arXiv:2601.07286v1 [math.FA] 12 Jan 2026

e^{(A+B)t}与e^{At}e^{Bt}的三次和四次系数的弱主序不等式

张腾

摘要。设 $A,\ B\in\mathbb{H}_n$ 并令 $H=A+B$。对每个整数 $k\ge 1$，定义

$$Q_k:=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}A^pB^{k-p},\qquad R_k:=\operatorname{Re}Q_k=\frac{Q_k+Q_k^*}{2}.$$

则 $H^k=\frac{d^k}{dt^k}e^{Ht}\Big|_{t=0}$ 且 $Q_k=\frac{d^k}{dt^k}\left(e^{At}e^{Bt}\right)\Big|_{t=0}$。我们证明，对于 $k=3,\ 4$，

$$\lambda(H^k)\prec_w\sigma(Q_k).$$

等价地，$e^{(A+B)t}$ 的三次和四次泰勒系数的特征值被Golden–Thompson乘积 $e^{At}e^{Bt}$的相应系数的奇异值弱主序。我们的论证结合了Ky Fan变分原理与关于 R_k-H^k 的显式交换子恒等式（阶数为 $k=3,\ 4$），从而将问题归结为：检验某些双重交换子迹型在Ky Fan极大化投影下的正性。我们还记录了一个基于交换子分解、适用于更高阶的通用充分条件。

1. 引言

设 $\mathbb{M}_n$ 为 $n\times n$ 复矩阵空间，$\mathbb{H}_n\subset\mathbb{M}_n$ 为厄米矩阵空间。我们用 $\preceq$ 表示 $\mathbb{H}_n$上的通常 Loewner 序。对于 $X\in\mathbb{H}_n$，记

$$\lambda(X)=\big(\lambda_1(X),\dots,\lambda_n(X)\big)$$

表示按非递增顺序排列的特征值。对于 $Y\in\mathbb{M}_n$，记

$$\sigma(Y)=\big(\sigma_1(Y),\dots,\sigma_n(Y)\big)$$

表示按非递增顺序排列的奇异值。

给定 $x,\ y\in\mathbb{R}^n$（均按非递增顺序排列），若 x 被 y弱支配，记作 $x\prec_w y$，则

$$\sum_{i=1}^{r}x_i\le\sum_{i=1}^{r}y_i,\qquad r=1,\dots,n.$$

如果等式对于 $r=n$ 也成立，我们称 x 被 y 支配，记为 $x\prec y$。若 $x,y\in\mathbb{R}^n_+$，我们称 x 被 y弱对数支配，记为 $x\prec_{w\log}y$，如果

$$\prod_{i=1}^{r}x_i\le\prod_{i=1}^{r}y_i,\qquad r=1,\dots,n.$$

如果等式对于 $r=n$ 也成立，我们称 x 被 对数支配，y，记作 $x\prec_{\log}y$。关于矩阵支配的背景知识，请参见 [19]。

2020 数学主题分类。 15A42, 15A60。关键词与短语。厄米矩阵；奇异值；弱主序；Ky Fan 原理；交换子。

Golden–Thompson不等式断言，对于所有 $A,\ B \in \mathbb{H}_n$,

$$\operatorname{Tr} e^{A+B} \le \operatorname{Tr}\left(e^A e^B\right), \tag{1.1}$$

当且仅当 A 与 B 可交换时 [18, 21]。Thompson 证明了更强的对数主序精化 [22]

$$\lambda(e^{A+B}) \prec_{\log} \lambda(e^A e^B). \tag{1.2}$$

注意， $e^A e^B$ 与正定矩阵 $e^{B/2} e^A e^{B/2}$相似，因此其特征值均为正，且可按非递增顺序排列。进一步的研究请参见 [1, 3, 4, 5, 7, 11, 14, 15, 16, 20]。

(1.1) 和 (1.2) 都比较了 完整的 矩阵指数。Lie–Trotter乘积公式 [17, 23]:

$$e^{t(A+B)} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{t}{n}A} e^{\frac{t}{n}B}\right)^n. \tag{1.3}$$

特别地，乘积 $e^{tA}e^{tB}$ 是用于近似 $e^{t(A+B)}$的基本一阶分裂步，这引出了一个问题：能否从谱的角度比较 $e^{(A+B)t}$ 和 $e^{At}e^{Bt}$ 在 $t=0$处的泰勒系数?

Baker–Campbell–Hausdorff（BCH）公式 [2, 6, 8, 12, 13] 精确说明了 A 与 B 的非交换性如何体现：对于足够小的 t,

$$\log\left(e^{tA}e^{tB}\right) = t(A+B) + \frac{t^2}{2}[A,B] + \frac{t^3}{12}\left([A,[A,B]] + [B,[B,A]]\right) + \cdots.$$

等价地，在 $t=0$ 处展开两边可得

$$e^{(A+B)t} = I + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \cdots,$$

而

$$e^{At}e^{Bt} = I + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots,$$

因此，最初的差异已出现在二阶导数中，并由交换子所决定:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\left(e^{At}e^{Bt} - e^{(A+B)t}\right) = [A,B].$$

高阶导数刻画了BCH所预示的高阶嵌套交换子，因此以逐项系数的方式更精细地揭示了乘积 $e^{At}e^{Bt}$ 偏离$e^{(A+B)t}$的程度。这促使我们研究在 $t=0$处的导数（或泰勒系数）的谱不等式，将其作为（1.1）和（1.2）的局部对应结果。

本文的结果表明，在阶数为 $k=3,\ 4$ 时，两种展开之间的偏差可以整理为显式的交换子项；用Ky Fan谱投影进行检验时，这些交换子项是非负的，从而得到弱主序不等式$\lambda(H^k) \prec_w \sigma(Q_k)$。

固定 $A,\ B \in \mathbb{H}_n$ 并令 $H = A + B$。在 $t=0$ 处展开可得

$$e^{Ht} = I + Ht + \frac{H^2}{2}t^2 + \frac{H^3}{3!}t^3 + \frac{H^4}{4!}t^4 + \cdots,$$

and

$$e^{At}e^{Bt} = I + Q_1 t + \frac{Q_2}{2}t^2 + \frac{Q_3}{3!}t^3 + \frac{Q_4}{4!}t^4 + \cdots, \qquad Q_k := \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} A^p B^{k-p}.$$

（Q_k 的公式可由莱布尼茨法则和 $\frac{d^p}{dt^p}e^{At}\big|_{t=0} = A^p$推出。）显然，$H = Q_1$。由于 $Q_2 = A^2 + 2AB + B^2$，我们有 $H^2 =$ 实部 Q_2，因此根据 Fan–Hoffman不等式（引理 2.2），

$$\lambda(H^2) = \lambda(\mathrm{Re}\ Q_2) \prec_w \sigma(Q_2).$$

受此启发，我们想知道类似的比较是否在更高阶时也成立。

问题1.1. 设 $A, B \in \mathbb{H}_n$ 和 $k \geq 3$。是否有

$$\lambda(H^k) \prec_w \sigma(Q_k)\,?$$

等价地，

$$\lambda\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{(A+B)t}\Big|_{t=0}\right) \prec_w \sigma\left(\frac{d^k}{dt^k}(e^{At}e^{Bt})\Big|_{t=0}\right)?$$

本文证明了关于 $k = 3$ 和 $k = 4$的猜想不等式，并给出一个一般性的归约以及一个充分条件，为处理一般的 k提供思路。

2. Preliminaries

我们将使用以下 Ky Fan变分原理以及 Fan–Hoffman 不等式。

引理 2.1 (Ky Fan [9])。设 $X \in \mathbb{H}_n$。则对于每个 $r = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j(X) = \max_{\substack{E=E^*=E^2 \\ \mathrm{rank}(E)=r}} \mathrm{Tr}(EX).$$

对于 $Y \in \mathbb{M}_n$，令 Re $Y = (Y + Y^*)/2$。

引理 2.2 (Fan–Hoffman [10])。设 $Y \in \mathbb{M}_n$。则对于每个 $j = 1, \ldots, n$,

$$\lambda_j(\mathrm{Re}\ Y) \leq \sigma_j(Y).$$

因此，$\lambda(\mathrm{Re}\ Y) \prec_w \sigma(Y)$。

证明。逐点不等式 λ_j(Re Y) $\leq \sigma_j(Y)$ 是经典结果，例如也可见于 [5, 第 73 页，定理 III.5.1]。对 $j = 1, \ldots, r$ 的不等式求和可得$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j$(Re Y) $\leq \sum_{j=1}^{r} \sigma_j(Y)$，对每个 r 均成立，即 λ(Re Y) $\prec_w \sigma(Y)$。□

我们将 反复使用以下关于交换子的迹恒等式：对于任意 X，Y，$Z \in \mathbb{M}_n$,

$$\mathrm{Tr}\big(Z[X, Y]\big) = \mathrm{Tr}\big([Z, X]\,Y\big). \tag{2.1}$$

展开等式两边并利用迹的循环性即可得到该结论。

“与 r 个最大特征值相对应的谱投影”是指投影到一个 r维子空间上的正交投影，该子空间由对应于 r 个最大特征值（按重数计）的特征向量张成。

引理 2.3。设 $F \in \mathbb{H}_n$ 且 $X \in \mathbb{H}_n$。固定 $r \in \{1, \ldots, n\}$，并设 E 是 F 的一个谱投影，对应于其 r 个最大特征值。则

$$\mathrm{Tr}\big(E[X, [X, F]]\big) \geq 0.$$

更确切地说，如果 $F = \mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_n)$，其中 $f_1 \geq \cdots \geq f_n$ 且 $E = \mathrm{diag}(1, \ldots, \underbrace{1}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})$，

并且，如果在此基底下有 $X = (x_{ij})$，那么

$$\mathrm{Tr}\big(E[X, [X, F]]\big) = 2 \sum_{1 \leq i \leq r < j \leq n} (f_i - f_j)\,|x_{ij}|^2. \tag{2.2}$$

证明。 由（2.1）可知，若 $Z = E$ 且 $Y = [X, F]$,

$$\operatorname{Tr}\big(E[X,[X,F]]\big) = \operatorname{Tr}\big([E,X]\,[X,F]\big).$$

对 F 进行对角化，并选择一个标准正交基，使得 $F = \operatorname{diag}(f_1, \dots, f_n)$，其中 $f_1 \geq \cdots \geq f_n$ 和 $E = \operatorname{diag}(1, \underbrace{\dots, 1}_{r}\ \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$。在此基下写出 $X = (x_{ij})$。则

$$[X,F]_{ij} = x_{ij}(f_j - f_i), \qquad [E,X]_{ij} = x_{ij}(e_i - e_j), \quad e_i \in \{0,1\}.$$

利用 $\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i,j} A_{ij}B_{ji}$ 和 $X = X^*$ （因此 $x_{ji} = \overline{x_{ij}}$），我们得到

$$\operatorname{Tr}\big([E,X]\,[X,F]\big) = \sum_{i,j} (e_i - e_j)(f_i - f_j)\,|x_{ij}|^2.$$

只有当 i、j 在 $\{1, \dots, r\}$中恰好有一个时，才会有非零项。将 $(i,\ j)$ 与 $(j,\ i)$ 配对可得（2.2）。由于 $f_i \geq f_j$ 对于 $i \leq r < j$ 成立，因此每一项都非负。 □

3. The cubic coefficient ($k = 3$)

在全文中，令

$$H := A + B, \qquad X := A - B.$$

注意， $[X, H] = 2[A, B]$。

引理 3.1. 设 $A, B \in \mathbb{H}_n$ 并定义

$$Q_3 := A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3, \qquad R_3 := \operatorname{Re} Q_3.$$

Then

$$R_3 - H^3 = \frac{1}{4}[X,[X,H]]. \tag{3.1}$$

证明。 直接展开可得

$$R_3 = A^3 + B^3 + \frac{3}{2}\big(A^2B + BA^2 + AB^2 + B^2A\big),$$

and

$$H^3 = A^3 + B^3 + \big(A^2B + ABA + BA^2\big) + \big(AB^2 + BAB + B^2A\big).$$

相减可得

$$R_3 - H^3 = \frac{1}{2}\big(A^2B + BA^2 + AB^2 + B^2A\big) - (ABA + BAB).$$

另一方面，

$$[X,[X,H]] = [A-B,[A-B,A+B]] = 2[A-B,[A,B]] = 2\big(A^2B + BA^2 + AB^2 + B^2A - 2ABA - 2BAB\big),$$

因此（3.1）。 □

定理 3.2。 设 $A, B \in \mathbb{H}_n$，并设 $H = A + B$, Q_3 如上。则

$$\lambda(H^3) \prec \lambda(\operatorname{Re} Q_3).$$

因此，

$$\lambda(H^3) \prec_w \sigma(Q_3).$$

证明。 首先，由引理 3.1 以及 $\mathrm{Tr}([U,V]) = 0$ 对于任意 $U, V \in \mathbb{M}_n$，我们有

$$\mathrm{Tr}(H^3) = \mathrm{Tr}(R_3) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Re}\ Q_3). \tag{3.2}$$

取 $r \in \{1, \dots, n\}$。令 E为与其最大 r 个特征值相对应的 H的谱投影。由于 $t \mapsto t^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上递增，且 H^3 是 H的多项式，因此相同的 E 也是与 H^3 的最大 r 个特征值相对应的谱投影。由引理 2.1，

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j(H^3) = \mathrm{Tr}(EH^3), \qquad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(\mathrm{Re}\ Q_3) \geq \mathrm{Tr}(E\ \mathrm{Re}\ Q_3).$$

因此，只需证明 $\mathrm{Tr}(E\ \mathrm{Re}\ Q_3) \geq \mathrm{Tr}(EH^3)$，即

$$\mathrm{Tr}\big(E(\mathrm{Re}\ Q_3 - H^3)\big) \geq 0.$$

由引理3.1，

$$\mathrm{Tr}\big(E(\mathrm{Re}\ Q_3 - H^3)\big) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\big(E[X,[X,H]]\big) \geq 0,$$

其中最后一个不等式由引理 2.3 （令 $F = H$）得出。因此 $\lambda(H^3) \prec_w \lambda(\mathrm{Re}\ Q_3)$。结合（??），可得 $\lambda(H^3) \prec \lambda(\mathrm{Re}\ Q_3)$。

最后，由引理 2.2 可得 $\lambda(\mathrm{Re}\ Q_3) \prec_w \sigma(Q_3)$，而 $\prec_w$ 的传递性给出 $\lambda(H^3) \prec_w \sigma(Q_3)$。 □

推论 3.3。对于 $A,\ B \in \mathbb{H}_n$,

$$\lambda\left(\frac{d^3}{dt^3} e^{(A+B)t}\Big|_{t=0}\right) \prec_w \sigma\left(\frac{d^3}{dt^3}(e^{At}e^{Bt})\Big|_{t=0}\right).$$

证明。这是定理3.2取 $H^3 = \frac{d^3}{dt^3} e^{Ht}\big|_{t=0}$和$Q_3 = \frac{d^3}{dt^3}(e^{At}e^{Bt})\big|_{t=0}$的情形。 □

4. The quartic coefficient $(k = 4)$

引理 4.1。设 $A, B \in \mathbb{H}_n$，并定义

$$Q_4 := A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4, \qquad R_4 := \mathrm{Re}\ Q_4.$$

取 $H = A + B$和 $X = A - B$，我们有恒等式

$$R_4 - H^4 = \frac{1}{2}[X,[X,H^2]] - \frac{1}{4}[X,H]^2. \tag{4.1}$$

证明。记 $A = (H+X)/2$和 $B = (H-X)/2$。（4.1）两边都是关于 H 和 X 的、系数为标量的非交换多项式。因此，只需在由 H 和 X 生成的自由代数中展开两边，并比较所有长度为四的词的系数。直接（但常规地）展开即可验证（4.1），见附录A。□

引理 4.2。若 $K \in \mathbb{M}_n$ 满足 $K^* = -K$，则 $-K^2 = K^*K \succeq 0$。

证明。 由于 $K^* = -K$，我们有 $K^*K = (-K)K = -K^2$。由于 K^*K 是半正定的，因此 $-K^2$也是半正定的。□

定理 4.3。 设 A、$B \in \mathbb{H}_n$，并令 $H = A + B$、 Q_4 如上。则

$$\lambda(H^4) \prec_w \lambda(\mathrm{Re}\ Q_4).$$

因此，

$$\lambda(H^4) \prec_w \sigma(Q_4).$$

证明。固定 $r \in \{1,\dots,n\}$。由于 $H^2 \succeq 0$ 和 $H^4 = (H^2)^2$，映射 $t \mapsto t^2$ 在 $[0,\infty)$ 上递增。因此，我们可以选取 E 作为 H^2 的谱投影，该投影对应于其 r 个最大特征值；于是，同一个 E 也同时是 H^4 的谱投影，对应于其 r 个最大特征值。根据引理2.1，

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j(H^4) = \operatorname{Tr}(EH^4), \qquad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(\operatorname{Re} Q_4) \geq \operatorname{Tr}(E \operatorname{Re} Q_4).$$

因此，只需证明 $\operatorname{Tr}(E(\operatorname{Re} Q_4 - H^4)) \geq 0$。

利用引理 4.1，

$$\operatorname{Tr}\big(E(\operatorname{Re} Q_4 - H^4)\big) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\big(E[X,[X,H^2]]\big) - \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\big(E[X,H]^2\big).$$

由引理 2.3 取 $F = H^2$，第一项非负。对于第二项，注意 X，$H \in \mathbb{H}_n$ 意味着 $[X,H]^* = -[X,H]$（反厄米），因此由引理 4.2可得 $-[X,H]^2 \succeq 0$。因此，

$$-\frac{1}{4}\operatorname{Tr}\big(E[X,H]^2\big) = \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\big(E(-[X,H]^2)\big) \geq 0,$$

因为 $E \succeq 0$ 和 $-[X,H]^2 \succeq 0$。

因此 $\operatorname{Tr}(E(\operatorname{Re} Q_4 - H^4)) \geq 0$，从而证明了 $\lambda(H^4) \prec_w \lambda(\operatorname{Re} Q_4)$。最后，由引理 2.2 可得$\lambda(\operatorname{Re} Q_4) \prec_w \sigma(Q_4)$，因此 $\lambda(H^4) \prec_w \sigma(Q_4)$。 □

推论 4.4。对于 A，$B \in \mathbb{H}_n$，

$$\lambda\left(\frac{d^4}{dt^4} e^{(A+B)t}\Big|_{t=0}\right) \prec_w \sigma\left(\frac{d^4}{dt^4}(e^{At}e^{Bt})\Big|_{t=0}\right).$$

证明。这是定理 4.3 在 $H^4 = \frac{d^4}{dt^4}e^{Ht}\big|_{t=0}$ 和 $Q_4 = \frac{d^4}{dt^4}(e^{At}e^{Bt})\big|_{t=0}$ 下的结论。 □

5. Towards general k

在本节中，我们再次令

$$H := A + B, \qquad X := A - B.$$

对于 $k \geq 1$，按之前的定义

$$Q_k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} A^p B^{k-p}, \qquad R_k = \operatorname{Re} Q_k, \qquad D_k := R_k - H^k.$$

由引理 2.2，$\lambda(R_k) \prec_w \sigma(Q_k)$ 始终成立。因此，只需证明厄米比较 $\lambda(H^k) \prec_w \lambda(R_k)$。

命题 5.1（Ky Fan 归约）。固定 $k \geq 1$，并且对于每个 $r = 1, \dots, n$，令 $E_{k,r}$ 为与其最大 r 个特征值对应的 H^k 的谱投影。若

$$\operatorname{Tr}(E_{k,r}D_k) \geq 0, \qquad r = 1,\dots,n,$$

则 $\lambda(H^k) \prec_w \lambda(R_k)$。

证明。由引理2.1，对每个 r，

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j(H^k) = \max_{\substack{E=E^*=E^2 \\ \operatorname{rank}(E)=r}} \operatorname{Tr}(EH^k) = \operatorname{Tr}(E_{k,r}H^k).$$

另一方面，

$$\sum_{j=1}^{r}\lambda_j(R_k)=\max_{\substack{E=E^*=E^2\\ \operatorname{rank}(E)=r}}\operatorname{Tr}(ER_k)\geq\operatorname{Tr}(E_{k,r}R_k).$$

因此，若 $\operatorname{Tr}(E_{k,r}D_k)\geq 0$，则

$$\sum_{j=1}^{r}\lambda_j(H^k)=\operatorname{Tr}(E_{k,r}H^k)\leq\operatorname{Tr}(E_{k,r}R_k)\leq\sum_{j=1}^{r}\lambda_j(R_k)\quad(r=1,\dots,n),$$

这正是 $\lambda(H^k)\prec_w\lambda(R_k)$。 □

注 5.2。设 $k\geq 1$ 和 $r\in\{1,\dots,n\}$。由于 H^k 是 H 的多项式，矩阵 H 和 H^k 可交换且同时对角化。

- 若 k 为奇数，则 $t\mapsto t^k$ 在 $\mathbb{R}$ 上递增，因此在 $t\mapsto t^k$ 下特征值的顺序得以保持。因此，与 H 的最大 r 个特征值相对应的任意谱投影，也是与 H^k 的最大 r 个特征值相对应的谱投影。
- 若 k 为偶数，则 $H^k=(H^2)^{k/2}$，其中 $H^2\succeq 0$，且 $t\mapsto t^{k/2}$ 在 $[0,\infty)$ 上递增。因此，与 H^2 的最大 r 个特征值相对应的任意谱投影，也是与 H^k 的最大 r 个特征值相对应的谱投影。

特别地，对于每个 r，我们可以（并且将会）选择 $E_{k,\,r}$ 使其在 k 为奇数时是 H 的谱投影，而在 k 为偶数时是 H^2 的谱投影。

定理 5.3（通过交换子分解得到的一个充分条件）。固定 $k\geq 1$ 并按上文定义 $D_k=R_k-H^k$。假设存在整数 m、$\ell\geq 0$，标量 c_1、……、$c_m\geq 0$，厄米矩阵 $F_1(H)$……、$F_m(H)\in\mathbb{H}_n$，以及矩阵 W_1、……、$W_\ell\in\mathbb{M}_n$，使得

$$D_k=\sum_{j=1}^{m}c_j\,[X,[X,F_j(H)]]\;+\;\sum_{q=1}^{\ell}W_q^*W_q. \tag{5.1}$$

进一步假设每个 $F_j(H)$ 都是备注 5.2 中相关算子的递增函数，即：

- 若 k 为奇数，则 $F_j(H)=f_j(H)$，其中 $f_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是某个递增标量函数；
- 若 k 为偶数，则 $F_j(H)=f_j(H^2)$，其中 $f_j:[0,\infty)\to$ 是某个递增标量函数 $\mathbb{R}$.

于是 $\lambda(H^k)\prec_w\lambda(R_k)$，从而 $\lambda(H^k)\prec_w\sigma(Q_k)$。

证明。固定 r 并按照备注 5.2 中的方式选择 $E_{k,\,r}$。根据每个 $F_j(H)$ 所满足的单调性假设以及同时对角化性，同一个 $E_{k,\,r}$ 也是 $F_j(H)$ 对应于其 r 最大特征值的谱投影。因此，引理 2.3 给出

$$\operatorname{Tr}\big(E_{k,r}[X,[X,F_j(H)]]\big)\geq 0\quad\text{for all } j.$$

此外，对于所有 q，$\operatorname{Tr}(E_{k,r}W_q^*W_q)\geq 0$，因为 $E_{k,r}\succeq 0$ 以及 $W_q^*W_q\succeq 0$。

将（5.1）分别与 $E_{k,\,r}$ 取迹，得到 $\operatorname{Tr}(E_{k,r}D_k)\geq 0$。根据命题 5.1，$\lambda(H^k)\prec_w\lambda(R_k)$。最后，引理 2.2 给出 $\lambda(R_k)\prec_w\sigma(Q_k)$，而传递性得到 $\lambda(H^k)\prec_w\sigma(Q_k)$。 □

注记 5.4. 对于 $k=3$，引理 3.1 给出 $D_3=\frac{1}{4}[X,[X,H]]$，其形式为 (5.1)，其中 $m=1$、$c_1=\frac{1}{4}$、$F_1(H)=-H$，以及 $\ell=0$。对于 $k=4$，引理 4.1 给出 $D_4=\frac{1}{2}[X,[X,H^2]]-\frac{1}{4}[X,H]^2$，其形式为 (5.1)，其中 $m=1$、$c_1=\frac{1}{2}$、$F_1(H)=H^2$，以及通过取 $W_1=\frac{1}{2}[X,H]$ 并使用 $W_1^*W_1=-\frac{1}{4}[X,H]^2$（引理 4.2）得到的 $\ell=1$。

猜想 5.5. 对于 $A,\ B\in\mathbb{H}_n$ 以及每个 $k\geq 5$,

$$\lambda(H^k)\prec_w\lambda(R_k).$$

注 5.6 （在 $k=5$处的一个显式（但更为复杂的）对易子展开）。 为完整起见，我们记录一个关于 $D_5=R_5-H^5$ 且用 H 和 X表示的简便恒等式。令 $\{U,V\}=UV+VU$为反对易子，且令 $\mathrm{ad}_X(Y)=[X,Y]$。直接展开可得

$$D_5=\frac{1}{16}\,\mathrm{ad}_X^4(H)+\frac{7}{16}\,\mathrm{ad}_X^2(H^3)+\frac{9}{32}\{H,\mathrm{ad}_X^2(H^2)\}-\frac{1}{32}\{H^2,\mathrm{ad}_X^2(H)\}+\frac{1}{8}\,H\ \mathrm{ad}_X^2(H)\,H.$$

不同于 $k=3,\ 4$，该公式包含更高阶的迭代对易子和混合的 H–$\mathrm{ad}_X^2(\cdot)$ 项；目前我们还不知道如何在一般情形下将其组织成形如（5.1）的分解。

致谢

张腾ได้รับ中国国家留学基金管理委员会、博士生青年人才托举工程（中国科学技术协会）以及西安交通大学中央高校基本科研业务费的资助（项目编号：xzy022024045）。他感谢导师林明华将这一主题介绍给他。

参考文献

[1] T. Ando 和 F. Hiai, 《对数主序与互补型 Golden–Thompson 不等式》, Linear Algebra Appl. **197 198** 1994 113 131 10 1016 0024 3795 94 90484 7 / ( ), – . doi: . / - ( ) - H. F. Baker, 《交[2]错式与连续群》, Proc. London Math. Soc. ( ) 3 (1905), 24–47. doi: 10 1112 2 3 1 24 . /plms/s - . . N. Bebiano、J. da Providência Jr. 和 R. Lemos, 《统计力学中的矩阵不等式》, [3]Linear Algebra Appl. **376** 2004 265 273 10 1016 2003 07 004 ( ), – . doi: . /j.laa. . . D. S. Bernstein, 《矩阵指数迹的不[4]等式》, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 9 (1988), 156–158.[5] R. Bhatia, 《矩阵分析》, Springer, 纽约, 1997年。[6] J. E. Campbell, 《关于算子组合定律（第二篇）》, Proc. London Math. Soc. (1) **29** 1897 14 32 10 1112 1 29 1 14 ( ), – . doi: . /plms/s - . . J. E. Cohen、S. Friedland、T. Kato 和 F. Kelly, [7]《矩阵指数乘积的特征值不等式》, Linear Algebra Appl. **45** 1982 55 95 10 1016 0024 3795 82 90211 7 ( ), – . doi: . / - ( ) - E. B. Dynkin, [8]《Campbell–Hausdorff 公式系数的计算》, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 57 (1947), 323–326. [9] K. Fan, 《关于 Weyl 的线性变换特征值定理（一）》, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **35** 1949 652 655 10 1073 35 11 652 [10]( ), – . doi: . /pnas. . . K. Fan 和 A. J. Hoffman, 《矩阵空间中的若干度量不等式》, Proc. Amer. Math. Soc. **6** 1955 111 116 10 1090 0002 9939 1955 0067841 7 ( ), – . doi: . /S - - - - P. J. Forrester 和 C. J. Thompson, 《[11]Golden–Thompson 不等式：历史回顾与随机矩阵应用》, J. Math. Phys. **55** 2014 023503 10 1063 1 4863477 ( ), . doi: . / . B. C. Hall, 《李群、李代数与[12]表示：基础导论》, 第2版, Graduate Texts in Mathematics, 第 222, 2015 10 1007 978 3 319 13467 3 卷, Springer, . doi: . / - - - - [13]F. Hausdorff, 《群论中的符号指数公式》, Ber. Verh. Kgl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl. 58 (1906), 19–48. [14] F. Hiai, 《指数算子的对数主序与范数不等式》, 载于: Linear Operators（华沙, 1994年）, Banach Center Publ. 38, Polish Acad. Sci., 华沙, 1997年, 第119–181页。[15] F. Hiai, 《Araki 对数主序的推广》, Linear Algebra Appl. 501 (2016), 1–16. doi: 10 1016 2016 03 023 . /j.laa. . . F. Hiai 和 D. Petz, 《Golden–Thompson 迹不等式的互补形式》, [16]Linear Algebra Appl. 181 (1993), 153–185. doi:10.1016/0024-3795(93)90029-N

[17] T. Kato, 《任意一对自伴压缩半群的 Trotter乘积公式》, 载于: Topics in Functional Analysis, Advances in Mathematics Supplementary Studies, 第3卷, Academic Press, 纽约, 1978年, 第185–195页。
[18] A. Lenard, 《Golden–Thompson 不等式的推广》Tr($e^A e^B$) $\geq$ Tr e^{A+B}, Indiana Univ. Math. J. **21** 1972 457 467 10 1512 1972 21 21036 ( ), – . doi: . /iumj. . . A. W. Marshall、I. [19] Olkin 和 B. C. Arnold, 《不等式: 主序理论及其应用》, 第2版, Springer, 纽约, 2011年。[20] D. Petz, 《若干迹不等式综述》, 载于: Functional Analysis and Operator Theory（华沙, 1992年）, Banach Center Publ. 30, Polish Acad. Sci., 华沙, 1994年, 第287–298页。doi:10.4064/-30-1-287- 298[21] W. So, 《矩阵指数不等式中的等号情形》, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 13 (1992), 1154 1158 10 1137 0613070 – . doi: . / C. J. Thompson, 《矩阵空间上的不等式与偏序》, Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), [22] 469 480 10 1512 1972 21 21037 – . doi: . /iumj. . . H. F. Trotter, 《关于算子半群的乘积》, Proc. Amer. Math. Soc. 10 4, 545 1959 551 10 1090 0002 9939 1959 0108732 6 ( ), no. – . doi: . /S - - - - [23]

附录 A. 恒等式 (A.1)的推导

在本附录中, 我们将详细展开证明引理4.1。

引理 A.1 (引理 4.1)。 设 $A,\ B \in \mathbb{H}_n$ 并定义

$$Q_4 := A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4, \qquad R_4 := \mathrm{Re}\ Q_4.$$

利用 $H = A + B$ 和 $X = A - B$, 我们有恒等式

$$R_4 - H^4 = \frac{1}{2}[X,[X,H^2]] - \frac{1}{4}[X,H]^2. \tag{A.1}$$

证明。 全文中我们使用 $H = A+B$ 和 $X = A-B$。由于 $A,\ B$ 是厄米的, 因此有

$$Q_4^* = A^4 + 4BA^3 + 6B^2A^2 + 4B^3A + B^4,$$

因此

$$R_4 = \mathrm{Re}\ Q_4 = \frac{1}{2}(Q_4 + Q_4^*) = A^4 + B^4 + 2A^3B + 3A^2B^2 + 2AB^3 + 2BA^3 + 3B^2A^2 + 2B^3A. \tag{A.2}$$

步骤*1*: 展开 $R_4 - H^4$。写出

$$H^4 = (A+B)^4 = \sum_{w \in \{A,B\}^4} w,$$

即, 所有16 个长度为4 的字母表 $\{A,B\}$。与（A.2）比较可知, R_4 只包含八个块词

$$A^4,\ B^4,\ A^3B,\ BA^3,\ A^2B^2,\ B^2A^2,\ AB^3,\ B^3A,$$

其系数分别为 1、1、2、2、3、3、2、2, 其他所有词的系数均为 0。因此,

$$\begin{aligned} R_4 - H^4 = {} & \big(A^3B + BA^3 + 2A^2B^2 + 2B^2A^2 + AB^3 + B^3A\big) \\ & - \big(A^2BA + ABA^2 + ABAB + AB^2A + BA^2B + BABA + BAB^2 + B^2AB\big). \end{aligned} \tag{A.3}$$

步骤*2*: 交换子一侧的展开。首先计算

$$[X,H] = (A-B)(A+B) - (A+B)(A-B) = 2(AB - BA),$$

因此

$$-\frac{1}{4}[X,H]^2 = -(AB-BA)^2 = -ABAB + AB^2A + BA^2B - BABA. \tag{A.4}$$

接下来注意到

$$[X,[X,H^2]] = X(XH^2 - H^2X) - (XH^2 - H^2X)X = X^2H^2 + H^2X^2 - 2XH^2X,$$

so

$$\frac{1}{2}[X,[X,H^2]] = \frac{1}{2}(X^2H^2 + H^2X^2) - XH^2X. \tag{A.5}$$

现在我们展开每一项。

由于

$$H^2 = (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2, \qquad X^2 = (A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2,$$

直接相乘可得

$$\begin{aligned} X^2H^2 &= (A^2 - AB - BA + B^2)(A^2 + AB + BA + B^2) \\ &= A^4 + A^3B + A^2BA + A^2B^2 - ABA^2 - ABAB - AB^2A - AB^3 \\ &\quad - BA^3 - BA^2B - BABA - BAB^2 + B^2A^2 + B^2AB + B^3A + B^4. \end{aligned}$$

取伴随可得 $H^2X^2 = (X^2H^2)^*$，因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X^2H^2 + H^2X^2) &= A^4 + B^4 + A^2B^2 + B^2A^2 \\ &\quad - \big(ABAB + AB^2A + BA^2B + BABA\big). \end{aligned} \tag{A.6}$$

此外，

$$\begin{aligned} XH^2X &= (A-B)(A^2 + AB + BA + B^2)(A-B) \\ &= A^4 - A^3B + A^2BA - A^2B^2 + ABA^2 - ABAB + AB^2A - AB^3 \\ &\quad - BA^3 + BA^2B - BABA + BAB^2 - B^2A^2 + B^2AB - B^3A + B^4. \end{aligned} \tag{A.7}$$

将（A.7）从（A.6）中相减，并利用（A.5），得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[X,[X,H^2]] &= \big(A^3B + BA^3 + 2A^2B^2 + 2B^2A^2 + AB^3 + B^3A\big) \\ &\quad - \big(A^2BA + ABA^2 + 2AB^2A + 2BA^2B + BAB^2 + B^2AB\big). \end{aligned} \tag{A.8}$$

最后，将（A.8）与（A.4）结合，得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[X,[X,H^2]] - \frac{1}{4}[X,H]^2 &= \big(A^3B + BA^3 + 2A^2B^2 + 2B^2A^2 + AB^3 + B^3A\big) \\ &\quad - \big(A^2BA + ABA^2 + ABAB + AB^2A + BA^2B + BABA + BAB^2 + B^2AB\big), \end{aligned}$$

这与（A.3）完全一致。由此证明（A.1）。 □

西安交通大学数学与统计学院，中华人民共和国西安 710049电子邮箱: teng.zhang@stu.xjtu.edu.cn