(\frac{\alpha\gamma(2k+2,\alpha(i+2)x)}{[\alpha(i+2)]^{2k+2}}+\frac{\beta\gamma(2k+3,\alpha(i+2)x)}{[\alpha(i+2)]^{2k+3}}\right)\Bigg],\quad(7)
\end{aligned}$$

其中 $b_{ijk}=\binom{j}{i}\lambda^j\beta^k 2^{-k}\frac{(-1)^{i+j+k}}{k!\,(j-(i+1)^k)!!}$ 以及 $b'_{ijk}=\binom{j}{i}\lambda^j\beta^k 2^{-k}\frac{(-1)^{i+j+k}}{k!\,(j-(i+2)^k)!!}$。

表2 展示了在 $x=0.5$ 下，8 种不同参数组合对应的 MIT 值。

表2： $x = 0.5$处的平均非活动时间

α	β	λ	$\text{MIT}_{0.5}$
2.0	2.0	2.0	0.3592062
		0.5	0.3090133
	0.5	2.0	0.3578331
		0.5	0.3114150
0.5	2.0	2.0	0.2714062
		0.5	0.2417515
	0.5	2.0	0.2763928
		0.5	0.2556945

随着 α 增加，MIT 趋于降低，这意味着系统更容易发生失效。

3.3. 矩

在统计分析和应用中，矩在描述分布的关键特征和特性方面发挥着重要作用。令 $U \sim$CLFRD(α, β, λ)，则 $\lambda > 0$ 的 r^{th} 阶矩可写为:

$$E[U^r] = \mu^{(r)} = \int_0^\infty y^r g(y) dy,$$

或者，等价地,

$$\mu^{(r)} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j}{i} \frac{(-1)^{i+j}\lambda^j}{j!} \int_0^\infty y^r \, f(y) \, \bar{F}^i(y) \, dy$$
$$+ \lambda \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j}{i} \frac{(-1)^{i+j}\lambda^j}{j!} \int_0^\infty y^r \, f(y) \, \bar{F}^{i+1}(y) \, dy$$

$$= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \binom{j}{i} \lambda^j \beta^k 2^{-k} \frac{(-1)^{i+j+k}}{j!k!} \left[\frac{\alpha(i+1)^k \Gamma(r+2k+1)}{[\alpha(i+1)]^{r+2k+1}} + \frac{\beta(i+1)^k \Gamma(r+2k+2)}{[\alpha(i+1)]^{r+2k+2}} + \frac{\alpha\lambda(i+2)^k \Gamma(r+2k+1)}{[\alpha(i+2)]^{r+2k+1}} + \frac{\beta\lambda(i+2)^k \Gamma(r+2k+2)}{[\alpha(i+2)]^{r+2k+2}} \right]. \quad (8)$$

相应的原点一阶矩和二阶矩为:

$$E(U) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c_{ijk} \left[\frac{\alpha(i+1)^k \Gamma(2k+2)}{[(i+1)\alpha]^{2k+2}} + \frac{\beta(i+1)^k \Gamma(2k+3)}{[(i+1)\alpha]^{2k+3}} + \frac{\alpha\lambda(i+2)^k \Gamma(2k+2)}{[(i+2)\alpha]^{2k+2}} + \frac{\beta\lambda(i+2)^k \Gamma(2k+3)}{[(i+2)\alpha]^{2k+3}} \right],$$

and

$$E(U^2) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c_{ijk} \left[\frac{\alpha(i+1)^k \Gamma(2k+3)}{[(i+1)\alpha]^{2k+3}} + \frac{\beta(i+1)^k \Gamma(2k+4)}{[(i+1)\alpha]^{2k+4}} + \frac{\alpha\lambda(i+2)^k \Gamma(2k+3)}{[(i+2)\alpha]^{2k+3}} + \frac{\beta\lambda(i+2)^k \Gamma(2k+4)}{[(i+2)\alpha]^{2k+4}} \right],$$

其中 $c_{ijk} = \binom{j}{i} \lambda^j \beta^k 2^{-k} \frac{(-1)^{i+j+k}}{j!k!}$。

3.4. 分位数与中位数

定理 3.1。 设 $U \sim$ ***CLFRD***(α, β, λ)。因此， Q^{th} 分位数为

$$x_Q = \beta^{-1} \left[-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta[W_0(\lambda(1-Q)\exp(\lambda)) - \lambda - \log(1-Q)]} \right]. \quad (9)$$

证明。 设 $G(x) = Q$; 因此,

$$1 - Q = \exp\left(-\lambda - \alpha x - \frac{\beta}{2}x^2 + \lambda \exp\left(-(\alpha x + \frac{\beta}{2}x^2)\right)\right), \quad 0 \leq Q \leq 1,$$

这等价于

$$[\lambda + \log(1 - Q) + y] \exp(y) = \lambda, \tag{10}$$

其中 $y = \left(\alpha x + \frac{\beta}{2}x^2\right)$。假设

$$z = \lambda + \log(1 - Q) + y \quad \text{or} \quad z - \lambda - \log(1 - Q) = y. \tag{11}$$

将（11）代入（10，得到： $z\exp(z - \lambda - \log(1 - Q)) = \lambda$ 或$z \exp(z) = \lambda\exp(\lambda)(1 - Q)$。应用 Lambert W 函数可得:

$$y + \lambda + \log(1 - Q) = W_0[\lambda(1 - Q)\exp(\lambda)],$$

or,

$$y - W_0[\lambda(1 - Q)\exp(\lambda)] + \lambda + \log(1 - Q) = 0.$$

因此，CLFRD(α, β, λ) 的 Q^{th} 分位数为

$$x_Q = \beta^{-1}\left[-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta[W_0(\lambda(1 - Q)\exp(\lambda)) - \lambda - \log(1 - Q)]}\right]. \tag{12}$$

□

将 $Q = \frac{1}{2}$ 代入式（12），可得新模型的中位数:

$$x_{MD} = \beta^{-1}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta\left[W_0\left(\frac{\lambda\exp(\lambda)}{2}\right) - \lambda - \log\left(\frac{1}{2}\right)\right]}\right).$$

3.5. 随机序

在可靠性与生存分析领域，人们研究了两个随机变量之间的各种随机序关系。以下定理给出了 CLFRD 保持似然比序的条件。若对所有 $x \geq 0$, $g_X(x)/g_Y(x)$ 关于 x 递增，则称随机变量 X 在似然比序意义下大于另一个随机变量 Y（记作 $X \geq_{LR} Y$）。

定理 3.2。 设 X 和 Y 是两个分别服从 *CLFRD*、参数为 α_1, β_1, λ_1 和 α_2, β_2, λ_2 的随机变量，则 $X \geq_{LR} (\leq_{LR}) Y$，条件是

(i) $\alpha_1 \leq (\geq) \alpha_2$; ***(ii)*** $\beta_1 \leq (\geq) \beta_2$; ***(iii)*** $\lambda_1 \leq (\geq) \lambda_2$。

证明。 $X \geq_{LR} Y$当且仅当 $g_{X_{CLFRD}}(x)/g_{Y_{CLFRD}}(x)$ 关于 x 递增。现在,

$$\frac{g_{X_{CLFRD}}(x)}{g_{Y_{CLFRD}}(x)} = \frac{(\alpha_1+\beta_1 x)\left(1+\lambda_1 \exp\left[-\alpha_1 x - \frac{\beta_1}{2}x^2\right]\right)\exp\left[-\lambda_1\left(1-\exp\left(-\alpha_1 x - \frac{\beta_1}{2}x^2\right)\right)\right]}{(\alpha_2+\beta_2 x)\left(1+\lambda_2 \exp\left[-\alpha_2 x - \frac{\beta_2}{2}x^2\right]\right)\exp\left[-\lambda_2\left(1-\exp\left(-\alpha_2 x - \frac{\beta_2}{2}x^2\right)\right)\right]} \times \exp\left[(\alpha_2-\alpha_1)x + \frac{\beta_2-\beta_1}{2}x^2\right].$$

通过简单计算可以证明， $g_{X_{CLFRD}(x)}$ $g_{Y_{CLFRD}(x)}$ 关于 x 递增，若 (i) $\alpha_1 \leq \alpha_2$、(ii) $\beta_1 \leq \beta_2$ 且 (iii) $\lambda_1 \leq \lambda_2$。 □

注 3.3。 根据各种随机序与似然比序之间的关系，可得以下结论。 $X \geq_* (\leq_*) Y$ ***provided***

(i) $\alpha_1 \leq (\geq) \alpha_2$;

(ii) $\beta_1 \leq (\geq)\beta_2$;

(iii) $\lambda_1 \leq (\geq)\lambda_2$.

其中，$*$ 表示“通常随机序”、“风险率序”、“反向风险率序”、“凸序”、“凹序”、“平均剩余寿命序”、“调和平均剩余寿命序”等 [34]。

3.6. 次序统计量

设 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 是来自 CLFRD(α, β, λ) 的随机样本，其次序统计量为 $U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)}$

$U_{k:n}$ 的次序统计量概率密度函数为:

$$\begin{aligned} g_{k:n}(x) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &\times \frac{(\alpha+\beta x)[1+\lambda\exp(-\alpha x-\frac{\beta}{2}x^2)]}{\exp\left[(n-k+1)\left(\lambda+\alpha x+\frac{\beta}{2}x^2-\lambda\exp\left(-\alpha x-\frac{\beta}{2}x^2\right)\right)\right]} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\binom{k-1}{j}\frac{(-1)^j n(\alpha+\beta x)}{\exp(n+j+1-k)} \\ &\times \frac{\left(1+\lambda\exp\left(-\alpha x-\frac{\beta}{2}x^2\right)\right)}{\exp\left(\lambda+\alpha x+\frac{\beta}{2}x^2-\lambda\exp\left(-\alpha x-\frac{\beta}{2}x^2\right)\right)}. \end{aligned}$$

最小次序统计量的概率密度函数为:

$$g_{1:n}(x) = \frac{n(\alpha+\beta x)\left[1+\lambda\exp\left(-\alpha x-\frac{\beta}{2}x^2\right)\right]}{\exp\left[n\left(\lambda+\alpha x+\frac{\beta}{2}x^2-\lambda\exp\left(-\alpha x-\frac{\beta}{2}x^2\right)\right)\right]}.$$

最大次序统计量的概率密度函数为:

$$g_{n:n}(x) = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j n(\alpha+\beta x)(1+\lambda\exp(-y))\exp[-(j+1)(\lambda+y-\lambda\exp(-y))].$$

4. 估计

假设 X_1、X_2、.....、X_n 是一个容量为 n、来自参数为 α、β、λ的 CLFRD 随机样本。根据（3），参数向量 $\Theta =$（α、β、λ）^{T} 的对数似然函数可表示如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Theta) = -n\lambda - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2}\beta\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right) \\ + \sum_{i=1}^{n}\log(\alpha+\beta x_i) + \sum_{i=1}^{n}\log\left[1+\lambda\exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)\right]. \quad (13)\end{aligned}$$

以下是将对数似然函数关于参数α、β、λ的偏导数设为零后得到的正规方程:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} &= \sum_{i=1}^{n} x_i + \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha+\beta x_i} \\ &\quad - \lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)}{1+\lambda\exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta} &= -\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\alpha+\beta x_i} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2\exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)}{1+\lambda\exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} &= -n + \sum_{i=1}^{n}\frac{\exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)}{1+\lambda\exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)}\end{aligned}$$

将上述偏导数设为零并联立求解，可得到α、β、λ对应的 CLFRD 三个参数的最大似然估计值。由于这些方程没有闭式解，我们使用迭代算法对其进行数值求解。

我们进一步推导出 CLFRD 的渐近分布。然后

我们计算协方差矩阵 I^{-1}，该矩阵是观测信息矩阵的逆矩阵，可通过计算关于 α、β、λ 的对数似然函数的二阶负导数得到。由于难以找到解析解，可以使用数值方法来近似协方差矩阵。

$$
\begin{aligned}
I^{-1} &= \begin{pmatrix}
-\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha^2}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}} & -\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha \partial \beta}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}} & -\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha \partial \lambda}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}} \\
-\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha \partial \beta}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}} & -\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta^2}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}} & -\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta \partial \lambda}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}} \\
-\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha \partial \lambda}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}} & -\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta \partial \lambda}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}} & -\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}}
\end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix}
\operatorname{Var}(\hat{\alpha}) & \operatorname{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) & \operatorname{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\lambda}) \\
\operatorname{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) & \operatorname{Var}(\hat{\beta}) & \operatorname{Cov}(\hat{\beta},\hat{\lambda}) \\
\operatorname{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\lambda}) & \operatorname{Cov}(\hat{\beta},\hat{\lambda}) & \operatorname{Var}(\hat{\lambda})
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

I^{-1} 中的导数如下：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha^2} &= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2} x_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\alpha + \beta x_i)^2} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda x_i^2 \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2} x_i^2\right)}{\left(\lambda + \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2} x_i^2\right)\right)^2} \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2} x_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{(\alpha + \beta x_i)^2} \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3 \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2} x_i^2\right)}{\left(1 + \lambda \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2} x_i^2\right)\right)^2} \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha \partial \lambda} &= -\sum_{i=1}^{n} x_i \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2} x_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2} x_i^2\right)}{\left(1 + \lambda \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2} x_i^2\right)\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta^2} = \frac{\lambda}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i^2(\alpha+\beta x_i)^{-2} + \frac{\lambda}{4}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^4 \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)}{\left(1+\lambda \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta \partial \lambda} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)}{\left(1+\lambda \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\exp\left(-2(\alpha x_i + \frac{\beta}{2}x_i^2)\right)}{\left(1+\lambda \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta}{2}x_i^2\right)\right)^2}$$

α, β, λ 的最大似然估计值的渐近分布可写为

$$\left(\hat{\theta} - \theta\right) \sim N_3\left(0, I^{-1}(\hat{\theta})\right), \quad \text{where} \quad \hat{\theta} = \left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}\right)$$

然后，我们可以求得 α, β, λ 的 100(1 − p)% 置信区间，分别为 $\hat{\alpha} \pm z_{p/2}\sqrt{Var(\hat{\alpha})}$、$\hat{\beta} \pm z_{p/2}\sqrt{Var(\hat{\beta})}$ 和 $\hat{\lambda} \pm z_{p/2}\sqrt{Var(\hat{\lambda})}$。其中，$z_{p/2}$ 是标准正态分布的上侧 $100p$ 分位数。

5. 模拟研究

本节通过模拟研究检验 CLFRD 中最大似然估计量的特性。结果表明，最大似然估计方法能够为 CLFRD 提供可靠的估计值。每种配置均重复模拟 5000 次。我们考虑了 α、β、λ 的八种不同参数集，例如 (2.0, 2.0, 2.0)、(2.0, 2.0, 0.5)、(2.0, 0.5, 2.0)、(2.0, 0.5, 0.5)、(0.5, 2.0, 2.0)、(0.5, 2.0, 0.5)、(0.5, 0.5, 2.0) 和 (0.5, 0.5, 0.5)，并使用 (9) 从 CLFRD 中生成样本量为 $n = 100$、200 和 300 的数据集。表3至表10报告了每组参数 α、β、λ 的估计值均值和标准差（SD）、偏差、均方误差（MSE）以及 95%置信区间。置信区间以其下界（下限）、上界（上限）和置信区间宽度（CIW）表示（CIW = 上限 - 下限）。每组结果均以表格形式呈现

对应于各自的参数配置和样本量。

表3：参数集1（$\alpha = 2.0,\ \beta = 2.0,\ \lambda = 2.0$）

n		MLE	Bias	SD	MSE	Low	Up	CIW
100	α	2.65	0.65	1.101	1.632	0.49	4.81	4.32
	β	2.41	0.41	2.092	4.542	−1.69	6.51	8.20
	λ	4.07	2.07	18.239	336.867	−31.68	39.82	71.49
200	α	2.55	0.55	1.042	1.385	0.50	4.59	4.09
	β	2.07	0.07	1.507	2.275	−0.89	5.02	5.91
	λ	2.15	0.15	5.817	33.847	−9.26	13.55	22.80
300	α	2.49	0.49	1.025	1.294	0.48	4.50	4.02
	β	1.93	−0.07	1.248	1.561	−0.51	4.38	4.89
	λ	1.96	−0.04	1.920	3.687	−1.80	5.73	7.53

表 4：参数集 2（$\alpha = 2.0,\ \beta = 2.0,\ \lambda = 0.5$）

n		MLE	Bias	SD	MSE	Low	Up	CIW
100	α	1.82	−0.18	0.650	0.454	0.55	3.10	2.55
	β	2.17	0.17	1.132	1.309	−0.05	4.39	4.44
	λ	0.83	0.33	0.853	0.837	−0.84	2.50	3.34
200	α	1.86	−0.14	0.633	0.419	0.62	3.10	2.48
	β	1.99	−0.01	0.782	0.612	0.46	3.52	3.07
	λ	0.81	0.31	0.859	0.832	−0.88	2.49	3.37
300	α	1.88	−0.12	0.621	0.399	0.67	3.10	2.43
	β	1.95	−0.05	0.661	0.440	0.65	3.24	2.59
	λ	0.78	0.28	0.837	0.780	−0.86	2.42	3.28

表 5：参数集 3（$\alpha = 2.0,\ \beta = 0.5,\ \lambda = 2.0$）

n		MLE	Bias	SD	MSE	Low	Up	CIW
100	α	2.41	0.41	0.844	0.876	0.75	4.06	3.31
	β	1.05	0.55	1.424	2.332	−1.74	3.84	5.58
	λ	1.97	−0.03	5.460	29.802	−8.73	12.68	21.40
200	α	2.31	0.31	0.792	0.721	0.76	3.86	3.10
	β	0.67	0.17	0.830	0.718	−0.95	2.30	3.25
	λ	1.92	−0.08	1.199	1.443	−0.43	4.27	4.70
300	α	2.26	0.26	0.756	0.638	0.78	3.74	2.96
	β	0.56	0.06	0.638	0.411	−0.69	1.81	2.50
	λ	1.98	−0.02	1.195	1.427	−0.36	4.32	4.68

表 6：参数集 4（$\alpha = 2.0,\ \beta = 0.5,\ \lambda = 0.5$）

n		MLE	Bias	SD	MSE	Low	Up	CIW
100	α	1.81	−0.19	0.533	0.322	0.76	2.85	2.09
	β	0.77	0.27	0.656	0.500	−0.52	2.05	2.57
	λ	0.76	0.26	0.650	0.492	−0.51	2.04	2.55
200	α	1.87	−0.13	0.519	0.287	0.85	2.88	2.03
	β	0.62	0.12	0.461	0.227	−0.28	1.53	1.81
	λ	0.71	0.21	0.562	0.360	−0.39	1.81	2.20
300	α	1.89	−0.11	0.515	0.277	0.88	2.90	2.02
	β	0.58	0.08	0.406	0.170	−0.22	1.37	1.59
	λ	0.68	0.18	0.530	0.315	−0.36	1.72	2.08

表 7：参数集 5（$\alpha = 0.5,\ \beta = 2.0,\ \lambda = 2.0$）

n		MLE	Bias	SD	MSE	Low	Up	CIW
100	α	0.81	0.31	0.529	0.379	−0.22	1.85	2.07
	β	2.45	0.45	1.157	1.541	0.18	4.72	4.53
	λ	2.96	0.96	11.355	129.838	−19.29	25.22	44.51
200	α	0.72	0.22	0.445	0.246	−0.16	1.59	1.75
	β	2.29	0.29	0.945	0.977	0.44	4.14	3.70
	λ	2.05	0.05	3.756	14.106	−5.31	9.41	14.72
300	α	0.66	0.16	0.382	0.172	−0.09	1.41	1.50
	β	2.22	0.22	0.851	0.772	0.55	3.89	3.34
	λ	2.01	0.01	1.991	3.965	−1.89	5.92	7.81

表8：参数集6（$\alpha = 0.5, \beta = 2.0, \lambda = 0.5$）

n		MLE	Bias	SD	MSE	Low	Up	CIW
100	α	0.55	0.05	0.301	0.093	−0.04	1.14	1.18
	β	1.95	−0.05	0.627	0.396	0.72	3.18	2.46
	λ	0.71	0.21	1.061	1.167	−1.37	2.79	4.16
200	α	0.55	0.05	0.262	0.071	0.04	1.07	1.03
	β	1.92	−0.08	0.472	0.228	1.00	2.85	1.85
	λ	0.66	0.16	0.964	0.955	−1.23	2.55	3.78
300	α	0.55	0.05	0.237	0.059	0.09	1.02	0.93
	β	1.94	−0.06	0.402	0.165	1.15	2.72	1.57
	λ	0.62	0.12	0.869	0.768	−1.09	2.32	3.41

表9：参数集7（$\alpha = 0.5, \beta = 0.5, \lambda = 2.0$）

n		MLE	Bias	SD	MSE	Low	Up	CIW
100	α	0.77	0.27	0.377	0.214	0.03	1.51	1.48
	β	0.62	0.12	0.367	0.149	−0.10	1.34	1.44
	λ	1.54	−0.46	1.687	3.054	−1.76	4.85	6.61
200	α	0.70	0.20	0.363	0.173	−0.01	1.42	1.42
	β	0.54	0.04	0.257	0.068	0.04	1.05	1.01
	λ	1.82	−0.18	1.718	2.983	−1.55	5.19	6.74
300	α	0.66	0.16	0.342	0.144	−0.01	1.33	1.34
	β	0.52	0.02	0.221	0.049	0.09	0.96	0.87
	λ	1.95	−0.05	1.741	3.031	−1.46	5.36	6.82

表10：参数集 8（$\alpha = 0.5,\ \beta = 0.5,\ \lambda = 0.5$）

n		MLE	Bias	SD	MSE	Low	Up	CIW
100	α	0.51	0.01	0.228	0.052	0.07	0.96	0.90
	β	0.48	−0.02	0.188	0.036	0.12	0.85	0.74
	λ	0.77	0.27	1.100	1.283	−1.39	2.93	4.31
200	α	0.52	0.02	0.214	0.046	0.11	0.94	0.84
	β	0.47	−0.03	0.134	0.019	0.20	0.73	0.53
	λ	0.71	0.21	1.019	1.084	−1.28	2.71	3.99
300	α	0.53	0.03	0.203	0.042	0.13	0.93	0.80
	β	0.47	−0.03	0.114	0.014	0.24	0.69	0.45
	λ	0.67	0.17	0.966	0.961	−1.22	2.56	3.79

ˆ ˆ 我们观察到，通过 MLE 获得的估计量 $\hat{}\alpha,\ \beta,\ \lambda$ 的偏差、标准差、均方误差和置信区间宽度往往会随着样本量从 $n = 100$ 增加到 $n = 300$ 而减小。

6. 数据分析

本节使用真实数据，将所提出的 CLFRD模型与现有寿命模型进行比较，以评估其实际表现。对于每个数据集，我们将所提出的 CLFRD模型与 LFRD、RD、ED 和 GED 等知名模型进行比较 [2]。对于每个模型，我们计算了最大似然估计值及相应的负对数似然值 $(\mathcal{L})$ 。此外，还使用 Kolmogorov–Smirnov（K-S检验）检验对拟合优度进行了进一步评估。同时计算了安德森–达林检验（AD）和克拉默–冯·米塞斯检验（CM）统计量，以及各模型的 AIC值，并将 CLFRD模型作为基准。我们推导了方差-协方差矩阵。此外，还绘制了经验生存函数与拟合生存函数的对比图，以直观展示各模型的表现。

6.1. 样本数据*1*

该数据集由48名学生在数学[35]方面取得的分数组成。 表 11 展示了该数据集，表12 展示了基于该数据集计算得到的最大似然估计值。

表11：48名学生的数学成绩

4	5	6	6	7	7	8	11	12	12	13	14
14	15	15	15	15	15	18	18	18	19	19	19
20	21	21	23	23	23	25	27	28	29	31	34
34	37	39	40	44	50	50	58	60	65	70	86

表12：模型参数的最大似然估计

模型	MLEs
LFRD	$\alpha = 1.55 \times 10^{-2}$, $\beta = 1.19 \times 10^{-3}$
RD	$\sigma = 22.4669$
ED	$\lambda = 3.86 \times 10^{-2}$
GED	$\lambda = 6.55 \times 10^{-2}$, $\alpha = 2.5212$
CLFRD	$\alpha = 6.19 \times 10^{-4}$, $\beta = 1.02 \times 10^{-3}$, $\lambda = 1.7140$

如表13所示，除 GED 模型外，CLFRD 模型的对数似然值高于其他模型。K-S 检验还表明，CLFRD 和 GED 模型是最佳拟合模型，能够很好地捕捉数据结构。它们的 p 值也最高。AIC 值显示，CLFRD 模型与 LFRD、GRD 和 GED 模型非常相似。

表13：模型比较结果

模型	$-2\mathcal{L}$	K-S	p-值	AIC	AD	CM
LFRD	400.32	0.1365	0.3326	402.321	0.9246	0.1615
RD	404.30	0.2171	0.0216	404.309	3.0924	0.5876
ED	408.40	0.2042	0.0365	408.392	2.5876	0.4469
GED	393.62	0.0937	0.7935	395.616	0.3521	0.0594
CLFRD	396.10	0.1190	0.5048	400.108	0.7048	0.1197

CLFRD 模型参数的方差-协方差矩阵如下：

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1.19 \times 10^{-5} & -5.25 \times 10^{-7} & -7.94 \times 10^{-4} \\ -5.25 \times 10^{-7} & 2.20 \times 10^{-7} & -4.09 \times 10^{-4} \\ -7.94 \times 10^{-4} & -4.09 \times 10^{-4} & 1.2705 \end{bmatrix}.$$

6.2. 样本数据 *2*

该数据集包含 36 台电器接受自动寿命试验后得到的失效时间 [36]。为便于计算，我们将每个数值都除以 1000。表 14展示了该数据集，而表 15展示了根据该数据集计算出的最大似然估计值。

表 14：36 台电器的失效时间

11	35	49	170	329	381	708	958	1062
1167	1594	1925	1990	2223	2327	2400	2451	2471
2551	2565	2568	2694	2702	2761	2831	3034	3059
3112	3214	3478	3504	4329	6367	6976	7846	13403

表 15：模型参数的最大似然估计

模型	MLEs
LFRD	$\alpha = 0.3254$, $\beta = 1.47 \times 10^{-2}$
RD	$\sigma = 2.6473$
ED	$\lambda = 0.3627$
GED	$\lambda = 0.3535$, $\alpha = 0.9603$
CLFRD	$\alpha = 6.38 \times 10^{-2}$, $\beta = 2.58 \times 10^{-2}$, $\lambda = 2.7986$

如表 16所示，CLFRD模型的对数似然值高于其他模型。基础 LFRD 模型与我们提出的模型相似。K-S检验也表明，CLFRD模型拟合良好，能够很好地捕捉数据结构。AIC值显示，CLFRD模型与LFRD相似。

表16：模型比较结果

模型	$-2\mathcal{L}$	K-S	p-值	AIC	AD	CM
LFRD	144.72	0.1743	0.1993	146.719	1.3549	0.2536
RD	182.12	0.2841	0.0046	182.117	7.6518	0.9272
ED	145.02	0.1970	0.1064	145.013	1.4970	0.2995
GED	144.98	0.2021	0.0914	146.977	1.5298	0.3145
CLFRD	143.28	0.1551	0.3181	147.285	1.2365	0.2017

CLFRD 参数的方差-协方差矩阵如下：

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} 2.25 \times 10^{-3} & 4.27 \times 10^{-4} & -9.27 \times 10^{-2} \\ 4.27 \times 10^{-4} & 4.98 \times 10^{-4} & -3.96 \times 10^{-2} \\ -9.27 \times 10^{-2} & -3.96 \times 10^{-2} & 5.4571 \end{bmatrix}.$$

6.3. 样本数据 *3*

该数据集由 50 台设备的寿命数据组成 [37]。 表 17 展示了该数据集，而表 18 展示了根据该数据集计算得出的最大似然估计值。

表 17：50 台设备的寿命

0.1	0.2	1	1	1	1	1	2	3	6
7	11	12	18	18	18	18	18	21	32
36	40	45	46	47	50	55	60	63	63
67	67	67	67	72	75	79	82	82	83
84	84	84	85	85	85	85	85	86	86

表 18：模型参数的最大似然估计

模型	MLEs
LFRD	$\alpha = 1.36 \times 10^{-2}$, $\beta = 2.40 \times 10^{-4}$
RD	$\sigma = 39.6472$
ED	$\lambda = 2.19 \times 10^{-2}$
GED	$\lambda = 1.87 \times 10^{-2}$, $\alpha = 0.7802$
CLFRD	$\alpha = 1.60 \times 10^{-2}$, $\beta = 1.57 \times 10^{-4}$, $\lambda = 5.57 \times 10^{-3}$

如表19所示，CLFRD模型的对数似然值高于其他模型。基础LFRD模型与我们提出的模型相似。K-S检验也表明，CLFRD模型是拟合效果最佳的模型，能够很好地捕捉数据结构，且其p值最高。AIC值表明，CLFRD的表现不逊于ED和RD，并且与基础LFRD非常相似。

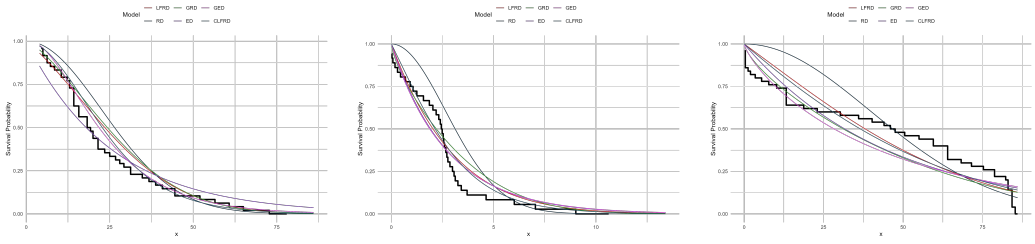
表19：模型比较结果

模型	$-2\mathcal{L}$	K-S	p 值	AIC	AD	CM
LFRD	476.12	0.1769	0.0876	478.127	4.0346	0.4627
RD	528.10	0.2621	0.0021	528.106	13.3206	0.7913
ED	482.18	0.1913	0.0515	482.179	3.6542	0.5199
GED	480.00	0.2044	0.0307	481.990	3.2585	0.5667
CLFRD	476.84	0.1744	0.0956	480.829	3.6818	0.4420

CLFRD参数的方差-协方差矩阵如下：

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} 5.237884 \times 10^{-5} & -3.919999 \times 10^{-7} & -2.867154 \times 10^{-3} \\ -3.919999 \times 10^{-7} & 9.795843 \times 10^{-9} & 8.299924 \times 10^{-6} \\ -2.867154 \times 10^{-3} & 8.299924 \times 10^{-6} & 2.409978 \times 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

最后，图中直观比较了各个模型的经验生存函数和拟合生存函数：图3。可以看出，对于所有数据集，CLFRD模型都与经验生存函数高度吻合。



样本数据1　　样本数据 2　　样本数据 3

图3：拟合生存函数与经验生存函数

7. 结论

本文对新提出的复合线性失效率分布（CLFRD）进行了全面的理论、统计和计算分析。该分布是经典线性失效率模型的三参数扩展。我们通过推导其关键性质奠定了CLFRD的数学基础，这些性质包括概率密度函数、风险率函数、反向风险率函数、平均剩余寿命和平均非活动时间；同时还表明，通过参数约化，该分布可以推广指数分布和瑞利分布。我们进一步通过矩计算、分位数分析和次序统计量刻画了该模型的行为。我们构建了完整的基于似然的推断程序，包括观测信息矩阵，从而能够稳健地估计参数，并计算方差—协方差结构。通过系统而详细的模拟研究和比较性实证分析，我们验证了CLFRD在灵活刻画复杂失效模式方面的优势，同时也证明了其具有实际可行性。该模型兼具理论上的一般性与计算上的易处理性，展现出良好的应用前景，尤其适用于可靠性工程和生存分析领域中具有非标准风险率特征的系统。

参考文献

[1] A.Sen，G. K. Bhattacharyya，线性失效率模型的推断程序，Journal of Statistical Planning and Inference 46 (1) (1995) 59–76。doi:10.1016/0378-3758(94)00099-H。

[2] R. D. Gupta, D. Kundu，理论与方法：广义指数分布，Australian & New Zealand Journal of Statistics 41 (2) (1999) 173–188. doi:10.1111/1467-842X.00072.

[3] G. S. Mudholkar, D. K. Srivastava，用于分析浴缸型失效率数据的幂指数威布尔族，IEEE可靠性汇刊 42 (2) (1993) 299–302. doi:10.1109/24.229504.[4] A. E.-B. A. Ahmad, M. G. M. Ghazal，幂指数加性威布尔分布，可靠性工程与系统安全 193 (2020) 106663.doi:10.1016/j.ress.2019.106663.[5] L. J. Bain，线性失效率寿命试验分布的分析，《技术计量学》16 (4) (1974) 551–559. doi:10.1080/00401706.1974.10489237.[6] A. M. Sarhan, D. Kundu，广义线性失效率分布，统计学通讯：理论与方法 38 (5) (2009年) 642– 660. doi:10.1080/03610920802272414.[7] M. A. W. Mahmoud, F. M. A. Alam，广义线性指数分布，《统计与概率快报》80 (11–12) (2010) 1005– 1014. doi:10.1016/j.spl.2010.02.015.[8] A. A. Jafari, E. Mahmoudi，贝塔线性失效率分布及其应用，伊朗统计学会会刊 (JIRSS) 14 (2012) 89–105.[9] M. K. Shakhatreh, A. Yusuf, A.-R. Mugdadi，贝塔广义线性指数分布，《统计学》50 (6) (2016) 1346–1362. doi:10.1080/02331888.2016.1230617.[10] I. Elbatal，Ku maraswamy广义线性失效率分布，《印度计算与应用数学杂志》1 (1) (2013) 61–78.[11] F. Merovci, I. Elbatal，线性指数分布的一种新推广：理论与应用，《统计应用与概率快报杂志》2 (1) (2015) 1–14.

[12] I. Elbatal, F. Merovci, W. Marzouk, Mcdonald广义线性失效率分布,《巴基斯坦统计与运筹研究杂志》10 (3) (2014) 267–288. doi:10.18187/pjsor.v10i3.687.[13] A. M. Sarhan, A. E.-B. A. Ah mad, I. A. Alasbahi, 幂化广义线性指数分布,《应用数学建模》37 (5) (2013) 2838–2849. doi:10.1016/j.apm.2012.06.019.[14] I. Elbatal, L. S. Diab, N. A. A. Alim, 变换广义线性指数分布,《国际计算机应用杂志》83 (17) (2013) 29–37. doi:10.5120/14671-2681.[15]S. Ghosh, K. K. Kataria, P. Vellaisamy, 关于变换广义线性指数分布,《统计学通讯：理论与方法》50 (9) (2021) 1978–2000. doi:10.1080/03610926.2019.1655577.[16] Y. Tian, M. Tian, Q. Zhu, 变换线性指数分布：线性指数分布的一种新推广,《统计学通讯：模拟与计算》43 (10) (2014) 2661–2677. doi:10.1080/03610918.2013.763978.
[17] M. R. Kazemi, A. A. Jafari, S. Tahmasebi, 广义线性失效率分布的一种扩展,《统计学通讯：理论与方法》46 (16) (2016) 7916–7933. doi:10.1080/03610926.2016.1167905.[18]S. Nasiru, A. Luguterah, K. Nantomah, 幂化库马拉斯瓦米线性指数分布：理论与应用,《索哈格数学杂志》5 (1) (2018) 1–8. doi:10.18576/sjm/050101.

[19] M. E. Ghitany、S. Kotz，扩展线性失效的可靠性性质 -

率分布，《工程学与信息科学中的概率》21 (3) (2007年) 441–450。
doi:10.1017/S0269964807000071。

[20] H. M. Okasha、M. Kayid，《一种新的 Marshall–Olkin 扩展广义线性指数分布族》，计算与应用数学杂志 296 (2016) 576–592。
doi:10.1016/j.cam.2015.10.017。

[21] G. M. Cordeiro、E. Ortega、A. Lemonte，《泊松广义线性失效率模型》，《统计学通讯：理论与方法》44 (10) (2015) 2037–2058。
doi:10.1080/03610926.2013.771749。

[22] S. Nadarajah、F. Shahsanaei、S. Rezaei，《一种新的四参数寿命分布》，统计计算与模拟杂志 84 (2) (2012)248–263。
doi:10.1080/00949655.2012.705284。

[23]E. B. Jamkhaneh，修正的广义线性失效率分布：性质与可靠性分析，《国际工业工程计算》5 (3) (2014) 375–386.
doi:10.5267/j.ijiec.2014.4.005.

[24] A. H. Khan，T. R. Jan，新的修正广义线性失效率分布，《统计应用与概率快报杂志》3 (2) (2016) 83–95. doi:10.18576/jsapl/030203.

[25] Y. Tian，M. Tian，Q. Zhu，一种新的广义线性指数分布及其应用，《应用数学学报（英文版）》30 (4) (2014) 1049–1062.
doi:10.1007/s10255-014-0442-4.

[26] N. Poonia, S. Azad，《一种新的指数化广义线性指数分布：性质与应用》，RMS: Research in Mathemat- ics & Statistics 8 (1) (2021) 1953233. doi:10.1080/27658449.2021.1953233。

[27] A. Mustafa, M. El-Damcese, B. S. El-Desouky, M. E. Mustafa, 《奇数广义指数线性失效率分布》, 统计应用与概率期刊 5 (2) (2016) 299–309. doi:10.18576/jsap/050211。[28] M. A. W. Mahmoud, M. G. M. Ghazal, H. M. M. Radwan, 《反向广义线性指数分布作为寿命模型》, 应用数学与信息科学 11 (6) (2017) 1747–1765. doi:10.18576/amis/110622。[29] N. Alsadat, M. Elgarhy, A. S. Hassan, H. Ahmad, A. E.-H. Eisa, 《线性失效率分布的一种新扩展及其估计、模拟与应用》, AIP Advances 13 (10) (2023) 105019. doi:10.1063/5.0170297。[30] M. Mahmoud, M. Ghazal, H. Radwan, 《修正的广义线性指数分布：性质与应用》, 《统计学》、优化与信息计算 12 (1) (2023) 231–255. doi:10.19139/soic-2310-5070-1103。[31] T. Chakraborty, S. Chattopadhyay, S. Das, S. M. Naik, C. Hens, 《一种用于拟合重尾数据的复合 Burr 概率分布及其在生物网络中的应用》, Chaos 35 (6) (2025) 061103.doi:10.1063/5.0270403。[32] J. M. Ruiz, J. Navarro, 《基于双重截断分布条件期望的刻画》, 统计数学研究所年刊 48 (1996) 563–572. doi:10.1007/BF00050855。[33] J. Navarro, F. Belzunce, J. M. Ruiz, 《基于双重截断的新随机序》, 工程与信息科学中的概率 11 (3) (1997) 395–402. doi:10.1017/S0269964800004915。

[34] M. Shaked、J. G. Shanthikumar，《随机序》，第1版，施普林格，纽约，NY，2007年。doi:10.1007/978-0-387-34675-5。[35]R. D. Gupta、D. Kundu，一类新的加权指数分布，《统计学》43 (6) (2009年) 621–634。doi:10.1080/02331880802605346。[36] J. F. Lawless，《寿命数据的统计模型与方法》，约翰·威立父子公司，纽约，1982年。doi:10.1002/9781118033005。[37] M. V. Aarset，如何识别浴盆型风险率，《IEEE可靠性汇刊》R-36 (1) (1987年) 106–108。doi:10.1109/TR.1987.5222310。