arXiv:2601.07318v1 [math.AG] 12 Jan 2026

# 特殊 C-对的不规则度

´ ´STEFAN KEBEKUS、ERWAN ROUSSEAU 和 FREDERIC TOUZET

摘要。本文研究特殊 C-对（即 Campana 意义上的“几何轨形”）的不规则性型不变量。在对奇点作出温和假设的条件下，我们证明 C-对 $(X, D)$ 的增广不规则度不超过其维数。这推广了 Campana 的早期结果，并加强了已知结论，即使在经典情形 $X$ 为射影流形且 $D = 0$ 时也是如此。证明基于关于适配形式的新延拓结果、对阿尔巴内斯簇上叶状结构的分析，以及利用适配形式的严格楔子空间构造 Bogomolov 层。

目录

1. 引言 1
2. 记号与已知结果 3
3. 一般生成层诱导的有理映射 7
4. 适配反身微分形式的延拓，定理 1.6 的证明 10
5. 反身层中的 Bogomolov 层与线性系 $G$-层 14
6. 由严格楔子空间定义的不变 Bogomolov 层 17
7. 不变量的界，定理 1.3 与推论 1.7 的证明 21

**附录** 24
附录 A. 低阶微分的延拓 24
参考文献 26

## 1. 引言

Campana 在一系列有影响力的论文中引入了特殊簇，[Cam04，Cam11]，将其定义为经典 Bogomolov-Sommese 不等式严格成立的复射影流形；等价地，也可将其定义为不被任何一般型“几何轨形”或“$C$-对”支配的复射影流形。人们猜想，“特殊性”这一概念刻画了“潜在稠密性”，无论是在算术情形（其中“稠密”指有理点集），还是在解析情形（其中“稠密”指整曲线）。

本文研究特殊流形的不规则度，以及极小模型纲领中出现的轻度奇异 C-对的不规则度。

特殊流形的不变量。 起点是 Campana 的一项基本观察：如果 $X$ 是一个特殊的复射影流形，那么其不规则度 $q(X) := h^0(X, \Omega^1_X)$ 总是有界于 $X$，[Cam04，第 5 节。2]。利用他关于特殊性在 ´étale 覆盖下不变的结果，他得出增广不规则度，

$$\widetilde{q}(X) := \sup \left\{ q(\widetilde{X}) \ : \ \widetilde{X} \to X \text{ a finite étale cover} \right\},$$

日期：2026年1月13日。2020 年 数学主题分类。32C99，32H99。关键词与短语。

同样有界于 dim $X$。

特殊对的不变量。 鉴于 Campana 理论的自然对象是“几何轨形”或“C-对”，其中适配微分扮演着普通空间中普通微分的角色，因此自然会提出推广问题。

猜想 1.1（特殊 $C$-对的不规则度， [KR24a，猜想 6。17]）。 设 （$X$， $D$） 是一个 $C$-对，其中解析簇 $X$ 是紧的且 K¨ahler。如果 （$X$， $D$） 是特殊对，则其增广不规则度受维数的限制， $q^+$（$X$， $D$） ≤维数 $X$。

为方便不熟悉该理论的读者，我们简要回顾“增广不规则度”的定义。参考论文 [KR24a] 详细介绍并讨论了所有相关概念。

**定义 1.2** （不规则度、增广不规则度， [KR24a]）。 设 （$X$， $D$） 是一个紧的 $\widehat{C}$-对。若 $\gamma$： $X \to X$ 是任意覆盖，则我们将数值

$$q(X, D, \gamma) := h^0\left(\widehat{X}, \Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)}\right)$$

作为不规则度$(X, D, \gamma)$。这个数

$$q^+(X, D) := \sup\left\{q(X, D, \gamma) \ : \ \gamma \ a \ cover\right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

是增广不规则度$C$-对的$(X, D)$。

1.1. **主要结果**。 本文的主要结果肯定地回答了猜想1.1 ，适用于极小模型理论中通常会出现的所有对。关于“除子对数终端”对的定义，请读者参见[KM98] 。

**定理 1.3** (增广不规则度的有界性)。 设$(X, D)$ 是一个$C$-对，满足以下条件之一。

*(1.3.1)* 解析簇 $X$ 是紧的 *K¨ahler*，且$(X, D)$ 是局部可一致化的。*(1.3.2)* 解析簇 $X$ 是射影的，且$(X, D)$ 是除子对数终端 （=*dlt*） 。
如果$(X, D)$ 是特殊的，那么 $q^+(X, D)$ ≤维数$X$。

注记 1.4（结果的新颖性）。 即使在 $X$ 为复射影流形且 $D = 0$的情形下，定理 1.3 也是新的，并且强于 Campana 的经典结果，后者仅考虑 ´平展覆盖。

注记 1.5（关于 Albanese 不规则度的早期结果）。 定理1.3 推广并加强了先前的结果，包括 [KR24b，定理 8.1], 关于“增广 Albanese 不规则度”$q^+$ Alb($X$， $D$)。增广 Albanese 不规则度是增广不规则度的一种变体。它具有几何意义，总以 $q^+(X$， $D)$ 为上界，但在实践中难以控制和计算。

定理 1.3 的证明部分依赖于下述关于适配反身微分形式的延拓定理，该定理本身或许也具有独立的意义。

**定理 1.6** （dlt 对上适配形式的延拓）。 设 $(X, D)$ 为一个代数的、拟射影的、$C$-对，且为除子对数终端的。则 $(X, D)$ 上的适配的反身 *1*-形式可延拓到奇点的对数解消。

1.2. **证明概要**。 要证明关于特殊复射影流形不规则度的经典结果，只需证明特殊流形的阿尔巴尼斯映射必然是满射。为证明其逆否命题，Campana 研究了阿尔巴尼斯映射不满射的流形。在 Kawamata、Kobayashi 和 Ueno 早期关于最大阿尔巴内塞维数簇上微分层正性的工作的基础上，他构造了一个微分层，使 Bogomolov-Sommese 不等式取等，从而证明底层空间不可能是特殊的。

在我们的设定中，适配微分发挥着普通空间中普通微分的作用，但一般而言并不存在“适配 Albanese 映射”。即使在存在适当定义的 Albanese 映射的特殊情形下，已知不规则度与 Albanese 簇维数之间的经典等式一般也不成立[KR24b，第 7 节。1]。

我们通过考察适当覆盖的经典 Albanese 来克服这一问题，在这些覆盖上，适配微分定义了一个叶状结构。尽管这些叶通常是 Zariski 稠密的，我们仍可借鉴 Catanese 关于广义 Castelnuovo-De Franchis 定理和“微分的严格楔积子空间”的工作中的思想，从而为叶状簇获得正性结果，以替代经典论证。

对于一形式层，这些论证尤其有效，并给出了 Campana 关于特殊性在 ´étale 覆盖下的不变性这一论述的如下部分推广： [Cam04，第 5 节。2] 以及 [Cam11，命题 10。11]。

**推论 1.7** （特殊对的覆盖上的适配一形式）。 设$(X, D)$ 是一个除子对数终端的射影 $C$-对，令 $\gamma\colon \widehat{X} \twoheadrightarrow X$ 为任意覆盖，并令 $\mathscr{L} \subseteq \Omega^{[1]}{}_{(X,D,\gamma)}$ 为秩一相干层。若$(X, D)$ 是特殊的，则 $\mathscr{L}$ 的*C-Kodaira-Iitaka* 维数至多为一：$\kappa_C(\mathscr{L}) < 1$。

1.3. **致谢**。 作者谨向 FinnBartsch、Fr´ed´eric Cam- pana 和 Ariyan Javanpeykar 致谢，感谢他们进行了长时间且富有成效的讨论。

本文的部分工作是在 Stefan Kebekus 访问位于 Brest 的布列塔尼西部大学期间完成的。他谨向该系致谢，感谢其热情接待以及愉快的工作氛围。

## 2. 记号与已知结果

本文研究复空间。除极少数例外，我们遵循标准参考文献 [GR84、Dem12]中的记号。本节阐明较少使用的记号，并回顾若干众所周知的结果，以供后文参考。不过，全面介绍$C$-对理论不在本文讨论范围之内。关于定义以及本文所用全部材料的详细介绍，请读者参阅[KR24a] 。为方便读者，凡是 [KR24a] 中首次出现$C$-对理论术语之处，我们都会在全文中给出准确的参考出处。

2.1. **全局假设与标准记号**。解析簇是约化的不可约复空间。为清楚起见，我们将解析簇之间的全纯映射称为态射，并将“映射”一词专用于亚纯映射。

**定义 2.1** (大集与小集)。设 $X$ 为一个解析簇。若解析子集 $A \subsetneq X$ 的余维至少为二，则称其为小集。若开集 $U \subseteq X$ 满足 $X \setminus U$ 是解析的小集，则称其为大集。

**定义 2.2** ($q$-态射)。相同维数的正规解析簇之间的准有限态射称为 $q$-态射。

依照文献中的惯例，我们用方括号表示反身张量运算。

记号2.3（反身张量运算）。设 $X$ 为正规解析簇，且 $\mathscr{L}$ 为一个 $\mathscr{O}_X$-模的无挠相干层。记

$$\mathscr{L}^{[\otimes n]} := (\mathscr{L}^{\otimes n})^{**}, \qquad \wedge^{[n]}\mathscr{L} := (\wedge^n \mathscr{L})^{**},$$
$$\mathrm{Sym}^{[n]}\,\mathscr{L} := (\mathrm{Sym}^n\,\mathscr{L})^{**}, \qquad \det \mathscr{L} := (\wedge^{\operatorname{rank}\mathscr{L}}\mathscr{L})^{**}.$$

若 $\varphi\colon X \to Y$ 是一个态射，且 $\mathscr{F}$ 是 $Y$ 上的相干层，则记 $\varphi^{[*]}\mathscr{F} := (\varphi^*\mathscr{F})^{**}$。

若 $X$ 是任意解析簇，我们用 $\Omega^{\bullet}_X$ 表示 K¨ahler 微分的层。我们回顾反身对数微分的记号。

记号 2.4（正规交叉轨迹）。 设 $X$ 是一个正规解析簇，且 $D$ 是 $X$ 上的 Weil $\mathbb{Q}$-除子。记 $(X,D)_{\mathrm{reg}} \subseteq X$ 为 $X$ 光滑且 $D$ 具有正规交叉支撑的最大开集。

记号 2.5（带对数极点的微分）。 设 $X$ 是一个正规解析簇，且 $X$ 上有一个 Weil $\mathbb{Q}$-除子。

(2.5.1) 若 $X$ 光滑且 $D$ 的支撑具有正规交叉，我们常用 $\Omega^p_X(\log D)$ 表示沿 $\operatorname{supp} D$ 具有对数极点的 K¨ahler 微分层。
(2.5.2) 将正规交叉轨迹的包含记为 $\iota\colon (X,\ D)_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow X$，并记

$$\Omega^{[p]}_X(\log D) = \iota_*\Omega^p_{(X,D)_{\mathrm{reg}}}\left(\log D|_{(X,D)_{\mathrm{reg}}}\right).$$

(2.5.3) 若 $\pi\colon\ Y \to X$ 是从光滑簇 $Y$ 出发的任意态射，其中 $\pi^{-1}\operatorname{supp} D$ 为纯余维一且具有正规交叉，则用 $\Omega^p_Y(\log \pi^*D)$ 表示沿集合 $\pi^{-1}\operatorname{supp} D$ 具有对数极点的 K¨ahler 微分层。

注 2.6。 式 $\Omega^{[p]}_X(\log D)$ 中的 (2.5.2) 是反身的，特别是相干的。

为便于后文引用，我们记录以下关于乘积映射下微分形式拉回性质的引理。证明是初等的，留给读者。

**引理 2.7** (乘积映射下微分形式的拉回)。设 $(\varphi_i\colon X \dashrightarrow Y_i)_{i=1,\dots,a}$ 是复流形之间有限个有理映射，并设

$$\varphi := \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_a : X \dashrightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_a$$

为相应的乘积映射。那么，存在一个稠密开子集 $X^\circ \subseteq X$，在该子集上所有映射都有定义，并且 $\Omega^1_{X^\circ}$ 的以下子层彼此相等，

$$\operatorname{img} d(\varphi|_{X^\circ}) = \sum_{i=1}^{a} \operatorname{img} d(\varphi_i|_{X^\circ}) \subseteq \Omega^1_{X^\circ}. \qquad \square$$

2.2. **$C$-对与适配态射**。 本文的关键概念是 $C$-对。我们简要回顾其定义，详细内容请参阅参考文献 [KR24a] 。

**定义 2.8** ($C$-对， [KR24a，第 2 节。5])。一个 $C$-对是一个对 $(X,D)$ 其中 $X$ 是一个正规解析簇，而 $D$ 一个魏尔 $\mathbb{Q}$-除子 $D$ 具有如下形式

$$D = \sum_i \frac{m_i - 1}{m_i} \cdot D_i,$$

其中 $m_i \in \mathbb{N}^{\geq 2} \cup \{\infty\}$ 和 $\frac{\infty-1}{\infty} = 1$。若 $(X,D)$ 是一个 $C$-对，有时考虑以下 *Weil* $\mathbb{Q}$-除子会比较方便

$$D_{\mathrm{orb}} := \sum_{i \mid m_i < \infty} \frac{1}{m_i} \cdot D_i \in \mathbb{Q}\operatorname{Div}(X).$$

定义 *2.9*（适配态射， [*KR24a*，第 *2.5*] 节）。给定一个 $C$-对 $(X,D)$，若 $\gamma\colon X \to X$ 是一个 $q$-$\widehat{\ }$ 态射，且 $\gamma^*D_{\mathrm{orb}}$ 整除，则称其为 $(X,D)$ 的适配态射。若 $\gamma^*D_{\mathrm{orb}}$ 约化，则称其为 $(X,D)$ 的强适配态射。

2.3. **反身层中的线性系**。 若 $X$ 是一个紧流形， $\mathscr{L} \in \operatorname{Pic}(X)$ 是一个线丛，且 $L \subseteq H^0(X,\mathscr{L})$ 是一个非平凡的截面空间，复几何中常考虑亚纯映射 $\varphi_{L,\mathscr{L}}\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}(L)$，它在一般点处由 $x \mapsto \ker(\sigma \mapsto \sigma(x))$ 给出。本文部分内容讨论了类似构造在 $X$ 可能奇异且 $\mathscr{L}$ 为秩一反身层时的情形。为避免混淆，我们将详细说明这一设定。

记号 2.10（射影化线性空间）。 若 $L$ 是一个线性空间，则用 $\mathbb{P}(L)$ 表示 $L$ 中超平面构成的空间，或等价地，表示 $L^*$ 中的一维子空间构成的空间。

注 2.11（子空间与投影）。 根据记号 2.10，线性空间的一个包含 $L_1 \hookrightarrow L_2$ 因此对应于一个线性投影 $\mathbb{P}(L_2) \dashrightarrow \mathbb{P}(L_1)$，在一般点处由以下映射给出 $H \mapsto H \cap L_1$。

**引理 2.12**（无挠层中的截面空间）。 若 $X$ 是一个紧的正规解析簇， $\mathscr{L}$是一个 $\mathscr{O}_X$-模的无挠秩一层，且$L \subseteq H^0(X, \mathscr{L})$是一个非平凡的截面空间，则存在一个亚纯映射$\varphi_{L,\mathscr{L}}: X \dashrightarrow \mathbb{P}(L)$，在一般点处由 $x \mapsto$ 核$(\sigma \mapsto \sigma(x))$给出。

证明。 回顾 [Ros68，定理 3。5] 其中存在一个双亚纯修改，记作$\pi: \widetilde{X} \to X$，其中 $\mathscr{F} := (\pi^*\mathscr{L})$/挠部分是可逆的。令 $F \subseteq H^0(\widetilde{X}, \mathscr{F})$为 $L$在自然包含下的像

$$\pi^*/\mathrm{tor} : H^0(X, \mathscr{L}) \hookrightarrow H^0(\widetilde{X}, \mathscr{F}),$$

置 $\varphi_{L,\mathscr{L}} := \varphi_{F,\mathscr{F}} \circ \pi^{-1}$，并注意到该映射不依赖于修改的选择。□

注记 2.13。 来自代数几何的读者可能会疑惑，为什么引理 2.12还需要证明：与代数情形不同，在扎里斯基稠密开集上定义的全纯态射通常不能延拓为整个空间上的亚纯映射。

记号 2.14（无挠层中由线性系诱导的亚纯映射）。在本文中，我们始终使用记号 $\varphi_{L,\mathscr{L}}$表示引理 2.12中的亚纯映射。在 $L = H^0(X, \mathscr{L})$的情形下，我们用 $\varphi_{\mathscr{L}}$代替 $\varphi_{H^0(X,\mathscr{L}),\mathscr{L}}$。

2.4. **SNC态射**。 虽然snc对是光滑空间的对数类比，但SNC态射则是光滑映射的类比。为方便读者，我们回顾其主要性质，并参阅 [GKKP11，第2.B节]，其中有完整的讨论及相关文献的参考。虽然 [GKKP11] 处理的是代数簇，但此处提到的结果无需修改即可推广到解析情形。

记号 2.15（边界分量的交集）。 设 $(X, D)$ 是一个对，

$$D = \alpha_1 \cdot D_1 + \ldots + \alpha_n \cdot D_n.$$

若 $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 非空，则用 $D_I := \cap_{i \in I} D_i$ 表示复空间的（可能非约化）交集。若 $I$ 为空，则令 $D_I := X$。

注记 2.16（snc 对的描述， [GKKP11，注 2。8]）。 在记号 2.15的设定中，对 $(X, D)$ 是简单正规交叉的，当且仅当对每个满足$I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 的指标集 $D_I \neq \emptyset$，以下条件成立。

(2.16.1) 交集 $D_I$ 是光滑的。(2.16.2) 余维等于 $\mathrm{codim}_X D_I = |I|$。

**定义 2.17** (snc 态射， [GKKP11，定义 2。9])。 设 $(X, D)$ 是一个 *snc* 对，并设$\varphi : X \twoheadrightarrow T$ 是到一个复流形的满射态射。若对每个满足 $\varphi$ 的指标集$(X, D)$ 均有以下性质，则称其为 $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 且 $D_I \neq \emptyset$。

*(2.17.1)* 限制态射 $\varphi|_{D_I}: D_I \to T$ 是光滑的。*(2.17.2)* 限制态射 $\varphi|_{D_I}$的相对维数为 维数 $X$ – 维数 $T$ – $|I|$。

注记 2.18（所有态射一般为 snc）。 若 $(X, D)$ 是一个 snc 对，且 $\varphi: X \to T$是到某个复流形的满射态射，则存在 $T$的一个稠密扎里斯基开子集，使得在其上 $\varphi$ 是一个 snc 态射。

注记 2.19（真态射的纤维丛结构）。 设 $(X, D)$ 是一个对数 snc 对，且 $\varphi: X \twoheadrightarrow T$是 $(X, D)$ 的一个真 snc 态射。那么， $\varphi: X \setminus D \twoheadrightarrow T$是一个可微纤维丛。

注记 2.20（snc 态射的纤维与相对微分）。 设 $(X,\ D)$ 是一个对数 snc 对，且 $\varphi\colon X \twoheadrightarrow T$ 是 $(X,\ D)$ 的一个 snc 态射。那么，存在一个局部自由层的自然正合列，

$$0 \longrightarrow \varphi^*\Omega^1_T \xhookrightarrow{d\varphi} \Omega^1_X(\log D) \xrightarrow{q} \underbrace{\Omega^1_X(\log D)\Big/\varphi^*\Omega^1_Y}_{=:\Omega^1_{X/T}(\log D)} \longrightarrow 0.$$

若 $t \in T$是任意一点，其纤维为 $X_t := \varphi^{-1}(t)$，且包含为 $\iota_t\colon X_t \to X$，则 $X_t$是光滑的，且 $D_t := \iota_t^* D$是对数的且为简单正规交叉。存在一个自然的限制之间的识别，使下列图表交换，

$$\begin{array}{ccc} \iota^*\Omega^1_X(\log D) & \xrightarrow{\iota_t^* q} & \iota_t^*\Omega^1_{X/T}(\log D) \\ \| & & \big\downarrow \text{ident.} \\ \iota^*\Omega^1_X(\log D) & \xrightarrow[d\iota_t]{} & \Omega^1_{X_t}(\log D_t) \end{array}$$

2.5. **纤维空间上的微分形式**。 我们回顾（并略作推广）Kähler 几何中的一个基本事实：若 $\varphi\colon X \to T$是一个纤维化，且 $\sigma$是 $X$上的闭1-形式，并且在某个纤维上为零，则 $\sigma$来自 $T$。

**命题 2.21.** 设 $(X, D)$ 是一个对数 *snc* 对，并设 $\varphi\colon X \twoheadrightarrow T$ 是 $(X, D)$的一个 *snc* 态射。假设 $X$是 *Kähler* 的，且 $\varphi$是真。若 $\sigma \in H^0(X, \Omega^1_X(\text{对数 } D))$是闭的，则以下陈述等价。

*(2.21.1)* 存在一点 $t \in T$，其纤维为 $X_t\colon = \varphi^{-1}(t)$，且存在包含 $\iota_t\colon X_t \to X$，使得 $\sigma$ 在 $X_t$ 上的限制为零，

$$d\iota_t\sigma = 0 \in H^0\big(X_t,\ \Omega^1_{X_t}(\log D_t)\big).$$

*(2.21.2)* 在 $X$ 的局部范围内，微分形式 $\sigma$ 来自下方： $\sigma \in H^0(X,\ \varphi^*\Omega^1_T)$。

证明。 方向 (2.21.2) $\Rightarrow$ (2.21.1) 显然。为证明反向，假设给定一个闭微分形式 $\sigma$以及一点 $t \in T$，它们满足 (2.21.1) 中的性质。我们需要证明

$$\sigma \in H^0(X, \varphi^*\Omega^1_T) \overset{\text{Reminder 2.20}}{\Leftrightarrow} d\iota_s\sigma = 0 \in H^0\big(X_s,\ \Omega^1_{X_s}(\log D_s)\big),\ \text{for every } s \in T.$$

假设给定一点 $s \in T$。由于 $(X_s,\ D_s)$ 是简单正规交叉的，且 $X_s$ 是紧的 Kähler 流形，回顾自然积分映射的像，

$$\pi_1(X_s \setminus D_s) \to H^0\big(X_s,\ \Omega^1_{X_s}(\log D_s)\big)^*,\quad \gamma \mapsto \Big(\tau \mapsto \int_\gamma \tau\Big)$$

张成向量空间 $H^0\big(X_s,\ \ \Omega^1_{X_s}(\text{对数 } D_s)\big)^*$，见 [NW14，定理 4.5。4]。因此，要证明 $d\iota_s\sigma$为零，只需证明

$$\int_{\gamma_s} d\iota_s\sigma = 0,\quad \text{for every loop } \gamma_s \text{ in } X_s \setminus D_s.$$

设给定一个环路 $\gamma_s$在 $X_s \setminus D_s$中，并回顾注记 2.19，可知 $\varphi\colon X \setminus D \twoheadrightarrow T$是一个以路径连通底空间为底空间的可微纤维丛。因此，同伦正合列表明，环路 $\gamma_s$在 $X \setminus D$ 内与一个环路同伦等价 $\gamma_t$，它位于$X_t \setminus D_t$中。我们有

$$\int_{\gamma_s} d\iota_s\sigma = \int_{\iota_s\circ\gamma_s} \sigma \overset{(*)}{=} \int_{\iota_t\circ\gamma_t} \sigma = \int_{\gamma_t} d\iota_t\sigma \overset{(2.21.1)}{=} \int_{\gamma_t} 0 = 0$$

其中，$*$由 $\gamma_s$与 $\gamma_t$之间的同伦等价以及全纯微分形式 $\sigma$的闭性推出。□

2.6. **由亚纯映射定义的叶丛。** 命题2.21 的结论常被概括为："对数形式 $\sigma$ 消去由 $\varphi$ 定义的叶状结构"。为避免混淆，我们对这一术语作出明确的定义。

**定义 2.22**（由亚纯映射定义的叶状结构）。 若 $\varphi\colon\ X \dashrightarrow Y$ 是复流形之间的亚纯映射，令 $\iota\colon\ X^\circ \hookrightarrow X$ 为 $\varphi$ 有定义处的最大开集的包含。我们称

$$\iota_* \ker\Big(T(\varphi|_{X^\circ}) : \mathscr{T}_{X^\circ} \to (\varphi|_{X^\circ})^* \mathscr{T}_Y\Big) \subseteq \iota_* \mathscr{T}_{X^\circ} = \mathscr{T}_X \tag{2.22.1}$$

为由 $\varphi$定义的叶状结构。注意，该层是相干的，作为$\mathscr{T}_X$ 的子层是饱和的，因此是反身的。它在李括号运算下封闭。

记号 2.23（由亚纯映射定义的叶状结构）。 设定与定义 2.22相同。若不会引起混淆，我们将 $\ker(T\varphi) \subseteq \mathscr{T}_X$ 记作由 $\varphi$定义的叶状结构，以此简写较繁琐的表达式（2.22.1）。

**定义 2.24**（湮灭叶状结构的对数形式）。 若$(X, D)$ 是一个 *snc* 对，若$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{T}_X$是一个叶状结构，且$\sigma \in H^0\big(X,\ \Omega^1_X(\text{对数 } D)\big)$是一个对数形式，则当自然层态射

$$\sigma : \mathscr{F} \to \mathscr{O}_X(D_{\mathrm{red}})$$

恒等于零。

## 3. 由一般生成层诱导的有理映射

为讨论第 6 节中由严格楔积子空间定义的"Bogomolov 层"，本节考察层 $\mathscr{E}$、子空间 $E \subseteq H^0\big(X,\ \mathscr{E}\big)$以及由相应线性系 $\wedge^{\mathrm{rank}\,\mathscr{E}} E \to H^0\big(X \text{ 和 } \det \mathscr{E}\big)$所得到的有理映射。

**定义 3.1**（由截面空间一般生成的层）。设 $X$ 是一个紧的正规解析簇，且 $\mathscr{E}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模的凝聚层。假设$\mathscr{E}$不是挠层，并令 $E \subseteq H^0\big(X,\ \mathscr{E}\big)$为一个线性子空间。若满足以下两个等价条件，则称 $\mathscr{E}$由 $E$ 中的截面一般生成。

*(3.1.1)* 自然映射 $E \otimes \mathscr{O}_X \to \mathscr{E}$一般满射。*(3.1.2)* 自然映射 $\lambda_E$：$\wedge^{\mathrm{rank}\,\mathscr{E}} E \to H^0\big(X,\ \det \mathscr{E}\big)$ 非平凡。

以下构造是本节后续所有内容的基础。

构造 3.2（由截面空间诱导的到线性系的投影）。 在定义 3.1的设定中，假设 $\mathscr{E}$由 $E$中的截面一般生成。注意，$\det\mathscr{E}$ 是反身的，且具有非平凡的截面空间。沿用第 2.3节的记号，将相应的有理映射记为

$$\varphi_{\det\mathscr{E}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}\Big(H^0\big(X,\ \det\mathscr{E}\big)\Big).$$

正如 2.11中所述，线性空间 $\lambda_E \subseteq H^0\big(X \text{ 与 } \det \mathscr{E}\big)$之间的包含诱导出射影化之间的有理投影映射，

$$\mathbb{P}\Big(H^0\big(X,\ \det\mathscr{E}\big)\Big) \dashrightarrow \mathbb{P}\Big(\mathrm{img}\,\lambda_E\Big).$$

由于 $\mathrm{img}\ \lambda_E$的元素在 $X$的一般点处不消失， $\varphi_{\det\mathscr{E}}$的像不包含在该投影的不定点集中，因此我们得到如下复合有理映射 $\eta_E := \varphi_{\mathrm{img}\,\lambda_E,\ \det\ \mathscr{E}}$，

$$X \overset{\varphi_{\det\mathscr{E}}}{\dashrightarrow} \mathbb{P}\Big(H^0\big(X,\ \det\mathscr{E}\big)\Big) \overset{\text{projection}}{\dashrightarrow\!\!\!\!\rightarrow} \mathbb{P}\Big(\mathrm{img}\,\lambda_E\Big), \qquad X \overset{\eta_E}{\dashrightarrow} \mathbb{P}\Big(\mathrm{img}\,\lambda_E\Big).$$

记号 3.3（由截面空间诱导的到线性系的投影）。 在本文中，每当讨论由截面空间一般生成的 $\eta_E$ 构造 3.2 中的层时，我们都将使用此记号。

备注 3.4（由截面空间一般生成的微分层）。 考虑构造 3.2 中的设定，其中 $X$ 是一个 K¨ahler 流形， $D$ 是 $X$ 上的一个简单正规交除子，且 $\mathscr{E} \subseteq \Omega^1_X$（对数 $D$）是一个对数微分层。那么，存在一列不等式：

$$\dim \operatorname{img} \eta_E \leq \dim \operatorname{img} \varphi_{\det \mathscr{E}} \leq \kappa(\det \mathscr{E}) \leq \operatorname{rank} \mathscr{E},$$

其中，最后一个不等式由经典的 Bogomolov-Sommese 消失定理给出[1]。回忆一下，$\det \mathscr{E}$称为 *Bogomolov* 层 ，如果等式 $\kappa(\det \mathscr{E}) = \operatorname{rank} \mathscr{E}$成立。

3.1. **函子性**。 下面的命题断言，由截面空间诱导的到线性系的投影对于由截面空间一般生成的层之间的包含具有函子性。证明繁琐，但初等，而且并不令人意外。为完整起见，我们在此给出详细证明。

**命题 3.5** （ $\eta_\bullet$ 在包含下的函子性）。 设 $X$ 是一个紧的正规解析簇，且 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{E}$ 是 $\mathscr{O}_X$-模的无挠相干层之间的包含。假设 $\mathscr{F}$和 $\mathscr{E}$分别由 $F \subseteq H^0(X, \mathscr{F})$以及 $E \subseteq H^0(X, \mathscr{E})$中的截面一般生成。若 $F \subseteq E$，则存在一个由可复合有理映射构成的交换图，

$$X \overset{\eta_F}{\dashrightarrow} \mathbb{P}\left(\operatorname{img} \lambda_E\right) \overset{\exists \eta_{E,F}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{P}\left(\operatorname{img} \lambda_F\right), \tag{3.5.1}$$

其中$\eta_{E,\,F}$是一个线性投影。

记号 3.6（ $\eta_\bullet$ 在包含下的函子性）。 在全文讨论由截面空间一般生成的层之间的包含时，我们将始终使用命题$\eta_{E,\,F}$中的记号3.5 。

命题 *3.5* 的证明。 取一个一般点 $x \in X$，并令 $\tau_1$，……， $\tau_a \in E$为一列截面，使得 $\tau_1$（$x$），……， $\tau_a$（$x$）的等价类构成商空间$\mathscr{E}_x/\mathscr{F}_x$的一组基。我们得到一个线性单射

$$\iota_\tau : H^0(X, \det \mathscr{F}) \hookrightarrow H^0(X, \det \mathscr{E}), \quad \sigma \mapsto \sigma \wedge \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_a.$$

注意到单射 $\iota_\tau$ 限制在$\lambda$-算子的像之间时是一个线性单射，因此我们得到一个由线性单射构成的交换图，

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{img} \lambda_E & \hookrightarrow & H^0(X, \det \mathscr{E}) \\ {\scriptstyle \iota_\tau|_{\operatorname{img} \lambda_F}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota_\tau} \\ \operatorname{img} \lambda_F & \hookrightarrow & H^0(X, \det \mathscr{F}), \end{array}$$

[1]参见 [EV92，推论 6。9] 关于射影情形，以及 [LMN+25，第 6] 节，了解非射影 K¨ahler 情形下消失定理的讨论

从而得到一个由可复合有理映射构成的射影化之间的图表，

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \overset{\eta_E}{\dashrightarrow} & & \\
X & \xrightarrow[\varphi_{\det\mathscr{E}}]{} & \mathbb{P}\Big(H^0\big(X,\det\mathscr{E}\big)\Big) & \xrightarrow[\text{projection}]{} & \mathbb{P}\Big(\operatorname{img}\lambda_E\Big) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{P}(\iota_\tau)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{P}(\iota_\tau|_{\operatorname{img}\lambda_F})} \\
X & \xrightarrow[\varphi_{\det\mathscr{F}}]{} & \mathbb{P}\Big(H^0\big(X,\det\mathscr{F}\big)\Big) & \xrightarrow[\text{projection}]{} & \mathbb{P}\Big(\operatorname{img}\lambda_F\Big), \\
 & & \underset{\eta_F}{\dashrightarrow} & &
\end{array}
\tag{3.7.1}
$$

其右侧方块按构造可交换。一旦证明（3.7.1）中的左侧方块也可交换，证明便告完成。为此，取 $x \in X$ 为一般点。将射影空间中的点识别为底层向量空间中的余维一子空间，我们有

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\det\mathscr{E}}(x) &= \big\{\mu \in H^0\big(X,\det\mathscr{E}\big) \;:\; \mu(x)=0\big\} \\
\varphi_{\det\mathscr{F}}(x) &= \big\{\sigma \in H^0\big(X,\det\mathscr{F}\big) \;:\; \sigma(x)=0\big\}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\iota_\tau)\big(\varphi_{\det\mathscr{E}}(x)\big) &= \iota_\tau^{-1}\big\{\mu \in H^0\big(X,\det\mathscr{E}\big) \;:\; \mu(x)=0\big\} \\
&= \big\{\sigma \in H^0\big(X,\det\mathscr{F}\big) \;:\; (\sigma\wedge\tau_1\wedge\cdots\wedge\tau_a)(x)=0\big\}.
\end{aligned}
$$

但由于 $x$ 是一般的，且构成基是一个扎里斯基开性质，$\tau_\bullet$ 的选取保证了

$$
\sigma(x)=0 \Leftrightarrow (\sigma\wedge\tau_1\wedge\cdots\wedge\tau_a)(x)=0, \quad \text{for every } \sigma \in H^0\big(X,\det\mathscr{F}\big),
$$

这就是所需的可交换性结论。 □

为供第6节后续使用，我们指出，命题3.5 适用于较大的层由有限个子层之和得到的情形。

**推论3.8**（由截面空间一般生成的层之和）。 设 $X$ 为一个射影流形，并设 $\mathscr{F}_1$，…，$\mathscr{F}_a \subseteq \mathscr{E}$ 是 $\mathscr{O}_X$-模的无挠相干层的包含。假设这些 $\mathscr{F}_\bullet$ 由 $F_\bullet \subseteq H^0\big(X,\ \mathscr{F}_\bullet\big)$ 中的截面一般生成，并令

$$
\mathscr{F} := \sum_i \mathscr{F}_i \subseteq \mathscr{E} \qquad F := \sum_i F_i \subseteq H^0\big(X,\mathscr{E}\big).
$$

那么， $\mathscr{F}$ 由 $F$ 中的截面一般生成，并且存在一个由可复合有理映射组成的交换图，

$$
X \overset{\eta_{F_1}\times\cdots\times\eta_{F_a}}{\dashrightarrow} \mathbb{P}\Big(\operatorname{img}\lambda_F\Big) \xrightarrow[\exists\eta]{\eta_F} \mathbb{P}\Big(\operatorname{img}\lambda_{F_1}\Big)\times\cdots\times\mathbb{P}\Big(\operatorname{img}\lambda_{F_a}\Big).
\tag{3.8.1}
$$

特别地，我们有

$$
\dim \operatorname{img}\eta_F \geq \dim \operatorname{img}\eta_{F_1}\times\cdots\times\eta_{F_a}.
\tag{3.8.2}
$$

证明。断言 $\mathscr{F}$ 由 $F$ 中的截面一般生成。应用命题3.5 于子层 $\mathscr{F}_\bullet \subset \mathscr{F}$ 并取 $\eta := \eta_{F,\ F_1}\times\ldots\times\eta_{F,\ F_a}$。不等式（3.8.2）由（3.8.1）的交换性可得，这保证了 $\eta_F$ 的像支配 $\eta_{F_1}\times\cdots\times\eta_{F_a}$ 的像。 □

## 4. 适配反身微分形式的延拓，定理 1.6 的证明

定理 1.6 断言，除子对数终端 $C$-对上的反身 1-形式可延拓至奇点的对数解消。第 4.1 节和第 4.2 节将这一陈述精确化，并将这一概念与 [KR24a第 5]节讨论的“拉回”概念进行比较。接下来的第 4.3 节给出初等的可延拓性判据，并在第 4.4 节中应用这些判据证明定理 1.6。

**4.1. 定义。** 适配反身微分形式的延拓问题，考虑一个 C-对的 $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$覆盖 $X$、奇点的解消 $X$，并询问每个适配反身$\widetilde{\ }$微分形式是否都来自 $X$上的对数微分形式。本节将始终考虑以下情形。

设定 4.1（适配反身微分形式的延拓）。 给定一个 C-对（$X$， $D$），考虑以下形式的态射序列，

$$\widetilde{X} \xrightarrow{\pi,\ \text{log resolution of } \left(\widehat{X},\, \gamma^{*}\lfloor D\rfloor\right)} \widehat{X} \xrightarrow{\gamma,\ q\text{-morphism}} X. \tag{4.1.1}$$

记

$$\widehat{X}^{\circ} := \widehat{X}_{\mathrm{reg}} \cap \gamma^{-1}(X_{\mathrm{reg}} \setminus \operatorname{supp} D)$$

$\widehat{\ }$并注意到 $X_{\circ}$是 $X$的一个非空扎里斯基开子集。

注 4.2（反身对数微分形式层）。 沿用设定 4.1。若 $p \in \mathbb{N}$ 是任意数，我们考虑自然的反身对数微分形式层，

$$\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} \subseteq \Omega^{[p]}_{\widehat{X}}\left(\log \gamma^{*}\lfloor D\rfloor\right) \tag{4.2.1}$$

$$\pi_{*}\Omega^{p}_{\widetilde{X}}\left(\log \pi^{*}\gamma^{*}\lfloor D\rfloor\right) \subseteq \Omega^{[p]}_{\widehat{X}}\left(\log \gamma^{*}\lfloor D\rfloor\right). \tag{4.2.2}$$

请读者参阅 [KR24a，第 4 节。2] 其中包含关系（4.2.1）得到了详细讨论。包含关系（4.2.2）之所以存在，是因为左侧的层无挠，并且在解消映射 $\pi$ 为同构的大开集上与右侧的反身层一致。

**定义 4.3** （适配反身微分形式的延拓）。设 （$X$， $D$）是一个$C$-对，并设 $p \in \mathbb{N}$ 是任意数。称适配反身 $p$-微分形式定义在（$X$， $D$）上，并延拓到奇点的对数解消，如果对于形如（4.1.1）的每个序列，都有

$$\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} \subseteq \pi_{*}\Omega^{p}_{\widetilde{X}}\left(\log \pi^{*}\gamma^{*}\lfloor D\rfloor\right). \tag{4.3.1}$$

备注4.4（定义4.3中的层）。回顾备注4.2 ，左右两侧的层都是 $\Omega^{[p]}_{\widehat{X}}$（对数 $\gamma^{*}\lfloor D\rfloor$）的子层。因此，包含关系（4.3.1）是有意义的。

定义4.3 中使用“延拓”一词，以下备注说明了其合理性。

备注 4.5（全局定义的适配反身微分形式的延拓）。假设定义4.3.1中的包含（4.3）成立。若

$$\widehat{\sigma} \in H^{0}\left(\widehat{X},\, \Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)}\right) \subseteq H^{0}\left(\widehat{X},\, \Omega^{[p]}_{\widehat{X}}\left(\log \gamma^{*}\lfloor D\rfloor\right)\right),$$

是任意一个适配反身 $p$微分形式，则存在一个对数微分形式

$$\widetilde{\sigma} \in H^{0}\left(\widetilde{X},\, \Omega^{p}_{\widetilde{X}}\left(\log \pi^{*}\gamma^{*}\lfloor D\rfloor\right)\right)$$

$\widehat{\ }$，它在（$X$， $\gamma^{*}\lfloor D\rfloor$）$_{\mathrm{snc}}$上与 $\widehat{\sigma}$的拉回一致。

**命题 4.6** （解消的独立性）。设（$X$， $D$）是一个$C$-对，且 $p \in \mathbb{N}$为任意数值。那么，以下陈述等价。

（*4.6.1*）对于每个形如（4.1.1）的序列（4.1.1），包含（（4.3.1））成立；（*4.6.2*）对于一个形如（4.1.1）的序列，包含（*4.3.1*）成立。

证明。 由于任意两个对数解消都被某个共同的第三个解消支配，子层$\pi_{*}\Omega^{p}_{\widetilde{X}}\left(\log \pi^{*}\gamma^{*}\lfloor D\rfloor\right) \subseteq \Omega^{[p]}_{\widehat{X}}\left(\log \gamma^{*}\lfloor D\rfloor\right)$不依赖于 $\pi$。□

4.2. **与文献的关系。** 对于局部可均匀化对[2], 参考文献论文的第5节 [KR24a] 讨论了“拉回”这一概念，它与定义 4.3中的“延拓”密切相关。“拉回”的定义将形如（4.1.1）的序列替换为其中 $\pi$ 是来自某个光滑空间的任意态射，并将包含关系（4.3.1）替换为存在一个拉回态射“$d_C\pi$”，它推广了K¨ahler微分形式的标准拉回。下面的命题将阐述这些概念之间的关系，以供后文参考。

**命题 4.7**（作为拉回性质的延拓）。 设 $X$， $D$） 是一个 $C$-对，并设 $p \in \mathbb{N}$为任意数。适配的反身微分形式 $p$-形式在 （$X$， $D$） 上延拓到奇点的对数解消，当且仅当对于每个形如（4.1.1）的序列，都存在一个单射层态射

$$d_C\pi : \pi^{[*]}\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} \hookrightarrow \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor)$$

该态射在 *Zariski* 开集 $\pi^{-1}$（ $\widehat{X}^\circ$） 上与 *K¨ahler* 微分的标准拉回一致。

命题 4.7 将在下文证明。措辞“与 [...] K¨ahler 微分的标准拉回一致”可能需要解释。

说明 4.8（与 K¨ahler 微分的标准拉回一致）。 在命题 4.7的设定中，考虑非平凡开集

$$\widehat{X}^\circ = \widehat{X}_{\mathrm{reg}} \cap \gamma^{-1}(X_{\mathrm{reg}} \setminus \operatorname{supp} D)$$

并回忆 [KR24a，例 4.6] 中指出，在 $X^\circ$上，适配的反身微分形式层具有简单形式

$$\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)}|_{X^\circ} = \gamma^*\Omega^1_{X_{\mathrm{reg}}}$$

特别地， $\Omega^{[1]}{}_{(X,D,\gamma)}|_{X^\circ}$是 K¨ahler 微分的层 $\Omega^1_{\widehat{X}^\circ}$的一个子层。若存在如下的层交换图，则层态射 $d_C\pi$在 $\pi^{-1}(\widehat{X}^\circ)$ 上与 K¨ahler 微分的标准拉回一致： $\pi^{-1}(\widehat{X}^\circ)$ 上的层，

$$\begin{array}{ccc}
\pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)}\Big|_{\pi^{-1}(\widehat{X}^\circ)} & \xhookrightarrow{\ d_C\pi\ } & \Omega^1_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\Big|_{\pi^{-1}(\widehat{X}^\circ)} \\
\big\downarrow & & \big\| \\
\left(\pi|_{\pi^{-1}(\widehat{X}^\circ)}\right)^*\Omega^1_{\widehat{X}^\circ} & \xhookrightarrow[\text{standard pull-back}]{d(\pi|_{\pi^{-1}(\widehat{X}^\circ)})} & \Omega^1_{\pi^{-1}(\widehat{X}^\circ)}.
\end{array}$$

命题证明 4.7。 假设给定一个形如 (4.1.1) 的序列。若 $p$-形式在 $(X, D)$ 上延拓，则包含式 (4.3.1) 的拉回给出一个态射

$$\pi^*\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} \subseteq \pi^*\pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor) \to \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor),$$

由于右侧的层是局部自由的，该态射经由反身包 $\pi^{[*]}\Omega^{[p]}{}_{(X,D,\gamma)}$分解。反过来，若给定一个形如 $d_C\pi$的层态射，则有如下包含

$$\begin{aligned}
\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} &\subseteq \pi_*\pi^*\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} \subseteq \pi_*\pi^{[*]}\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} \\
&\subseteq \pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor) && \text{包含 } \pi_*d_C\pi \\
&\subseteq \Omega^{[p]}_{\widehat{X}}(\log \gamma^*\lfloor D\rfloor) && \text{包含（4.2.2）}
\end{aligned}$$

如定义 4.3 中所要求的。 □

[2]局部可均匀化对是$C$-对，具有特别简单的奇点，类似于具有约化正规交边界除子的对的商。有关详细定义和讨论，请参阅 [KR24a第 2.5 节。1] 。

**推论 4.9**（局部可均匀化对上适配反身微分形式的延拓）。设$(X, D)$是一个$C$-对，且$p \in \mathbb{N}$为任意数。若$(X, D)$局部可一致化，则$(X, D)$上的适配反身$p$-微分形式可延拓至奇点的对数解消。

证明。给定任意形如（4.1.1）的序列，回顾 [KR24a，第 5]节，其中存在单射层态射

$$d_C\pi : \pi^{[*]}\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} \hookrightarrow \Omega^p_{\widehat{X}}(\log \pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor)$$

它们在$\pi^{-1}(\widehat{X}_\circ)$上与 K¨ahler 微分的标准拉回一致。 □

4.3. **延拓判据**。本节建立保证适配的反身微分形式能够延拓的判据。首先，我们注意到可延拓性是一个局部性质。初等证明留给读者。

**命题 4.10**（延拓问题的局部性质）。设$(X, D)$是一个$C$-对，设$p \in \mathbb{N}$为一个数，并设$(U_\alpha)_{\alpha\in A}$是由在解析拓扑中开集构成的覆盖，将$X$覆盖。则以下陈述等价。

（*4.10.1*）$(X, D)$上的适配反身$p$-微分形式可延拓到奇点的对数解消。（*4.10.2*）对于每个$\alpha \in A$，$(U_\alpha, D|_{U_\alpha})$上的适配反身$p$-微分形式可延拓到奇点的对数解消。 □

作为附录中的分层延拓结果的一个几乎直接的推论A，我们发现，如果适配反身微分形式在一个高余维子集之外延拓，那么它们也会延拓。

**命题 4.11**（限制到非常大的开集）。设$(X, D)$是一个$C$-对，设$p \in \mathbb{N}$为一个数，并设$Z \subset X$是余维$_X Z \geq p + 2$的解析子集。那么，以下陈述等价。

（*4.11.1*）在$(X, D)$上的适配反身$p$-微分形式可延拓到奇点的对数解消。（*4.11.2*）在$(X\setminus Z, D|_{X\setminus Z})$上的适配反身$p$-微分形式可延拓到奇点的对数解消。

证明。只有蕴含关系（4.11.2）⇒(4.11.1) 是有意义的。假设适配反$p$-微分形式在$(X\setminus Z, D|_{X\setminus Z})$上可延拓到奇点的对数解消，考虑 Setting 4.1.1中所述的一个态射序列（4.1）。我们需要检验定义 4.3.1中的包含关系 4.3。为此，考虑包含关系$\iota\colon \gamma^{-1}(X\setminus Z) \hookrightarrow \widehat{X}$。假设（4.11.2）随后将给出层之间的包含关系

$$\iota^*\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} \subseteq \iota^*\pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor) \subseteq \iota^*\Omega^{[p]}_{\widehat{X}}(\log \gamma^*\lfloor D\rfloor).$$

由于推前$\iota_*$保持包含关系，我们得到

$$\iota_*\iota^*\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} \subseteq \iota_*\iota^*\pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor) \subseteq \iota_*\iota^*\Omega^{[p]}_{\widehat{X}}(\log \gamma^*\lfloor D\rfloor). \tag{4.11.3}$$

但自反性表明

$$\iota_*\iota^*\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} = \Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)}$$
$$\iota_*\iota^*\Omega^{[p]}_{\widehat{X}}(\log \gamma^*\lfloor D\rfloor) = \Omega^{[p]}_{\widehat{X}}(\log \gamma^*\lfloor D\rfloor)$$

而附录A.2 A给出

$$\iota_*\iota^*\pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor) = \pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor).$$

这将（4.11.3）表述为对所需包含关系（4.3.1）的重新表述。 □

乍看之下，定义 4.3（“向奇点的对数解消扩张”）要求我们检查形如（4.1.1）的每一个态射序列。下面的命题简化了这一任务，说明只需考虑其中$q$-态射$\gamma$是适配的序列即可。

**命题 4.12** （对适配的 $q$-态射的限制）。 设 $(X, D)$ 为一个 $C$-对，且$p \in \mathbb{N}$ 为任意数。假设对于以下形式的每一个态射序列，

$$\widetilde{X} \xrightarrow{\rho,\ \text{log resolution of } (\widehat{X}, \delta^*\lfloor D\rfloor)} \widehat{X} \xrightarrow{\delta,\ \text{adapted } q\text{-morphism}} X,$$

存在一个包含

$$\Omega^{[p]}_{(X,D,\delta)} \subseteq \rho_*\Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \rho^*\delta^*\lfloor D\rfloor). \tag{4.12.1}$$

那么，适配的反身 $p$-微分形式在$(X, D)$ 上可延拓至奇点的对数解消。

证明。 回顾命题 4.10 可知，延拓性质是 $X$上的局部性质。因此不失一般性，可假设 $X$ 是 Stein，且除子 $D$ 只有有限个分支。由 [KR24a，引理 2，36], 可知这意味着存在一个$\widehat{\ }$适配覆盖，记作 $\mu$： $W \twoheadrightarrow X$。

为验证定义 4.3中列出的条件，假设给定一个态射序列，如（4.1.1）中的设置 4.1。接下来，构造如下形式的图表，

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Y} \arrow[r, two heads, "\rho,\ \text{等变对数解消}"] \arrow[d, two heads, "\widetilde{q},\ \text{生成有限}"'] & \widehat{Y} \arrow[r, "\delta,\ \text{适配的 } q\text{-态射}"] \arrow[d, two heads, "q,\ \text{伽罗瓦覆盖}"] & X \arrow[d, equal] \\
\widetilde{X} \arrow[r, two heads, "\pi,\ \text{对数消解}"'] & \widehat{X} \arrow[r, "\gamma,\ q\text{-态射}"'] & X.
\end{tikzcd}$$

详细说明该构造如下：

- 为了构造右方交换图，考虑纤维积$W \times_X X$ 并取$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $Y$ 作为其上的伽罗瓦闭包 $X$。于是，自然态射 $\delta$ 将经过 $\mu$，并且根据 [KR24a，注记 227], 其本身是适配的。自然态射 $q$ 是一个覆盖，因为 $\mu$ 是覆盖。将伽罗瓦群记为 $G$。
- 为了构造左侧方块，令 $\rho$ 为 $G$-等变对数解消$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$$G$-簇 $X \times_{\widehat{X}} Y$。

所需的包含（4.3.1）将由涉及 $G$-不变推前的标准论证得出：

$$\begin{aligned}
\Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)} &= \left(q_*\Omega^{[p]}_{(X,D,\delta)}\right)^G && \text{by [KR24a, Lem. 4.20]} \\
&\subseteq \left(q_*\rho_*\Omega^p_{\widetilde{Y}}(\log \rho^*\delta^*\lfloor D\rfloor)\right)^G && \text{Assumption (4.12.1)} \\
&= \left(\pi_*\widetilde{q}_*\Omega^p_{\widetilde{Y}}(\log \rho^*\delta^*\lfloor D\rfloor)\right)^G && \text{Commutativity} \\
&= \pi_*\left(\widetilde{q}_*\Omega^p_{\widetilde{Y}}(\log \rho^*\delta^*\lfloor D\rfloor)\right)^G && G\text{-invariance} \\
&= \pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor)
\end{aligned}$$

最后一个等式是对数对几何中的标准事实，也可由 [KR24a，引理 4.20], 得出，因为 $\rho^*\delta^*\lfloor D\rfloor$ 与 $\widetilde{q}^*\pi^*\gamma^*\lfloor D\rfloor$ 具有相同的支撑。 □

最后我们给出一个命题，说明在具有特别良好覆盖的对上，适配反身 $p$-微分形式可以延拓；这种覆盖在 [N´u24，定义 10]中称为“完全适配”。

**命题 4.13** （存在良好覆盖空间时的延拓）。 设 $(X, D)$ 为一个 $C$-对，且令 $p \in \mathbb{N}$ 为任意数。假设存在一个强适配覆盖 $\gamma$： $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$$X \twoheadrightarrow X$，其中 $X$ 光滑，且 $\gamma^*\lfloor D\rfloor$ 具有简单正规交叉支撑。那么，适配反身 $p$-微分形式可以从$(X, D)$ 延拓到奇点的对数解消上。

证明。 利用 $\gamma$，N´u˜nez 在 [N´u24，引理 21] 中证明了命题 4.12 的条件成立。 □

4.4. **定理 1.6的证明。** 命题 4.11 允许去除余维为 $Z \subset X \operatorname{codim}_X Z \geq 3$的代数子集。根据 [Gra15，命题 6，19], 因此我们可以假设，对于每个点 $x \in X$，以下二分情形成立。

(4.14.1) 点 $x$ 包含于 $X^\circ := X \setminus \operatorname{supp} \lfloor D \rfloor$。(4.14.2) 存在一个代数邻域 $U = U(x) \subseteq X$ 以及强适配$\widehat{\ }$覆盖 $\gamma\colon U \twoheadrightarrow U$，其中 $U$ 光滑且 $\gamma^* \lfloor D \rfloor$ 具有简单正规交叉支撑。

回顾命题 4.10 可知，延拓问题是局部的，因此我们可以假设以下情形之一成立。

(4.14.3) 我们有 $\lfloor D \rfloor = 0$。$\widehat{\ }$(4.14.4) 存在一个强适配覆盖 $\gamma\colon X \twoheadrightarrow X$，其中 $X$ 光滑且 $\gamma^* \lfloor D \rfloor$ 具有简单正规交叉支撑。

在情形 (4.14.3)中，N´u˜nez 已在 [N´u24，定理 1] 中证明了命题 4.12 的假设成立。在情形 (4.14.4)中，该结论由命题 4.13得出。□

## 5. 反身 $G$-层中的 Bogomolov 层与线性系

5.1. **适配反身微分形式层的 Kodaira 维数。** 在给出本节的主要结果——下文的命题5.1 之前，为方便读者，我们简要回顾“$C$-Kodaira-Iitaka”维数的概念。完整细节见 [KR24a，第 4 节和第 6 节。2]。

5.1.1. 流形上的张量。 若 $X$ 是一个流形，经典几何会考察 $X$上的张量对称代数。严格来说，考察的是层 $\operatorname{Sym}^n \Omega^p_X$ 及其对称乘积映射。特别地，若 $\mathscr{L} \subseteq \Omega^p_X$ 是秩一饱和子层，则 $\mathscr{L}$可逆，并且对称乘积层 $\operatorname{Sym}^n \mathscr{L}$是 $\operatorname{Sym}^n \Omega^p_X$的饱和子层。

$\widehat{\ }$5.1.2. $C$-对上的适配反身张量。 若 $(X, D)$ 是一个 C-对，且 $\gamma\colon X \twoheadrightarrow X$是一个覆盖，则 C-对理论会考察$\widehat{X}$上的“适配反身张量”对称代数。严格来说，考察的是层 $\operatorname{Sym}^{[n]}{}_C \Omega^{[p]}{}_{(X,D,\gamma)}$及其对称乘积映射。特别地，若 $\mathscr{L} \subseteq \Omega^{[p]}{}_{(X,D,\gamma)}$ 是秩一饱和子层，则 $\mathscr{L}$是反身的，且 $\operatorname{Sym}^{[n]} \mathscr{L}$是 $\operatorname{Sym}^{[n]}{}_C \Omega^{[p]}{}_{(X,D,\gamma)}$的子层。然而，与流形情形不同，这个层未必是饱和的，因此定义 C-乘积层

$$\operatorname{Sym}^{[n]}_C \mathscr{L} \subseteq \operatorname{Sym}^{[n]}_C \Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)}$$

作为饱和化。接下来可以考虑集合

$$M := \left\{ m \in \mathbb{N} \;\middle|\; h^0\big(\widehat{X}, \operatorname{Sym}^{[m]}_C \mathscr{L}\big) > 0 \right\}$$

并将 *$C$-Kodaira-Iitaka* 维数定义为

$$\kappa_C(\mathscr{F}) := \begin{cases} \max_{m \in M} \left\{ \dim \overline{\operatorname{img} \varphi_{\operatorname{Sym}^{[m]}_C \mathscr{L}}} \right\} & \text{if } M \neq \emptyset \\ -\infty & \text{if } M = \emptyset, \end{cases}$$

其中 $\bullet\bar{\ }$表示在 $\mathbb{P}^\bullet$中的Zariski闭包。

5.2. **比较不同$C$覆盖上层的-Kodaira 维数。** 第5.1.2 节中所述的一切都取决于所选覆盖 $\gamma$。鉴于任意两个覆盖都由某个共同的第三个覆盖支配，本节的主要结果将阐明改变覆盖后会发生什么。

**命题 5.1** ($C$-适配微分层的 Kodaira 维数)。 设$(X, D)$是一个$C$-对，其中 $X$ 是紧的。假设给定一列覆盖，

$$\widehat{X}_2 \xrightarrow[\alpha,\ \text{Galois cover}]{} \widehat{X}_1 \xrightarrow[\beta,\ \text{cover}]{} X, \qquad \gamma,\ \text{cover}$$

其中 $\alpha$ 是伽罗瓦覆盖，其群为 $G$。若 $p, d$ 是任意两个数，则以下陈述等价。

*(5.1.1)* 存在一个秩一反身层 $\mathscr{F}_1 \subseteq \Omega^{[p]}{}_{(X,D,\beta)}$，满足 $\kappa_C(\mathscr{F}_1) \geq d$。*(5.1.2)* 存在一个秩一反身 $G$-子层 $\mathscr{F}_2 \subseteq \Omega^{[p]}{}_{(X,D,\gamma)}$，满足 $\kappa_C(\mathscr{F}_2) \geq d$。

命题 5.1 将在第5.4节（下一页）中证明。作为直接推论，我们得到 Graf 版本的 Bogomolov-Sommese 消失定理的一个轻微推广，[Gra15，定理 1。2]。遵循相关文献的做法，我们将“Bogomolov 层”的概念推广到这一情形。

**推论 5.2** (Bogomolov–Sommese 消失定理适用于 $G$-适配微分层)。设$(X, D)$ 是一个对数典范$C$-对，其中 $X$ 是紧的 *Kähler*。若 $\gamma\colon X \twoheadrightarrow X$ 是任意一个伽罗瓦群为 $G$ 的伽罗瓦覆盖，$p$ 是任意一个数，且 $\mathscr{F}_1 \subseteq \Omega^{[p]}{}_{(X,D,\gamma)}$ 是任意一个秩一 $G$-子层，则 $\kappa_C(\mathscr{F}_1) \leq p$。

证明。应用命题5.1 在 $\beta = \mathrm{Id}_X$ 的情形，并回顾 [KR24a, 定理 6.14]：若 $\mathscr{F}_2 \subseteq \Omega^{[p]}{}_{(X,\ D,\ \mathrm{Id}_X)}$ 是秩一相干层，则 $\kappa_C(\mathscr{F}_2) \leq p$. □

**定义 5.3** (Bogomolov $G$-层，参见 [KR24a，定义 6.15])。在推论 5.2的设定下，若 $\mathscr{F}_1$ 是 *Bogomolov* $G$- 层，且等式 $\kappa_C(\mathscr{F}_1) = p$ 成立。

Bogomolov $G$-层的存在与“特殊” $C$-对的概念相关。关于本文采用的定义以及 Campana 原始工作的参考文献，[KR24a，定义 6.16] 可供读者参阅。

**推论 5.4** (特殊对没有 Bogomolov $G$-层)。设 $(X, D)$ 是一个特殊$C$-对。若 $\gamma$：$X \twoheadrightarrow X$ 是伽罗瓦覆盖，且 $p$ 是任意数，则 $\Omega^{[p]}{}_{(X,\ D,\ \gamma)}$中不存在 *Bogomolov*$G$-层。 □

请注意，根据 [KR24a，定义 6 中16] “特殊”的定义 $X$ 是紧的 Kähler，且 $(X, D)$ 具有对数正则性。

5.3. **反身 $G$层上的线性系。为准备证明命题** 5.1，下面的命题 5.6 考察一个伽罗瓦覆盖 $q$： $X \twoheadrightarrow Y$ 一个秩一$G$层 $\mathscr{L}$ 在 $X$ 上，并将有理映射 $\varphi_{\mathscr{L}}$： $X \dashrightarrow \mathbb{P}^\bullet$ 与由反身对称积的 $G$不变推前所诱导的有理映射进行比较，

$$\varphi_{\left(q_* \operatorname{Sym}^{[n]} \mathscr{L}\right)^G} : Y \dashrightarrow \mathbb{P}^\bullet, \quad \text{for } n \in \mathbb{N}. \tag{5.5.1}$$

为理解（5.5.1），回忆一下，层 $\left(q_* \operatorname{Sym}^{[n]} \mathscr{L}\right)^G$ 按构造秩为一，并且根据 [GKKP11，引理 A4]具有反身性。为与所引用的文献保持一致，命题 5.6 讨论的是 $\mathscr{L}$的反身对称积。由于 $\mathscr{L}$ 秩为一，因此有 $\operatorname{Sym}^{[n]} \mathscr{L} = \mathscr{L}^{[\otimes n]}$，同样也可以讨论反身张量积。

**命题 5.6.** 设 $X$ 是一个紧的正规解析簇，且 $G$ 是一个在 $X$ 上全纯作用的有限群，其商为 $q$：$X \twoheadrightarrow X/G$。设 $\mathscr{L}$ 是一个秩一无挠 $G$- 层。若 $h^0(X, \mathscr{L}) > 0$，则存在一个数 $n \in \mathbb{N}^+$，使得

$$\dim \operatorname{img} \varphi_{\mathscr{L}} \leq \dim \operatorname{img} \varphi_{\left(q_* \operatorname{Sym}^{[n]} \mathscr{L}\right)^G}.$$

证明。这个证明冗长但初等，在不变量理论领域工作的专家很可能早已熟知。由于我们不知道有合适的参考文献，故在此给出完整细节。

步骤 *1*：准备。 群 $G$在线性作用于 $L = H^0(X, \mathscr{L})$并作用于其射影化 $\mathbb{P}(L)$，且该作用使映射 $\varphi_{\mathscr{L}}$成为等变映射。考虑商 $q_{\mathbb{P}}\colon \mathbb{P}(L) \twoheadrightarrow \mathbb{P}(L)/G$，选取一个非常 ample 线丛 $\mathscr{H} \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(L)/G)$，并取满足 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(L)}(n) = q_{\mathbb{P}}^* \mathscr{H}$ 的唯一数 $n \in \mathbb{N}$。我们得到一个同一化

$$H^0(\mathbb{P}(L)/G, \mathscr{H}) = H^0(\mathbb{P}(L), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(L)}(n))^G \subseteq H^0(\mathbb{P}(L), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(L)}(n)) \tag{5.6.1}$$

因此得到如下由可复合亚纯映射构成的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} X & \overset{\varphi_{\mathscr{L}}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}(L) & \overset{\varphi_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}(L)}(n)},\ \text{finite}}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}\left(H^0(\mathbb{P}(L), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(L)}(n))\right) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q,\ \text{finite}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q_{\mathbb{P}},\ \text{finite}} & & \Big\vdots{\scriptstyle \mu,\ \text{linear projection}} \\ X/G & \underset{(\varphi_{\mathscr{L}})^G}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}(L)/G & \underset{\varphi_{\mathscr{H}},\ \text{finite}}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}\left(H^0(\mathbb{P}(L)/G, \mathscr{H})\right). \end{array} \tag{5.6.2}$$

这里，

- 亚纯映射 $(\varphi_{\mathscr{L}})^G$ 是商之间诱导的映射，因为$\varphi_{\mathscr{L}}$ 是 $G$-等变的，
- 亚纯映射 $\mu$ 是由上面的 (5.6.1) 诱导的线性投影。

步骤 *2*：识别。 图表 (5.6.2) 中的线性空间带有自然的识别和包含，使得某些复合映射可以表示为由不完全线性系统诱导的映射。作为 (5.6.1) 的一种变体，我们感兴趣的是以下识别

$$H^0(\mathbb{P}(L), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(L)}(n)) = \mathrm{Sym}^n L \subseteq H^0(X, \mathrm{Sym}^{[n]} \mathscr{L}), \tag{5.6.3}$$

及其 $G$-不变版本，

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}(L)/G, \mathscr{H}) &= H^0(\mathbb{P}(L), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(L)}(n))^G && \text{by (5.6.1)} \\ &= (\mathrm{Sym}^n L)^G && \text{by (5.6.3)} \\ &\subseteq H^0(X, \mathrm{Sym}^{[n]} \mathscr{L})^G \\ &= H^0\left(X/G, q_*(\mathrm{Sym}^{[n]} \mathscr{L})^G\right). \end{aligned} \tag{5.6.4}$$

注意，(5.6.4) 将复合映射 $\varphi_{\mathscr{H}} \circ (\varphi_{\mathscr{L}})^G$ 与图表 (5.6.2) 中的映射对应起来

$$\varphi_{(\mathrm{Sym}^n L)^G,\, q_*(\mathrm{Sym}^{[n]} \mathscr{L})^G} : X/G \dashrightarrow \mathbb{P}\left(H^0\left(X/G, q_*(\mathrm{Sym}^{[n]} \mathscr{L})^G\right)\right).$$

步骤 *3*：证明结束。总之，我们得到

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{img}\, \varphi_{\mathscr{L}} &= \dim \mathrm{img}\, \varphi_{\mathscr{H}} \circ q_{\mathbb{P}} \circ \varphi_{\mathscr{L}} && \text{Finiteness} \\ &= \dim \mathrm{img}\, \varphi_{\mathscr{H}} \circ (\varphi_{\mathscr{H}})^G \circ q && \text{Diagram (5.6.2)} \\ &= \dim \mathrm{img}\, \varphi_{\mathscr{H}} \circ (\varphi_{\mathscr{H}})^G && \text{Finiteness} \\ &= \dim \mathrm{img}\, \varphi_{(\mathrm{Sym}^n L)^G,\, q_*(\mathrm{Sym}^{[n]} \mathscr{L})^G} && \text{Step 2} \\ &\leq \dim \mathrm{img}\, \varphi_{q_*(\mathrm{Sym}^{[n]} \mathscr{L})^G} && \text{Linear subsystem} \end{aligned}$$

□

5.4. **命题 5.1 的证明。** 我们分别考虑这两个蕴含。

蕴含 (5.1.1) $\Rightarrow$(5.1.2)。给定 $\mathscr{F}_1 \subseteq \Omega^{[p]}(X,D,\beta)$，令 $\mathscr{F}_2 := \alpha^{[*]}\mathscr{F}_1$ 并注意到 $\mathscr{F}_2$ 确实是 $G$-层 $\Omega^{[p]}(X,D,\gamma)$ 的一个 $G$-子层。接下来，回顾 [KR24a，注 4.14]指出，Kähler 微分的标准拉回可延拓到包含

$$\alpha^{[*]} \operatorname{Sym}_C^{[n]} \Omega^{[p]}_{(X,D,\beta)} \hookrightarrow \operatorname{Sym}_C^{[n]} \Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)}, \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}.$$

特别地，我们得到包含关系

$$\alpha^{[*]} \operatorname{Sym}_C^{[n]} \mathscr{F}_1 \hookrightarrow \operatorname{Sym}_C^{[n]} \alpha^{[*]}\mathscr{F}_1 = \operatorname{Sym}_C^{[n]} \mathscr{F}_2, \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}.$$

由此可得 $\kappa_C(\mathscr{F}_2) \geq \kappa_C(\mathscr{F}_1) \geq d$，证毕。 □

推论*(5.1.2)* $\Rightarrow$*(5.1.1)*。给定一个 $G$-子层 $\mathscr{F}_2 \subseteq \Omega^{[p]}(X, D, \gamma)$，考虑不变直推层

$$\mathscr{E}_n := \left(\alpha_* \operatorname{Sym}_C^{[n]} \mathscr{F}_2\right)^G, \text{ for every } n \in \mathbb{N}.$$

这些层带有包含关系

(5.7.1) $\quad \mathscr{E}_n \subseteq \left(\alpha_* \operatorname{Sym}_C^{[n]} \Omega^{[p]}_{(X,D,\gamma)}\right)^G = \operatorname{Sym}_C^{[n]} \Omega^{[p]}_{(X,D,\beta)}$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$

(5.7.2) $\quad \mathscr{E}_n \subseteq \operatorname{Sym}_C^{[n]} \mathscr{E}_1$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$.

(5.7.1) 中的等式由 [KR24a，引理 4。20]。包含关系（5.7.2）成立，是因为根据定义，$\operatorname{Sym}^{[n]}{}_C \mathscr{E}_1$ 在 $\operatorname{Sym}^{[n]}{}_C \Omega^{[p]}{}_{(X,\ D,\ \beta)}$ 中是饱和的，并且包含关系的左右两侧在稠密扎里斯基开集上相同

$$\left(\alpha(\widehat{X}_{2,\mathrm{reg}}) \cap \widehat{X}_{1,\mathrm{reg}} \cap \beta^{-1}(X_{\mathrm{reg}})\right) \setminus \beta^{-1}(\operatorname{supp} D).$$

做好这些准备后，并取 $\mathscr{F}_1 := \mathscr{E}_1$，我们得到数 $n$，$m \in \mathbb{N}$ 使得以下结论成立。

$$\begin{aligned}
d &\leq \kappa_C(\mathscr{F}_2) && \text{假设}\\
&= \dim \operatorname{img} \varphi_{\operatorname{Sym}_C^{[m]} \mathscr{F}_2} && \kappa_C\text{的定义}\\
&\leq \dim \operatorname{img} \varphi_{\alpha_*\left(\operatorname{Sym}^{[n]} \operatorname{Sym}_C^{[m]} \mathscr{F}_2\right)^G} && \text{命题 5.6}\\
&\leq \dim \operatorname{img} \varphi_{\alpha_*\left(\operatorname{Sym}_C^{[m\cdot n]} \mathscr{F}_2\right)^G} && \text{[KR24a，注 4。11]}\\
&\leq \dim \operatorname{img} \varphi_{\operatorname{Sym}_C^{[m\cdot n]} \mathscr{F}_1} && \text{(5.7.2)}\\
&\leq \kappa_C(\mathscr{F}_1) && \text{定义 } \kappa_C
\end{aligned}$$ □

## 6. 由严格楔子空间定义的不变 Bogomolov 层

设 $X$ 是一个紧的 Kähler 流形，并设 $D$ 是 $X$上的约化简单正规交除子。假设有限群 $G$ 作用于 $(X,\ D)$。受[Ran81、Cat91]为推广经典 Castelnuovo-De Franchis 定理而引入的构造启发，我们展示如何利用 $X$ 上丰富的对数一形式构造 $G$-不变 Bogomolov 层，即使在不存在 $G$-不变微分形式的情况下也能做到。

6.1. **严格楔子空间**。严格楔子空间（定义见 [Cat91], ）是本节的核心概念。

定义 *6.1*（严格楔子空间，[*Cat91*，第 2] 节）。设 $X$ 是一个紧复流形，且设 $D \in Div(X)$ 为一个约化简单正规交除子。设 $k \in \mathbb{N}$ 为一个数，且 $V \subseteq H^0(X, \Omega^1_X(log\ D))$ 为一个线性子空间。若满足以下条件，我们称 $V$为$H^0(X$的严格 $k$-楔子空间，$\Omega^1_X(log\ D))$。

*(6.1.1)* $V$的维数大于 $k$。换言之，维数$V > k$。*(6.1.2)* 自然映射 $\wedge^k V \to H^0(X,\ \Omega^k_X(\text{对数 } D))$是单射。*(6.1.3)* 自然映射 $\wedge^{k+1} V \to H^0(X,\ \Omega^{k+1}_X(\text{对数 } D))$恒为零。

备注 6.2（特殊值的严格楔子空间）。 假设满足定义 6.1中的设定。

(6.2.1) 若 $\dim V = k+1$，则 $\wedge^k V$中的每个元素都是纯楔子，而条件 (6.1.2)可以重新表述为： $k$个 $V$ 中的线性无关 1-形式元组的楔积不为零。(6.2.2) 若 $\dim X \leq k$，则条件 (6.1.3) 自动成立。

记号 6.3（由严格楔子空间诱导的微分层）。 设定同定义 6.1。若 $V$是 $H^0\big(X$中的严格 $k$-楔子子空间， $\Omega^1_X$(对数 $D)\big)$，记

$$\mathscr{V} := \operatorname{img}\Big(\mathscr{O}_X \otimes V \to \Omega^1_X(\log D)\Big) \subseteq \Omega^1_X(\log D)$$

表示由层 $V$ 中的微分形式局部线性组合而成的 1-形式层。

注 6.4（由严格楔子空间诱导的微分层）。 注意，记号 $\mathscr{V}$6.3 中的层 （泛）由 $V$ 中的截面生成。条件 (6.1.2)保证其秩等于 $k$。

下面的命题保证，只要存在足够多的一形式，严格楔子空间就存在。

**命题 6.5** (严格楔子空间的存在性)。 设 $X$是一个紧复流形， $D \in$除子群$(X)$是一个约化简单正规交除子，且 $V \subseteq H^0\big(X,\ \Omega^1_X$(对数 $D)\big)$是一个维数为维数$V$ $>$维数 $X$的线性子空间。那么，存在一个数 $k \in \mathbb{N}^+$以及一个维数为维数$V\prime = k+1$的严格$k$-楔子子空间 $V\prime \subseteq V$。

证明。 考虑以下自然数集合，

$$K := \Big\{\ell \in \mathbb{N}\colon \exists\text{个线性无关元素 } \sigma_1, \dots, \sigma_{\ell+1} \in V$$

$$\text{with vanishing } (\ell+1)\text{-form, } \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_{\ell+1} = 0 \in H^0\big(X,\ \Omega^{\ell+1}_X(\log D)\big)\Big\} \subset \mathbb{N}.$$

注意，假设 $\dim V$ $>$dim $X$保证 $K$非空。设 $k$是 $K$的最小元素，设 $\sigma_1, \dots,$ $\sigma_{k+1} \in V$是线性无关且使 $k+1$-微分形式消失的元素， $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_{k+1} = 0$，并设 $V'$ 是由 $\sigma_\bullet$张成的线性子空间，

$$V' := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle \subseteq V.$$

.....的定义 $K$结合注记(6.2.1) 中的第6.2 条，保证了 $V'$ 确实是一个严格的 $k$-楔子子空间，正如所需。□

6.2. **由严格楔子空间定义的线性系**。若 $V$是一个严格楔子空间，则下一个命题描述了由第 $\eta_V$ 3节引入的亚纯映射 $\eta_V$ 所诱导的叶状结构，并有效地给出了其维数的下界。此结果是以下所有内容的关键。

**命题 6.6** (由严格楔子空间定义的线性系)。 设 $X$是一个紧的 $K\ddot{a}hler$ 流形，设 $D \in$除子群$(X)$是一个约化简单正规交除子，并设 $V \subseteq H^0\big(X, \Omega^1_X(\log D)\big)$是一个严格的 $k$-楔子子空间。记 $V \subseteq H^0\big(X, \mathscr{V}\big)$，其中 $\mathscr{V} \subseteq \Omega^1_X(\log D)$是记号6.3中引入的层，并考虑亚纯映射

$$\eta_V : X \dashrightarrow \mathbb{P}(\operatorname{img} \lambda_V)$$

的构造 3.2。于是， $V$中的微分消灭了由 $\ker(\eta_V) \subseteq \mathscr{T}_X$所定义的叶状结构 $\eta_V$。

注记 6.7（命题 6.6中使用的记号）。 关于“微分在 $V$所定义的叶状结构上湮灭 $\eta_V$”这一结论的确切含义，请参阅定义2.22和2.24。

我们在第 6.3节证明命题 6.6。在开始证明之前，我们先推导出一些推论；在下文第 7节建立定理1.3 时将用到这些推论。

**推论 6.8** (由严格楔子空间定义的线性系)。 在命题 6.6的设定下，有理映射 $\eta_V$的像维数为 $\dim \operatorname{img} \eta_V = k$。

证明。若

$$\mathscr{A} := \ker\Big(\Omega^1_X(\log D) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}\big(\ker \eta_V, \mathscr{O}_X(D)\big)\Big) \subseteq \Omega^1_X(\log D)$$

是由 $\eta_V$定义的叶状结构的湮灭子，且 $\mathscr{V} \subseteq \Omega^1_X(\log D)$ 是记号 6.3中引入的微分层，那么命题 6.6 断言 $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{A}$。特别地，我们得到

$$k = \operatorname{rank} \mathscr{V} \leq \operatorname{rank} \mathscr{A} = \dim \operatorname{img} \eta_V.$$

反向结论见注 3.4。 □

**推论 6.9** (由严格楔子空间定义的线性系)。 设命题 6.6的设定成立。那么，存在一个稠密开子集 $X^\circ \subseteq X$，在该子集上有理映射 $\eta_V$有定义，且 $\mathscr{V} = \operatorname{img} d\eta_V$。 □

**推论 6.10** (由严格楔子空间定义的微分层之和)。令 $X$ 为一个紧 *Kähler* 流形，令 $D \in$ 除子群 $(X)$ 为一个约化简单正规交除子，并令 $V_1, \ldots, V_a \subseteq H^0\big(X, \Omega^1_X(\log D)\big)$为严格楔子空间，其对应的微分层为$\mathscr{V}_1, \ldots, \mathscr{V}_a \subseteq \Omega^1_X(\log D)$。写作：$= \sum_i \mathscr{V}_i \subseteq \Omega^1_X(\log D)$ 并考虑行列式 $\det \mathscr{V} \subseteq \Omega^{\operatorname{rank}\mathscr{V}}_X(\log D)$。那么，

$$\operatorname{rank} \mathscr{V} = \dim \operatorname{img} \varphi_{\det \mathscr{V}}.$$

特别是，$\det \mathscr{V}$是 *Remark 3.4* 意义下的 *Bogomolov* 层。

证明。 设 $V := \sum_i V_i \subseteq H^0\big(X, \Omega^1_X(\log D)\big)$并考虑有理映射

$$X \overset{\eta := \eta_{V_1} \times \cdots \times \eta_{V_a}}{\dashrightarrow} \mathbb{P}\Big(\operatorname{img} \lambda_{V_1}\Big) \times \cdots \times \mathbb{P}\Big(\operatorname{img} \lambda_{V_a}\Big).$$

结合目前得到的结果，存在一个开子集 $X^\circ \subseteq X$，在该子集上，目前涉及的所有映射均有定义，且以下一系列等式（不等式）成立。

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank} \mathscr{V} = \operatorname{rank} \textstyle\sum_i \mathscr{V}_i|_{X^\circ} &= \operatorname{rank} \textstyle\sum_i \operatorname{img}(d\eta_{V_i}|_{X^\circ}) && \text{Corollary 6.9} \\
&= \operatorname{rank} \operatorname{img}(d\eta|_{X^\circ}) && \text{Lemma 2.7} \\
&= \dim \operatorname{img} \eta \\
&\leq \dim \operatorname{img} \eta_V && \text{Corollary 3.8} \\
&\leq \dim \operatorname{img} \varphi_{\det \mathscr{V}} && \text{Remark 3.4}
\end{aligned}$$

反向不等式 $\dim \operatorname{img} \varphi_{\det \mathscr{V}} \leq \operatorname{rank} \mathscr{V}$由 Remark 3.4 得出。 □

**推论 6.11** (由严格楔子空间定义的不变 Bogomolov 层)。 设 $X$为一紧的 *Kähler* 流形，配备了群 $G$（可以是无限群）的全纯作用。设 $D \in$除子群$(X)$ 是一个约化简单正规交除子，且在 $G$作用下稳定。假设 $X$具有严格楔子空间 $V \subseteq H^0\big(X, \Omega^1_X(\log D)\big)$，其伴随层为微分的层 $\mathscr{V}$，并记 $\mathscr{W} := \sum_{g \in G} g^* \mathscr{V}$。那么，

$$\operatorname{rank} \mathscr{W} = \dim \operatorname{img} \varphi_{\det \mathscr{W}}.$$

特别地，$\det(\mathscr{W}) \subseteq \Omega^{\operatorname{rank}\mathscr{W}}_X(\log D)$是一个 $G$-不变*Bogomolov*层。

证明。 诺特条件保证了$\sum_{g \in G} g^* \mathscr{V}$实际上是一个有限和。 □

6.3. **命题 6.6 的证明**。 为方便读者，我们将证明分为几个步骤。

步骤 *0*：简化与记号。“严格 $k$-楔形子空间”的定义保证，每个线性子空间 $V\prime\subseteq V$ 仍是严格 $k$-楔形子空间，只要 $\dim V\prime>k$。命题3.5中得到的分解，

$$X \overset{\eta_V}{\dashrightarrow} \mathbb{P}\Big(\operatorname{img}\lambda_V\Big) \overset{\exists\eta_{V,V'}}{\dashrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathbb{P}\Big(\operatorname{img}\lambda_{V'}\Big), \qquad X \overset{\eta_{V'}}{\dashrightarrow} \mathbb{P}\Big(\operatorname{img}\lambda_{V'}\Big),$$

这使我们得到由 $\eta_V$和$\eta_{V\prime}$定义的叶状结构之间的包含关系，

$$\ker(\eta_V)\subseteq\ker(\eta_{V'}),$$

因此我们可以作如下假设。

不失一般性假设 6.12. $V$的维数等于 $k+1$。

~通过适当的爆破消除 $\eta_V$ 的不定点， $\pi\colon X\to X$，并将$V\subseteq H^0\big(X,\,\Omega^1_X(\log\,D)\big)$ 替换为其拉回$(d\pi)(V)\subseteq H^0\big(\widetilde{X},\,\Omega^1_{\widetilde{X}}(\log\,\pi^*D)\big)$，我们可以作如下假设。

不失一般性假设 6.13. </style}亚纯映射 $\eta_V$ 实际上是全纯的。

将像簇记为 $Y:=\operatorname{img}\eta_V\subseteq\mathbb{P}(\operatorname{img}\,\lambda_V)$，并令 $Y\circ\subset Y$为态射 $\eta_V$ 是一个真光滑映射的极大开子集。

步骤 *1*：坐标。我们将使用显式坐标，并选取一组有序基$\sigma_1$，……， $\sigma_{k+1}\in V$。 $\wedge^kV$的一组自然有序基为

$$(\sigma_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\sigma_j}_{\text{delete}}\wedge\cdots\wedge\sigma_{k+1})_{1\le j\le k+1}\in\wedge^kV.$$

利用这组基将 $\mathbb{P}(\operatorname{img}\lambda_V)\ \cong\mathbb{P}(\wedge^kV)\ \cong\mathbb{P}^k$与其对应起来，并使用齐次坐标$[x_1\colon\cdots\colon x_{k+1}]$ 表示其中的点。选取这组坐标后，便可用具体函数表示 $\eta_V$。为精确说明这一点，注意到微分形式 $\sigma_1$，……， $\sigma_{k+1}$在一般点处张成秩为$k$ 的层 $\mathscr{V}$。因此，存在亚纯函数$\alpha_1$，……， $\alpha_k\in\mathscr{M}(X)$，使得

$$\sigma_{k+1}=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\cdot\sigma_j. \tag{6.14.1}$$

特别地，这意味着

$$\sigma_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\sigma_j}_{\text{delete}}\wedge\cdots\wedge\sigma_{k+1}=(-1)^{k-j}\cdot\alpha_j\cdot\sigma_1\wedge\cdots\wedge\sigma_k,\quad\text{for every index } j\le k.$$

在开集$U\subseteq X$上， $\alpha_1$，……， $\alpha_k$均为正则的，因此态射 $\eta_V$可描述为

$$\eta_V|_U:U\to\mathbb{P}^k,\quad x\mapsto\big[(-1)^{k-1}\cdot\alpha_1(x):\cdots:(-1)^{k-k}\cdot\alpha_k(x):1\big].$$

步骤 *2*：纤维上的微分形式。给定任意一点 $s\in Y^\circ\setminus\{x_{k+1}=0\}$，写作 $s=[y_1\colon\cdots\colon y_k\colon 1]$，并考虑全纯微分形式

$$\tau_s:=\sigma_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\cdot y_i\cdot\sigma_i.$$

线性无关性 $\sigma_1,\ldots,\sigma_{k+1}$保证 $\tau_s$在 $X$上不恒为零。然而，方程（6.14.1）保证 $\tau_s$ 沿纤维恒为零 $X_s\colon=\eta_V^{-1}(s)$。命题 2.21 进而保证 $\tau_s$ 在开集 $\eta_V$上消去由 $\eta_V^{-1}(Y^\circ)$，因此处处成立。

步骤 3：像的非退化性。 $\eta_V$ 的构造保证像簇 $Y$ 并非在线性意义上退化于 $\mathbb{P}^k$ 内。换言之， $Y$ 不包含在任何线性超平面内。若 $(s_1,\dots,s_k) \in \left(Y_\circ \setminus \{x_{k+1}=0\}\right)^{\times k}$ 是一组一般的 $k$ 元点，记作 $s_i = [y_{i1}:\cdots:y_{ik}:1],$，那么非退化性意味着

$$(y_{11},\dots,y_{1k},1),\dots,(y_{(k)1},\dots,y_{(k)k},1) \in \mathbb{C}^{k+1}$$

是线性无关的向量。全纯形式

$$\tau_{s_i} := \sigma_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-i} \cdot y_{ij} \cdot \sigma_j$$

同样线性无关，因此构成 $V$ 的一组基，并湮灭由 $\eta_V$ 定义的叶状结构。□

## 7. 不变量的界，定理 1.3 和推论 1.7 的证明

**7.1. 定理 1.3 的证明。** 我们证明其逆否命题：假设 $(X,D)$ 是一个不规则度为 $q^+(X,D) > n$ 的$n$维 C-对，且满足定理 1.3 的假设，我们将证明 $(X,D)$ 不是 特殊的。

**步骤 1：准备工作。** 假设 $q^+(X,D) > n$，这使得我们可以选取一个伽罗瓦覆盖 $\gamma :\curvearrowright X \to X$，其不规则度为 $q(X,D,\gamma) > n$。固定这样一个覆盖，并在全文中记其伽罗瓦群为 $G$。考虑约化除子 $D := (\gamma^* \lfloor D \rfloor)_{\mathrm{red}}$，并令 $\pi\colon X \to X$ 是对 $\left(\widehat{X},\widehat{D}\right)$ 的一个$G$-等变严格对数消解，

$$\widetilde{X} \xrightarrow{\pi,\ \text{resolution}} \widehat{X} \xrightarrow{\gamma,\ \text{cover}} X. \tag{7.1.1}$$

原像 $\pi^{-1}(\operatorname{supp}\widehat{D})$ 因而具有 $G$-不变性，纯余维一，且具有简单正规交叉支撑。令 $\widetilde{D} \in \operatorname{Div}(\widetilde{X})$ 为相应的除子。对 $(\widetilde{X},\ \widetilde{D})$ 是简单正规交叉的，且层 $\Omega^1_{\widetilde{X}}(\log\ \widetilde{D})$ 是一个 $G$-层。

断言 7.2。 存在一个单射层态射

$$d_C\pi : \pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)} \hookrightarrow \Omega^1_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})$$

它在 Zariski 开集 $\pi^{-1}(\widehat{X}_\circ)$ 上与 K¨ahler 微分形式的标准拉回一致，具体含义见说明 4.8。

断言 7.2 的证明。 我们分别考虑定理 1.3 的不同假设。对于情形 (1.3.1)，其中 $(X,\ D)$ 是局部可一致化的，这由 [KR24a，事实 5 给出。9]。对于情形 (1.3.2)，其中 $X$ 是射影的，且 $(X,D)$ 是除子对数终端的，这由定理 1.6（采用命题4.7所给出的表述）给出。□(断言7.2)

略微滥用记号，省略记号中的 $d_C\pi$，并将 $\pi^{[*]}\Omega^{[1]}{}_{(X,\ D,\ \gamma)}$视为 $G$-层 $\Omega^1_{\widetilde{X}}$ $(\log\ \widetilde{D})$ 的一个 $G$-子层。

**步骤 2：$X$ 上的一个不变Bogomolov层。**根据假设，我们知道

$$h^0\left(\widetilde{X},\ \pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)}\right) = h^0\left(\widehat{X},\ \Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)}\right) = q(X,D,\gamma) > n.$$

利用命题 6.5 找到一个数 $p$ 以及一个严格的 $p$-楔子子空间

$$V \subseteq H^0\left(\widetilde{X},\ \pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)}\right) \subseteq H^0\left(\widetilde{X},\ \Omega^1_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\right)$$

连同微分的伴随层 $\mathscr{V} \subseteq \pi^{[*]}\Omega^{[1]}{}_{(X,\ D,\ \gamma)} \subseteq \Omega^1_{\widetilde{X}}$(对数 $\widetilde{D}$)。将拉回层的和记为

$$\mathscr{W} := \sum_{g\in G} g^*\mathscr{V} \subseteq \pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)} \subseteq \Omega^1_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D}),$$

推论 6.11 表明

$$\det(\mathscr{W}) \subseteq \wedge^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}\pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)} \subseteq \Omega^{\operatorname{rank}\mathscr{W}}_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D}) \tag{7.3.1}$$

满足秩 $\mathscr{W} \leq$维数 img $\varphi_{\det \mathscr{W}}$，因此是一个 $G$-不变 Bogomolov 层。

**步骤 3：上的不变 Bogomolov 层** $X$。我们通过展示推前 $\pi_*\det\mathscr{W}$是 $G$-上的不变 Bogomolov 层 $X$，从而完成定理 1.3的证明。接下来的断言使我们能够将这些推前视为适配的反身微分形式层。

断言 7.4。存在一个自然的包含：$G$-层之间，

$$\pi_* \wedge^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}\pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)} \hookrightarrow \Omega^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}_{(X,D,\gamma)}.$$

断言7.4的证明。左侧的层是一个无挠层的推前，因此自身也是无挠的。它在大开集 $(X, D)_{\mathrm{reg}} \subseteq X$ 上与右侧的层一致，在该处严格解消映射 $\pi$ 是同构。换言之，记该包含为 $\iota\colon (X, D)_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow X$，我们得到一个同构

$$\iota^*\pi_* \wedge^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}\pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)} \xrightarrow{\text{isomorphic}} \iota^*\Omega^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}_{(X,D,\gamma)}.$$

推前得到一列层态射，

$$\pi_* \wedge^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}\pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)} \hookrightarrow \iota_*\iota^*\pi_* \wedge^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}\pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)} \twoheadrightarrow \iota_*\iota^*\Omega^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}_{(X,D,\gamma)},$$

其中，第一个箭头的单射性源于 $\pi_* \wedge^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}\pi^{[*]}\Omega^{[1]}(X、D、\gamma)$ 是无挠的这一事实。最后，只需注意到 $\Omega^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}(X、D、\gamma)$ 是反身的，因此等于序列中的最后一项，即 $\iota_*\iota^*\Omega^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}(X、D、\gamma)$。

□ (Claim 7.4)

包含（7.3.1）和断言 7.4 为我们提供了一个 $G$-层的包含关系，

$$\pi_*\det\mathscr{W} \subseteq \Omega^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}_{(X,D,\gamma)}.$$

自然同构 $H^0(\widetilde{X}、\det\mathscr{W}) = H^0(\widehat{X}、\pi_*\det\mathscr{W})$将表明

$$\operatorname{rank}\mathscr{W} \leq \dim \operatorname{img}\varphi_{\det\mathscr{W}} = \dim \operatorname{img}\varphi_{\pi_*\det\mathscr{W}}.$$

层 $\pi_*\det\mathscr{W}$因此是一个 $G$-不变Bogomolov层，该断言由推论 5.4 得出。这就完成了定理 1.3 的证明。□

7.2. 推论 1.7 的证明。设 $(X, D)$ 是一个除子对数终端的射影 C-对。假设存在一个覆盖 $\gamma\colon \widehat{X} \twoheadrightarrow X$，以及一个具有正 C-Kodaira-Iitaka 维数的秩一层 $\mathscr{L} \subseteq \Omega^{[1]}(X,D,\gamma)$，$\kappa_C(\mathscr{L}) > 0$，我们需要证明 $(X, D)$ 不是特殊的。证明与前文第 7.1 节中给出的定理 1.3 的证明大体平行。

**步骤 0：简化假设**。给定一列覆盖，

$$\breve{X} \xrightarrow[\beta,\ \text{Galois cover}]{} \widehat{X} \xrightarrow[\gamma,\ \text{cover}]{} X, \qquad \alpha,\ \text{cover} \tag{7.5.1}$$

命题 5.1 为我们提供了 $\breve{X}$ 上的秩一反身子层 $\breve{\mathscr{L}} \subseteq \Omega^{[1]}(X,\ D,\ \gamma\circ\beta)$，其具有正 C-Kodaira-Iitaka 维数，$\kappa_C(\breve{\mathscr{L}}) \geq \kappa_C(\mathscr{L}) > 0$。我们将利用这一观察，用具有附加性质的更高阶覆盖替换覆盖 $\gamma$。

**步骤 0.1：该覆盖是适配的**。射影性假设以及 [KR24a，引理 2。36]表明 $X$ 存在一个适配覆盖。接下来，通过一个初等的纤维积构造，我们将得到一个覆盖序列（7.5.1），其中 $\alpha$ 本身是适配的。

不失一般性假设 7.6。覆盖 $\gamma$ 是适配的伽罗瓦覆盖，其群为 $G$。

**步骤 0.2：层 $\mathscr{L}$ 有截面。** 关于 C-Kodaira-Iitaka 维数正性的假设，$\kappa_C(\mathscr{L}) > 0$，使我们得到数 $m > 0$ 和两个线性无关截面

$$\sigma_0, \sigma_1 \in H^0\big(\widehat{X}, \operatorname{Sym}_C^{[m]} \mathscr{L}\big). \tag{7.7.1}$$

(7.7.1）右侧因假设7.6而简化。具体来说，回顾[KR24a，观察 4.12] 可知

$$\operatorname{Sym}_C^{[m]} \mathscr{L} = \mathscr{L}^{[\otimes m]} \quad \text{so that} \quad \sigma_0, \sigma_1 \in H^0\big(\widehat{X}, \mathscr{L}^{[\otimes m]}\big).$$

标准覆盖构造（“从一个截面中开 $m$次方根”）会产生一列（7.5.1）覆盖及截面

$$\tau_0, \tau_1 \in H^0\big(\check{X}, \beta^{[*]}\mathscr{L}\big)$$

其 $m$次张量幂在一个稠密开集上与 $\sigma_0$ 和 $\sigma_1$的拉回相一致。回顾 [KR24a，观察 4.8] 可知，层 $\beta^{[*]}\mathscr{L}$嵌入到 $\Omega^{[1]}{}_{(X,\ D,\ \gamma\circ\beta)}$中，因此我们可以用 $\alpha$ 替换 $\gamma$，并作如下假设。

不失一般性，假设 7.8。层 $\mathscr{L}$有两个线性无关截面。

**步骤 1：准备工作。**考虑约化除子 $D := (\gamma^*\lfloor D\rfloor)_{\mathrm{red}}$，并令 $\pi\colon X \to X$为对 $G$-等变的严格对数消解 $(\widehat{X},\ \widehat{D})$，如上文（7.1.1）所示。令 $\widetilde{D} \in$除子群$(\widetilde{X})$为支撑在 $\pi^{-1}$(支撑 $\widehat{D}$)上的除子，可得如下结论。

断言7.9（断言7.2的类似结论。存在一个单射层态射

$$d_C\pi : \pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)} \hookrightarrow \Omega^1_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})$$

它在 Zariski 开集 $\pi^{-1}$（$\widehat{X}_\circ$）上与 K¨ahler 微分的标准拉回一致，具体含义见说明4.8。□

在记号中省略 $d_C\pi$，并将 $\pi^{[*]}\Omega^{[1]}{}_{(X,\ D,\ \gamma)}$视为 $G$-子层，它是 $G$-层$\Omega^1_{\widetilde{X}}$(对数 $\widetilde{D}$) 的子层。

**步骤 2：在 $X$ 上的不变Bogomolov层。**利用假设7.8 定义一个严格1-楔子子空间

$$V := \langle \tau_0, \tau_1\rangle \subseteq H^0\big(\widehat{X}, \Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)}\big) \subseteq H^0\big(\widetilde{X}, \pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)}\big) \overset{\text{Claim } 7.9}{\subseteq} H^0\big(\widetilde{X}, \Omega^1_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\big)$$

其微分的伴随层为 $\mathscr{V} \subseteq \pi^{[*]}\Omega^{[1]}{}_{(X,\ D,\ \gamma)} \subseteq \Omega^1_{\widetilde{X}}$(对数 $\widetilde{D}$)。将拉回层之和记为

$$\mathscr{W} := \sum_{g\in G} g^*\mathscr{V} \subseteq \pi^{[*]}\Omega^{[1]}_{(X,D,\gamma)} \subseteq \Omega^1_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D}),$$

推论6.11 表明，$\det(\mathscr{W}) \subseteq \Omega^{\operatorname{rank}\mathscr{W}}_{\widetilde{X}}$(对数 $\widetilde{D}$)满足秩 $\mathscr{W} \le \dim \operatorname{img} \varphi_{\det \mathscr{W}}$，因此是一个 $G$-不变Bogomolov层。

**步骤 3：上的不变Bogomolov 层 $X$。** 类比定理1.3的证明，注意到存在一个自然的 $G$-层包含 $\pi_*\det \mathscr{W} \subseteq \Omega^{[\operatorname{rank}\mathscr{W}]}{}_{(X,D,\gamma)}$，表明 $\pi_*\det \mathscr{W}$is 是一个 $G$-Bogomolov 层。至此，推论1.7的□

# 附录

## 附录 A. 低次微分形式的延拓

设 $X$ 是一个正规解析簇，并设 $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ 是奇点消解。如果 $X$ 的奇异集很小，$\operatorname{codim}_X X_{\mathrm{sing}} \geq p+2$ 对于某个 $p \in \mathbb{N}$，那么 Flenner 已经在 [Fle88] 中证明了，$p$-微分形式可以从 $X$ 的光滑部分延拓 $p$为 $X$上的

$$H^0\big(\widetilde{X},\, \Omega^p_{\widetilde{X}}\big) \hookrightarrow H^0\big(\pi^{-1}(X_{\mathrm{reg}}),\, \Omega^p_{\widetilde{X}}\big) = H^0\big(X_{\mathrm{reg}},\, \Omega^p_X\big)$$

同构。记 $\iota\colon X_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow X$ 为包含映射，Flenner 的结果也可以等价地表述为：自然包含

$$\pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}} \to \iota_*\iota^*\pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}}$$

同构。证明建立在早期工作 [vSS85]之上，这些工作由Steenbrink和van Straten完成。证明依赖于带支撑的上同调的相对对偶以及霍奇理论方法。

**A.1. 主要结果。**本节将Flenner的结果推广到具有对数极点的微分形式，并将 $X_{\mathrm{sing}}$ 替换为任意子簇 $Z \subseteq X$：如果 $Z$ 是小的，对于某个 $p \in \mathbb{N}$，$\operatorname{codim}_X Z \geq p+2$，那么 $p$-形式可从 $\widetilde{X}\setminus \pi^{-1}(Z)$延拓为 $p$上的形式。

**定理 A.1** （低次微分形式的延拓）。设$(X, D)$ 是一个对数对，设 $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ 是一个奇点的对数消解，并且 $D \in$ 除子群$(X)$ 是支撑在 $\pi^{-1}D$上的约化除子。设 $p \in \mathbb{N}$ 为任意数。若 $Z \subset X$ 是一个余维 $\operatorname{codim}_X Z \geq p+2$的扎里斯基闭子集，则自然限制映射

$$H^0\left(\widetilde{X},\, \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\right) \hookrightarrow H^0\left(\widetilde{X}\setminus \pi^{-1}(Z),\, \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\right) \tag{A.1.1}$$

同构。

**推论 A.2 (**低次微分形式的延拓)。 在定理 *A.1*的设定下，记$\iota\colon X\setminus Z \to X$ 为包含映射。那么，自然态射

$$\pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D}) \to \iota_*\iota^*\pi_*\Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})$$

同构。 □

定理 A.1 将在下文第A.4节证明。

A.2. **应用思路。** 定理A.1通常用于奇异轨迹 $X_{\mathrm{sing}}$ 带有分层且 $Z$ 是 $X_{\mathrm{sing}}$的一个（可能是严格的）子簇时。此时可以考虑限制，

$$\begin{aligned} H^0\left(\widetilde{X},\, \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\right) &\xhookrightarrow{\alpha} H^0\left(\widetilde{X}\setminus \pi^{-1}(Z),\, \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\right) \\ &\xhookrightarrow{\beta} H^0\left(\pi^{-1}(X_{\mathrm{reg}}),\, \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\right) = H^0\left(X_{\mathrm{reg}},\, \Omega^p_X(\log D)\right) \end{aligned}$$

并询问给定的微分形式 $\sigma^\circ \in H^0\left(X_{\mathrm{reg}},\ \Omega^p_X(\text{对数 } D)\right)$是否由 $\widetilde{X}$上的微分形式诱导。如果已知 $\sigma^\circ$ 属于 $\beta$的像（例如，因为 $X$ 在分层 $Z$之外的奇点足够温和），那么定理 A.1 或可用于证明 $\sigma^\circ$ 已经属于 $\beta\circ\alpha$的像。

这些思路将在第4.3节中得到应用，我们将在那里证明定理 1.6。在那里，$Z \subset X_{\mathrm{sing}}$ 是一个高余维分层，使得 $X$ 在 $Z$之外至多具有商奇点。

A.3. **与现有文献的关系。** 据我们所知，定理 A.1此前尚未见诸文献。不过，证明中使用的论证并非新颖，很可能已为专家所熟知。我们的证明结合了 Graf 的思路——以涉及 Kodaira 维数和 Bogomolov–Sommese 消失定理的数值计算取代带支撑的上同调对偶——以及 N´u˜nez 的工作。后者沿用 [KS21]，通过将延拓性质表述为某些局部上同调层支撑的维数来处理。

尽管表面上看似如此，这里给出的结果与 [GKKP11、KS21]中更难证明的一般延拓结果无关。

A.4. **定理 A.1 的证明。** 为求完整起见，我们给出一个完整且大体自成一体的证明，结合了 [Gra21、N´u24]中的结果和思路。读者会注意到，步骤 3–5 仅经过少量修改，便取自 [Gra21，第 599 页及后续页]。

**步骤 1：准备工作。** 限制映射 (A.1.1) 显然是单射。为证明其满射，设

$$\sigma^\circ \in H^0\left(\widetilde{X} \setminus \pi^{-1}(Z),\, \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\right)$$

是任意一个微分形式。我们需要找到一个微分形式 $\sigma \in H^0\left(\widetilde{X},\, \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log\ \widetilde{D})\right)$，使其在 $\widetilde{X}\setminus\ \pi^{-1}(Z)$ 上的限制与 $\sigma^\circ$ 一致。

步骤 2：简化。 $D \in \mathrm{Div}(X)$ 为零因子的情形已由 N´u ˜nez 在 [N´u24, 引理 24] 中处理。将 N´u˜nez 的结果应用于 $X\setminus\mathrm{supp}\ D$，我们便已得到一个定义在 $\widetilde{X}\setminus\ \pi^{-1}(Z \cap D)$ 上的微分形式，其在 $\widetilde{X}\setminus\ \pi^{-1}(Z)$ 上的限制与 $\sigma^\circ$ 一致。这使我们可以作如下假设。

不失一般性地假设 A.3. 集合 $Z$ 包含在 $D$ 的支撑中。

由于任意两个奇点的对数解消都被某个共同的第三个解消支配，因此定理 A.1 是否成立显然不依赖于对数解消的选择 $\pi$。必要时将 $\pi$ 替换为另一个解消后，我们可以作如下假设。

不失一般性地假设 A.4. 原像 $\pi^{-1}(Z)$ 在 $\widetilde{X}$ 中为纯余维一，且具有简单正规交叉支撑。

将 $E \in \mathrm{Div}(\widetilde{X})$ 记为支撑在 $\pi^{-1}(Z)$ 上的约化除子。

**步骤 3：作为有理微分形式的延拓。** Grauert 直接像定理， [GR84，第 10 章。4]，推出层 $\pi_*\Omega^1_{\widetilde{X}}(\log\ \widetilde{D})$ 是相干的。因此，拉回 $\sigma^\circ$ 便延拓为一个亚纯对数微分形式 $\tau$ 于 $\widetilde{X}$ 上。为量化极点，令 $G \in \mathrm{Div}(\widetilde{X})$ 为满足存在一个截面

$$\tau \in H^0\left(\widetilde{X},\, \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})(G)\right) = \mathrm{Hom}\left(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-G),\, \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\right)$$

其在 $\widetilde{X}\setminus\ \pi^{-1}(Z)$ 上的限制与 $\sigma^\circ$ 一致。为证明 $G = 0$，我们用反证法。

假设 A.5。除子 $G$ 非零。

的极小性推出 $G$ 是 $\pi$-例外的。由于 $\pi$ 是一个对数解消， $G$ 于是具有简单正规交叉支撑。假设A.5 以及 [Gra21， 命题 4] 推出存在一个不可约分支 $P \subseteq \mathrm{supp}\ G$ 使得可逆层$\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-G)$限制在 $\pi|_P$的一般纤维上时是大。 的极小性保证层在 $P$上的限制映射，

$$\tau|_P : \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-G)\big|_P \to \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log \widetilde{D})\Big|_P,$$

不为零。

**步骤 4：留数正合列**。考虑除子 $P^c := (E-P)|_P \in$除子群$(P)$，沿 $P$ 的 $p$-微分形式的留数正合列为

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-G)\big|_P & & & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \tau|_P} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^p_P(\log P^c) & \longrightarrow & \Omega^p_{\widetilde{X}}(\log E)\Big|_P & \xrightarrow{\operatorname{res}_P} & \Omega^{p-1}_P(\log P^c) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

我们得到一个单射

$$\mu : \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-G)|_P \hookrightarrow \Omega^r_P(\log P^c),$$

对于某个 $r \in \{p-1,\ p\}$。两种情况下，$r \le p$。

**步骤 5：限制到一般纤维**。为简化记号，记 $B := \pi(P)$，并将限制态射 $\pi|_P$ 记为 $\rho : P \to B$。接下来，令 $F \subset P$ 为 $\rho$的一般纤维，并考虑限制除子 $F^c := P^c|_F \in$除子群$(F)$。由于 $(P,\ P^c)$ 是一个 snc 对，故 $(F,\ F^c)$ 也是如此。由 $\operatorname{codim}_X Z \ge p+2$ 不等式可知

$$\begin{aligned} \dim F &= \dim P - \dim B \\ &\ge (\dim X - 1) - \dim Z \\ &\ge (\dim X - 1) - (\dim X - (p+2)) = p+1. \end{aligned} \tag{A.6.1}$$

由于 $F$是一般的，且 $\rho(F)$是 $B$的一个光滑点，相对对数微分的标准正合列的限制，[EV92，第 4 节。1],可写为

$$0 \to \rho^*\Omega^1_B\big|_F \to \Omega^1_P(\log P^c)\big|_F \to \Omega^1_{P/B}(\log P^c)\Big|_F \to 0.$$

根据 [Har77，第 II 章，习题 5。16],，它诱导出 $\Omega^r_P$(对数 $P^c)|_F$的一个滤过，其商为

$$\rho^*\Omega^i_B \otimes \Omega^{r-i}_{P/B}(\log P^c), \quad i = 0, \dots, r.$$

将态射 $\mu$ 限制到一般纤维 $F$上，我们得到一个单射

$$\mu|_F : \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-G)|_F \hookrightarrow \rho^*\Omega^i_B \otimes \Omega^{r-i}_{P/B}(\log P^c) = \Omega^{r-i}_F(\log F^c)^{\oplus \operatorname{rank}\Omega^i_B},$$

对于某个适当的数 $i$。投影到一个适当的直和项上，我们甚至得到一个包含

$$\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-G)|_F \hookrightarrow \Omega^{r-i}_F(\log F^c).$$

这导致矛盾。

- 另一方面，经典的 Bogomolov-Sommese 消失定理，[EV92，推论 6。9], 表明 $\kappa\left(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-G)|_F\right) \le r-i \le r \le p$。
- 另一方面，对 $G$的选择保证了 $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-G)$ 限制在 $\pi|_P$的一般纤维上时是大，因此 $\kappa\left(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-G)|_F\right)$ =维数 $F$。然而，我们已在 (A.6.1) 中看到，维数 $F \ge p+1$。

假设 A.5 因此是不可能成立的。我们得出 $G = 0$，如所需。 □

## 参考文献


[Cam04] Fr´ed´eric Campana。《轨形、特殊簇与分类理论》。Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 54 3 499 630, 2004 10 5802 2027 ↑1 3 ( ): – 。DOI: 。/aif. 。, Cam Frederic Campana。《紧[ 11] ´ ´ ´ ´ Kähler 流形的特殊几何轨形与双有理分类》。J. Inst. Math. Jussieu, 10(4):809–934, 2011。DOI:10.1017/S1474748010000101。预印本 arXiv: 0705 0737 5 ↑1 3。v 。, Cat Fabrizio Catanese。具有 Albanese 一般型纤维化的非正则 [ 91] Kähler 流形（及代数簇）的模空间与分类。Invent. Math., 104(2):263–289, 1991。附录由 Arnaud Beauville 撰写。DOI:10.1007/BF01245076。↑17[Dem12] Jean-Pierre Demailly。《复解析与微分几何》，2012年9月。开放内容图书，可从作者网站免费获取。[ 92] ´ ` |5 EV Helene Esnault 和 Eckart Viehweg。《消失定理讲义》，DMV 研讨会第20卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1992。DOI:10.1007/978-3-0348-8600-0。↑8，26

[Fle88] Hubert Flenner。非孤立奇点上微分形式的可延拓性。Invent. Math., 94 2 317 326, 1988 10 1007 01394328 ↑24 ( ): – 。DOI: 。/BF 。GKKP Daniel Greb、Stefan [ 11] Kebekus、Sandor J. Kovacs 和 Thomas Peternell。对数典范空间上的微分形式。Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 114(1):87–169, 2011年11月。DOI:10.1007/s10240-011-0036-0。含有额外图示的扩展版本可见 arXiv:1003.2913。↑5, 15, 25[GR84] Hans Grauert 和 Reinhold Remmert。《相干解析层》，数学科学基础丛书第265卷。*[数学科学基础原理]*。Springer-Verlag，柏林，1984。DOI:10.1007/978-3-642-69582-7。↑3, 25[Gra15] Patrick Graf。对数典范对上的 Bogomolov–Sommese 消失定理。J. Reine Angew. Math., 702:109–142, 2015 10 1515 2013 0031 1210 0421 ↑14 15。DOI: 。/crelle- - 。预印本 [ 21] arXiv: 。。, Gra Patrick Graf。关于 Flenner 延拓定理的一则注记。《数学手稿》，165(3-4):597–603, 2021。DOI: 10 1007 00229 020 01233 1905 01983 ↑25。/s - - -y。预印本 arXiv: 。. Har [ 77] Robin Hartshorne。《代数几何》。Springer-Verlag，纽约，1977。数学研究生教材第52号。DOI:10.1007/978-1-4757-3849-0。↑26[KM98] J´anos Koll´ar 和 Shigefumi Mori。《代数簇的双有理几何》，剑桥数学丛书第134卷。剑桥大学出版社，剑桥，1998。由 C. H. Clemens 和 A. Corti 协助完成，译自1998年的日文原著。DOI:10.1017/CBO9780511662560。↑2[KR24a] Stefan Kebekus 和 Erwan Rousseau。C-对及其态射。预印本 arXiv:2407.10668v2, 2024 ↑2 3 4 10 11 12 13 14 15 17 21 22 23 7月。, , , , , , , , , , , , KR b Stefan Kebekus 和 Erwan Rousseau。C-对的阿尔巴尼斯映射。预印本 arXiv:2410.00405v2，2024年10月。[ 24 ] ↑2, 3[KS21] Stefan Kebekus 和 Christian Schnell。将复空间正则轨迹上的全纯形式延拓至奇点消解。J. Amer. Math. Soc., 34(2):315—368, 2021年4月。DOI: 10 1090 962 1811 03644 ↑25。/jams/ 。预印本 arXiv: 。. LMN Zhi Li、 [ +25] Xiankui Meng、Jiafu Ning、Zhiwei Wang 和 Xiangyu Zhou。关于 Bogomolov 型消失定理。Nagoya Math. J., 257 170 182, 2025 10 1017 2024 32 ↑8 : – 。DOI: 。/nmj. 。. [ 14] NW Junjiro Noguchi 和 Jorg Winkelmann。《多复变数中的 Nevanlinna 理论与丢番图逼近》，数学科学基础丛书第350卷。*[数学科学基础原理 ]* 2014 10 1007 978 4 431 54571 2 ↑6。Springer, [ 24] 东京，。DOI: 。/ - - - - 。Nu Pedro Nunez。klt 轨形上适配微分的延拓。预印本 arXiv: 。2024年11月。↑13, 14, 25[Ran81] Ziv Ran。阿贝尔簇的子簇。Invent. Math., 62:459–479, 1981。DOI:10.1007/BF01394255。可通过欧洲数字数学图书馆在线获取：https://eudml.org/doc/ 142784 ↑17 。Ros Hugo Rossi。孤立奇点的皮卡德簇。《莱斯大学研究》，54(4):63–73, 1968。可在网上获取：https://scholarship.rice.edu/handle/ 1911 62964 ↑5 / 。vSS [ 68] Duko van Straten 和 Joseph Steenbrink。孤立超曲面奇点附近全纯微分形式的可延拓性。Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 55:97–110, 1985。DOI:10.1007/BF02941491。↑24 [ 85]

StefanKebekus，数学研究所，阿尔伯特-路德维希大学弗赖堡，恩斯特-策梅洛大街 1 号，79104 布赖斯高地区弗赖堡，德国电子邮箱： stefan.kebekus@math.uni-freiburg.de网址： https://cplx.vm.uni-freiburg.de

Erwan Rousseau，布雷斯特大学，法国国家科学研究中心混合研究单位6205，布列塔尼大西洋数学实验室，F-29200 Brest，法国
电子邮箱： erwan.rousseau@univ-brest.fr
网址： http://eroussea.perso.math.cnrs.fr

弗雷德里克·图泽，雷恩大学，法国国家科学研究中心，雷恩数学研究所 - 混合研究单位6625，35000，雷恩，法国电子邮箱： frederic.touzet@univ-rennes.fr
网址： https://irmar.univ-rennes.fr/en/node/273