arXiv:2601.07336v1 [cs.DM] 12 Jan 2026

孔多塞域最大规模的改进下界

Alexander Karpov[1,2], Klas Markstr¨om[3], Søren Riis[4], 和 Bei Zhou*[5]

[1]HSE大学，莫斯科，俄罗斯[2]俄罗斯科学院控制科学研究所，莫斯科，俄罗斯[3]于默˚奥大学，于默˚奥，瑞典[4]伦敦玛丽女王大学，伦敦，英国[5]帝国理工学院，伦敦，英国

摘要

孔多塞域是线性序的集合，具有这样的性质：当投票者的偏好被限制在该域内时，两两多数关系（对于奇数个投票者）是传递的，因而构成线性序。在多数投票数学理论中，确定孔多塞域的最大规模（有时还需满足额外约束）一直是一个长期存在的问题。目前，仅对 $n \leq 8$ 个备选项已知其确切最大值。

本文通过对小规模 n 的最大域进行结构分析，设计了一种新的归纳搜索方法。利用超级计算机实现该方法，并结合现有算法，我们改进了所有 $9 \leq n \leq 20$ 的已知最大域规模。随后，我们在另一种构造中使用这些域，获得了 $21 \leq n \leq 25$ 的当前已知最大域，并将孔多塞域最大规模的最佳渐近下界改进为 $\Omega(2.198139^n)$。最后，我们讨论所发现域的性质，并提出若干未解问题和猜想。

1 引言

社会选择理论中研究最多的问题之一，是如何根据一群投票者提交的偏好，通过多数投票对一组备选项进行排序。每位投票者都通过为这组备选项给出一个线性序来进行排序。接下来，根据多数票对每一对备选项的两两排序进行比较，从而得出一个排序[1]。在其开创性著作中，孔多塞[8] 于1785年指出，这一程序并不总能为备选项产生一个偏序：偏好循环可能出现。一个孔多塞域是一个线性序集合，具有这样的性质：只要投票者从该域中选择排序，多数投票就会得出一个线性序。这可以被视为一种良性的偏好景观。

备选项集合可能的排序中，第一个非平凡模型是布莱克单峰域。该域于 [5] 被正式引入，对应于这样一个社会：所有投票者共享一条共同的政治轴；每位投票者在该轴上都有一个偏好位置，即“峰值”，并按照备选项与峰值的距离，对峰值两侧的备选项进行排序。布莱克单峰域的规模为 2^{n-1}，其中 n 是备选项的数量。不久之后，阿罗 [3] 提出了如今所称的阿罗单峰域，它推广了布莱克单峰域，但最大规模相同。事实上，正如 [24], 所示，这一类中的所有极大域规模都相同。

在20世纪70年代，人们发现了更多具有相同最大规模的域的例子，Johnson[13] 猜想， 2^{n-1} 是孔多塞域的最大规模。 [1],中的结果推翻了这一猜想，不过只相差一个加法常数。1992年，Craven [6],再次提出了Johnson猜想，但他并不知道更早的猜想及其反例。这一重复提出的猜想激发了人们的兴趣，Fishburn为 $n = 5$ [9]找到了一个新的反例。后来，在 [10] ，他通过自己的“交替方案”将这一方法推广开来，由此构造出如今称为Fishburn域的域。这些域

*作者按字母顺序排列[1]我们假设投票者人数为奇数。

的规模为 $n \times 2^n$ [12]，因此其规模以多项式因子超过了早期猜想中的规模；事实上，在当时，对于所有较小的 n 值，它们都是已知规模最大的域。Fishburn还提出了替换方案，并证明对于 $n \geq 16$，它所生成的域比交替方案生成的域更大，且增长率可达 a^n，其中 $a > 2$。很久以后，Raz [22] 证明了一个形式为 $\mathcal{O}$ (b^n的上界，其中隐含常数为 $b > 2$；该上界适用于具有 n个备选项的孔多塞域的最大规模。

在 [7], 中找到了具有各种附加条件的更大域，适用于 $n = 42$ 个备选项；在 [16] 中也找到了适用于 $n \geq 34$ 个备选项的例子。在 [17] 中，确定了 $n = 8$ 个备选项时最大的孔多塞域：其大小为 224，而 Fishburn 域的大小为 222。

对于 $n = 9, \ldots,$15 个备选项，Fishburn 域一直是已知最大的域，直到 [16] 提出了一种结合较少备选项上的域的新构造，从而为$n \geq 13$带来了更大的域。对于 $n = 10$ 和 $n = 11$， [28], 通过机器学习引导的计算机搜索，给出了大于 Fishburn 域的域。在 [15] 中引入了相干域 这一类，并证明一种称为奇数集合交替方案的方法能够产生属于该类且足够大的域，从而将最大孔多塞域大小的渐近下界提高到 2.1973^n；此前这是最佳下界。

从投票理论视角来看，寻找规模较大的域的一个原因是，正如 [21], 中所述，较大的域意味着个体偏好拥有更大的自由度。然而，规模远非孔多塞域唯一受到研究的性质。Monjardet[19] 的综述着重讨论了与数学各个领域相关的性质。Puppe 和 Slinko [20] 较新的综述则涵盖了更侧重投票理论的性质，以及自 Monjardet 的综述以来的大部分进展。

本文旨在进一步推进大规模孔多塞域的构造。基于我们对 $n \leq 8$已知最大域的子域的研究，我们设计了一种启发式搜索方法。在超级计算机上运行该方法的实现后，我们找到了 $n = 9$、.....、20 个备选项时已知规模最大的孔多塞域，并运用 [16] 中的方法，为 $n = 21$、.....、25 个备选项时的情形也得到了改进的数值。将我们的域用于 Fishburn 的替换方案，可将孔多塞域最大规模的下界提升至 $\Omega(2.198139^n)$。作为研究的一部分，我们还确定了备选项较少时若干孔多塞域子类的最大规模。

1.1 概述

本文的结构如下。第2 节介绍孔多塞域理论中的记号和定义。第3 节介绍现有文献中研究过的各种孔多塞域类别。第4 节讨论将域限制到备选项子集上的情形，并给出一些新的计数结果。第5节介绍我们用于构造大型孔多塞域的新算法，并展示我们对 $n \leq 20$的搜索结果。第7节讨论渐近下界，并利用上一节中的域给出目前已知的最大孔多塞域大小的最大渐近下界。最后，第8 节讨论我们新构造的以及此前已知的一些大型域的结构，并提出若干未解问题和猜想。

2 定义与记号

设 $X = [n] = \{1, \ldots, n\}$ 为备选项集合， $\mathcal{L}(X)$表示X上的所有线性序构成的集合。设 N 为选民集合，其中每位选民 $i \in N$ 的偏好序为 $P_i \in \mathcal{L}(X)$。为简洁起见，我们将偏好序写成字符串；例如， $12 \cdots n$ 表示 1 是最受偏好的（排在第一位），而 n是最不受偏好的（排在最后一位）。

线性序 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}(X)$ 的子集称为一个域。域的大小是其所包含的序数。若所有选民的偏好均属于 $\mathcal{D}$，则对于任意具有奇数个选民的偏好剖面，其多数关系都是传递的，此时域 $\mathcal{D}$ 称为孔多塞域。

我们称 $\mathcal{D}$ 为最大孔多塞域，若它在相同备选项集合上的所有孔多塞域中规模最大。若每个孔多塞域 $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$ （在相同备选项集合上）都与 $\mathcal{D}$重合，则称孔多塞域 $\mathcal{D}$ 为极大孔多塞域。

通常，最大域是基数尽可能大的域，而极大域则是不包含于更大域中的域。每个最大孔多塞域都是极大域，但反之不成立。由于我们的目标是寻找最大域，除非另有说明，我们将聚焦于极大域。我们用缩写 MCD 表示极大孔多塞域。

若两个域 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 可通过重新标记备选项而由 $\mathcal{D}_1$ 得到 $\mathcal{D}_2$，则它们同构。

根据 [2], ，孔多塞域的核是其中将其映射为自身的线性序集合，而孔多塞域的对偶是将其中每个线性序反转后得到的孔多塞域。若一个孔多塞域与其对偶同构，则称其为自对偶。

域的社会轴是备选项集合上指定的一个线性序。在投票理论中，通常认为它对应于备选项的某种组织原则，例如左右政治尺度。社会轴不一定是该域中的元素，例如某些非极大域便是如此。本文中，我们假设社会轴为标准序 $12\ldots n$。注意，每个具有社会轴的孔多塞域都与这种形式的域同构。

Sen [23] 证明，若一个域在任意备选项三元组（a、b、c）上的限制都满足某个永不条件，则该域是孔多塞域。永不条件有三种形式：xNb、xNm或 xNt，分别称为永不居末条件、永不居中条件和永不居首条件。这里，x是该三元组中的一个备选项，而 xNb、xNm和 xNt 分别表示 x 在受限域中不排在最后、第二或第一位。Fishburn 指出，对于具有社会轴的域，永不条件也可以描述为 iNj、i、$j \in [3]$。这里，iNj表示按照社会轴排列的三元组中的第 i个备选项，在该域的每个线性序中都不占据该三元组内的第 j个位置。例如，三元组 a、b、$c \in [n]$ 上的单元素域 $\{abc\}$，当$a < b < c$时，满足永不条件 $1N2$、$1N3$、$2N1$、$2N3$、$3N1$、$3N2$，但不满足永不条件$1N1$、$2N2$、$3N3$。

我们用 $\mathcal{N}_{[n]}$ 表示备选项集 $[n]$上的完备三元组集及其指定的永不条件。我们用 $\mathcal{N}_{[n]}(\mathcal{D})$表示一种选择 $\mathcal{N}_{[n]}$，它导出孔多塞域 $\mathcal{D}$；用 $\mathcal{D}(\mathcal{N}_{[n]})$表示满足 $\mathcal{N}_{[n]}$中所有永不条件的孔多塞域。此外，$\mathcal{N}_{[n]\setminus\{i,j\}}$ 表示 $\mathcal{N}_{[n]}$ 中不含备选项 i 或 j 的三元组子集（以及其指定的永不条件），而$\mathcal{U}(\mathcal{N}_{[n]})$表示 $\mathcal{N}_{[n]}$ 中未指定永不条件的三元组集。

Fishburn 的交替方案通过如下方式构造一组永不条件：如果三元组的中间元素是偶数，则指定永不条件 $2N1$；否则指定 $2N3$ [10]。由此得到的域通常称为 Fishburn 域 [25], ；对于奇数 n，其对偶域也如此称呼。

若孔多塞域 $\mathcal{D}$ 恰好等于满足与 $\mathcal{D}$相同永不条件的线性序集，则它是一个完全 孔多塞域。

孔多塞域 $\mathcal{D}$ 若其中任意一对序都能通过一系列域内的序彼此连通，且该序列中相邻的序只在相邻备选项 [20]的一次对换上不同时，则称其为连通 。

若孔多塞域 $\mathcal{D}$ 由一组完备的永不条件定义，且这些条件仅包含类型 $iN1$或 $iN3, i \in [3]$，则称其为峰谷 域 [7], $\mathcal{D}$。

若孔多塞域 $\mathcal{D}$ 包含一对互为逆序的序，则称其具有最大宽度 。

我们工作中使用的大多数程序都基于康多塞域库（CDL） [26],构建，该库为与孔多塞域相关的计算问题提供了丰富的功能。

3 不同域类型的最大域

在有关孔多塞域的文献中，最大域大小的确定问题既针对一般孔多塞域，也针对各种子类进行了研究。我们列出其中主要的类别，并给出一些关于其大小的新结果。

在 [10] Fishburn 的导言中 介绍了孔多塞域的大小函数 ：

$$f(n) = \max\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \text{ is a Condorcet domain on a set of } n \text{ alternatives}\}.$$

后来， [16] 介绍了两类峰谷域的大小函数：

- $g(n)$ =最大$\{|\mathcal{D}|$ ： $\mathcal{D}$ 是在含有 n 个备选项$\}$.的集合上的最大宽度峰谷孔多塞域

- $h(n)$ =最大$\{|\mathcal{D}|:\ \mathcal{D}$ 是在含有 n 个备选项$\}$.的集合上的峰谷孔多塞域

最大宽度的域类（不一定是峰谷域）也得到了充分研究，我们将该类中的最大规模记为

$g_w(n) = \max\{|\mathcal{D}|:\ \mathcal{D}$ 是定义在一组包含 n 个备选项$\}$.上的最大宽度孔多塞域

根据定义，$g(n) \le h(n) \le f(n)$，且 $g(n) \le g_w(n) \le f(n)$。目前尚不清楚对于所有 n，是否有 $g_w(n) \le h(n)$。

问题1。对于所有 n，是否有 $g_w(n) \le h(n)$？

根据 [2]和 [17] 中的数据，我们得到：

观察1。对于 $n \le 8$，$g(n) = g_w(n)$ 以及 $h(n) = f(n)$。

此外，对于 $n \le 8$，最大宽度的域中最大规模仅由 Fishburn 域达到。我们通过一次新的计算机搜索，稍微扩展了这些结果。

观察2. 对于 $n = 9$，我们有 $g(9) = 488$，且达到这一规模的域只有两个 *Fishburn* 域。

证明. 这一结果是通过一次完整的计算机搜索得出的，搜索使用了两个独立的搜索程序。其中一个程序采用了 CDL 库 [26]，中实现的算法，详见 [27]。另一个程序则独立编写，并在另一台机器上运行，以确保实现和硬件两方面的独立性。 □

若能将这一结果推广，将会很有意义。

问题2. 确定 $h(9)$ 和 $g_w(9)$。

我们尝试用通用搜索程序解决这两个问题，但在部分搜索证明耗时过长后便中止了程序。更专门的程序或许能够解决这两个问题。

4 孔多塞域的限制

将域 $\mathcal{D}$ 限制到备选项子集 $A \subseteq X$ 所得的限制，是通过将 $\mathcal{D}$ 中的每个线性序限制到 A而在 $\mathcal{L}(A)$中得到的线性序集合。

将备选项限制到较小的子集，是孔多塞域若干重要性质的基础。

如果一个域限制到任意一对备选项后所得集合的大小都是二，那么该域就是充足的。术语充足最早在 [20]的预印本版本中提出。从投票理论视角来看，充足性是一种自然性质，因为它意味着任意一对备选项都可以按照两种可能的方式进行排序。该性质的较弱版本也在吉巴德–萨特思韦特定理的推广中得到研究 [4]。通常使用的最小丰富性这一性质得名于 [4],，它同样意味着一个域是充足的。

如果将一个孔多塞域 $\mathcal{D}$ 限制到任意三个备选项后，所得集合的大小为 4（这是三个备选项所能达到的最大值），则该域是丰富型 [24] 的。丰富性在极大孔多塞域的研究中十分重要，因为一个丰富型全域也是极大域，而极大域未必是丰富型的。然而，有人猜想所有极大峰谷域都是丰富型的。丰富型域是充足的，但在 [2] 中已经证明，存在并不充足的极大域。

对五个备选项子集的限制与机器学习方法结合使用于 [28]，以构建针对大型孔多塞域的启发式搜索。该搜索为 $n = 10$ 和 $n = 11$找到了已知最大的域。

在 [14] 中，若干限制性质被统一在以下定义中。若域 $\mathcal{D}$ 满足：对于任意备选项子集 k，$\mathcal{D}$ 在其上的限制大小至少为 s，则称其为 (k, s)-丰度域。因此，充足性对应于（2, 2）-丰度，丰富型对应于（3,4）-丰度。在 [28] 中的搜索聚焦于（5,16）-丰度域，此前人们已观察到，$n \le 8$ 的所有大型孔多塞域都是

（5,16）-丰度。在 [14] 中还证明，对于固定的 k ，当 n 足够大时，其可能达到的最大丰度为（$k, 2^{k-1}$）。

正如上一节所述，现有文献对峰谷域给予了广泛关注。 [2] 中的数据包含所有峰谷域的完整枚举。对于 $n = 8$，9，我们成功枚举了丰度足够高的最大域，得到以下结果。

观察3。 *1.* 对于 $n = 5$，所有大小至少为19 的 *MCD* 都是(4,8)-丰度的。存在大小为18 且丰度较低的 *MCD*。

2. 对于 $n = 6$，所有大小至少为42 的 *MCD* 都是(4,8)-丰度的。存在大小为41且丰度较低的峰谷 *MCD*。所有大小至少为40 的 *MCD* 都是(5,16)-丰度的，且存在大小为39 且丰度较低的域。

3. 对于 $n = 7$，所有大小至少为94 的 *MCD* 同时具有$(4, 8)$-丰度和(5,16)-丰度。存在大小为93 且这两种丰度都较低的域。

4. 对于 $n = 8$，大小至少为 219 的极大(4,8)-丰度峰谷域的数量为

$$\{219 : 3, 220 : 3, 222 : 1, 224 : 1\},$$

而极大(5,16)-丰度峰谷域的数量为

$$\{219 : 3+, 220 : 63+, 222 : 1, 224 : 1\}.$$

此处数据以（孔多塞域大小：域的数量）的格式呈现；后缀“+”表示该计数是一个下界。

5. 对于 $n = 9$ ，(5,16)-丰度峰谷域的最大规模为 492。

证明。 $n \leq 7$ 的结果是通过检查 [2] 中完整列表所列域的丰度得出的。 $n = 8$,9 的结果是使用 CDL 库中的软件通过计算机搜索得出的。

□

此处我们指出，对于 $n = 8$ ，大小为 220 的极大域中，(5,16)-丰度域的数量多于 (4,8)-丰度域的数量。

5 归纳域构造

到目前为止讨论的丰度性质，以及用于 [28], 搜索方法的变体，都只考虑将域限制到大小固定的子集上。不过，利用[2, 17], 中的现有数据，我们还可以得出以下观察。

观察4。 *1.* 对于 $4 \leq n \leq 7$，每个最大域都有一个限制到 $n - 1$ 个备选项的子域，且该子域本身也是最大域。

2. $n = 8$ 的最大域有一个限制到 7 个备选项的子域，其规模为 96。

3. 在每种情况下，都存在两个备选项 i、j，使得限制到 $[n] \setminus \{i\}$ 和 $[n] \setminus \{j\}$ 的子域是同构域，且规模如上所述；它们限制到 $[n] \setminus \{i, j\}$的结果也完全相同。

对于一般的 MCD，当我们将域从 n 个备选项限制到 $n - 1$ 个备选项时，我们几乎无法控制域的规模会减少多少。不过，观察 4 表明，最大域通常有一个限制后的子域，其规模仍接近最大规模；并且它有两个较大的同构 $n-1$ 限制后的子域，二者存在较大的共同部分。

基于此，我们构造了一种归纳搜索算法，它从一组规模较大的 n 备选项域出发，在 $n+1$ 个备选项上构建域。我们将看到，这使我们能够通过直接搜索找到目前已知规模最大的孔多塞域，适用于多达 $n = 20$ 个备选项；而通过理论构造方法并以这些域为输入，则可适用于多达 $n = 25$ 个备选项。

5.1 归纳扩展步骤

从较大的限制到较小的补全问题。固定 $n \geq 4$，并假设我们想要在 $[n+1]$上构造一个较大的孔多塞域。关键思路是强制满足观察结果4中的限制模式。选取两个不同的备选项 $i,\ j \in [n+1]$ 并记作

$$A = [n+1] \setminus \{i\}, \qquad B = [n+1] \setminus \{j\}, \qquad C = [n+1] \setminus \{i, j\}.$$

我们通过保序重标记，将定义在 $[n]$ 上的大域嵌入为定义在 A 和 B 上的域。若这两个嵌入域在重叠部分 C 上诱导出相同 的永不条件（等价地说，它们在 C 上的限制一致），那么我们可以合并它们的永不条件。这个并集已经为所有避开 i 的三元组（来自定义在 A上的域）以及所有避开 j 的三元组（来自定义在 B 上的域）指定了永不条件。因此，唯一尚未判定的三元组恰好是同时包含 i和 j的 $n-1$个三元组，即对于 $k \in C$，有 $\{i, j, k\}$。因此，扩展步骤归结为对剩余这些 $n-1$ 个三元组进行受约束的补全 问题。

例子。 对于 $i = n+1$和 $j = 1$，一个嵌入域定义在 $[n] = [n+1] \setminus \{n+1\}$ 上，另一个定义在 $\{2, \ldots, n+1\} = [n+1] \setminus \{1\}$上。相容性意味着它们在 $\{2, \ldots, n\}$ 上的限制一致，而唯一尚未指定的三元组是 $\{1, n+1, k\}$（对应 $k = 2,\ \ldots\ldots,\ n$）。

为何这并非必然。 这一步拼接颇为微妙。一个较大的孔多塞域通常有许多带标签的实现（即对备选项重新标记），而不同的标记方式可能导致在C上的重叠大不相同。此外，即使两个实例化在 C上相同，由此得到的永不条件部分集也可能对剩余的 $\{i, j, k\}$-三元组施加极强限制，以至于大多数补全所产生的域都不算特别大。因此，重叠部分相容是必要条件，但在实际中远非充分条件：搜索必须探索许多潜在的重叠，并在补全过程中积极剪枝。

经验剪枝与一种"贪心"现象。 针对 $n \leq 11$ 的经验测试揭示了已发现的最大域具有两个规律：它们都是峰谷型，而且都是丰富型。因此，在补全步骤中，我们将范围限制在峰-谷永不条件，并丢弃任何非丰富型的部分赋值。更令人惊讶的是，实验还表明存在一种稳健的贪心策略：从在 n 个备选项上发现的最大域出发，枚举上述意义下的所有 相容重叠，然后搜索剩余 $n-1$ 个三元组的补全，反复得到了下一个纪录域（至重新标记为止），这一结果适用于每个经过测试的 n （$8 \leq n \leq 20$）。这一观察促成了下文所述的确定性捷径。

5.1.1 算法

现在我们可以介绍主要算法了。在附录 A 中，我们给出该描述的伪代码版本。设 $L_n = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m\}$ 是包含 n 个备选项的极大孔多塞域（非同构）列表。为了生成包含 $[n+1]$ 个备选项的候选域，我们分三步进行。

第 1 步（在 n 元子集上进行实例化）。对于每个 $i \in [n+1]$ 和每个 $\mathcal{C}_r \in L_n$，我们构造实例化后的域

$$\mathcal{C}_r^{\setminus i} := \mathcal{C}_r\big([n+1] \setminus \{i\}\big).$$

这里，$\mathcal{C}(A)$ 表示通过唯一的保序双射 $[n] \to A$ 对备选项重新标记后，从 $\mathcal{C}$ 得到的、定义在 A 上的域。

第 2 步（枚举相容重叠）。固定一个有序对（$i,\ j$），其中 $i \neq j$。如果两个实例化 $\mathcal{C}_r^{\setminus i}$ 和 $\mathcal{C}_s^{\setminus j}$ 对其备选项集合交集中的每个三元组都赋予相同的永不条件，即 $[n+1] \setminus \{i, j\}$，则称它们相容。若相容，则取它们的永不条件集的并集；否则丢弃该对。将所得的不完整永不条件集收集到中间列表 $L_{n+1,\ \text{partial}}$ 中。

实现说明。 为高效枚举所有相容重叠，我们按照其在 $[n+1] \setminus \{i, j\}$ 上的限制（即避开 $\{i, j\}$ 的三元组上的永不条件子集）对实例化进行分组，并仅合并同一组内的成对实例化。

步骤 3（带剪枝的补全）。 通过回溯搜索，为每个剩余的永不条件部分集赋值，将峰-谷永不条件分配给未赋值的三元组 $\{i, j, k\}$。在搜索过程中，丢弃非丰富型的部分解。我们计算每个补全后域的大小，仅保留大小高于预设大小阈值的域。最后，通过移除同构副本来缩减所得列表，从而得到下一个列表 L_{n+1}。

确定性捷径 $n \geq 8$。 实证运行揭示了一条更快的路径，可用于找到最大域。令 $\mathcal{C}_n^{\max}$为在 n 个备选项上找到的最大孔多塞域。定义 $i = \lfloor n/2 \rfloor$ 和 $j = i + 1$。仅针对这一对 (i, j) 重复步骤 1–3，即足以重建每个经过测试的 n （$8 \leq n \leq 20$）在 n+1 个备选项上的最大域。

6 结果

我们使用上一节中的算法，搜索了 $8 \leq n \leq 20$。作为输入，我们从 $n = 7$中大小至少为 90 的域开始。每一步，我们都会生成在$n + 1$ 个备选项上的候选域，并保留大小接近已找到最大值的候选域。对于 $n \geq 16$ ，我们只保留最大的那个域。随着 n 增加，搜索很快变得既耗时又占用大量内存，因此我们使用两个不同的 Linux 集群和数千个 CPU 核心运行了搜索。

在表 1中，我们列出了使用此方法找到的最大域大小，以及此前最佳的下界。 $n = 8$ 大小为 224 的孔多塞域是在 [17]中找到的。对于 $n = 9$ 和 $n = 12$ ，此前的下界由 Fishburn 域给出。对于 $n = 10$ 和 $n = 11$，此前的下界来自 [28], ；此前已知的 $13 \leq n \leq 20$ 最大域则是在 [16]中构造的。

如表所示，我们的搜索提高了 $9 \leq n \leq 20$ 的现有下界。同样的方法很可能也能提高更大的 n 的下界，但由于搜索在数千个核心上已耗时数天，我们便在 $n = 20$ 处停止了。

表 1：通过归纳搜索找到的最大孔多塞域。粗体数字表示相较于旧下界有所提高。

n	Fishburn 域	此前的下界	改进后的下界
8	222	224	224
9	488	488	**492**
10	1069	1082	**1104**
11	2324	2349	**2452**
12	5034	5034	**5520**
13	10840	10940	**12182**
14	23266	24481	**27026**
15	49704	54752	**59430**
16	105884	123004	**131536**
17	224720	271758	**292015**
18	475773	602299	**649079**
19	1004212	1323862	**1432836**
20	2115186	2917604	**3155366**

6.1 新域的性质

虽然我们的重点一直是为每个 n寻找已知的最大孔多塞域，但无论从组合学方面还是从投票理论视角来看，还有许多其他值得关注的性质。

我们已检查 $n \geq 8$对应的最大域的丰度性质。至于较小的 n，这些域达到了（对于 $n = 8$ 则超过了）渐近最大丰度水平：

观察5。 $n = 8$ 对应的最大域是(4,8)-丰度和(5, 18)-丰度的。对于 $n \geq 9$ ，找到的最大域恰好是(4, 8)-丰度和(5,16)-丰度的。

在表 2 中，我们总结了若干此类性质。前两列给出 n 以及在该值为 n时发现的非同构最大域的数量。我们发现的所有最大域都是峰谷域，尽管对于 $8 \leq n \leq 11$ 我们的搜索允许所有可能的永不条件。

标记为**2N1+2N3** 的列来自对这些域所满足的永不条件的分析。我们的搜索聚焦于形式为 $xN1$ 和 $xN3$的峰-谷永不条件。然而，在给定域的同构副本中，四种类型 $1N3$、 $3N1$、$2N1$和 $2N3$ 的永不条件数量可能不同。对于每个域，我们都找到了一个同构副本，其中类型为 $2N1$和 $2N3$的永不条件数量很少；此列报告的是在所有同构副本中 $2N1+2N3$的最小值。由于永不条件的总数为 $\binom{n}{3}$，这意味着定义该域的永不条件几乎全都属于形式 $1N3$和 $3N1$。这一观察尤其值得关注，因为它与相干域有关；相干域只满足 $1N3$和 $3N1$永不条件。正如引言中所述，一类特殊的相干域给出了目前已知的孔多塞域最大规模的最佳渐近下界；我们将在最后一节重新讨论这类域。

核大小 [2] 是指域中线性序的数量；将这些线性序视为排列时，它们会把该域映射到自身。这是衡量域对称性的一种方式：如表2 所示，对于不超过 $n = 13$ 的域，其核非平凡；而对于 $n \geq 14$ ，核则是平凡的。这表明 $n \geq 14$对应的域结构发生了变化，也可能说明我们已无法找到真正的最大域。

投票域的一项广为研究的性质，是域中某个线性序里可以排在首位或末位的备选项数量。每个备选项都可以排在首位的域称为最小丰富域，而只有一个备选项可以排在首位的域称为独裁型域；更详细的讨论见 [4]。对于某些类型的孔多塞域，例如阿罗单峰域，这一性质已得到充分理解 [24, 18], ；但对于一般的孔多塞域，相关研究结果很少。在**(#First, #Last)** 列中，我们分别列出该域所有线性序中排在首位和末位的不同备选项数量。这些域远未达到最小丰富，但随着 n增大，它们逐渐远离独裁型。

接下来的两列分别表示该域是否为自对偶域以及是否连通。由于这些域是峰谷域，因此预计它们是连通的 [20]。最后一列给出了每个域在相邻换位图中的直径：在域内所有成对的线性序x 和 y 中，连接 x与 y 且经过域内线性序的最短相邻对换序列的长度的最大值。最大宽度的孔多塞域的直径为 $\binom{n}{2}$，由一对逆序 [19], 实现；但对于我们的域而言，直径的增长速度似乎要慢得多。对数据进行的经验拟合与按 $\mathcal{O}(n(\log n)^{2.5})$ 规模增长的趋势吻合良好，但我们目前还未充分理解这些域的结构，因而无法证明这样的界。

表2：新域的性质。对于一个孔多塞域，2N1+2N3 个值是在其所有同构形式中不属于 1N3 或 3N1 的永不条件的最少数量。(#First, #Last) 分别表示在一个孔多塞域的所有线性序中被排在第一位和最后一位的不同备选项数量。

n	数量	2N1+2N3	核大小	(#First, #Last)	自对偶	连通	直径
8	1	2	4	(4, 4)	Yes	Yes	20
9	2	2	2	(4, 4)	No	Yes	25
10	2	3	4	(4, 4)	No	Yes	31
11	2	3	2	(4, 4)	No	Yes	37
12	1	4	4	(4, 4)	Yes	Yes	44
13	2	6	2	(5, 4), (4, 5)	No	Yes	52
14	1	8	1	(5, 5)	Yes	Yes	61
15	2	9	1	(5, 5)	No	Yes	69
16	2	9	1	(5, 5)	No	Yes	78
17	2	10	1	(5, 5)	No	Yes	87
18	2	12	1	(5, 5)	No	Yes	98
19	2	12	1	(5, 5)	No	Yes	106
20	2	16	1	(6, 5), (5,6)	No		

6.2 最大子域的偏序集结构

对于 $n \geq 9$，我们发现的最大域都具有这样的性质：它们可以由 $n-1$ 个备选项上的一个最大域构造而成。因此，对于每个这样的域和任意 $k \geq 8$，都至少存在两个大小为 k 的备选项子集，使得对该子集的限制是一个

备选项上的最大域 k。这意味着，能够导出（就其大小而言）一个最大域的备选项子集所构成的集合，是布尔格的一个子偏序集。表格 2 显示，对于每个 n，要么只有一个最大域，要么存在一对对偶域。由于对偶性不会改变这里的偏序集，因此在这个范围内，每个 n都只有一个限制偏序集。

在表 3 中，我们展示了对于每个 n，其大小为 k、限制后得到 k 个备选项上的最大子域的子集数量。正如表中所示，这些数量通常为偶数，反映出在 $n-1$ 个备选项上总是至少存在两种不同的限制。不过，对于$n = 13$，我们发现有 7 种限制对应 11 个备选项。与上一节中的核一样，这再次表明 $n = 13$ 是一个特殊情况。

尽管我们可能通过不同的连续限制链得到相同的子集——这表明我们的偏序并非一棵树——但对于给定数量的备选项，我们仍观察到最大子域总数呈现明显的指数增长。

表 3：在 $n = 9,\ldots,16$ 的最大域中发现的每种较小阶数的记录大小子 CD 数量（模同构）。破折号（–）表示该 n 对应的子 CD 阶数不存在或不适用。

n	# 8	# 9	# 10	# 11	# 12	# 13	# 14	# 15	# 16	# 17	#18	# 19
9	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
10	4	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
11	8	8	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–
12	16	16	8	4	–	–	–	–	–	–	–	–
13	32	28	16	7	2	–	–	–	–	–	–	–
14	64	48	32	12	4	4	–	–	–	–	–	–
15	96	92	56	26	8	8	2	–	–	–	–	–
16	120	149	94	50	16	16	4	2	–	–	–	–
17	160	244	168	94	32	32	8	4	2	–	–	–
18	224	348	248	138	48	56	16	8	4	2	–	–
19	256	480	352	204	72	84	24	12	12	4	2	–
20	384	632	528	284	108	162	54	24	24	8	4	2

7 新渐近下界

前几节着重于为固定的 n 寻找较大的域，现在我们将讨论如何利用这些域来获得域大小的渐近下界。

我们介绍两种构造，它们可从定义在互不相交的备选项集合上的域构造出更大的域，从而为上文定义的大小函数所对应的类生成一系列域（备选项数量递增）。

1. 给定两个域 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$，它们分别定义在互不相交的备选项集合 A 和 B 上，再给定两个划分 $A = A_1 \cup A_2$ 和 $B = B_1 \cup B_2$，$1N3$–$3N1$ 构造会在 $A \cup B$ 上产生一个域 $S_1(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, A_1, A_2, B_1, B_2)$，并对同时包含 A 和 B 的三元组施加以下永不条件：
   - 对于满足 $a_1, a_2 \in A$ 且符合 $b \in B$ 的三元组 $\{a_1, a_2, b\}$，若 $\{a_1, a_2\} \subseteq A_1$，则指定为 $1N3$；否则指定为 $3N1$。
   - 对于满足 $a \in A$ 和 $b_1, b_2 \in B$ 的三元组 $\{a, b_1, b_2\}$，若 $\{b_1, b_2\} \subseteq B_1$，则指定为 $3N1$；否则指定为 $1N3$。
2. 第二种构造通过将 $2N3$ 指定给同时满足 A 和 B 的每个三元组，在 $A \cup B$ 上构造出一个域 $S_2(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$；所有其他三元组则保留它们在 $\mathcal{D}_1$或 $\mathcal{D}_2$ 中的永不条件。

命题 1。 设 $e \in \{f, g, h\}$ 是上述定义的函数之一。那么

$$e(n+m) \geq 2e(n)e(m). \tag{1}$$

证明。 设 $\mathcal{D}_1$ 是一个由 n 个备选项构成、大小为 $e(n)$ 的孔多塞域，另设 $\mathcal{D}_2$ 是一个由 m 个备选项构成、大小为 $e(m)$ 的孔多塞域，二者均取所属类别中的最大域。在 $1N3$–$3N1$

构造下，每个由 uv、$u \in \mathcal{D}_1$ 和 $v \in \mathcal{D}_2$ 拼接而成的序列都属于一个由 $n+m$ 个备选项构成的孔多塞域。此外，记 $u = u_1 \cdots u_n$ 和 $v = v_1 \cdots v_m$，则拼接

$$u_1 \cdots u_{n-1}\, v_1\, u_n\, v_2 \cdots v_m$$

也属于所构造的域。因此，所构造的域大小至少为 $2e(n)e(m)$。若$\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是峰谷域，则所得域也为峰谷域。

对于最大宽度的域，也可以采用第二种构造：除了所有拼接 uv，我们还加入所有拼接 vu。由于两个输入域都包含一对逆序，所得域同样具有最大宽度。 □

对于第二种构造，我们还可以保证：固定 k 时，丰度不会渐近地变得次优。

Prop命题 2. 如果对于每个 $k \le t$，$\mathcal{D}_1$和 $\mathcal{D}_2$ 都是$(k, 2^{k-1})$-丰度的，那么 $S_2(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$也是如此。

证明。对于只包含来自 A 和 B之一的备选项的 k-元组，结论显然成立。否则，设这个 k-元组包含一个子集 $T_1 \subseteq A$ 和一个子集 $T_2 \subseteq B$，其中 $|T_1| + |T_2| = k$。那么 $S_2(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 包含所有这样的拼接：一个线性序来自将 $\mathcal{D}_1$ 限制到 T_1 后所得的域（其中有$2^{|T_1|-1}$个），另一个线性序来自将 $\mathcal{D}_2$ 限制到 T_2 后所得的域（其中有 $2^{|T_2|-1}$ 个）；此外，还包含数量相同、顺序相反的拼接。总计得到

$$2 \cdot 2^{|T_1|-1} \cdot 2^{|T_2|-1} = 2^{k-1}$$

对该 k 元组的限制中的线性序。 □

命题 1还给出了增长率的一个渐近下界。

命题 3。 对于任意固定整数 $k \ge 1$，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} e(n)^{1/n} \ge (2e(k))^{1/k},$$

其中 $e \in \{f, h\}$。

证明。由（1），对于任意正整数 a，我们有 $e(ak) \ge 2^{a-1} e(k)^a$。令 $n = ak + b$ 其中 $0 \le b < k$，再一次利用（1）可得

$$e(n) = e(ak+b) \ge 2\, e(ak) e(b) \ge 2^a\, e(k)^a\, e(b) = (2e(k))^{(n-b)/k}\, e(b).$$

取 n 次方根并令 $n \to \infty$，得到 $\liminf_{n\to\infty} e(n)^{1/n} \ge (2e(k))^{1/k}$。 □

根据我们的数据，峰谷域（因此也包括一般的孔多塞域）的增长率至少为 2.18902。尽管我们的搜索为 $n \le 20$ 找到了比 [15] 中的方法更大的域，但这一结果仍低于 [15] 中针对峰谷域得到的最佳下界 2.1973。

我们可以不限定域的类型，而直接考察 $f(n)$ 的增长率：

定理 1。 $\lim_{n\to\infty} f(n)^{1/n} \ge 2.198139$。

证明。Fishburn [11]证明了 $f(n+m-1) \ge f(n)f(m)$，因此对每个固定的 k，都有 $\lim_{n\to\infty} f(n)^{1/n} \ge f(k)^{1/(k-1)}$。利用我们构造的域，对于 $k = 20$，我们得到下界$3155366^{1/19} = 2.198139495\ldots$。 □

这给出了目前关于最大孔多塞域渐近增长率的最佳下界。

8 界的汇总

表 4 汇总了目前已知的孔多塞域最大规模的最佳下界。对于 $21 \le n \le 25$，带下标 $_{ks}$ 的条目是将 [16] 的构造应用于较小 n得到的。

表 4：孔多塞域的最大规模。我们改进后的数值以粗体标出。下划线标出的数字 ks 在下界中使用了我们的域 n 构造出自 [16]。

n	Fishburn	$f(n)$ & h(n)	x_n/x_{n-1}	$\sqrt{x_n/x_{n-2}}$	$\lceil \frac{4}{5^{1.5}}\sqrt{5}^n \rceil$	$g(n)$	
3	4	4	2	2	4	4	
4	9	9	2.25	2.121	9	9	
5	20	20	2.222	$\sqrt{5} = 2.2360$	20	20	
6	45	45	2.250	$\sqrt{5}$	45	45	
7	100	100	2.222	$\sqrt{5}$	100	100	
8	222	224	2.240	2.231	224	222	
9	488	$\geq$**492**	2.196	2.218	500	488	
10	1069	$\geq$**1104**	2.244	2.220	1119	-	
11	2324	$\geq$**2452**	2.221	2.232	2500	-	
12	5034	$\geq$**5520**	2.251	2.236	5591	-	
13	10840	$\geq$**12182**	2.206	2.228	12500	-	
14	23266	$\geq$**27026**	2.218	2.212	27951	-	
15	49704	$\geq$**59430**	2.198	2.208	62500	-	
16	105884	$\geq$**131536**	2.213	2.206	139755	-	
17	224720	$\geq$**292015**	2.220	2.216	312500	-	
18	475773	$\geq$**649079**	2.222	2.221	698772	-	
19	1004212	$\geq$**1432836**	2.207	2.215	1562500	-	
20	2115186	$\geq$**3155366**	2.202	2.204	3493857	-	
21	4443896	$\geq$**6674931**$_{ks}$	2.115	2.221	7812500	-	-
22	9319702	$\geq$**15037178**$_{ks}$	2.253	2.183	17469282	-	-
23	19503224	$\geq$**33162136**$_{ks}$	2.205	2.229	39062500	-	-
24	40750884	$\geq$**73279872**$_{ks}$	2.209	2.207	87346406	-	-
25	84990640	$\geq$**160316046**$_{ks}$	2.187	2.198	195312500		

致谢

Alexander Karpov 部分获得了俄罗斯国家研究型高等经济大学基础研究计划的资助。本研究使用了玛丽女王大学 Apocrita 高性能计算设施，该设施由 QMUL Research-IT 提供支持。本研究使用了北方高性能计算中心（HPC2N）的资源。

参考文献

[1] J.M. Abello 和 C.R. Johnson。传递简单多数域有多大？SIAM代数离散方法杂志，5(4):603–618，1984年。[2] Dolica Akello-Egwel、Charles Leedham-Green、Alastair Litterick、Klas Markstr¨om 和 Søren Riis。至多包含七个备选项的孔多塞域。数学社会科学，133:23–33，2024年。[3] K.J. Arrow。社会选择与个体价值，第12卷。耶鲁大学出版社，第二版，1963年。[4] Navin Aswal、Shurojit Chatterji 和 Arunava Sen。独裁域。经济理论，22(1):45–62，2003年。[5] D. Black。论群体决策的依据。政治经济学杂志，56(1):23–34，1948年。[6] John Craven。社会选择：集体决策与个体判断的框架。剑桥大学出版社，1992年。[7] V.I. Danilov、A.V. Karzanov 和 G.A. Koshevoy。铺砌型孔多塞域。离散应用数学，160(7-8):933–940，2012年。[8] Le Marquis de Condorcet。关于将分析应用于 `多数表决所作决策的 ´概率的 ´尝试`。皇家印刷所，巴黎，1785年。[9] P.C. Fishburn。关于 Craven猜想的注记。《社会选择与福利》，9:259–262，1992年。[10] Peter Fishburn。线性序的无环集。《社会选择与福利》，14(1):113–124，1996年。[11] Peter C. Fishburn。决策理论与离散数学。离散应用数学，68(3):209–221，1996年。[12] A. Galambos 和 V. Reiner。通过 Bruhat序研究线性序的无环集。《社会选择与福利》，30(2):245–264，2008年。[13] R.C. Johnson。关于数学社会选择的评论。技术报告，马里兰大学经济系及物理科学与技术研究所，1978年。[14] Alexander Karpov、Klas Markstr¨om、Søren Riis 和 Bei Zhou。孔多塞域的局部多样性。arXiv预印本 arXiv:2401.11912，2024年。[15] Alexander Karpov、Klas Markstr¨om、Søren Riis 和 Bei Zhou。相干域与孔多塞域最大规模的改进下界。离散应用数学，370:57–70，2025年。[16] Alexander Karpov 和 Arkadii Slinko。构造大型峰谷孔多塞域。理论与决策，94(1):97–120，2023年。[17] Charles Leedham-Green、Klas Markstr¨om 和 Søren Riis。8个备选项上的最大孔多塞域。《社会选择与福利》，62:109–116，2024年。[18] Klas Markstr¨om、Søren Riis 和 Bei Zhou。Arrow单峰域、丰富性以及相对多数制和 Borda计数的域。arXiv预印本 arXiv:2401.12547，2024年。[19] Bernard Monjardet。线性序的无环域：综述。《偏好、选择与序的数学：献给 Peter C. Fishburn 的论文集》，第139–160页，2009年。[20] Clemens Puppe 和 Arkadii Slinko。极大孔多塞域：进一步进展报告。博弈与经济行为，145:426–450，2024年。[21] Herv´e Raynaud。值限制条件所允许的个体自由。社会科学数学研究所，1982年。

[22] Ran Raz。排列集合的 VC 维数。*Combinatorica*，20(1):1–15，2000年。[23] A. K. Sen。关于多数决策的可能性定理。*Econometrica*，34(2):491–499，1966年。[24] Arkadii Slinko。满足阿罗单峰性的孔多塞域。《数理经济学杂志》，84:166–175，2019年。[25] Arkadii Slinko。一族在圆上的单峰孔多塞域。《社会选择与福利》，63:57–67，2024年。[26] Bei Zhou、Klas Markstr¨om 和 Søren Riis。Cdl：用于研究具有结构限制的排列集合的快速灵活库。*SoftwareX*，28:101951，2024年。[27] Bei Zhou 和 Klas Markstr¨om。用于孔多塞域生成的有序算法，2025年。[28] Bei Zhou 和 Søren Riis。用于发现大型孔多塞域的高效启发式搜索算法。*4OR*，23:193 – 216，2023年。

附录 A

归纳搜索算法的伪代码。

算法 1 将 n 扩展至 $n{+}1$ 个备选项的归纳扩展

输入： L_n 个非同构的大型孔多塞域代表元列表，这些孔多塞域定义在 $[n]$ 上，且每个均由一个完备指派 $\mathcal{N}_{[n]}$ 表示；
允许的峰谷规则 $\mathcal{R}$（通常为 $\{1N3, 3N1, 2N1, 2N3\}$）；大小阈值 β。
输出： 大小至少为 β 的 $[n{+}1]$ 上非同构候选孔多塞域的代表元列表 L_{n+1}。

$L_{n+1} \leftarrow \emptyset$
/* 第 2 步：实例化每个 n 子集上的 n 种备选赋值 */
对 $i \in [n{+}1]$ **执行**
    $I_i \leftarrow \{\mathcal{N}([n{+}1] \setminus \{i\}) \colon \mathcal{N} \in L_n\}$ ▷保序重标记
/* 第 2 步：枚举相容重叠并合并 */
对于有序对 $(i,\ j) \in [n{+}1]^2$ 其中 $i \neq j$ **执行**
    $C \leftarrow [n{+}1] \setminus \{i, j\}$
    根据 C 内三元组的限制，对 I_i 和 I_j 进行分组
    对于每个公共组键 K **执行**
        对于每个 $\mathcal{N}^i \in I_i(K)$ **执行**
            对于每个 $\mathcal{N}^j \in I_j(K)$ **执行**
                $\mathcal{N}_{\text{部分}} \leftarrow \mathcal{N}^i \cup \mathcal{N}^j$
                /*步骤 3：通过剪枝完成未赋值的三元组 */
                对 $\mathcal{U}(\mathcal{N}_{\text{partial}})$执行回溯，仅对 $\mathcal{R}$中的规则赋值
                    并剪枝那些无法扩展为丰裕域的部分赋值
                对每个完成的赋值 $\widehat{\mathcal{N}}$ 找到**则**
                    计算 $|\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{N}})|$
                    如果 $|\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{N}})| \geq \beta$ **则**
                        Add $\widehat{\mathcal{N}}$ 至 L_{n+1}
从 L_{n+1} 中移除同构副本
返回 L_{n+1}