arXiv:2601.07341v1 [math.AP] 12 Jan 2026

凸集中的诺伊曼热核及其迹的统一界

RUPERT L. FRANK 和 SIMON LARSON

ABSTRACT. 我们证明了凸区域上 Neumann 拉普拉斯算子的热迹满足一个界，该界捕捉了小时间展开的前两项，但对所有时间均成立，且仅通过非常简单的几何特征依赖于底层区域。我们通过对边界附近的对角热核作精确且一致的展开，证明了这一结果。我们的大多数结果无需凸性假设即可成立；此外，我们还研究了利普希茨区域热迹的两项渐近展开。

CONTENTS

1. 引言与主要结果 2 1.1. 热迹方面的结果 2 1.2. 热核方面的结果 5 2. 诺伊曼热核的迹 6 2.1. 关于诺伊曼热迹的半抽象结果 7 2.2. 定理 1.1 的证明 12 2.3. 定理 1.2 的证明 13 3. 热核的初始界 17 4. 内部区域中改进的热核界 19 5. 诺伊曼边值问题的估计 22 5.1. 预备性说明 22 5.2. 第一个先验界 26 5.3. 第二个先验界 29 6. 边界平坦部分附近的估计 33 6.1. 平坦性的概念 33 6.2. 边界平坦部分附近的热核 35 6.3. 局部界 f 36 6.4. 分解边界数据 41 6.5. 完成命题 6.6 的证明 45 7. 构造边界的一个良子集 50

© 2026 作者所有。本文可为非商业用途全文转载。作者感谢美国国家科学基金会资助的 DMS-1954995 号项目（R.L.F.）、德国研究基金会资助的 EXC-2111-390814868 和 TRR 352-Project-ID 470903074 号项目（R.L.F.），以及瑞典研究理事会资助的 2023-03985 号项目（S.L.）提供的部分支持。

7.1. 大良集 7.2. 凸集的显式构造 8. 定理 50
1.3、1.4、1.5 和 1.6 的证明 附录A. 凸几何 54
工具箱 参考文献 57
60
64

1. Introduction and main results

1.1. 关于热迹的结果。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ 是一个开集。Ω 上的 Neumann 拉普拉斯算子 $-\Delta_\Omega$ 通过二次型 L^2 定义为

$$u \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \quad \text{for } u \in H^1(\Omega) \, .$$

若 Ω 有界且具有 Lipschitz 边界，则 $-\Delta_\Omega$ 的谱是离散且非负的，并且仅在 ∞ 处聚集；例如参见 [13]。令 $\{\lambda_k(\Omega)\}_{k\geq 1}$ 表示按非降序排列并按照其（有限）重数重复计算的特征值，于是

$$0 = \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \lambda_3(\Omega) \leq \ldots \to \infty \, .$$

令 $\{u_k\}_{k\geq 0} \subset L^2(\Omega)$ 为一族与之对应的实值正交归一特征函数。

本文主要关注热迹，

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k(\Omega)} \qquad \text{for } t > 0$$

尤其是其在小 t 时的行为。这一主题及其在其他边界条件或流形上的推广，都是谱理论中的经典课题，已有许多重要研究成果，包括 [24, 18, 26, 4, 6, 5, 3]。特别地，当 $\partial\Omega$光滑时， $t^{d/2}\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega})$ 存在关于 $\sqrt{t}$ 的整数次幂的完整渐近展开。

本文关注的是低正则性情形，在这种情况下不能指望存在完整的渐近展开。对于上述 Lipschitz 集上的 Neumann 拉普拉斯算子，Brown [7] 有如下著名定理。

定理 1.1 ([7, 主定理])。 设 $d \geq 2$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是具有 *Lipschitz* 边界的开有界集。那么

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \left(|\Omega| + \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) + o(\sqrt{t}) \right) \quad as \ t \to 0^+ \, . \tag{1}$$

本文主要关注 Ω 为凸的情形。当然，由于任何凸集都具有 Lipschitz 边界，因此 Brown 的结果适用，但我们的目标是更明确地给出误差项 $o(\sqrt{t})$，尤其是阐明它对 Ω 的几何的依赖关系。这个问题的动机来自某些谱

形状优化问题，我们在 [21, 17] 中研究过这些问题。本文证明的定理是 [16]，中某个结果的关键组成部分，而该结果又是 [17] 中的基础。

在此情形下，我们的热迹界将通过 Ω 的内切半径来体现其依赖关系，

$$r_{\mathrm{in}}(\Omega) := \sup_{x\in\Omega} d_\Omega(x)\,, \tag{2}$$

该半径是根据到补集的距离定义的

$$d_\Omega(x) := \mathrm{dist}(x, \Omega^c)\,.$$

以下是本文的主要结果。

定理 1.2. 固定 $d \geq 2$ 和 $\varepsilon > 0$。存在常数 $C_{d,\varepsilon}$，使得若Ω $\subset \mathbb{R}^d$是开、凸且有界的，则对所有 $t > 0$,

$$\left|(4\pi t)^{d/2}\,\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\right| \leq C_{d,\varepsilon}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\sqrt{t}\left[\left(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\right)^{1/2-\varepsilon} + \left(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\right)^{d-1}\right].$$

在凸集的情形下，我们的主要定理从两个方面改进了定理1.1：(i) 定理 1.2 中的界对所有 $t > 0$ 均成立，而不仅仅是渐近成立；(ii) 定理 1.2 对式 (1) 中 o-项的大小给出了明确控制。

定理 1.2 告诉我们，对于凸集，小的 $o(\sqrt{t})$ 项可以在代数尺度上得到（统一的）改进。相反，正如 Brown 在 [7] 中指出的，在 Lipschitz 情形下无法作出此类改进。事实上，Brown 论证说，对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个 Lipschitz 集 Ω $\subset \mathbb{R}^d$，使得

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{|(4\pi t)^{d/2}\,\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)|}{t^{1/2+\varepsilon}} = \infty\,.$$

关于狄利克雷拉普拉斯算子（而非诺伊曼拉普拉斯算子）对应的两项渐近展开，[15, 定理 1.1] 已证明，在所有 Lipschitz 集构成的类中，$o(\sqrt{t})$ 余项无法改进；这种无法改进不仅体现在代数尺度上，在任何意义上的定量尺度上也同样如此。

虽然我们的主要目标是证明定理 1.2，但论证中的许多主要步骤同样适用于 Lipschitz 集；作为我们这一论证版本的副产品，我们将证明一个定理 1.1 的版本，并对 o 余项给出相当明确的估计。我们将沿用 Brown 的整体策略，但即便在 Lipschitz 情形下，我们也觉得有几处需要补充更多细节或修改论证。要处理凸情形，我们需要让论证中的若干部分更加精确。

我们相信，为证明定理 1.2 而建立的这套方法同样适用于利普希茨区域的其他子类，并且能够改进定理 1.2，前提是对于这类集合，可以改进若干在 Lipschitz 情形下成立的“小 o 结果”

；具体而言，请参见第 7.2 小节中第 7.1 节结果是如何得到改进的，或引理 3.3 如何改进引理 3.1。鉴于本文篇幅已经相当长，我们决定不再对此作进一步研究，而是将重点放在 [16] 中所需的定理上。

定理 1.1 和 1.2 是通过将热迹表示为 Ω 上对角热核的积分，并研究该热核在空间各个区域中的性质而得到的。在转向下一小节所需的热核界之前，我们先更详细地解释这一过程，并说明其中的一些困难。

已知，对于任意 $t > 0$，算子 $e^{t\Delta_\Omega}$ 是一个积分算子；参见 [9,定理 2.3.6 和 2.4.4]。其积分核记为 $k_\Omega(t, \cdot, \cdot)$，即

$$(e^{t\Delta_\Omega} f)(x) = \int_\Omega k_\Omega(t, x, y) f(y)\, dy \qquad \text{for all } f \in L^2(\Omega)\,.$$

如果 $-\Delta_\Omega$ 的谱是离散的，那么核 k_Ω 可以按照紧算子的施密特分解的意义表示为级数

$$k_\Omega(t, x, y) = \sum_{k\geq 1} e^{-t\lambda_k(\Omega)} u_k(x) u_k(y)\,.$$

对于热迹，我们有如下表示

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) = \int_\Omega k_\Omega(t, x, x)\, dx\,. \tag{3}$$

关于热核的一般背景知识，我们推荐阅读 Davies 的著作 [9]。

粗略地说，通过将（3）中的积分拆分为内部部分和边界区域，可以证明小 t 渐近行为：内部部分对应满足 $d_\Omega(x) \gg \sqrt{t}$ 的点 x，边界区域则对应满足 $d_\Omega(x) \lesssim \sqrt{t}$ 的点 x。粗略地说，热核在内部区域上的积分贡献项 $(4\pi t)^{-d/2}|\Omega|$，而在边界区域上的积分贡献项 $(4\pi t)^{-d/2}(\sqrt{\pi t}/2)\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)$。

因此，我们的主要工作是为 k_Ω 得到定量近似。核心思路是：在内部区域，热核应当可以用 $\mathbb{R}^d$ 中拉普拉斯算子的热核很好地近似；而在边界区域，k_Ω 应当可以用适当选取的半空间中的诺伊曼热核很好地近似。当边界是 C^1 时，这一直觉可以精确化；但在 Lipschitz 情形（甚至凸情形）下，边界区域中的近似才是技术工作的起点，也需要用到几何测度论和抛物型偏微分方程中的工具。事实上，只有在边界于尺度 $\sqrt{t}$ 上可以很好地用超平面近似的点附近，用半空间热核近似热核才行。我们需要量化这些点在多大程度上构成边界区域中的“大多数”，并处理剩余的点。

为了证明关于 k_Ω 的所需近似结果，我们沿用 Brown 的思路；而 Brown 的思路则受到 Dahlberg 和 Kenig 关于利普希茨区域中拉普拉斯方程的诺伊曼问题的研究启发 [8]。一项先验估计

Brown 在 Lipschitz 情形下并不具备这项先验估计，但我们在凸情形下可以得到；这就是 Li 和 Yau 的热核界 [22]。

1.2. **热核的结果**。我们的第一个结果给出了 Ω 内部区域中 k_Ω 的精确近似，即对于满足 $d_\Omega(x) \gg \sqrt{t}$ 的 x。这一结果本质上源自 Brown [7, 式 (2.4+)]。不过，正如下文将要说明的，我们证明了一个更一般的陈述，并更明确地追踪了如何控制隐含常数。

在陈述第一个结果之前，我们先回顾一下：若开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 满足延拓性质，则存在一个有界线性算子 $\mathcal{E}_\Omega\colon H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$，使得若 $u \in H^1(\Omega)$，则对几乎处处的 $x \in \Omega$，都有 $\mathcal{E}_\Omega u(x) = u(x)$。众所周知，具有一致 Lipschitz 边界的开集满足延拓性质（例如，参见[13, 定理 2.92]）。特别地，任何有界开 Lipschitz 集都满足延拓性质。

定理 1.3. 设 $d \geq 1$, $\eta, \delta > 0$，并令 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为具有延拓性质的开集。存在常数 $C_{\Omega,\eta,\delta}$，使得对所有 $t > 0$ 以及满足 $d_\Omega(x) \geq \eta\sqrt{t}$ 的 $x \in \Omega$，我们有

$$\left| k_\Omega(t,x,x) - (4\pi t)^{-d/2} \right| \leq C_{\Omega,\eta,\delta}\, t^{-d/2} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{(1+\delta)t}}.$$

对于凸集上的 Neumann 拉普拉斯算子，我们将证明以下结果。与定理 1.3 中得到的不等式相比，该结果有所改进，因为其中的隐含常数可以选取得与底层几何无关。

定理 1.4. 设 $d \geq 2$ 且 $\eta, \delta > 0$。存在常数 $C_{d,\eta,\delta}$，使得对于任意开凸集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，以及所有满足 $d_\Omega(x) \geq \eta\sqrt{t}$ 的 $t > 0$ 和 $x \in \Omega$，我们有

$$\left| k_\Omega(t,x,x) - (4\pi t)^{-d/2} \right| \leq C_{d,\eta,\delta}\, t^{-d/2} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{(1+\delta)t}}.$$

由于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中拉普拉斯算子的热核由下式给出

$$k_{\mathbb{R}^d}(t,x,y) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}},$$

定理 1.3 和定理 1.4 均表明，只要 $d_\Omega(x) \gg \sqrt{t}$，差值 $k_\Omega - k_{\mathbb{R}^d}$ 在对角线 $x = y$ 上相对于 $k_{\mathbb{R}^d}$ 而言很小。

对于满足 $d_\Omega(x) \lesssim \sqrt{t}$ 的 $x \in \Omega$，我们将转而证明 k_Ω 可由半空间热核很好地近似。对于半空间 $\mathbb{R}^d_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$，热核可显式表示为

$$k_{\mathbb{R}^d_+}(t,x,y) = k_{\mathbb{R}^d}(t,x,y) + k_{\mathbb{R}^d}(t,x,\tau(y)),$$

其中 $\tau\colon \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^d$ 是关于 $\partial\mathbb{R}^d_+$ 的自然反射映射，

$$\tau((x_1,\ldots,x_d)) = (x_1,\ldots,x_{d-1},-x_d).$$

特别地，我们有

$$k_{\mathbb{R}^d_+}(t,x,x) = (4\pi t)^{-d/2}\left(1 + e^{-x_d^2/t}\right).$$

由于证明 k_Ω 可由半空间核近似所需的精确几何假设相当复杂，这里我们只陈述一个定性结果。该结果表明，当 $t \to 0^+$ 时，在边界区域 $d_\Omega(x) \lesssim \sqrt{t}$ 中任意大的部分上，热核都可以很好地由半空间中的热核近似。

定理 1.5。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$是具有 *Lipschitz* 边界的有界开集。存在常数 C_Ω、函数 $\mathcal{E}\colon (0,\infty) \to (0,1]$, 以及可测集族 $\{\mathcal{G}_r\}_{r>0}$, $\mathcal{G}_r \subset \Omega$，使其满足

$$\lim_{r\to 0^+} \mathcal{E}(r) = 0\,, \qquad \lim_{r\to 0^+} \sup_{0<s\leq r} \frac{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}_r|}{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < s\}|} = 0\,,$$

and

$$\left| k_\Omega(t,x,x) - (4\pi t)^{-d/2}\big(1 + e^{-d_\Omega(x)^2/t}\big)\right| \leq C_\Omega t^{-d/2} e^{-c d_\Omega(x)^2/t}\Big(\mathcal{E}(r) + e^{-cr^2/t}\Big)\,,$$

对所有$(t,x) \in (0,r^2] \times \mathcal{G}_r$ 其中 $c>0$ 是一个普适常数。

集合 $\mathcal{G}_r$ 将在下文第 7 节中详细描述。本质上，它们由满足以下条件的点 $x \in \Omega$ 组成：存在 $y \in \partial\Omega$，使得 $|x-y| < r$ ，且$\partial\Omega \cap B_{2r}(y)$可由一个超平面很好地逼近。

正如定理 1.4 在附加假设 Ω 为凸集的情况下强化了定理 1.3 的结论，我们将证明凸集情形下定理1.5的一个更强版本。

定理 1.6。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界、开且凸的集合。对于任意 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4}]$和 $r \in (0, \varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)]$ ，存在一个可测集 $\mathcal{G}_{\varepsilon,r} \subset \Omega$ 使得

$$\frac{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}_{\varepsilon,r}|}{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < s\}|} \leq C_d \frac{r}{\varepsilon\, r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \tag{4}$$

对所有 $s \in (0, r/2]$, 以及

$$\left| k_\Omega(t,x,x) - (4\pi t)^{-d/2}\big(1 + e^{-d_\Omega(x)^2/t}\big)\right| \leq C_d t^{-d/2} e^{-c d_\Omega(x)^2/t}\big(\varepsilon + e^{-cr^2/t}\big)$$

对所有 $(t,x) \in (0, r^2/2] \times \mathcal{G}_{\varepsilon,r}$ 其中 $c>0$ 是一个普适常数，且 C_d 仅取决于 d。

该定理相较于定理 1.5有所改进，体现在：（i）量 $\mathcal{E}$ 和 $|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}_r|$ 的界可以用 Ω 的简单几何特征更明确地表示；（ii）界中出现的常数仅取决于维数，而不取决于具体的凸集。

2. The trace of the Neumann heat kernel

本节的主要目标是在我们掌握热核精确估计的假设下，证明定理 1.1 和 1.2。鉴于这一结果，本文其余各节将讨论热核界及其渐近行为。

2.1. 关于诺伊曼热迹的半抽象结果。 我们首先在一个相当一般的框架下说明，k_Ω 的近似结果如何导出迹的界和渐近行为。我们假设存在三类界。第一类是在各处均成立的通用阶精确界；第二类是在内部区域中足够精确的主阶近似；第三类是在部分边界区域中足够精确的主阶加次主阶近似。这些界分别对应于下述定理中的第 (1)、(2) 和 (3) 项。

除了对 k_Ω 的各种近似的准确性之外，我们得到的估计还取决于以下量

$$\vartheta_\Omega(s) := \frac{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}|}{s\,\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} - 1 \qquad \text{for } s > 0\,.$$

命题 2.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ 是一个开集，并假设：

(1) 存在一个函数 $\mathcal{E}_0\colon (0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$，使得

$$k_\Omega(t,x,x) \leq t^{-d/2}\mathcal{E}_0(t,x) \quad \textit{for all } x \in \Omega, t > 0\,.$$

(2) 存在常数 $c_1, \eta > 0$ 和一个函数 $\mathcal{E}_1\colon (0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$，使得

$$|k_\Omega(t,x,x) - (4\pi t)^{-d/2}| \leq t^{-d/2}\mathcal{E}_1(t,x)e^{-c_1 d_\Omega(x)^2/t}$$

对所有 $t > 0$ 和 $x \in \Omega$，满足 $d_\Omega(x) \geq \eta\sqrt{t}$。

(3) 存在常数 $c_2 > 0$、函数 $\mathcal{E}_2\colon (0,\infty)^2 \times \Omega \to \mathbb{R}$，以及可测集 $\{\mathcal{G}_r\}_{r>0}$, $\mathcal{G}_r \subset \Omega$，使得

$$\left|k_\Omega(t,x,x) - (4\pi t)^{-d/2}\left(1 + e^{-d_\Omega(x)^2/t}\right)\right| \leq t^{-d/2}\mathcal{E}_2(r,t,x)e^{-c_2 d_\Omega(x)^2/t}\,,$$

for all $(t,x) \in (0,r^2] \times \mathcal{G}_r$.

于是，对于任意 $r \geq$ 最大值$\{1,\eta\}\sqrt{t} > 0$，[1]

$$\begin{aligned}
&\left|(4\pi t)^{d/2}\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\right| \\
&\lesssim_{\eta,c_1,c_2} \sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Bigg(\int_0^{r/\sqrt{t}} s^2 e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + e^{-cr^2/t} \\
&\quad + \|\mathcal{E}_2(r,t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{G}_r)}\left[\int_0^{2r/\sqrt{t}} s^2 e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + 1\right] \\
&\quad + \|\mathcal{E}_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\{x\in\Omega : d_\Omega(x)\geq r\})}\left[\int_{r/\sqrt{t}}^\infty s^2 e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + e^{-cr^2/t}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}\int_{\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < r\}\setminus\mathcal{G}_r}(1 + \mathcal{E}_0(t,x))\,dx\Bigg)\,,
\end{aligned}$$

[1]在下文中，我们用记号 $\lesssim$ / $\gtrsim$ 表示左侧被某个正数乘以右侧后从上方/下方界定，其中隐含常数与相关参数无关。有时（如这里），我们会在符号下方加下标，以强调隐含常数仅依赖于该下标中出现的参数。

其中 $c=$ 最小值$\{1/8, c_2/8, c_1/2\}$。

证明。步骤 *1*。迹的分解。

定义

$$\begin{aligned}\Omega_{bulk} &:= \{x\in\Omega : d_\Omega(x)\geq r\}\,,\\ \Omega_{bad} &:= \{x\in\Omega : d_\Omega(x)<r\}\setminus\mathcal{G}_r\,,\\ \Omega_{good} &:= \{x\in\Omega : d_\Omega(x)<r\}\cap\mathcal{G}_r\,.\end{aligned}$$

将 k_Ω 的积分拆分到这些互不相交的集合上，我们得到

$$\begin{aligned}(4\pi t)^{d/2}\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) &= (4\pi t)^{d/2}\int_\Omega k_\Omega(t,x,x)\,dx\\ &= (4\pi t)^{d/2}\left[\int_{\Omega_{bulk}} k_\Omega(t,x,x)\,dx+\int_{\Omega_{bad}} k_\Omega(t,x,x)\,dx\right.\\ &\qquad\left.+\int_{\Omega_{good}} k_\Omega(t,x,x)\,dx\right]\\ &= |\Omega|+\int_{\{x\in\Omega:d_\Omega(x)<r\}} e^{-d_\Omega(x)^2/t}\,dx\\ &\quad+\int_{\Omega_{bulk}}\Big((4\pi t)^{d/2}k_\Omega(t,x,x)-1\Big)\,dx\\ &\quad+\int_{\Omega_{bad}}\Big((4\pi t)^{d/2}k_\Omega(t,x,x)-1-e^{-d_\Omega(x)^2/t}\Big)\,dx\\ &\quad+\int_{\Omega_{good}}\Big((4\pi t)^{d/2}k_\Omega(t,x,x)-1-e^{-d_\Omega(x)^2/t}\Big)\,dx\,.\end{aligned}\tag{5}$$

步骤 *2*。提取主要项。

我们首先证明，(5) 右侧的前两项对应于渐近展开中的各项，条件是 $r\gg\sqrt{t}$。为此，我们注意到，根据富比尼定理并写成

$$e^{-y^2}=2\int_y^\infty se^{-s^2}\,ds=2\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{s>y\}}se^{-s^2}\,ds\,,$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\Omega:d_\Omega(x)<r\}} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}}\,dx &= 2\int_0^\infty\int_\Omega \mathbb{1}_{\{y\in\Omega:d_\Omega(y)<r\}}(x)\mathbb{1}_{\{y\in\Omega:d_\Omega(y)<s\sqrt{t}\}}(x)se^{-s^2}\,ds\,dx\\ &= 2\int_0^\infty |\{x\in\Omega : d_\Omega(x)<\min\{r,\sqrt{t}s\}\}|se^{-s^2}\,ds\\ &= 2\int_0^{r/\sqrt{t}} |\{x\in\Omega : d_\Omega(x)<\sqrt{t}s\}|se^{-s^2}\,ds\\ &\quad+2|\{x\in\Omega : d_\Omega(x)<r\}|\int_{r/\sqrt{t}}^\infty se^{-s^2}\,ds\,.\end{aligned}$$

由于对于任意 $s>0$

$$|\{x\in\Omega : d_\Omega(x)<s\}| = s\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)(1+\vartheta_\Omega(s))\,,$$

我们可以将上述等式写成

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\Omega:d_\Omega(x)<r\}} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}}\,dx = 2\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Bigg[&\int_0^\infty s^2e^{-s^2}\,ds\\ &-\int_{r/\sqrt{t}}^\infty s^2e^{-s^2}\,ds\\ &+\int_0^{r/\sqrt{t}}\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})s^2e^{-s^2}\,ds\\ &+\frac{r}{\sqrt{t}}(1+\vartheta_\Omega(r))\int_{r/\sqrt{t}}^\infty se^{-s^2}\,ds\Bigg].\end{aligned}$$

第一个积分现在给出了正确的边界项:

$$\int_0^\infty s^2e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,.$$

The 第三个积分保持原样。对于第二个和第四个积分，我们注意到

$$\int_{r/\sqrt{t}}^\infty se^{-s^2}\,ds = \frac{e^{-r^2/t}}{2}\,,$$

并且，由于 $se^{-s^2/2}\lesssim 1$,

$$\int_{r/\sqrt{t}}^\infty s^2e^{-s^2}\,ds \lesssim \int_{r/\sqrt{t}}^\infty se^{-s^2/2}\,ds = e^{-r^2/(2t)}\,.$$

利用（$r/\sqrt{t}$）$e^{-r^2/(2t)}\lesssim 1$，我们由此得到

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\{x\in\Omega:d_\Omega(x)<r\}} e^{-d_\Omega(x)^2/t}\,dx - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\right|\\ &\quad\lesssim \sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\left[\int_0^{r/\sqrt{t}} s^2e^{-s^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + (1+|\vartheta_\Omega(r)|)e^{-r^2/(2t)}\right].\end{aligned}\tag{6}$$

步骤 *3.* 余项的界定。

为了给 (5) 中 Ω_{bulk}、Ω_{bad}、Ω_{good} 上的积分估界，我们使用假设的界，得到:

若 $r\geq \max\{1,\eta\}\sqrt{t}$，则

$$\left|\int_{\Omega_{bulk}}\Big((4\pi t)^{d/2}k_\Omega(t,x,x)-1\Big)\,dx\right| \leq \int_{\Omega_{bulk}}\mathcal{E}_1(t,x)e^{-c_1d_\Omega(x)^2/t}\,dx\,,$$

$$\left|\int_{\Omega_{bad}}\Big((4\pi t)^{d/2}k_\Omega(t,x,x)-1-e^{-d_\Omega(x)^2/t}\Big)\,dx\right| \lesssim \int_{\Omega_{bad}}(1+\mathcal{E}_0(t,x))\,dx\,,$$

$$\left|\int_{\Omega_{good}}\Big((4\pi t)^{d/2}k_\Omega(t,x,x)-1-e^{-d_\Omega(x)^2/t}\Big)\,dx\right| \leq \int_{\Omega_{good}}\mathcal{E}_2(r,t,x)e^{-c_2d_\Omega(x)^2/t}\,dx\,.$$

这里，对于集合 Ω_{bad} ，我们用到了这一事实:

$$1+e^{-d_\Omega(x)^2/t}\leq 2\,.$$

由包含关系 $\Omega_{good}\subset\{x\in\Omega\colon d_\Omega(x)\ <r\}$ 以及将 t/c_2 代入 t后应用 (6)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{good}} e^{-c_2 d_\Omega(x)^2/t}\,dx\\
&\qquad\leq \int_{\{x\in\Omega: d_\Omega(x)<r\}} e^{-c_2 d_\Omega(x)^2/t}\,dx\\
&\qquad\lesssim \frac{1}{\sqrt{c_2}}\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\left[1+\int_0^{\sqrt{c_2}r/\sqrt{t}} s^2 e^{-s^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t/c_2})|\,ds+|\vartheta_\Omega(r)|e^{-c_2 r^2/(2t)}\right].
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega_{good}}\left((4\pi t)^{d/2}k_\Omega(t,x,x)-1-e^{-d_\Omega(x)^2/t}\right)dx\right|\\
&\qquad\lesssim \|\mathcal{E}_2(r,t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega_{good})}\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\\
&\qquad\qquad\times\left[\frac{1}{\sqrt{c_2}}+c_2\int_0^{r/\sqrt{t}} s^2 e^{-c_2 s^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds+\frac{1}{\sqrt{c_2}}|\vartheta_\Omega(r)|e^{-c_2 r^2/(2t)}\right]
\end{aligned}$$

为了估计 Ω_{bulk} 上的积分，我们首先使用平凡估计

$$\int_{\Omega_{bulk}}\mathcal{E}_1(t,x)e^{-c_1 d_\Omega(x)^2/t}\,dx\leq\|\mathcal{E}_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega_{bulk})}\int_{\Omega_{bulk}} e^{-c_1 d_\Omega(x)^2/t}\,dx$$

然后以与之前类似的方式应用层蛋糕公式，得到

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{bulk}} e^{-c_1 d_\Omega(x)^2/t}\,dx&=2c_1\int_{\Omega_{bulk}}\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{y\in\Omega: d_\Omega(y)<s\sqrt{t}\}}(x)se^{-c_1 s^2}\,dsdx\\
&=2c_1\int_{r/\sqrt{t}}^\infty|\{x\in\Omega: r\leq d_\Omega(x)\leq s\sqrt{t}\}|se^{-c_1 s^2}\,ds\,.
\end{aligned}$$

这个积分可作如下估计

$$\begin{aligned}
0&\leq\int_{r/\sqrt{t}}^\infty|\{x\in\Omega: r\leq d_\Omega(x)\leq s\sqrt{t}\}|se^{-c_1 s^2}\,ds\\
&\leq\int_{r/\sqrt{t}}^\infty|\{x\in\Omega: d_\Omega(x)\leq s\sqrt{t}\}|se^{-c_1 s^2}\,ds\\
&=\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\int_{r/\sqrt{t}}^\infty\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})s^2e^{-c_1 s^2}\,ds\\
&\quad+\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\int_{r/\sqrt{t}}^\infty s^2e^{-c_1 s^2}\,ds\,.
\end{aligned}$$

利用

$$se^{-cs^2}\lesssim 1/\sqrt{c}\quad\forall s\geq 0\,,$$

我们有

$$\int_{r/\sqrt{t}}^{\infty} s^2 e^{-c_1 s^2}\,ds \lesssim \frac{1}{\sqrt{c_1}}\int_{r/\sqrt{t}}^{\infty} s e^{-c_1 s^2/2}\,ds = \frac{1}{4c_1^{3/2}} e^{-c_1 r^2/(2t)}\,.$$

因此，我们得到

$$\int_{\Omega_{bulk}} e^{-c_1 d_\Omega(x)^2/t}\,dx \lesssim \sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\left[c_1\int_{r/\sqrt{t}}^{\infty}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|s^2e^{-c_1s^2}\,ds + \frac{1}{\sqrt{c_1}}e^{-c_1r^2/(2t)}\right].$$

步骤 *4.* 完成证明。

综合这些估计，我们已证明，若 $0<\max\{1,\eta\}\sqrt{t}\le r$，则

$$\begin{aligned}
&\left|(4\pi t)^{d/2}\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\right| \\
&\lesssim \sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Bigg(\int_0^{r/\sqrt{t}} s^2e^{-s^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + (1+|\vartheta_\Omega(r)|)e^{-r^2/(2t)} \\
&\quad + \|\mathcal{E}_2(r,t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega_{good})}\left[\frac{1}{\sqrt{c_2}} + c_2\int_0^{r/\sqrt{t}} s^2e^{-c_2s^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + \frac{1}{\sqrt{c_2}}|\vartheta_\Omega(r)|e^{-c_2r^2/(2t)}\right] \\
&\quad + \|\mathcal{E}_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega_{bulk})}\left[c_1\int_{r/\sqrt{t}}^{\infty}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|s^2e^{-c_1s^2}\,ds + \frac{1}{\sqrt{c_1}}e^{-c_1r^2/(2t)}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}\int_{\Omega_{bad}}(1+\mathcal{E}_0(t,x))\,dx\Bigg)
\end{aligned}$$

对于任意 $s\in(r/\sqrt{t},\ 2r/\sqrt{t})$

$$\vartheta_\Omega(s\sqrt{t}) = \frac{|\{d_\Omega<s\sqrt{t}\}|}{s\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} - 1 \ge \frac{|\{d_\Omega<r\}|}{2r\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} - 1 = \vartheta_\Omega(r)/2 - 1/2\,.$$

因此，由于 $r\ge\max\{1,\eta\}\sqrt{t}$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{r/\sqrt{t}}^{2r/\sqrt{t}} s^2e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds &\ge \frac{1}{2}(|\vartheta_\Omega(r)|-1)_+\int_{r/\sqrt{t}}^{2r/\sqrt{t}} s^2e^{-cs^2}\,ds \\
&\ge \frac{1}{2}(|\vartheta_\Omega(r)|-1)_+\Big(\frac{r}{\sqrt{t}}\Big)^3e^{-4cr^2/t} \\
&\ge \frac{1}{2}(|\vartheta_\Omega(r)|-1)_+\max\{1,\eta\}^{-3}e^{-4cr^2/t}\,.
\end{aligned}$$

因此，对于任意 $c>0$

$$\frac{1}{\sqrt{c}}|\vartheta_\Omega(r)|e^{-cr^2/(2t)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{c}}\Big(\max\{1,\eta\}^3\int_{r/\sqrt{t}}^{2r/\sqrt{t}} s^2e^{-cs^2/8}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + e^{-cr^2/(2t)}\Big)\,,$$

从而

$$\begin{aligned}
&\left|(4\pi t)^{d/2}\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\right| \\
&\lesssim \sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Bigg(\max\{1,\eta\}^3\int_0^{r/\sqrt{t}} s^2 e^{-s^2/8}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + e^{-r^2/(2t)} \\
&\quad + \|\mathcal{E}_2(r,t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega_{good})}\left[\frac{1}{\sqrt{c_2}} + \left(c_2 + \frac{\max\{1,\eta\}^3}{\sqrt{c_2}}\right)\int_0^{2r/\sqrt{t}} s^2 e^{-c_2 s^2/8}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds\right] \\
&\quad + \|\mathcal{E}_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega_{bulk})}\left[c_1\int_{r/\sqrt{t}}^\infty s^2 e^{-c_1 s^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + \frac{1}{\sqrt{c_1}}e^{-c_1 r^2/(2t)}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}\int_{\Omega_{bad}}(1+\mathcal{E}_0(t,x))\,dx\Bigg).
\end{aligned}$$

至此，所需界的证明完成。 □

2.2. **定理 1.1 的证明**。 在本小节中，我们说明如何通过命题 2.1，利用定理 1.3 和 1.5 中的热核界推出布朗定理（定理 1.1）。

根据定理 1.3 和 1.5 中的界，以及以下界

$$k_\Omega(t,x,x) \le C_{\Omega,t_0} t^{-d/2}\max\left\{1,(t/t_0)^{d/2}\right\}, \tag{7}$$

该界对任意有界开 Lipschitz 集 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ and $t_0>0$ 均成立（见下文引理 3.1），由此可知，命题 2.1 中的假设 (1)、(2) 和 (3) 均得到满足，其中 $\eta=1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0(t,x) &:= C_{\Omega,t_0}\max\left\{1,(t/t_0)^{d/2}\right\}, \\
\mathcal{E}_1(t,x) &:= C_\Omega\,, \\
\mathcal{E}_2(r,t,x) &:= C_\Omega\left(\mathcal{E}(r) + e^{-cr^2/r}\right)
\end{aligned}$$

且普适常数为 $c_1,c_2>0$。这里， $t_0>0$ 是一个固定正数， $\mathcal{E}$ 与定理 1.5 中的相同。我们推得，对于 $0<t\le \min\{t_0, r^2/2\}$,

$$\begin{aligned}
&\left|(4\pi t)^{d/2}\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\right| \\
&\lesssim_{\Omega,d,t_0} \sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Bigg(\int_0^{r/\sqrt{t}} s^2 e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds \\
&\quad + \left(\mathcal{E}(r) + e^{-cr^2/t}\right)\left[\int_0^{2r/\sqrt{t}} s^2 e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + 1\right] \\
&\quad + \int_{r/\sqrt{t}}^\infty s^2 e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + \frac{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x)<r\}\setminus\mathcal{G}_r|}{\sqrt{t}\,\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}\Bigg).
\end{aligned}$$

对 Ω 的隐式依赖仅体现在 (7)、定理 1.3 和定理 1.5 中关于 k_Ω的界所含的常数上。

我们给出了界

$$\int_0^{2r/\sqrt{t}} s^2 e^{-cs^2} |\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\, ds \le \sup_{s<2r} |\vartheta_\Omega(s)| \int_0^\infty s^2 e^{-cs^2}\, ds \lesssim \sup_{s<2r} |\vartheta_\Omega(s)|$$

and

$$\int_{r/\sqrt{t}}^\infty s^2 e^{-cs^2} |\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\, ds \le \sup_{s>0} |\vartheta_\Omega(s)| \int_{r/\sqrt{t}}^\infty s^2 e^{-cs^2}\, ds \lesssim \sup_{s>0} |\vartheta_\Omega(s)| e^{-cr^2/(2t)}\,.$$

注意到

$$\lim_{r\to 0^+} \vartheta_\Omega(r) = 0 \qquad \text{and} \qquad \sup_{r>0} |\vartheta_\Omega(r)| < \infty\,. \tag{8}$$

事实上，第一个关系由以下事实得出： $\partial\Omega$ 的 $\mathcal{H}^{d-1}$-测度与其单侧（$d-1$）维 Minkowski内容相同（例如，参见 [1]）；第二个关系则由第一个关系结合 $|\Omega| < \infty$得出。

取满足 $M^2 \ge 2$的 $\bar{r} = M\sqrt{t}$，我们便已证明

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|(4\pi t)^{d/2} \operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\right|}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\sqrt{t}} \\
&\quad \lesssim_{\Omega,d,t_0} \sup_{s<M\sqrt{t}} |\vartheta_\Omega(s)| + \Big(\mathcal{E}(M\sqrt{t}) + e^{-cM^2}\Big)\Big[\sup_{s<M\sqrt{t}} |\vartheta_\Omega(s)| + 1\Big] \\
&\qquad + e^{-cM^2/2} \sup_{s>0} |\vartheta_\Omega(s)| + M(1+\vartheta_\Omega(M\sqrt{t}))\frac{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < M\sqrt{t}\}\setminus \mathcal{G}_{M\sqrt{t}}|}{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < M\sqrt{t}\}|}\,.
\end{aligned}$$

我们断言，先令 $t\to 0^+$ 趋于极限，再令 $M\to\infty$趋于极限时，右侧趋于零。这是 (8)以及定理 1.5 中列出的 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{G}_r$ 的性质的推论，即

$$\lim_{r\to 0^+} \mathcal{E}(r) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{r\to 0^+} \frac{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < r\}\setminus \mathcal{G}_r|}{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < r\}|} = 0\,.$$

这就完成了定理 1.1 的证明。

2.3. **定理 1.2 的证明**。 本小节中，我们证明凸集的热迹界（定理 1.2）。将结果拆分为两个断言较为方便，具体取决于 t 是否小于或大于 $r_{\text{in}}(\Omega)^2$；见命题 2.2 和 2.3。

我们先讨论 t 有界于 $r_{\text{in}}(\Omega)^2$ 的情形。此情形的证明与定理 1.1 的证明相似，即我们将结合热核界与命题 2.1 中的一般结果。相关的热核界见定理 1.4 和 1.6，以及引理 3.3。不过，为了实现所声称的一致性，我们还需要考虑一些额外的几何方面的考量。

命题2.2。 对于任意 $d \ge 2$，存在常数 $c_1, c_2 > 0$，使得以下性质成立。若 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是开、凸且有界的，并且 $0 < \sqrt{t} \le c_1 r_{\text{in}}(\Omega)$，则

$$\left|(4\pi t)^{d/2}\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\right| \le c_2 \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\sqrt{t}\Big(\frac{\sqrt{t}}{r_{\text{in}}(\Omega)}\Big)^{1/2} \ln\Big(\frac{r_{\text{in}}(\Omega)^2}{t}\Big)^{1/2}\,.$$

在证明中以及本文其余部分，我们使用以下记号

$$V_\Omega(x,r) := |\Omega \cap B_r(x)|\,.$$

证明。 对于任意 $\varepsilon \in (0,1/4]$ 和 $r < \varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)/2$，定理 1.4 和 1.6 以及引理 3.3 使我们能够将命题 2.1 应用于 $\eta = 1$, $\mathcal{G}_r = \mathcal{G}_{\varepsilon,2r}$, $c_1 = 1/2$, c_2为一个普适正常数,

$$\mathcal{E}_0(t,x) \lesssim_d \frac{t^{d/2}}{V_\Omega(x,\sqrt{t})}\,, \quad \mathcal{E}_1(t,x) \lesssim_d 1\,, \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_2(r,t,x) \lesssim_d \varepsilon + e^{-cr^2/t}\,.$$

结论 是存在一个普适常数 $c>0$，使得对于任意 $0<\sqrt{t}\le r$,

$$\begin{aligned}
&\left|(4\pi t)^{d/2}\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\right| \\
&\qquad \lesssim_d \sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Bigg(\int_0^{r/\sqrt{t}} s^2 e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds \\
&\qquad\quad + \left(\varepsilon + e^{-cr^2/t}\right)\left[\int_0^{2r/\sqrt{t}} s^2 e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds + 1\right] \\
&\qquad\quad + \int_{r/\sqrt{t}}^\infty s^2 e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds \\
&\qquad\quad + \frac{1}{\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}\int_{\{x\in\Omega:\, d_\Omega(x)<r\}\setminus\mathcal{G}_{\varepsilon,2r}}\left(1+\frac{t^{d/2}}{V_\Omega(x,\sqrt{t})}\right)dx\Bigg) \\
&\qquad \lesssim_d \sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Bigg(\varepsilon + e^{-cr^2/t} + \int_0^\infty s^2 e^{-cs^2}|\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\,ds \\
&\qquad\quad + \frac{1}{\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}\int_{\{x\in\Omega:\, d_\Omega(x)<r\}\setminus\mathcal{G}_{\varepsilon,2r}}\frac{t^{d/2}}{V_\Omega(x,\sqrt{t})}\,dx\Bigg)\,,
\end{aligned} \tag{9}$$

其中我们用到了对于所有 $x\in\Omega$, $V(x,\sqrt{t}) \le |B_1|t^{d/2}$ 这一事实。

为了完成证明，还需要先对剩余的两个积分进行界定，然后适当选择参数 ε 和 r。

步骤 *1.* 对 ϑ_Ω的积分进行估计。

我们先从涉及 ϑ_Ω 的积分开始。根据引理 A.3，有

$$\left(1-\frac{s}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\right)_+^{d-1} - 1 \le \vartheta_\Omega(s) \le 0\,.$$

由于 $d\ge 2$，函数 $[0,1]\ni x\mapsto (1-x)^{d-1}-1$ 是凸函数。因此，

$$-\frac{(d-1)s}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \le \vartheta_\Omega(s) \le 0\,.$$

因此，

$$\int_0^\infty s^2 e^{-cs^2} |\vartheta_\Omega(s\sqrt{t})|\, ds \lesssim_d \frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \int_0^\infty s^3 e^{-cs^2}\, ds \lesssim_d \frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\,. \tag{10}$$

步骤 *2.* 对 $1/V_\Omega$的积分进行界定。

我们来考虑式 (9) 中剩余的积分。为简化记号，我们再次记为

$$\Omega_{bad} := \{x \in \Omega : d_\Omega(x) < r\} \setminus \mathcal{G}_{\varepsilon,2r}\,.$$

由 (4) 和引理 A.3，对于任意 $\varepsilon \in (0,\ 1/4]$，$r \in (0,\ \varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)/2]$，我们有

$$|\Omega_{bad}| \lesssim_d \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\frac{r^2}{\varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\,. \tag{11}$$

命题 A.6 中的第二个界给出

$$\frac{1}{\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} \int_{\Omega_{bad}} \frac{t^{d/2}}{V_\Omega(x,\sqrt{t})}\, dx \lesssim_d \frac{|\Omega_{bad}|}{\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} + \frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big(1 + \Big(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{d-2}\Big)\,.$$

B由 (11) 和假设 $\sqrt{t} \le r \le \varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)/2$，我们得到估计

$$\frac{1}{\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} \int_{\Omega_{bad}} \frac{t^{d/2}}{V_\Omega(x,\sqrt{t})}\, dx \lesssim_d \frac{r^2}{\varepsilon\sqrt{t} r_{\mathrm{in}}(\Omega)} + \frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \lesssim_d \frac{r^2}{\varepsilon\sqrt{t}\, r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\,. \tag{12}$$

步骤 *3.* 完成证明。

将 (10) 和 (12) 代入 (9)，对于 $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $r \in (0, \varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)/2]$ 和$0 < \sqrt{t} \le r$,

$$\begin{aligned}
&\Big|(4\pi t)^{d/2}\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big| \\
&\qquad \lesssim_d \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\sqrt{t}\bigg(\varepsilon + e^{-cr^2/t} + \frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} + \frac{r^2}{\varepsilon\sqrt{t}\, r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\bigg) \\
&\qquad \lesssim_d \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\sqrt{t}\bigg(\varepsilon + e^{-cr^2/t} + \frac{r^2}{\varepsilon\sqrt{t}\, r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\bigg)\,,
\end{aligned}$$

其中在第二步中我们用了 $\sqrt{t}/r_{\mathrm{in}}(\Omega) \le r^2/(\sqrt{t} r_{\mathrm{in}}(\Omega)) \le r^2/(4\varepsilon\sqrt{t}\, r_{\mathrm{in}}(\Omega))$。

现在我们希望选择参数，使右端最小。

令 $r = M\sqrt{t}$ 对于某个 $1 \le M \le \varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)/(2\sqrt{t})$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\Big|(4\pi t)^{d/2}\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big| \\
&\qquad \lesssim_d \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\sqrt{t}\bigg(\varepsilon + e^{-cM^2} + \frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\frac{M^2}{\varepsilon}\bigg)\,.
\end{aligned}$$

选择 $\varepsilon = Mt^{1/4} r_{\mathrm{in}}(\Omega)^{-1/2}$ 可得界

$$\left| (4\pi t)^{d/2} \operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \right| \lesssim_d \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \sqrt{t} \left(e^{-cM^2} + M \Big(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \Big)^{1/2} \right),$$

对于满足 $t > 0$ 和 $M \geq 1$ 的条件

$$M \leq \frac{1}{2} M t^{-1/4} r_{\mathrm{in}}(\Omega)^{1/2} \quad \text{and} \quad M t^{1/4} r_{\mathrm{in}}(\Omega)^{-1/2} \leq 1/4$$

或者，等价地，如果

$$\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \leq \min\Big\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{16 M^2} \Big\}.$$

为了优化 M 的选择，我们需要使其满足

$$e^{-cM^2} \sim M \Big(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \Big)^{1/2}.$$

对两边取对数，这表明

$$M^2 \sim \log\Big(\frac{r_{\mathrm{in}}(\Omega)^2}{t} \Big) - \log(M),$$

当 $t \to 0$ 时，这给出了选择 $M = C\sqrt{\log(r_{\mathrm{in}}(\Omega)^2/t)}$，其中 $C > 0$。采用这一 M 选择，我们证明了

$$\left| (4\pi t)^{d/2} \operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \right| \lesssim_d \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \sqrt{t} \left(\Big(\frac{t}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)^2} \Big)^{cC^2} + C \Big(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \Big)^{1/2} \Big(\log\Big(\frac{r_{\mathrm{in}}(\Omega)^2}{t} \Big) \Big)^{1/2} \right),$$

适用于满足 $t > 0$ 的情形

$$\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \leq \frac{1}{4} \quad \text{and} \quad \frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \log\Big(\frac{r_{\mathrm{in}}(\Omega)^2}{t} \Big) \leq \frac{1}{16 C^2}.$$

选择 $C = 1/\sqrt{2}c$，并利用当 $s \to 0^+$ 时，$s\log(1/s^2)$ 趋于零这一事实，即完成了命题的证明。□

接下来，我们证明对于下界为 $r_{\mathrm{in}}(\Omega)^2$ 的某个倍数的有界 t，其热迹满足一个界。

命题 2.3. 设 $d \geq 2$。对于每个常数 $c_1 > 0$，都存在一个常数 $c_2 > 0$，使得满足以下性质。若 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是开、凸且有界的，并且 $\sqrt{t} \geq c_1 r_{\mathrm{in}}(\Omega)$，则

$$\left| (4\pi t)^{d/2} \operatorname{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \right| \leq c_2 \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \sqrt{t} \Big(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)} \Big)^{d-1}.$$

估计右端中 t 的幂是精确的，因为对于每个 $t>0$，$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) \geq 1$，因此当 t 变大时，左端的第一项会支配整个左端。

证明。我们先从下方估计绝对值中的量。我们使用界 $(4\pi t)^{d/2}\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) \geq |\Omega|$，它可由 Kr¨oger 不等式 [19] 以 [13, 定理 3.37] 的形式，通过积分表示公式推得

$$\mathrm{Tr}(e^{-tH}) = t^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t}\,\mathrm{Tr}(H-\lambda)_-\,d\lambda\,.$$

由热迹的这一界以及假设 $\sqrt{t} \geq c_1 r_{\mathrm{in}}(\Omega)$，可得

$$\begin{aligned}(4\pi t)^{d/2}\,\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) &> -\frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\\ &\geq -\frac{\sqrt{\pi}}{c_1^{d-1}2}\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{d-1}.\end{aligned}$$

对于上界，我们舍去负项，并利用引理 3.3 中的界来估计

$$(4\pi t)^{d/2}\,\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \lesssim_d \int_\Omega \frac{t^{d/2}}{V_\Omega(x,\sqrt{t})}\,dx\,.$$

B由命题 A.5 和 A.6，存在仅依赖于 d，c_1 的 c_2，使得 t

$$\int_\Omega \frac{t^{d/2}}{V_\Omega(x,\sqrt{t})}\,dx \leq \frac{4^d}{|B_1(0)|}|\Omega + B_{\sqrt{t}}| \leq c_2\sqrt{t}\,\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{d-1}$$

对所有 $\sqrt{t} \geq c_1 r_{\mathrm{in}}(\Omega)$ 均成立。因此，

$$(4\pi t)^{d/2}\,\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) - |\Omega| - \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \leq c_2\sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{d-1}.$$

结合上界和下界即可完成证明。 □

定理 *1.2* 的证明。结合命题 2.2、2.3 及估计即可得到所述界

$$\ln\Big(\frac{r_{\mathrm{in}}(\Omega)^2}{t}\Big) \leq \frac{2}{\varepsilon e}\Big(\frac{\sqrt{t}}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{-\varepsilon} \quad \text{for all } t>0\,. \qquad \square$$

3. Initial bounds on the heat kernel

我们关于热核的近似结果的证明，将基于以下方法：利用热核来表示热方程解的积分表示，并结合对该热核的初始界。这些初始界将根据对 Ω 的假设而有所不同，但在每种情况下，它们都将量化热核k_Ω 相对于全空间中的热核可能达到的大小

$$k_{\mathbb{R}^d}(t,x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,.$$

为此，我们引入以下一族加权范数会很方便。对于 $f\colon (0,\ T]\times\Omega\ \times\Omega\ \to\mathbb{R}$ 定义 $x\in\Omega$ 和 $P\subseteq(0,\ T]\times\mathbb{R}^d$

$$\|f\|_{G^\infty_{\delta,x}(P)} := \sup_{(s,y)\in P\cap((0,T]\times\overline{\Omega})}\ \limsup_{\Omega\ni y'\to y} |f(s,x,y')|s^{d/2}e^{\frac{|x-y|^2}{4(1+\delta)s}}\,. \tag{13}$$

注意，这是 x 的函数；如果 f 连续延拓到 $\partial\Omega$，则定义中的上极限可以替换为极限。

换言之，这些范数的定义使其对应于 k_Ω 上尽可能好的高斯上界，并且该上界对 $(s,y)\in P$ 是一致的：

$$k_\Omega(t,x,y)\le \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}(P)} t^{-d/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(1+\delta)t}}\,.$$

Davies' 的一个著名结果表明，只要 $\partial\Omega$ 足够规则，k_Ω 就基本上被 $k_{\mathbb{R}^d}$ 的某个倍数所控制。事实上，戴维斯结果更为一般，涵盖了与一致椭圆算子相关的热核。

引理 3.1 ([9, 定理 2.4.4])。设 $d\ge 1$，且 $\Omega\ \subset\mathbb{R}^d$ 为具有延拓性质的开集。对于任意 t_0、$\delta>0$，存在常数 $C_{\Omega,t_0,\delta}$，使得对所有 x、$y\in\Omega$ 和 $t>0$,

$$0\le k_\Omega(t,x,y)\le C_{\Omega,t_0,\delta}t^{-d/2}\max\left\{1,(t/t_0)^{d/2}\right\}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(1+\delta)t}}\,.$$

在 [9] 的定理 2.4.4 中，该结果针对具有延拓性质的连通集合 Ω 上与一般一致椭圆算子相关的热核，以及 $0<t<1$。对于连通集合 Ω，上述界可通过对算子 $-t_0\Delta_\Omega$ 应用戴维斯结果得到，再利用 [9, 定理 3.2.9] 证明中的单调性论证，将所得界推广到所有 t。对于非连通集合，则分别在各个连通分支上应用戴维斯的界即可推广；这是因为戴维斯证明中出现的隐含常数仅取决于延拓算子的范数。

引理 3.1 的一个直接推论将在此处派上用场，如下所示。

推论 3.2。设 $d\ge1$，且 $\Omega\ \subset\mathbb{R}^d$ 是具有延拓性质的开集。对于任意 t_0、$\delta\ >\ 0$，存在常数 $C_{\Omega,\ t_0,\ \delta}$，使得对于所有 $x\ \in\ \Omega$，$t\ >\ 0$ 和 $P\subseteq(0,\ t]\times\Omega$,

$$\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}(P)}\le C_{\Omega,t_0,\delta}\max\left\{1,(t/t_0)^{d/2}\right\}.$$

由于有界凸集是一致利普希茨的，推论 3.2 在此情形下适用。然而，为了得到定理 1.2 中的估计，这个关于x 的一致界还不够好（至少用我们的方法还不够）。事实上，正如我们将在下文看到的，相对误差，

$$\frac{k_\Omega(t,x,y)}{k_{\mathbb{R}^d}(t,x,y)}\,,$$

当 x, y 接近“尖角”时较大，而在边界中较规则的部分附近则较小。为了证明我们的主要结果，我们需要更好地刻画边界规则部分附近的这种行为，并结合这样一个事实：‘尖角’不可能覆盖 $\partial\Omega$中过大的部分。Li 和 Yau 研究了 k_Ω 在凸集边界附近的精确行为，并在 [22] 中根据以下量得到了相匹配的上界和下界

$$V_\Omega(x,r) = |\Omega \cap B_r(x)|\,,$$

另见 [9, 定理 5.5.6]。对我们的目的而言，只需回顾 Li 和 Yau 的上界。

引理 3.3 ([22])。 设 $d \geq 2$ 且 $\delta > 0$。存在正常数 $c_{d,\delta}$,$C_{d,\delta}$，使得对于任意开凸集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 以及任意 $x, y \in \Omega$ 和 $t > 0$,

$$0 \leq k_\Omega(t,x,y) \leq C_{d,\delta}\, \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(1+\delta)t}}}{V_\Omega(x,\sqrt{t})}\,.$$

在 [22] 中，结果是在有界光滑凸集上陈述并证明的。利用热核是热方程的唯一弱解这一事实，可以通过逼近论证去除这两个附加假设。

就 $G^\infty_{\delta,x}$-范数而言，Li 和 Yau 的界有如下推论。

推论 3.4。 设 $d \geq 1$ 且令 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为开凸集。对于任意 $\delta > 0$，存在常数 $C_{d,\delta}$，使得对所有 $x \in \Omega$、 $t > 0$ 和 $P \subseteq (0,t] \times \Omega$,

$$\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}(P)} \leq C_{d,\delta}\, \frac{t^{d/2}}{V_\Omega(x,\sqrt{t})}\,.$$

4. An improved heat kernel bound in the bulk

本节将证明，对热核 k_Ω的一个先验类高斯上界 k_Ω，可以推出关于 $k_\Omega(t,\ x,\ x)$ 的精确估计，只要从x 到边界的距离为 $\gg \sqrt{t}$，则 $t \to 0$。所给出的证明并不依赖于考虑拉普拉斯算子的诺伊曼实现的热核，而适用于与 $-\Delta$ 在 $L^2(\Omega)$上的任意非负自伴扩张 H 相关的热核，其中 $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathrm{dom}(H)$。我们将相应的核记为 k_H，其存在性例如由 [16, 命题 2.12]推出。

我们回顾式（13）中$G^\infty_{\delta,\ x}$-范数的定义。

命题 4.1。 设 $\kappa_d = 0$，其中 $d \geq 3$ 且 $\kappa_2 = 1$。对于所有 $x \in \Omega$ $t > 0$、$\delta' > \delta > 0$以及 $R \in (0,\ d_\Omega(x)]$,，均有

$$\left|(4\pi t)^{d/2} k_H(t,x,x) - 1\right| \lesssim_{d,\delta,\delta'} \left(1 + \log_+\left(\frac{\sqrt{t}}{R}\right)\right)^{\kappa_d} \|k_H\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_R(x))} e^{-\frac{R^2}{(1+\delta')t}}\,.$$

我们强调，命题 4.1 中关于算子 H 的具体细节以及Ω的几何的所有依赖，都由右端的加权范数所体现。

界的右端。我们还指出，只有在$\sqrt{t} \ll R \leq d_\Omega(x)$的情形下，这个界才有意义；否则，根据加权范数的定义，该界可直接由成立的逐点高斯界推出。

对于有界 Lipschitz 集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上的诺伊曼拉普拉斯算子，命题 2.1 (2.4+)] 中给出了一个与命题 4.1 中含有 $R \propto d_\Omega(x)$ 的界相对应的界。除了为与范围广得多的一类拉普拉斯算子相关的热核给出界之外，命题 4.1 中的估计在几个方面优于 Brown 的结果；(i) 算子 H （因而也包括几何 Ω）对结果的所有影响，都体现在右端由加权范数给出的先验估计中；(ii) Brown 得到的界在边界附近会因 $\sqrt{t}/d_\Omega(x)$ 的任意正次幂而退化，而我们的界在 $d = 2$ 时仅呈对数退化，在 $d \geq 3$ 时则不会退化。

在 [7, 命题 2.1 (2.4+)] 中，命题 4.1 中出现的因子 $\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,\, x}((0,\, t]\times B_{d_\Omega(x)}(x))}$ 被 1 替代。当 $|\Omega| < \infty$ 时，这样的界不可能对所有 $t > 0$ 都成立，因为根据谱定理可以推出 $k_\Omega(t,\ x,\ x) \geq 1/|\Omega|$。然而，由于 [7] 中的主要结果涉及较小的 $t > 0$，这一遗漏不会影响 [7] 的主要结果的有效性。

证明。 固定命题中所述的 $x \in \Omega$ 和 $t > 0$ 。令 $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ 满足：在 x 的一个邻域内，$\chi \equiv 1$。定义 $w\colon (0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$，使得

$$w(t', x') := k_H(t', x', x) - k_{\mathbb{R}^d}(t', x', x)\chi(x')\,.$$

注意，w 满足

$$\begin{cases} (\partial_{t'} - \Delta)w(t', x') = -2\nabla k_{\mathbb{R}^d}(t', x', x) \cdot \nabla\chi(x') \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - k_{\mathbb{R}^d}(t', x', x)\Delta\chi(x'), & \text{for } (t', x') \in (0,\infty) \times \Omega\,, \\ \lim_{t'\to 0^+} w(t', x') = 0 & \text{for } x' \in \Omega\,, \end{cases}$$

并且，由于 w 在 $\partial\Omega$ 的一个邻域内与 $k_H(\cdot,\cdot,x)$ 一致，因此它满足与 $k_H(\cdot,\cdot,x)$ 相同的边界条件。

根据杜 阿梅尔原理，函数 w 可以表示为一个积分，即

$$w(t', x') = -\int_0^{t'} \int_\Omega k_H(t' - s, x', z)\big(2\nabla k_{\mathbb{R}^d}(s, z, x) \cdot \nabla\chi(z) + k_{\mathbb{R}^d}(s, z, x)\Delta\chi(z)\big)\, dzds\,.$$

因此，根据霍尔德不等式，

$$|w(t',\ x')| \leq \|k_H\|_{G^\infty_{\delta,\, x'}(P)} \int_0^{t'} \int_\Omega e^{-\frac{|x'-z|^2}{4(1+\delta)(t'-s)}} \frac{e^{-\frac{|z-x|^2}{4s}}}{s^{d/2}} \left(2\frac{|z-x|}{s}|\nabla\chi(z)| + |\Delta\chi(z)|\right) dzds\,,$$

其中 $P := (0,\ t'] \times \text{支集}(|\nabla\chi| + |\Delta\chi|)$。由于 $w(x) = 1$，因此有

$$k_H(t, x, x) - k_{\mathbb{R}^d}(t, x, x) = w(t, x)\,.$$

因此，只要证明对于合适的 χ，右端有适当的界，我们就完成了。

取定 $\varepsilon \in (0,\ 1/2)$ 和 $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$，使得 $\operatorname{supp}\chi_0 \subset B_1(0)$、$\chi_0 \equiv 1$ 属于 $B_{1-\varepsilon}(0)$，且 $0 \le \chi_0 \le 1$。设 $\chi(z) := \chi_0((x-z)/R)$，并注意到

$$|\nabla\chi(z)| \lesssim_\varepsilon R^{-1}\mathbb{1}_A(z)\,,$$
$$|\Delta\chi(z)| \lesssim_\varepsilon R^{-2}\mathbb{1}_A(z)\,,$$

其中 $A := \{y \in \mathbb{R}^d : (1-\varepsilon)R < |x-y| < R\} \subset \Omega$。

为了界定 $w(t,\ x)$，我们估计积分

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{4(1+\delta)(t-s)}}}{(t-s)^{d/2}}\frac{e^{-\frac{|z-x|^2}{4s}}}{s^{d/2}}\Big(2\frac{|z-x|}{s}|\nabla\chi(z)| + |\Delta\chi(z)|\Big)\,dzds$$
$$\lesssim_\varepsilon \int_0^t\int_A \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{4(1+\delta)(t-s)}}}{(t-s)^{d/2}}\frac{e^{-\frac{|z-x|^2}{4s}}}{s^{d/2}}\Big(\frac{|z-x|}{sR} + \frac{1}{R^2}\Big)\,dzds\,.$$

由初等不等式

$$h^\beta e^{-\gamma h^2} \le \Big(\frac{\beta}{\gamma\sqrt{2e}}\Big)^\beta \quad \text{for all } h \ge 0 \text{ and } \beta,\gamma > 0\,,$$

可知，对任意 $s > 0,\ z \in A$,

$$\frac{|z-x|e^{-\frac{|z-x|^2}{4s}}}{sR} \le \frac{e^{-\frac{|z-x|^2}{4(1+\delta)s}}}{(1-\varepsilon)R^2}\frac{|z-x|^2e^{-\frac{\delta|z-x|^2}{4(1+\delta)s}}}{s} \lesssim_\delta \frac{e^{-\frac{|z-x|^2}{4(1+\delta)s}}}{(1-\varepsilon)R^2}\,,$$

因此，对任意 $\varepsilon_0 \in (0,\ 1)$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{4(1+\delta)(t-s)}}}{(t-s)^{d/2}}\frac{e^{-\frac{|z-x|^2}{4s}}}{s^{d/2}}\Big(2\frac{|z-x|}{s}|\nabla\chi(z)| + |\Delta\chi(z)|\Big)\,dzds\\
&\lesssim_{\varepsilon,\delta} \frac{1}{R^2}\int_0^t\int_A \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{4(1+\delta)(t-s)}-\frac{|z-x|^2}{4(1+\delta)s}}}{(t-s)^{d/2}s^{d/2}}\,dzds\\
&= \frac{1}{R^2t^{d-1}}\int_0^1\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{(1-\varepsilon)R}^R \frac{e^{-\frac{r^2}{4(1+\delta)t}(\frac{1}{1-\tau}+\frac{1}{\tau})}}{(1-\tau)^{d/2}\tau^{d/2}}r^{d-1}\,drd\mathcal{H}^{d-1}(\theta)d\tau\\
&\lesssim_{\varepsilon,\delta} \frac{R^{d-2}}{t^{d-1}}e^{-\frac{(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon_0)R^2}{(1+\delta)t}}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{(1-\varepsilon)^2\varepsilon_0R^2}{4(1+\delta)t}(\frac{1}{1-\tau}+\frac{1}{\tau})}}{(1-\tau)^{d/2}\tau^{d/2}}\,d\tau\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

由对称性和变量代换 $\eta = \frac{1}{1-\tau} + \frac{1}{\tau}$ 可知，对于任意 $M > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{-M(\frac{1}{1-\tau}+\frac{1}{\tau})}}{(1-\tau)^{d/2}\tau^{d/2}}\,d\tau &= 2\int_0^{1/2} \frac{e^{-M(\frac{1}{1-\tau}+\frac{1}{\tau})}}{(1-\tau)^{d/2}\tau^{d/2}}\,d\tau\\
&\le 2^{1+d/2}e^{-2M}\int_0^{1/2}\frac{e^{-M/\tau}}{\tau^{d/2}}\,d\tau\,.
\end{aligned}$$

通过变量代换，我们得到

$$\int_0^{1/2}\frac{e^{-M/\tau}}{\tau^{d/2}}\,d\tau = M^{1-d/2}\int_0^{1/(2M)}\frac{e^{-1/s}}{s^{d/2}}\,ds\,,$$

从而得到以下界

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{-M/\tau}}{\tau^{d/2}}\, d\tau \lesssim_d \begin{cases} M^{1-d/2} & \text{for } d \geq 3\,, \\ 1+\log_+(1/M) & \text{for } d = 2\,. \end{cases}$$

将这些界代回（14）可得

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{4(1+\delta)(t-s)}}}{(t-s)^{d/2}} \frac{e^{-\frac{|z-x|^2}{4s}}}{s^{d/2}} \Big(2\frac{|z-x|}{s} |\nabla\chi(z)| + |\Delta\chi(z)| \Big)\, dzds \\ &\qquad \lesssim_{\varepsilon,\delta,d} t^{-d/2} \Big(1+\log_+\Big(\frac{\sqrt{t}}{R}\Big)\Big)^{\kappa_d} e^{-\frac{(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon_0)R^2}{(1+\delta)t}} \end{aligned}$$

其中，当 $d \geq 3$ 时，$\kappa_d = 0$，且 $\kappa_2 = 1$。

由此我们得到

$$\begin{aligned} &|k_H(t,x,x) - k_{\mathbb{R}^d}(t,x,x)| \\ &\qquad \lesssim_{d,\varepsilon,\delta,\varepsilon_0} t^{-d/2} \|k_H\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times A)} \Big(1+\log_+\Big(\frac{\sqrt{t}}{R}\Big)\Big)^{\kappa_d} e^{-\frac{(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon_0)R^2}{(1+\delta)t}} \\ &\qquad \lesssim_{d,\varepsilon,\delta,\varepsilon_0} t^{-d/2} \|k_H\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_R(x))} \Big(1+\log_+\Big(\frac{\sqrt{t}}{R}\Big)\Big)^{\kappa_d} e^{-\frac{(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon_0)R^2}{(1+\delta)t}}\,. \end{aligned}$$

选取足够小的 $\varepsilon, \varepsilon_0 > 0$，使得 $(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon_0)(1+\delta') = (1+\delta)$，即可得到所需的估计，并完成该命题的证明。□

5. Estimates for the Neumann boundary value problem

为了证明我们对热核 k_Ω 所需的估计，下一步是对热方程解进行一些先验估计。在下一节分析 k_Ω 靠近 $\partial\Omega$时的行为时，这些估计将发挥作用。更具体地说，我们将根据诺伊曼数据 k_Ω 的可积性，对诺伊曼问题的解 u证明两个估计

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{for } (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega\,, \\ u(0,x) = 0 & \text{for } x \in \Omega\,, \\ \frac{\partial}{\partial\nu} u(t,x) = a(t,x) & \text{for } (t,x) \in (0,\infty)\times\partial\Omega\,, \end{cases} \tag{15}$$

：$(0,\ \infty) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$。

5.1. 预备性说明。我们来准确说明边界值/初值问题（15）的含义。

我们假设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$是开集，并且存在一个 $\mathcal{H}^{d-1}$-可测集合 $\omega \subset \partial\Omega$，使得 $\partial\Omega$在 ω的邻域内是Lipschitz的。我们还假设存在一个可测函数 a: $[0,\infty)\times\partial\Omega \to \mathbb{R}$，使得以下二者之一成立：$a \in L^2((0,\ T);\ L^p(\partial\Omega))$或 $a \in L^p(\partial\Omega;\ L^2(0,\ T))$，其中当 $d = 2$时 $p > 1$，而当 $d \geq 3$时 $p \geq 2(d-1)/d$。

如果对于任意 $T > 0$，我们都有.....，则称 u 是 (15) 的弱解。

$$u \in L^2((0,T);H^1(\Omega)), \qquad \dot{u} \in L^2((0,T);(H^1(\Omega))^*), \qquad u(0) = 0$$

and

$$\langle \dot{u}(t), v\rangle + \int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla v\,dx = \int_{\partial\Omega} a(t)v\,d\mathcal{H}^{d-1}$$

对于所有 $v \in H^1(\Omega)$ 以及几乎处处的 $t \in (0,\ T)$，其中 $\dot{u}$ 表示 u 关于时间变量的弱导数。这里，$(H^1(\Omega))^*$ 表示 $H^1(\Omega)$ 的对偶空间，而 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示相应的对偶配对。此外，众所周知，$u \in L^2((0,\ T);\ H^1(\Omega)), \dot{u} \in L^2((0,\ T);\ (H^1(\Omega))^*)$ 蕴含 $u \in C([0,T];\ L^2(\Omega))$，因此初始条件 $u(0) = 0$有良好定义。我们将立即证明，在关于 ω 和 a的假设下，边界积分 $\int_{\partial\Omega} a(t)v\,d\mathcal{H}^{d-1}$有良好定义。

我们断言，(15) 存在唯一的弱解。事实上，定义 $\langle f(t)\ v(t)\rangle := \int_{\partial\Omega} a(t)v(t)\ d\mathcal{H}^{d-1}$ for $v \in L^2((0,T);\ H^1(\Omega))$。我们断言 $f \in L^2((0,T),(H^1(\Omega))^*)$。证明这一点后，弱解的存在唯一性便可由第 7 节中的论证得出 [10, Section 7.1]。

为证明 $f \in L^2((0,T),(H^1(\Omega))^*)$，令 $v \in L^2((0,T)\ H^1(\Omega))$。回顾一下，根据索 Sobole夫迹嵌入定理，我们有一个有界迹算子$H^1(\Omega) \to L^{p'}(\omega)$，其中 p 如我们对 a 的假设所述，且采用记号 $p' = \frac{p}{p-1}$ 表示 p的对偶 H¨older 指数。首先,¯假设 $a \in L^2((0,T);\ L^p(\partial\Omega))$。那么，根据索 Sobole 夫迹定理,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\,dt\right| &\le \int_0^T \|a(t)\|_{L^p(\partial\Omega)}\|v(t)\|_{L^{p'}(\partial\Omega)}\,dt\\ &\lesssim \int_0^T \|a(t)\|_{L^p(\partial\Omega)}\|v(t)\|_{H^1(\Omega)}\,dt\\ &\le \|a\|_{L^2((0,T);L^p(\partial\Omega))}\|v\|_{L^2((0,T);H^1(\Omega))},\end{aligned}$$

从而证明所声称的包含关系。同时，若 $a \in L^p(\partial\Omega;\ L^2(0,T))$，则令 $w(x) := (\int_0^T |v(t,x)|^2, dt)^{1/2}$，并估计

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\,dt\right| &\le \int_{\partial\Omega}\left(\int_0^T |a(t,x)|^2\,dt\right)^{1/2} w(x)\,d\mathcal{H}^{d-1}\\ &\le \|a\|_{L^p(\partial\Omega;L^2(0,T))}\|w\|_{L^{p'}(\partial\Omega)}\\ &\lesssim \|a\|_{L^p(\partial\Omega;L^2(0,T))}\|w\|_{H^1(\Omega)}\\ &\le \|a\|_{L^p(\partial\Omega;L^2(0,T))}\|v\|_{L^2((0,T);H^1(\Omega))},\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式可由类似于 [23, 定理 7.8] 的论证得出。这再次证明了所声称的包含关系。

我们声称，(15) 的弱解满足

$$u \in C^\infty((0,\infty)\times\Omega).$$

这由标准的抛物正则性得到；例如，参见 [28, 推论 7.6]。（该推论是由 [28, 定理 5.11 和定理 7.5] 推出的。）

现在我们证明方程 (15) 的解的 Duhamel 表示。

引理 5.1。 (15) 的解由下式给出

$$u(t,x)=\int_0^t\int_{\partial\Omega} a(t)k_\Omega(t-s,x,y)\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\,ds\,.$$

我们的论证利用了这样一个事实： k_Ω 在局部有界，并且关于 x， y联合连续；对于取值于 $(0,\infty)$ 紧区间的 t ，这种连续性是一致的。这可由 [16, 引理 2.14] 中讨论的谱函数的性质推出。

证明。步骤 *1*。 我们将证明，对于每个 $x\in\Omega$ 以及几乎处处的 $t>0$，都有

$$k_\Omega(t,x,\cdot)\in H^1(\Omega)\,,\qquad \dot k_\Omega(t,x,\cdot)\in (H^1(\Omega))^*\,,$$

其范数对于取自 $(0,\infty)$ 紧子集的 t 以及取自 Ω 紧子集的 x 均一致有界；并且对于 $v\in H^1(\Omega)$ 以及几乎处处的 $t>0$，都有

$$\langle \dot k_\Omega(t,x,\cdot),v\rangle+\int_\Omega \nabla_y k_\Omega(t,x,y)\cdot\nabla v\,dy=0\,. \tag{16}$$

事实上，由谱定理可得

$$\begin{aligned}\|\nabla k_\Omega(t,x,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}&=\int_{[0,\infty)}\lambda e^{-2t\lambda}d\mathbb{1}(-\Delta_\Omega<\lambda)(x,x)\\&\le e^{-1}t^{-1}\int_{[0,\infty)}e^{-t\lambda}d\mathbb{1}(-\Delta_\Omega<\lambda)(x,x)\\&=e^{-1}t^{-1}k_\Omega(t,x,x)\,,\end{aligned} \tag{17}$$

因此，第一个断言由热核的有界性得出。

取一个紧集 $K\subset\Omega$，并令 $f\in L^2(K)$（延拓至 Ω 上时取零）以及 $v\in H^1(\Omega)$。于是，根据谱定理， $t\mapsto(f,\ e^{t\Delta}v)$ 是可微的，且

$$\partial_t(f,e^{t\Delta}v)=((-\Delta)^{1/2}e^{t\Delta}f,(-\Delta)^{1/2}v)\,. \tag{18}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\left|\partial_t(f,e^{t\Delta}v)\right|&\le\|(-\Delta)^{1/2}\,e^{(t/2)\Delta}\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)}\|e^{(t/2)\Delta}f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}\\&\le e^{-1/2}t^{-1/2}\|e^{(t/2)\Delta}f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}\\&\le e^{-1/2}t^{-1/2}\|e^{(t/2)\Delta}\mathbb{1}_K\|_{L^1(\Omega)\to L^2(\Omega)}\|f\|_{L^1(K)}\|v\|_{H^1(\Omega)}\,.\end{aligned} \tag{19}$$

注意

$$\|e^{(t/2)\Delta}\mathbb{1}_K\|_{L^1(\Omega)\to L^2(\Omega)}=\|\mathbb{1}_Ke^{t\Delta}\mathbb{1}_K\|^{1/2}_{L^1(K)\to L^\infty(K)}=\sup_{x\in K}k_\Omega(t,x,x)^{1/2}$$

并且对于取自 $(0,\infty)$ 紧子集的 t ，后者是一致有限的。因此，对于取自 $L^2(K)$ 有界子集的 f 以及取自 $(0,\infty)$ 紧子集的 t ，$\partial_t(f,e^{t\Delta}v)$ 一致有界。现在令 f 趋近于支撑于 K 中的狄拉克δ函数。 k_Ω 关于 x 的连续性意味着 $t\mapsto(f,e^{t\Delta}v)$ 收敛到 $t\mapsto(k_\Omega(t,x,\cdot)\ v)$。由于 $t\mapsto(f,e^{t\Delta}v)$ 在 $(0,\infty)$ 的紧子集上一致利普希茨，极限仍为 Lipschitz 函数，且其 Lipschitz 范数由 (19) 的右端界定。它

由此可知，对于几乎处处的 $t \in (0,\infty)$，$\dot{k}_\Omega(t,x,\cdot) \in (H^1(\Omega))^*$，其范数由 (19) 的右端界定。

鉴于（18），并且由于

$$((-\Delta)^{1/2}e^{t\Delta}f, (-\Delta)^{1/2}v) = \int_\Omega \nabla(e^{t\Delta}\overline{f})\cdot\nabla v\,dy\,,$$

我们有

$$-\int_0^\infty \psi'(t)(f, e^{t\Delta}v)\,dt = \int_0^\infty \psi(t)\int_\Omega \nabla(e^{t\Delta}\bar{f})\cdot\nabla v\,dy\,dt$$

对任意 $\psi \in C_c^\infty((0,\infty))$。再次令 f 趋近于狄拉克δ函数，并注意到由（17）可提取一个子序列，使得 $e^{t\Delta}\bar{f} \rightharpoonup \nabla_y k_\Omega(t,x,\cdot)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中收敛，我们由此得到

$$-\int_0^\infty \psi'(t)(k_\Omega(t,x,\cdot), v)\,dt = \int_0^\infty \psi(t)\int_\Omega \nabla_y k_\Omega(t,x,y)\cdot\nabla v\,dy\,dt\,,$$

这就证明了（16）。

步骤 *2.* 假设 u是上述意义下（15）的一个弱解。由步骤 1 可知，对几乎处处的 $s' > 0$ 以及所有 $x \in \Omega$，$k_\Omega(s',x,\cdot) \in H^1(\Omega)$，因此我们可以在方程的弱形式中取 $v = k_\Omega(s',x,\cdot)$。由此得到

$$\langle \dot{u}(s), k_\Omega(s',x,\cdot)\rangle + \int_\Omega \nabla k_\Omega(s',x,y)\cdot\nabla u(s)\,dy = \int_{\partial\Omega} a(s)k_\Omega(s',x,y)\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)$$

对几乎处处的 $s > 0, s' > 0$ 以及每个 $x \in \Omega$。相应地，将 (16) 中的 $v = u(s)$ 代入可得

$$\int_\Omega \nabla k_\Omega(s',x,y)\cdot\nabla u(s)\,dy = -\langle \dot{k}_\Omega(s',x,\cdot), u(s)\rangle$$

对几乎处处的 $s > 0, s' > 0$ 以及所有 $x \in \Omega$。因此

$$\int_{\partial\Omega} a(s)k_\Omega(s',x,y)\,d\mathcal{H}^{d-1}(y) = \langle \dot{u}(s), k_\Omega(s',x,\cdot)\rangle - \langle \dot{k}_\Omega(s',x,\cdot), u(s)\rangle\,,$$

对几乎处处的 $s > 0, s' > 0$ 以及所有 $x \in \Omega$。特别地，由富比尼定理可知，对几乎处处的 $t > 0$,

$$\int_{\partial\Omega} a(s)k_\Omega(t-s,x,y)\,d\mathcal{H}^{d-1}(y) = \langle \dot{u}(s), k_\Omega(t-s,x,\cdot)\rangle - \langle \dot{k}_\Omega(t-s,x,\cdot), u(s)\rangle\,,$$

对于几乎处处的 $s \in (0,t)$。

对上述等式在区间 $(\varepsilon, t-\varepsilon)$ 上关于 s 积分，可得

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \int_{\partial\Omega} a(s) k_\Omega(t-s,x,y)\, d\mathcal{H}^{d-1}(y)\, ds \\
&\quad = \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \big(\langle \dot u(s), k_\Omega(t-s,x,\cdot)\rangle - \langle \dot k_\Omega(t-s,x,\cdot), u(s)\rangle \big)\, ds \\
&\quad = \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \partial_s (u(s), k_\Omega(t-s,x,\cdot))\, ds \\
&\quad = (u(t-\varepsilon), k_\Omega(\varepsilon,x,\cdot)) - (u(\varepsilon), k_\Omega(t-\varepsilon,x,\cdot)) \\
&\quad = (e^{\varepsilon\Delta} u(t-\varepsilon))(x) - (e^{(t-\varepsilon)\Delta} u(\varepsilon))(x)\,,
\end{aligned}$$

其中，乘积法则的使用依据 [10, 定理 5.9.3 (ii)] 应用于$\mathbf{u}(s) = u(s) \pm k_\Omega(t-s,\ x,\ \cdot)$ 得到论证。令 $\varepsilon \to 0^+$ 趋于……，并利用 u 和 $e^{t\Delta}$ 的小时间渐近行为，即可得到所述公式。□

5.2. **一个初步的先验界**。 本小节旨在证明，当边界数据 a 属于适当的勒贝格空间时，方程 (15) 的解满足一个先验估计。此处证明的界对 [7, 引理 3.4] 中的结果作了细化和推广。特别是，我们明确追踪 Ω 的几何如何影响该估计。在证明定理 1.2 时，明确几何依赖关系至关重要。

为了陈述我们的估计，对于一个 $\mathcal{H}^{d-1}$-可测集合 $\omega \subset \mathbb{R}^d$，定义

$$\Theta[\omega] := \sup_{r>0, z\in\mathbb{R}^d} \frac{\mathcal{H}^{d-1}(\omega \cap B_r(z))}{r^{d-1}}\,.$$

定理 5.2。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ 为开集。假设 $\omega \subseteq \partial\Omega$ 是 $\mathcal{H}^{d-1}$-可测的，并且 $\partial\Omega$ 在 ω 的邻域内是 *Lipschitz*正则的。

固定 $p \in [1,\infty], q \in (2,\ \infty]$ 满足 $\frac{q'd}{2} > 1$ 和 $p > \frac{(d-1)q}{q-2}$。设 $a\colon\ [0,\infty) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 支撑于 $[0,\infty) \times \omega$，并令 $u\colon (0,\ \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ 为诺伊曼边值问题 (15) 的相应解。

对于任意 $t > 0$,

$$\begin{aligned}
|u(t,x)| \lesssim_{d,p,q,\delta} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times\omega)} e^{-\frac{\operatorname{dist}(x,\omega)^2}{8(1+\delta)t}} \min\big\{ \|a\|_{L^p(\omega;L^q((0,t)))}, \|a\|_{L^q((0,t);L^p(\omega))} \big\} \\
\times \min\left\{ \Theta[\omega]^{\frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'})} \mathcal{H}^{d-1}(\omega)^{\frac{1}{p'}-\frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'})}, \Theta[\omega]^{\frac{1}{p'}} t^{\frac{1}{q'}+\frac{d-1}{2p'}-\frac{d}{2}} \right\}.
\end{aligned}$$

注意到，根据 Minkowski 不等式，当 $p \geq q$时，$\|a\|_{L^p(\omega;L^q((0,t)))} \leq \|a\|_{L^q((0,t);L^p(\omega))}$；而当 $p \leq q$时，$\|a\|_{L^p(\omega;L^q((0,t)))} \geq \|a\|_{L^q((0,t);L^p(\omega))}$。因此，第一个最小值中的哪一项最小，仅取决于 p、q 之间的关系，而与函数 a 无关。

证明。步骤 *1*。我们可以假设 $\min\big\{ \|a\|_{L^p(\omega;L^q((0,t)))}\ \|a\|_{L^q((0,t);L^p(\omega))} \big\} < \infty$。该假设蕴含前一小节中的假设，特别是蕴含解 u 存在，且引理 5.1 中的 Duhamel 表示成立。

由此公式可得

$$|u(t,x)| \le \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times\omega)} e^{-\frac{\operatorname{dist}(x,\omega)^2}{8(1+\delta)t}} \int_0^t \int_\omega |a(s,y)| \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{8(1+\delta)(t-s)}}}{(t-s)^{d/2}}\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) ds\,.$$

由 Hölder 不等式可得。

$$\begin{aligned} |u(t,x)| &\le \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times\omega)} e^{-\frac{\operatorname{dist}(x,\omega)^2}{8(1+\delta)t}} \|a\|_{L^p(\omega;L^q((0,t)))} \\ &\quad \times \left(\int_\omega \left(\int_0^t \frac{e^{-q'\frac{|x-y|^2}{8(1+\delta)(t-s)}}}{(t-s)^{q'd/2}}\, ds \right)^{p'/q'} d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right)^{1/p'} \end{aligned} \tag{20}$$

and

$$\begin{aligned} |u(t,x)| &\le \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times\omega)} e^{-\frac{\operatorname{dist}(x,\omega)^2}{8(1+\delta)t}} \|a\|_{L^q((0,t);L^p(\omega))} \\ &\quad \times \left(\int_0^t (t-s)^{-q'd/2} \left(\int_\omega e^{-p'\frac{|x-y|^2}{8(1+\delta)(t-s)}}\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right)^{q'/p'} ds \right)^{1/q'}. \end{aligned} \tag{21}$$

在本证明的其余部分，我们将证明

$$\begin{aligned} &\left(\int_\omega \left(\int_0^t \frac{e^{-q'\frac{|x-y|^2}{8(1+\delta)(t-s)}}}{(t-s)^{q'd/2}}\, ds \right)^{p'/q'} d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right)^{1/p'} \\ &\lesssim_{d,p,q,\delta} \min\left\{ \Theta[\omega]^{\frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'})} \mathcal{H}^{d-1}(\omega)^{\frac{1}{p'}-\frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'})}, \Theta[\omega]^{\frac{1}{p'}} t^{\frac{1}{q'}+\frac{d-1}{2p'}-\frac{d}{2}} \right\} \end{aligned} \tag{22}$$

and

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^t (t-s)^{-q'd/2} \left(\int_\omega e^{-p'\frac{|x-y|^2}{8(1+\delta)(t-s)}}\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right)^{q'/p'} ds \right)^{1/q'} \\ &\lesssim_{d,p,q,\delta} \min\left\{ \Theta[\omega]^{\frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'})} \mathcal{H}^{d-1}(\omega)^{\frac{1}{p'}-\frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'})}, \Theta[\omega]^{\frac{1}{p'}} t^{\frac{1}{q'}+\frac{d-1}{2p'}-\frac{d}{2}} \right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

一旦我们证明了 (22) 和 (23)，定理便可由 (20) 和 (21) 得出。显然，在证明 (22) 和 (23) 时，我们可以假设 $\Theta[\omega] < \infty$，否则便无事可证。此处及下文中，我们允许 $\mathcal{H}^{d-1}(\omega)$ 为无穷大。

步骤 *2.* 我们对 (22) 和 (23) 的证明依赖于一个更一般的界，我们将在本步骤中推导该界。定义，对于 $(\beta,\gamma) \in [0,\infty)^2 \setminus \{(0,0)\}$ 和 $\mu > 0$,

$$h_{\beta,\gamma}(\mu) := \mu^{-\beta} e^{-\gamma\mu}\,.$$

我们将证明，如果 $\beta < \frac{d-1}{2}$，那么

$$\int_\omega h_{\beta,\gamma}\Big(\frac{|x-y|^2}{\tau}\Big)\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) \lesssim_{d,\beta,\gamma} \Theta[\omega] \min\left\{ \Big(\frac{\mathcal{H}^{d-1}(\omega)}{\Theta[\omega]}\Big)^{1-2\beta/(d-1)} \tau^\beta, \tau^{(d-1)/2} \right\}. \tag{24}$$

为证明 (24)，我们注意到 $h_{\beta,\gamma}$ 是光滑的、递减的，并且当$\mu \to \infty$时趋于零。这使我们可以写出

$$h_{\beta,\gamma}(s) = \int_s^\infty |h'_{\gamma,\beta}(\mu)|\, d\mu = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\mu>s\}} |h'_{\gamma,\beta}(\mu)|\, d\mu\,.$$

因此，根据富比尼定理，

$$\begin{aligned}\int_\omega h_{\beta,\gamma}\Big(\frac{|x-y|^2}{\tau}\Big)\,d\mathcal{H}^{d-1}(y) &= \int_\omega\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\mu>|x-y|^2/\tau\}}|h'_{\gamma,\beta}(\mu)|\,d\mu\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\\ &= \int_0^\infty\bigg(\int_\omega \mathbb{1}_{\{\sqrt{\tau\mu}>|x-y|\}}\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\bigg)|h'_{\gamma,\beta}(\mu)|\,d\mu\\ &= \int_0^\infty \mathcal{H}^{d-1}(\omega\cap B_{\sqrt{\tau\mu}}(x))|h'_{\gamma,\beta}(\mu)|\,d\mu\,.\end{aligned}$$

因此，我们得到以下界

$$\int_\omega h_{\beta,\gamma}\Big(\frac{|x-y|^2}{\tau}\Big)\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\le\int_0^\infty \min\{\mathcal{H}^{d-1}(\omega),\Theta[\omega](\mu\tau)^{(d-1)/2}\}|h'_{\beta,\gamma}(\mu)|\,d\mu\,.$$

由于 $|h'_{\beta,\ \gamma}(\mu)|\sim\mu^{-1-\beta}$ 当 $\mu\to 0$ 时，右侧的积分仅在 $\beta<{}^{d-1}_{2}$ 时才有限。若满足这一条件，分部积分得到

$$\begin{aligned}\int_\omega h_{\beta,\gamma}\Big(\frac{|x-y|^2}{\tau}\Big)\,d\mathcal{H}^{d-1}(y) &\lesssim_d \Theta[\omega]\tau^{(d-1)/2}\int_0^{\tau^{-1}(\mathcal{H}^{d-1}(\omega)/\Theta[\omega])^{2/(d-1)}}\mu^{(d-3)/2}h_{\beta,\gamma}(\mu)\,d\mu\\ &= \Theta[\omega]\tau^{(d-1)/2}\int_0^{\tau^{-1}(\mathcal{H}^{d-1}(\omega)/\Theta[\omega])^{2/(d-1)}}\mu^{(d-3)/2-\beta}e^{-\gamma\mu}\,d\mu\\ &\lesssim_{d,\beta,\gamma}\Theta[\omega]\min\bigg\{\Big(\frac{\mathcal{H}^{d-1}(\omega)}{\Theta[\omega]}\Big)^{1-2\beta/(d-1)}\tau^{\beta},\tau^{(d-1)/2}\bigg\}\,.\end{aligned}$$

这就证明了所需的界（24）。

步骤 *3*。我们转而证明（22）。通过变量代换并利用 $q'd>2$，可得

$$\begin{aligned}\int_0^t\frac{e^{-q'\frac{|x-y|^2}{8(1+\delta)(t-s)}}}{(t-s)^{q'd/2}}\,ds &= \Big(\frac{q'|x-y|^2}{8(1+\delta)}\Big)^{1-q'd/2}\int_{q'\frac{|x-y|^2}{8(1+\delta)t}}^\infty e^{-\tau}\tau^{q'd/2-2}\,d\tau\\ &\le \Big(\frac{q'|x-y|^2}{8(1+\delta)}\Big)^{1-q'd/2}e^{-q'\frac{|x-y|^2}{16(1+\delta)t}}\int_0^\infty e^{-\tau/2}\tau^{q'd/2-2}\,d\tau\\ &= \Big(\frac{q'|x-y|^2}{8(1+\delta)}\Big)^{1-q'd/2}e^{-q'\frac{|x-y|^2}{16(1+\delta)t}}2^{q'd/2-1}\Gamma\Big(\frac{q'd}{2}-1\Big)\,.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_\omega\bigg(\int_0^t\frac{e^{-q'\frac{|x-y|^2}{8(1+\delta)(t-s)}}}{(t-s)^{q'd/2}}\,ds\bigg)^{p'/q'}d\mathcal{H}^{d-1}(y)\\ &\qquad\lesssim_{p,q,d,\delta} t^{p'/q'-p'd/2}\int_\omega\Big(\frac{|x-y|^2}{t}\Big)^{p'/q'-p'd/2}e^{-p'\frac{|x-y|^2}{16(1+\delta)t}}d\mathcal{H}^{d-1}(y)\,.\end{aligned}$$

取 $\beta={}^{p'}_{q'}\big({}^{q'd}_{2}-1\big)$ and$^{\gamma}={}^{p'}_{16\ (1+\delta)}$，即可由 (24) 得到所声称的界 (22)。注意，关于 p,q 的假设意味着 $0<\beta<{}^{d-1}_{2}$。

接下来，我们转而证明 (23)。由 (24) 取 $\beta = 0$ and $\gamma = {}_8{}^{p'}{}_{(1+\delta)}$，可得

$$\left(\int_0^t (t-s)^{-q'd/2}\left(\int_\omega e^{-p'\frac{|x-y|^2}{8(1+\delta)(t-s)}}\, d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right)^{q'/p'} ds\right)^{1/q'}$$
$$\lesssim_{d,p,q,\delta} \left(\int_0^t (t-s)^{-q'd/2}\min\left\{\mathcal{H}^{d-1}(\omega), \Theta[\omega](t-s)^{(d-1)/2}\right\}^{q'/p'} ds\right)^{1/q'}.$$

注意，根据我们对 p, q 的假设，有 ${}^{q'd}_{2} > 1$ 且 ${}^{q'd}_{2} < 1 + {}^{q'}_{(d-1)\,2p'}$。现在，所声称的界 (23) 可由以下事实推出：若 $1 < \kappa < 1+\alpha, \alpha > 0, t > 0, A > 0$，则

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (t-s)^{-\kappa}\min\{A, (t-s)^\alpha\}\, ds \\
&\quad= \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{-\kappa+\alpha}\, ds & \text{if } A^{1/\alpha} \geq t \\ A\int_0^{t-A^{1/\alpha}} (t-s)^{-\kappa}\, ds + \int_{t-A^{1/\alpha}}^t (t-s)^{-\kappa+\alpha}\, ds & \text{if } A^{1/\alpha} < t \end{cases} \\
&\quad= \begin{cases} \frac{t^{1-\kappa+\alpha}}{1-\kappa+\alpha} & \text{if } A^{1/\alpha} \geq t \\ \frac{At^{1-\kappa} - A^{(1-\kappa)/\alpha+1}}{1-\kappa} + \frac{A^{(1-\kappa)/\alpha+1}}{1-\kappa+\alpha} & \text{if } A^{1/\alpha} < t \end{cases} \\
&\quad\leq \begin{cases} \frac{t^{1-\kappa+\alpha}}{1-\kappa+\alpha} & \text{if } A^{1/\alpha} \geq t \\ \left(\frac{1}{1-\kappa} + \frac{1}{1-\kappa+\alpha}\right) A^{(1-\kappa)/\alpha+1} & \text{if } A^{1/\alpha} < t \end{cases} \\
&\quad\lesssim_{\alpha,\kappa} \min\{A^{(1-\kappa)/\alpha+1}, t^{1-\kappa+\alpha}\}.
\end{aligned}$$

这就完成了定理的证明。 □

5.3. **第二个先验界**。 除定理 5.2 外，我们还需要一个估计，其假设是边界数据 a 的支撑包含于抛物球 $[0, \rho^2] \times (B_\rho(x_0) \cap \partial\Omega)$ 中，且平均值为零。我们所证明的估计是引理 3.3] 的一个版本。与之前的界一样，这里需要更仔细地追踪该界对 Ω 的几何的依赖。

为了陈述这一结果，我们需要明确边界在何种意义上、尤其是在何种尺度下被假定为局部图像。

定义 5.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, 是一个开集。取定 $x_0 \in \partial\Omega$。若存在 $Q \in \mathbb{SO}(d)$，使得 $\partial\Omega$ 可由函数 $\varphi\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ 在 $B_R(x_0)$ 中局部参数化，则称其满足该条件

$$(\Omega - x_0) \cap B_R(0) = Q(\{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^d : y_d > \varphi(y')\}) \cap B_R(0).$$

$\partial\Omega$ 是 Lipschitz正则的含义是：对每个 $x_0 \in \partial\Omega$，都存在一个足够小的$R > 0$，使得 $\partial\Omega$ 可以由 Lipschitz 函数 φ在 $B_R(x_0)$ 中局部参数化。对于接下来的结果，这类 R 和 φ 是否存在固然重要，但与涉及的其他量相比， R 和 $\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}$ 的相对大小也很重要。

本小节旨在证明的结果如下。

引理 5.4。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ 为开集，并固定 $x_0 \in \partial\Omega$ $\delta > 0$。假设存在 $M, R > 0$ 和 $\varphi\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$，满足 $\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \leq M$，使得 $\partial\Omega$ 在 $B_R(x_0)$ 中由 φ 局部参数化。假设 $\rho_0 \in (0, R)$ 满足

$$\sup_{y \in B_{2\rho_0}(0) \setminus \{y_d > \varphi(y')\}} \big(|y|^2 + 4\varphi(y')(\varphi(y') - y_d)\big) < R^2 \,.$$

进一步假设，对于某个 $p > 1$，若 $d = 2$ 且 $p \geq 2(d-1)/d$，若 $d \geq 3$，并且满足 $\mathrm{supp}(a) \subseteq [0, \rho^2] \times (\partial\Omega \cap B_\rho(x_0))$，其中 $\rho \geq 0$，且 $\iint a \, ds \, d\mathcal{H}^{d-1}(y) = 0$。

若 $u\colon (0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ 表示 *Neumann* 边界值问题 (15) 的解，则

$$|u(t,x)| \lesssim_{d,\delta,M} \|a\|_{L^1((0,\rho^2)\times\partial\Omega)} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,3t/2)\times B_{\sqrt{t}}(x_0))} t^{-d/2} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{12(1+\delta)t}} \min\Big\{1, \Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)^\alpha\Big\}$$

for 所有 $(t,x) \in [4 \text{最大值}\{\rho_0, \rho\}^2, \infty) \times \Omega$，其中 $\alpha > 0$ 仅依赖于 d, M。

备注 5.5。 我们注意到，引理的假设蕴含 $|\varphi(y')| \leq M|y'|$（注意，当 $x_0 \in \partial\Omega$ 时，$\varphi(0) = 0$）。因此，根据柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{y' \in B_{2\rho_0}(0) \setminus \{y_d > \varphi(y')\}} \big(|y|^2 + 4\varphi(y')(\varphi(y') - y_d)\big) \\
&\qquad \leq \sup_{y' \in B_{2\rho_0}(0) \setminus \{y_d > \varphi(y')\}} \big(|y|^2 + 4M^2|y'|^2 + 4M|y'||y_d|\big) \\
&\qquad \leq \sup_{y' \in B_{2\rho_0}(0) \setminus \{y_d > \varphi(y')\}} \big(|y|^2 + 4M^2|y'|^2 + 2M|y|^2\big) \\
&\qquad \leq 4(1 + 4M^2 + 2M)\rho_0^2 \,.
\end{aligned}$$

由此可知，只要 $\rho_0 < (4(1+4M^2+2M))^{-1/2} R$，关于 ρ_0 的小量假设便成立。在我们的应用中，我们只会在边界位于某个超平面的小邻域内的点附近使用这一结论。

为证明引理 5.4，我们将利用 Nash [27] 和 Moser [25], 的以下结果，该结果表明， k_Ω 在空间和时间上直至空间边界均为 H¨older 连续。

引理 5.6。 设 $A \in L^\infty((0,R^2) \times B_R(0); \mathbb{R}^{d\times d})$ 满足 $A = A^\top$，并假设存在一个常数 $\Lambda \geq 1$，使得

$$\Lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \xi \cdot A(t,x)\xi \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \textit{for all } \xi \in \mathbb{R}^d, (t,x) \in (0,R^2) \times B_R(0) \,.$$

若 $u\colon (0,R^2) \times B_R(0) \to \mathbb{R}$ 是一个满足以下条件的有界函数

$$\partial_t u(t,x) = \mathrm{div}(A(t,x)\nabla u(t,x)) \quad \textit{for all } (t,x) \in (0,R^2) \times B_R(0) \,,$$

那么存在 $\alpha > 0$ 使得

$$|u(t,x) - u(s,y)| \lesssim_{d,\Lambda} \|u\|_{L^\infty((0,R^2)\times B_R(0))} \left(\frac{|x-y| + |t-s|^{1/2}}{R}\right)^\alpha$$

只要 (t,x)，$(s,y)\in(R^2/4,3R^2/4)\times B_{R/2}(0)$。此外，$\alpha$ 可以选取得仅依赖于 d,Λ。

推论 5.7。设 Ω x_0,δ,M,R,φ 和 ρ_0 如引理 *5.4* 中所述。则对于所有 $(t,x)\in[4\rho_0^2,\infty)\times\Omega$、$y_1,y_2\in\Omega\cap B_{\rho_0}(x_0)$ 以及 $s_1,s_2\in(t-\rho_0^2,t+\rho_0^2)$，有

$$|k_\Omega(s_1,x,y_1)-k_\Omega(s_2,x,y_2)|$$
$$\lesssim_{d,\delta,M}\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,3t/2)\times B_{2\rho_0}(x_0))}\,t^{-d/2}\,e^{-\frac{|x-x_0|^2}{12(1+\delta)t}}\left(\frac{|y_1-y_2|+|s_1-s_2|^{1/2}}{\rho_0}\right)^\alpha.$$

这里，$\alpha>0$ 可以仅依赖于 d、M来选取。

证明。经过旋转和平移，不妨设 $x_0=0$，$Q=\mathbb{I}$。固定 $(t,x)\in(0,\infty)\times\Omega$。函数 $v(s,y):=k_\Omega(s,x,y)$ 满足

$$(\partial_s-\Delta_y)v(s,y)=0\quad\text{in }(0,\infty)\times\Omega\,.$$

对于 $y\in\mathbb{R}^d$，我们定义变换

$$\tilde y(y):=\begin{cases}y & \text{if } y_d>\varphi(y')\,,\\ (y',2\varphi(y')-y_d) & \text{if } y_d\le\varphi(y')\,.\end{cases}$$

注意，由于

$$\sup_{y\in B_{2\rho_0}(0)\setminus\Omega}(|y|^2+4\varphi(y')(\varphi(y')-y_d))<R^2\,,$$

对于所有 $y\in B_{2\rho_0}(0)\setminus\partial\Omega$，我们有 $\tilde y(y)\in\Omega\cap B_R(0)$。利用 v 在 $\Omega\cap B_R(0)$ 中满足热方程这一事实，我们看到，由 $\tilde v(s,y):=v(s,\tilde y(y))$ 定义的函数 $\tilde v\colon(0,\infty)\times B_{2\rho_0}(0)\to\mathbb{R}$ 满足

$$\partial_s\tilde v(s,y)=\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y\tilde v(s,y))\quad\text{in }(0,\infty)\times(B_{2\rho_0}(0)\setminus\partial\Omega)\,,$$

with

$$A(y):=\mathbb{I}\text{ for }y\in B_{2\rho_0}(0)\cap\Omega$$

and

$$A(y):=\begin{pmatrix}\mathbb{I}' & 2\nabla\varphi(y')\\ 2(\nabla\varphi(y'))^\top & 1+4|\nabla\varphi(y')|^2\end{pmatrix}\text{ for }y\in B_{2\rho_0}(0)\setminus\overline{\Omega}\,,$$

其中 $\mathbb{I}'$ 表示 $(d-1)\times(d-1)$ 单位矩阵。事实上，可以验证，$\tilde v$ 是 $(0,\infty)\times B_{2\rho_0}(0)$ 中 $\partial_s\tilde v=\operatorname{div}(A\nabla_y\tilde v)$ 的弱解。

显然，A 在 $B_{2\rho_0}(0)\cap\Omega$ 中一致椭圆。由 $A(y)$ 的特征值对 $y\in B_{2\rho_0}(0)\setminus\Omega$ 为 1 和这一事实可知，这在整个 $B_{2\rho_0}(0)$ 中成立

$$1+2|\nabla\varphi(y')|^2\pm|\nabla\varphi(y')|\sqrt{4+4|\nabla\varphi(y')|^2}\,,$$

其中 1 的重数至少为 $d-2$，另外两个特征值均为单重（除非它们也都等于 1）。特别地，A 是一致椭圆的，其界为

$$\frac{1}{1+\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(B_{2\rho}(0))}}|\xi|^2\lesssim\xi\cdot A(y)\xi\lesssim(1+\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(B_{\rho_0}(0))})|\xi|^2\,,$$

对于所有 $y\in B_{2\rho_0}(0)$。

由引理 5.6 可推得，对于任意 $t_0 > 0$ 以及所有 $(s_1, y_1),(s_2, y_2) \in (t_0 + \rho_0^2, t_0 + 3\rho_0^2) \times (\Omega \cap B_{\rho_0}(0))$，

$$|v(s_1, y_1) - v(s_2, y_2)| \leq C\|v\|_{L^\infty((t_0, t_0+4\rho_0^2)\times(\Omega\cap B_{2\rho_0}(0)))} \left(\frac{|y_1 - y_2| + |s_1 - s_2|^{1/2}}{\rho_0} \right)^\alpha ,$$

其中 C 和 α 仅依赖于 d 和 $\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(B_{\rho_0}(0))}$。现在我们选取 $t_0 := t - 2\rho_0^2$并注意到

$$\begin{aligned} &\|v\|_{L^\infty((t-2\rho_0^2, t+2\rho_0^2)\times(\Omega\cap B_{2\rho_0}(0)=)} \\ &\qquad = \sup_{y\in B_{2\rho_0}(0)\cap\Omega, s\in(t-2\rho_0^2, t+2\rho_0^2)} k_\Omega(s, x, y) \\ &\qquad \leq \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t-2\rho_0^2, t+2\rho_0^2)\times B_{2\rho_0}(0))} \sup_{y\in B_{2\rho_0}(0)\cap\Omega, s\in(t-2\rho_0^2, t+2\rho_0^2)} s^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(1+\delta)s}} . \end{aligned}$$

由于 $t \geq 4\rho_0^2$，我们有 $(t - 2\rho_0^2,\ t + 2\rho_0^2) \subseteq (t/2,\ 3t/2) \cap [2\rho_0^2, \infty)$，因此对于任意 $y \in B_{2\rho_0}(0)$，有

$$\frac{|x-y|^2}{4(1+\delta)s} \geq \frac{|x|^2}{8(1+\delta)s} - \frac{|y|^2}{4(1+\delta)s} \geq \frac{|x|^2}{12t} - \frac{1}{2(1+\delta)} .$$

由此我们得出

$$\|v\|_{L^\infty((t-2\rho_0^2, t+2\rho_0^2)\times(\Omega\cap B_{2\rho_0}(0)))} \lesssim_d \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2, 3t/2)\times B_{2\rho_0}(0))} t^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{12(1+\delta)t}} .$$

证明至此完成。 □

做好这些准备后，我们就可以证明引理 5.4 了。

引理 *5.4* 的证明。 根据第5.1节中的讨论，关于a 的可积性假设表明解 u 存在，因此我们可以应用引理 5.1。利用引理 5.1 中的表示公式以及 $\iint a\, ds\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) = 0$这一假设，我们得到

$$\begin{aligned} |u(t,x)| &= \left| \int_0^{\rho^2} \int_{\partial\Omega\cap B_\rho(x_0)} k_\Omega(t-s, x, y) a(s, y)\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) ds \right| \\ &= \left| \int_0^{\rho^2} \int_{\partial\Omega\cap B_\rho(x_0)} \Big(k_\Omega(t-s, x, y) - k_\Omega(t, x, x_0) \Big) a(s, y)\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) ds \right| \\ &\leq \|a\|_{L^1((0,\rho^2)\times\partial\Omega)} \sup_{s\in(0,\rho^2), y\in\partial\Omega\cap B_\rho(x_0)} |k_\Omega(t-s, x, y) - k_\Omega(t, x, x_0)| . \end{aligned}$$

注意，关于 a 的假设与 H¨older 不等式共同意味着L^1-范数有限。

首先假设 $\rho \le \rho_0$ 和 $t \ge 4\rho_0^2$。那么推论 5.7 表明

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\in(0,\rho^2),y\in\partial\Omega\cap B_\rho(x_0)} |k_\Omega(t-s,x,y)-k_\Omega(t,x,x_0)| \\
&\qquad \lesssim_{d,\delta,M} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,3t/2)\times B_{2\rho_0}(x_0))} t^{-d/2} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{12(1+\delta)t}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\alpha \\
&\qquad \lesssim_{d,\delta,M} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,3t/2)\times B_{\sqrt{t}}(x_0))} t^{-d/2} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{12(1+\delta)t}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\alpha,
\end{aligned}$$

这就得到了所声称的界。

现在假设 $\rho \in [\rho_0, \sqrt{t/2})$。那么对于所有 $s \in (0, \rho^2)$，我们都有 $t-s \in [t/2, t]$，因此

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\in(0,\rho^2),y\in\partial\Omega\cap B_\rho(x_0)} |k_\Omega(t-s,x,y)-k_\Omega(t,x,x_0)| \\
&\qquad \lesssim_d \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,t)\times B_\rho(x_0))} t^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(1+\delta)t}} \\
&\qquad\quad + \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,t)\times B_\rho(x_0))} t^{-d/2} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(1+\delta)t}} \\
&\qquad \lesssim_d \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,t)\times B_{\sqrt{t}}(x_0))} t^{-d/2} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{4(1+\delta)t}},
\end{aligned}$$

这再次得到了所声称的界。 □

6. Estimates close to flat parts of the boundary

本节的目标是证明，只要从 x 到边界的距离至多为 $\sqrt{t}$，且对于 t 足够小，附近的边界在特定意义下足够平坦，则对角热核 $k_\Omega(t, x, x)$ 可以由适当选取的半空间中的相应热核良好地逼近。边界的局部平坦性的精确定义几乎与 Brown [7], 的定义完全一致，并通过下面定义的两个量来刻画。

6.1. 平坦性的概念。

定义 6.1. 对于 $\varepsilon \in (0, 1/2]$, $r > 0$，若满足以下条件，则称 $x_0 \in \partial\Omega$ 是(ε, r)-良好的：

(i) 经过适当的旋转 $\partial\Omega$ 可在 x_0 的某个邻域内表示为一个在 x_0处可微的函数的图像；以及(ii) 满足

$$\partial\Omega \cap B_r(x_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^d : |(x-x_0)\cdot\nu(x_0)| < \varepsilon\,|x-x_0|\},$$

其中 $\nu(x_0)$ 表示 $\partial\Omega$的向外单位法向量。

注：6.2。 根据定义中的 (i)，(ii) 中的外指法向量 $\nu(x_0)$ 是明确定义的。对于我们所做的大部分工作，只需存在

一个单位向量 ν 使得

$$\Omega \cap B_r(x_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^d : (x-x_0)\cdot\nu < \varepsilon\,|x-x_0|\}\,,$$
$$\Omega^c \cap B_r(x_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^d : (x-x_0)\cdot\nu > -\varepsilon\,|x-x_0|\}\,,$$

但由于我们的论证在某些地方要求 $\partial\Omega$（局部）为 Lipschitz，假设 (ii) 中的条件是相对于向外单位法向量成立的，这对我们的目的而言是一个相当小的限制。

定义 6.3。 如果 $x_0 \in \partial\Omega$ 是一个(ε, r)-优点，我们定义

$$\Gamma_r(x_0,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^d : (x-x_0)\cdot\nu(x_0) < -\sqrt{1-\varepsilon^2}\,|x-x_0|\} \cap B_{r/2}(x_0)\,.$$

如果 $\partial\Omega \cap B_r(x_0)$ 是 Lipschitz正则的，那么拉德马赫定理意味着， $\partial\Omega$ 的向外单位法向量对于 $\mathcal{H}^{d-1}$-几乎处处的 $x \in \partial\Omega \cap B_r(x_0)$ 都有定义。令 $\nu\colon\ \partial\Omega \to \mathbb{S}^{d-1}$ 为此法向量场，在其存在处定义。为了估计边界附近的热核，除了假设边界按上述定义是平坦的之外，我们还需要控制法向量的局部振荡。

定义 6.4。 固定 $p \geq 1$。对于 $x_0 \in \partial\Omega$ 以及满足 $\partial\Omega \cap B_r(x_0)$ 为 ***Lipschitz*** 且在 x_0 处指向 $\partial\Omega$的内向单位法向量 $\nu(x_0)$ 有定义的 $0 < s \leq r$ ，令

$$\bar\nu_p(x_0,s) := \sup_{0<\eta<s}\left(\frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(B_\eta(x_0)\cap\partial\Omega)}\int_{B_\eta(x_0)\cap\partial\Omega}|\nu(x_0)-\nu(y)|^p\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right)^{1/p}.$$

我们将在 $x \in \Omega$ 中证明关于$k_\Omega(t,x,x)$行为的更精确结果的点，将是 $\Gamma_r(x_0,\varepsilon)$中的点，其中 (ε, r)-优点 x_0 满足 ε ，且 r 与 t适当地相关。我们的近似误差将取决于法向量的振荡，即取决于量 $\bar\nu_p(x_0,r)$，其中 $p \geq 1$的选取需适当。

上述局部平坦性概念的一个重要方面是：如果 $x \in \Gamma_r(x_0,\varepsilon)$ 且 $y \in \partial\Omega \cap B_r(x_0)$，其中 ε, r)-优点 $x_0 \in \partial\Omega$，则向量 $x-x_0$ 和 $y-x_0$近乎正交。由于这一性质将在下文中频繁使用，我们在下面的引理中将其记录下来。

引理 6.5。 设 $x_0 \in \partial\Omega$ 是(ε, r)-良好的。那么，对于所有 $x \in \Gamma_r(x_0,\varepsilon)$ 以及 $y \in \partial\Omega \cap B_r(x_0)$ ，令 $x^* := 2x_0 - x$，我们有：

$$|(x-x_0)\cdot(y-x_0)| \leq 2\varepsilon|x-x_0||y-x_0|\,,$$
$$\Big||x-y|^2-|x-x_0|^2-|y-x_0|^2\Big| \leq 2\varepsilon|x-x_0|^2+2\varepsilon|y-x_0|^2\,,$$
$$\Big||x^*-y|^2-|x-x_0|^2-|y-x_0|^2\Big| \leq 2\varepsilon|x-x_0|^2+2\varepsilon|y-x_0|^2\,.$$

特别是，

$$d_\Omega(x) \leq |x-x_0| = |x^*-x_0| \leq \frac{d_\Omega(x)}{\sqrt{1-2\varepsilon}}\,.$$

证明。 定义正交投影 P和 $P^{\perp}$如下： $Pz:=(z\cdot\nu(x_0))\nu(x_0)$ 和$P^{\perp}:=\mathbb{1}-P$。那么

$$(x-x_0)\cdot(y-x_0)=P(x-x_0)\cdot P(y-x_0)+P^{\perp}(x-x_0)\cdot P^{\perp}(y-x_0)$$

and

$$\begin{aligned}|x-y|^2&=|(x-x_0)-(y-x_0)|^2\\&=|x-x_0|^2+|y-x_0|^2-2(x-x_0)\cdot(y-x_0)\\&=|x-x_0|^2+|y-x_0|^2-2P(x-x_0)\cdot P(y-x_0)\\&\quad-2P^{\perp}(x-x_0)\cdot P^{\perp}(y-x_0)\,.\end{aligned}$$

由于 x_0是（ε， r）-良好的， $y\in\partial\Omega\cap B_r$（$x_0$），且 $x\in\Gamma_r$（x_0， ε），因此有 $|P$（$y-x_0$）$|<\varepsilon|y-x_0|$ 以及 $|P^{\perp}$（$x-x_0$）$|<\varepsilon|x-x_0|$。因此，

$$|(x-x_0)\cdot(y-x_0)|\le 2\varepsilon|x-x_0||y-x_0|$$

and

$$\Big||x-y|^2-|x-x_0|^2-|y-x_0|^2\Big|\le 4\varepsilon|x-x_0||y-x_0|\le 2\varepsilon|x-x_0|^2+2\varepsilon|y-x_0|^2\,,$$

这就证明了所声称不等式中的前两个不等式。第三个不等式由相同的计算得到，使用 $x^*-x_0=2x_0-x-x_0=-(x-x_0)$。

剩余的下界由注意到 $x_0\in\partial\Omega$ 得到，因此 $d_\Omega(x)\le|x-x_0|$；而剩余的上界则通过应用第一组界得到，其中选取 $y\in\partial\Omega\cap B_r$（$x_0$）以满足 $|x-y|=d_\Omega(x)$。□

6.2. 边界平坦部分附近的热核。 本节余下部分的目标是证明以下结果。回顾一下，子集 $\omega\subseteq\partial\Omega$ 的量 $\Theta[\omega]$ 是在定理 5.2 之前定义的。

命题 6.6. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $d\ge 2$ 为开集。取定 $r>0,\varepsilon\in(0,1/4],R>0$。假设 $\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0)$ 是 *Lipschitz*正则的， $x_0\in\partial\Omega$ 是(ε,r)-良好的，并且$\partial\Omega$ 由函数 φ 在 $B_R(x_0)$ 中局部参数化，且满足 $\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\le M$。

取定 $p>d-1,\delta>0,\kappa>0$。那么，对所有 $t\in(0,r^2/2]\cap(0,\kappa R^2]$ 以及 $x\in\Gamma_r(x_0,\varepsilon)$，我们有

$$\begin{aligned}\Big|(4\pi t)^{d/2}k_\Omega(t,x,x)-1-e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}}\Big|&\lesssim_{d,\delta,M,\kappa,p}\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,3t/2]\times B_{2r}(x_0))}\Theta[\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0)]\\&\quad\times\left((\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,r))e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{c(1+\delta)t}}+e^{-\frac{r^2}{c(1+\delta)t}}\right)\end{aligned}$$

其中 $c>0$ 为某个普适常数。

该证明的思路与命题 4.1 类似，但将自由热核作局部近似替换为自由热核与其反射副本之和（换言之，即适当选取的半空间中的热核）。在证明该命题之前，我们先对

将要研究的边值问题作一些初步观察，并对相关边界数据证明一些初步的界。

对于 x, x_0，如命题中所述，我们定义

$$x^* := 2x_0 - x\,,$$

w应将其理解为 x 穿过 $\partial\Omega$ 的“近似反射”。

此外，取命题中的参数 r，我们选择满足下述条件的 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\mathbb{1}_{B_r(x_0)} \leq \chi \leq \mathbb{1}_{B_{2r}(x_0)}\,, \quad |\nabla\chi| \lesssim r^{-1}\,, \quad |\Delta\chi| \lesssim r^{-2}\,.$$

对于 $y \in \Omega$ 和 $s > 0$，我们定义

$$u(s,y) := k_\Omega(s,x,y) - (k_{\mathbb{R}^d}(s,x,y) + k_{\mathbb{R}^d}(s,x^*,y))\chi(y)\,.$$

我们的目标是证明，当 $y = x$ 且 $s = t$ 时，$u(s,y)$ 很小。一旦建立了这样的界，命题 6.6 中的界便可轻易推出。

定义 $f\colon (0,\infty)\times\partial\Omega \to \mathbb{R}$ 以及 $g\colon (0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$，如下

$$f(s,y) := -\frac{\partial}{\partial\nu_y}((k_{\mathbb{R}^d}(s,x,y) + k_{\mathbb{R}^d}(s,x^*,y))\chi(y))\,, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} g(s,y) := {} & (k_{\mathbb{R}^d}(s,x,y) + k_{\mathbb{R}^d}(s,x^*,y))\Delta\chi(y) \\ & + 2\nabla_y(k_{\mathbb{R}^d}(s,x,y) + k_{\mathbb{R}^d}(s,x^*,y))\cdot\nabla\chi(y)\,, \end{aligned} \tag{26}$$

并注意到 u 满足

$$\begin{cases} (\partial_s - \Delta_y)u(s,y) = g(s,y) & \text{for } (s,y) \in (0,\infty)\times\Omega\,, \\ u(0,y) = 0 & \text{for } y \in \Omega\,, \\ \frac{\partial}{\partial\nu_y}u(s,y) = f(s,y) & \text{for } (s,y) \in (0,\infty)\times\partial\Omega\,. \end{cases}$$

利用第 5 节的结果，我们将能够证明 $u(x,\ t)$ 很小。这些结果将依赖于关于 f 的精确界，我们将在接下来的两个小节中推导出这些界。相比之下，对于 g，相当粗略的界就足够了。

6.3. f 上的局部界。 我们在命题 6.6 的框架下工作。更确切地说，我们固定一个 (ε, r)-优点 $x_0 \in \partial\Omega$ 以及一个点 $x \in \Gamma_r(x_0,\ \varepsilon)$，并根据 (25) 定义 f（取决于 x 和 x_0）。本小节的目标是汇总关于函数 f 的各种界。

注意，由于 k 的显式形式，并且由于 $\chi = 1$ 属于 $B_r(x_0)$，有

$$f(s,y) = \frac{1}{2s(4\pi s)^{d/2}}\,\nu(y)\cdot\left[(y-x)e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} + (y-x^*)e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}\right] \tag{27}$$

对所有的 $(s,y) \in (0,\infty)\times B_r(x_0)$ 都成立。同样，根据关于 χ 的假设，且由于 $x,\ x^* \in B_{r/2}(x_0)$，我们有

$$|f(s,y)| \lesssim s^{-d/2}(rs^{-1} + r^{-1})e^{-\frac{r^2}{16s}}\mathbb{1}_{B_{2r}(x_0)}(y) \quad \text{for } (s,y) \in (0,\infty)\times B_r(x_0)^c\,. \tag{28}$$

对于 $\rho > 0$，我们采用如下记号

$$I(\rho) := (0, \rho^2) \times (B_\rho(x_0) \cap \partial\Omega)\,.$$

引理 6.7。如果 $2d_\Omega(x) \le \rho \le r$，则

$$\left| \iint_{I(\rho)} f(s,y)\, ds\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right| \lesssim_d \varepsilon\,.$$

证明。引入集合

$$\begin{aligned}
\Omega_\rho^+ &:= \Omega \cap B_\rho(x_0)\,,\\
\Omega_\rho^- &:= (\overline{\Omega})^c \cap B_\rho(x_0)\,,\\
\Sigma_\rho^+ &:= (\partial\Omega_\rho^+) \cap \Omega\,,\\
\Sigma_\rho^- &:= (\partial\Omega_\rho^-) \cap (\overline{\Omega})^c\,.
\end{aligned}$$

另令

$$C_\varepsilon := \{z \in B_\rho(x_0) : |(z - x_0)\cdot\nu(x_0)| < \varepsilon|z - x_0|\}\,.$$

根据格林公式以及 k 满足热方程这一事实，我们可以将 f 的积分改写如下

$$\begin{aligned}
\iint_{I(\rho)} f(s,y)\, ds\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) &= -\int_{\Omega_\rho^+} k_{\mathbb{R}^d}(\rho^2, x, y)\, dy + \int_{\Omega_\rho^-} k_{\mathbb{R}^d}(\rho^2, x^*, y)\, dy\\
&\quad + \int_0^{\rho^2} \int_{\Sigma_\rho^+} \frac{\partial}{\partial\nu_y} k_{\mathbb{R}^d}(s, x, y)\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) ds\\
&\quad - \int_0^{\rho^2} \int_{\Sigma_\rho^-} \frac{\partial}{\partial\nu_y} k_{\mathbb{R}^d}(s, x^*, y)\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) ds\\
&= -\int_{\Omega_\rho^+ \cap C_\varepsilon} k_{\mathbb{R}^d}(\rho^2, x, y)\, dy + \int_{\Omega_\rho^- \cap C_\varepsilon} k_{\mathbb{R}^d}(\rho^2, x^*, y)\, dy\\
&\quad + \int_0^{\rho^2} \int_{\Sigma_\rho^+ \cap C_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_y} k_{\mathbb{R}^d}(s, x, y)\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) ds\\
&\quad - \int_0^{\rho^2} \int_{\Sigma_\rho^- \cap C_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_y} k_{\mathbb{R}^d}(s, x^*, y)\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) ds\,,
\end{aligned}$$

其中，在第二步中，我们利用了 $k_{\mathbb{R}^d}(s,\ x,\ y)$与$k_{\mathbb{R}^d}(s,\ x^*,\ y)$之间的反射对称性，抵消了积分中的大部分项。（注意，所有非平凡几何都发生在 C_ε 中，因为 x_0 是（ε，r）良好的。）

对于所有 $y \in C_\varepsilon \cap B_\rho(x_0)$，我们都可以给出上界

$$|k_{\mathbb{R}^d}(\rho^2, x, y)| + |k_{\mathbb{R}^d}(\rho^2, x^*, y)| \lesssim_d \rho^{-d}\,.$$

类似地，对于所有的 $y \in C_\varepsilon \cap \partial B_\rho(x_0)$，

$$|\nabla_y k_{\mathbb{R}^d}(s, x, y)| + |\nabla_y k_{\mathbb{R}^d}(s, x^*, y)| \lesssim_d s^{-(d+1)/2} e^{-c\rho^2/s}$$

由引理 6.5 可知，对于某个普适常数 c，利用如下事实：$x \in \Gamma_r(x_0,\varepsilon)$，$y \in C_\varepsilon \cap \partial B_\rho(x_0)$，$\varepsilon \leq \frac{1}{4}$，以及假设 $\rho \geq 2d_\Omega(x)$。由此我们得到以下界

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{I(\rho)} f(s,y)\, ds\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right| \\
&\qquad \lesssim_d \frac{|C_\varepsilon \cap B_\rho(x_0)|}{\rho^d} + \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_\rho(x_0) \cap C_\varepsilon) \int_0^{\rho^2} s^{-(d+1)/2} e^{-c\rho^2/s}\, ds \\
&\qquad \lesssim_d \frac{|C_\varepsilon \cap B_\rho(x_0)|}{\rho^d} + \rho^{-d+1} \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_\rho(x_0) \cap C_\varepsilon) \\
&\qquad \lesssim_d \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

至此，引理 6.7 的证明完成。 □

在接下来的两个引理中，我们证明 f 的界可由法向量的振荡来控制。

引理 6.8. 如果 $\rho \in (0,\ r/2]$ 且若 $(s,y) \in I(2\rho) \setminus I(\rho)$ 满足 $\nu(y)$ 存在，则

$$|f(s,y)| \lesssim_d (\varepsilon + |\nu(y) - \nu(x_0)|)\, \rho^{-(d+1)}\,.$$

证明。我们记

$$I(2\rho) \setminus I(\rho) = U_1 \cup U_2$$

with

$$U_1 := [\rho^2, 4\rho^2) \times (\partial\Omega \cap B_{2\rho}(x_0)) \quad \text{and} \quad U_2 := (0, 4\rho^2) \times (\partial\Omega \cap B_{2\rho}(x_0) \setminus B_\rho(x_0))\,.$$

由于 $\varepsilon \leq 1/4$，引理 6.5 表明

$$\min\{|x-y|^2, |x^*-y|^2\} \geq \rho^2/2 \quad \text{for} \quad (s,y) \in U_2\,.$$

因此，对于任意 $\beta > 0, \alpha > 0$,

$$s^{-\alpha} \frac{|x-y|^{2\beta}}{s^\beta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} + s^{-\alpha} \frac{|x^*-y|^{2\beta}}{s^\beta} e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} \lesssim_{\beta,\alpha} \rho^{-2\alpha} \quad \text{for } (s,y) \in U_1 \cup U_2\,. \tag{29}$$

利用显式表达式 (27)，我们将 f 分成三部分，并利用$2y - x - x^* = 2y - 2x_0$进行估计，

$$\begin{aligned}
|f(s,y)| &\lesssim_d s^{-(d+1)/2} \left| \nu(y) \cdot \left(\frac{y-x}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} + \frac{y-x^*}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} \right) \right| \\
&\lesssim_d s^{-(d+1)/2} |\nu(y) - \nu(x_0)| \left(\frac{|y-x|}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} + \frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} \right) \qquad (30) \\
&\quad + s^{-(d+1)/2} \frac{|\nu(x_0)\cdot(y-x_0)|}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} + s^{-(d+1)/2} \frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}} \left| e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} \right|.
\end{aligned}$$

我们分别估计 (30) 右端的三个项。

对于 (30) 右端的第一项，由估计 (29) 可得

$$s^{-(d+1)/2} |\nu(y) - \nu(x_0)| \left(\frac{|y-x|}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} + \frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} \right) \lesssim_d |\nu(y) - \nu(x_0)| \rho^{-(d+1)}\,,$$

对所有 $(s,y)\in U_1\cup U_2$。

为了估计右端 (30) 中的第二项，我们注意到，由于 x_0 是 $(\varepsilon,\ r)$-良好的，因此

$$|\nu(x_0)\cdot(y-x_0)|<\varepsilon|y-x_0|<2\varepsilon\rho$$

对所有 $y\in\partial\Omega\cap B_{2\rho}(x_0)$ 都成立。结合 (29) 可得

$$s^{-(d+1)/2}\frac{|\nu(x_0)\cdot(y-x_0)|}{\sqrt{s}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}\le 2\varepsilon\rho s^{-(d+2)/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}\lesssim_d \varepsilon\rho^{-(d+1)}$$

对所有 $(s,\ y)\in U_1\cup U_2$ 都成立。

最后，我们估计 (30) 中的第三项。在这种情况下，我们需要捕捉绝对值中各项之间的抵消。展开平方后

$$e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}-e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}=e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}\left(1-e^{-\frac{|x-y|^2-|x^*-y|^2}{4s}}\right)=e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}\left(1-e^{\frac{(x-x_0)\cdot(y-x_0)}{s}}\right).$$

由于 x_0 是 $(\varepsilon,\ r)$-良好的，且 $y\in\partial\Omega\cap B_r(x_0)$ $x\in\Gamma_r(x_0,\ \varepsilon)$，由引理 6.5 可得

$$|(x-x_0)\cdot(y-x_0)|\le 2\varepsilon|x-x_0||y-x_0|\,.$$

因此，只要 $\frac{\varepsilon|x-x_0||y-x_0|}{s}\le 1$ 泰勒展开就意味着

$$\left|e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}-e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}\right|\le e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}\left|1-e^{\frac{(x-x_0)\cdot(y-x_0)}{s}}\right|\lesssim\varepsilon\frac{|x-x_0||y-x_0|}{s}e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}\,.$$

由于 $|y-x_0|\le 2\rho$，并且根据引理 6.5，$|x-x_0|\lesssim|x^*-y|$ 我们得出

$$\left|e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}-e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}\right|\lesssim\varepsilon\frac{\rho|x^*-y|}{s}e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}\quad\text{if }\varepsilon|x-x_0||y-x_0|\le s\,.$$

因此，由（29）

$$s^{-(d+1)/2}\frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}}\left|e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}-e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}\right|\lesssim\varepsilon\rho^{-(d+1)}$$

如果（$s,\ y$）$\in U_1\cup U_2$ 且 $\varepsilon|x-x_0||y-x_0|\le s$。

此外，由于 $2|x-x_0||y-x_0|\le|x-x_0|^2+|y-x_0|^2$，根据引理 6.5 可得

$$\varepsilon|x-x_0||y-x_0|>s\quad\Longrightarrow\quad\min\{|x-y|^2,|x^*-y|^2\}\gtrsim\frac{s}{\varepsilon}\,.$$

因此，利用引理 6.5 $|x-y|\lesssim|x^*-y|$，我们有：如果（$s,\ y$）$\in U_1\cup U_2$，$\varepsilon|x-x_0||y-x_0|>s$，那么

$$s^{-(d+1)/2}\frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}}\left|e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}-e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}\right|\lesssim e^{-c/\varepsilon}s^{-(d+1)/2}\frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}}e^{-c\frac{|x^*-y|^2}{s}}\lesssim\varepsilon\rho^{-(d+1)}\,,$$

对于某个绝对常数 $c>0$。

结合上述三个界，即可完成引理 6.8 的证明。 □

最后，我们需要在 $I(\rho)$ 中估计 f，其中 ρ 相对于 $d_\Omega(x)$ 和 r 都足够小。

引理 6.9。 若 $\rho \in (0,\ 4d_\Omega(x)] \cap (0,\ r]$，且若 $(s,\ y) \in I(\rho)$ 满足 $\nu(y)$ 存在，则

$$|f(s,y)| \lesssim_d (\varepsilon + |\nu(y) - \nu(x_0)|)\, d_\Omega(x)^{-(d+1)}\,.$$

证明。 由于 $x \in \Omega$ 且 $(s,y) \in I(\rho) \subset (0,\infty) \times \partial\Omega$，我们有

$$|x-y|^2 \geq d_\Omega(x)^2\,.$$

此外，利用引理 6.5，并注意到 $x_0 \in \partial\Omega$ 是 (ε, r)-良好的，且 $x \in \Gamma_r(x_0,\varepsilon)$，我们有

$$|x^*-y|^2 \geq (1-2\varepsilon)|x-x_0|^2 \geq (1-2\varepsilon) d_\Omega(x)^2\,.$$

由引理 6.5，$|x-x_0| = |x^*-x_0| \lesssim d_\Omega(x)$，因此，由于 $y \in B_\rho(x_0)$ 且 $\rho \leq 4d_\Omega(x)$，我们有

$$\max\{|x-y|, |x^*-y|\} \lesssim d_\Omega(x)\,.$$

因此，该引理的假设意味着

$$d_\Omega(x) \lesssim |x-y| \lesssim d_\Omega(x) \quad \text{and} \quad d_\Omega(x) \lesssim |x^*-y| \lesssim d_\Omega(x)\,.$$

因此，对于陈述中所述的 (s,y)，关于 $|x-y|, |x^*-y|$ 的上述界，结合其为 (ε, r)-良好的条件，意味着

$$\begin{aligned}
|f(s,y)| &\lesssim_d s^{-(d+1)/2} \left| \nu(y) \cdot \left(\frac{y-x}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} + \frac{y-x^*}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} \right) \right| \\
&\lesssim_d s^{-(d+1)/2} |\nu(y) - \nu(x_0)| \left(\frac{|y-x|}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} + \frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} \right) \\
&\quad + s^{-(d+1)/2} \frac{|\nu(x_0)\cdot(y-x_0)|}{\sqrt{s}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} + s^{-(d+1)/2} \frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}} \left| e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} \right| \\
&\lesssim_d s^{-(d+1)/2} |\nu(y) - \nu(x_0)| \frac{d_\Omega(x)}{\sqrt{s}} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{8s}} \\
&\quad + s^{-(d+1)/2} \frac{\varepsilon d_\Omega(x)}{\sqrt{s}} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{8s}} + s^{-(d+1)/2} \frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}} \left| e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} \right| \\
&\lesssim_d (\varepsilon + |\nu(y) - \nu(x_0)|) d_\Omega(x)^{-(d+1)} + s^{-(d+1)/2} \frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}} \left| e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} \right|.
\end{aligned}$$

为了估计剩余项，我们采用引理 6.8 证明中的论证。与该证明一样，可以得出结论：

$$\left| e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} \right| \leq e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} \left| 1 - e^{\frac{(x-x_0)\cdot(y-x_0)}{s}} \right| \lesssim \varepsilon \frac{|x-x_0||y-x_0|}{s} e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}\,,$$

若 $\varepsilon|x-x_0||y-x_0| \leq s$。 由于此时 $|y-x_0| \leq \rho \leq 4d_\Omega(x)$、$|x-x_0| \lesssim d_\Omega(x)$ 和 $|x^*-y| \gtrsim d_\Omega(x)$，我们得出结论：

$$\left| e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} \right| \lesssim \varepsilon \frac{d_\Omega(x)^2}{s} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{8s}}$$

若 $\varepsilon|x-x_0||y-x_0| \leq s$。 因此，对 $s>0$ 取最大值，

$$s^{-(d+1)/2} \frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}} \left| e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} \right| \lesssim \varepsilon d_\Omega(x)^{-(d+1)}$$

对所有满足 $\varepsilon|x-x_0||y-x_0| \le s$ 的 $(s,\ y) \in I(\rho)$ 均成立。

在当前引理的条件下，$\varepsilon|x-x_0||y-x_0| > s$ 意味着 $\varepsilon d_\Omega(x)^2 \gtrsim s$，因此

$$s^{-(d+1)/2}\frac{|y-x^*|}{\sqrt{s}}\left|e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}\right| \lesssim e^{-c/\varepsilon}s^{-(d+1)/2}\frac{d_\Omega(x)^2}{\sqrt{s}}e^{-c\frac{d_\Omega(x)^2}{s}} \lesssim \varepsilon d_\Omega(x)^{-(d+1)}\,,$$

对于某个绝对常数 $c>0$。

引理 6.9 的证明至此完成。 □

6.4. 分解边界数据。 证明命题 6.6 的下一步是将边界数据 f 分解成更小的部分。回顾一下，x_0是一个(ε, r)-优点，且 $x \in \Gamma_r(x_0,\varepsilon)$，而 f是根据 x 和 x_0定义的。在本小节中，我们还考虑一个时间 $t \in (0, r^2/2]$。f 的分解将取决于 t，更具体地说，取决于(t,x)与$(0,x_0)$之间的抛物距离。回顾记号 $I(\rho) = (0,\rho^2) \times (B_\rho(x_0) \cap \partial\Omega)$。

给定 x_0，x 和 t，本小节的目标是将其分解为

$$f(s,y) = \sum_{1\le j\le N} \tilde f_j(s,y) + \sum_{1\le k\le M} f_k(s,y) + f^\sharp(s,y) + \check f(s,y)\,. \tag{31}$$

令 M 为满足 $r < 2^{M+1}\sqrt{t}$的最小正整数，并令 $\rho_k := 2^k\sqrt{t}$ 对于$k=0$，.....，$\bar M$。定义

$$f_k(s,y) := \mathbb{1}_{I(\rho_k)\setminus I(\rho_{k-1})}(s,y)f(s,y) \quad \text{for } k=1,\dots,M\,,$$

and

$$\tilde f(s,y) := \mathbb{1}_{I(\sqrt{t})}(s,y)f(s,y) \quad \text{and} \quad \check f(s,y) := \mathbb{1}_{I(\rho_M)^c}(s,y)f(s,y)\,.$$

因此，我们有

$$f(s,y) = \sum_{1\le k\le M} f_k(s,y) + \tilde f(s,y) + \check f(s,y)\,.$$

接下来，我们进一步分解 $\tilde f$。定义 $\tilde\rho_0 := 0$ 以及 $\tilde\rho_j := 2^j d_\Omega(x)$，其中 $j \ge 1$。令 N为满足 $\sqrt{t} < 2^{N+2}d_\Omega(x)$的最小非负整数。特别注意，对于所有 $j \le N$，都有 $2\tilde\rho_j \le \sqrt{t}$，并且 $\tilde\rho_N > \sqrt{t}/4$。此外，注意到 $\tilde f = f$ 在 $I(\tilde\rho_j)$ 上。

令 $m_0 := 0$，并且对于 $1 \le j \le N$，令

$$m_j(s,y) := \mathbb{1}_{I(\tilde\rho_j)}(s,y)\,\frac{1}{\tilde\rho_j^2\,\mathcal{H}^{d-1}(B_{\tilde\rho_j}(x_0)\cap\partial\Omega)}\iint_{I(\tilde\rho_j)} f(s',y')\,ds'\,d\mathcal{H}^{d-1}(y')\,.$$

定义

$$\tilde f_j(s,y) := \mathbb{1}_{I(\tilde\rho_j)\setminus I(\tilde\rho_{j-1})}(s,y)f(s,y) + m_{j-1}(s,y) - m_j(s,y) \quad \text{for } j=1,\dots,N$$

and

$$f^\sharp(s,y) := m_N(s,y) + \mathbb{1}_{I(\tilde\rho_N)^c}(s,y)\tilde f(s,y) = m_N(s,y) + \mathbb{1}_{I(\sqrt{t})\setminus I(\tilde\rho_N)}(s,y)f(s,y)\,.$$

因此，我们有

$$\tilde f(s,y) = \sum_{1\le j\le N} \tilde f_j(s,y) + f^\sharp(s,y)\,,$$

由此得到所需的 f 分解。

注意，若 $4d_\Omega(x) > \sqrt{t}$ 则 $\bar{N} = 0$，且我们有 $\tilde{f} = f^\sharp$。

在下面的引理中，我们汇总分解 (31) 中各部分的一些支集性质，并证明一些界，这些界将在下一小节中发挥重要作用。

引理 6.10. 分解 (31) 中的各部分满足：

(a) 对于每个 $1 \le j \le N$，函数 f_j 的积分为零，且支撑于$I(\tilde{\rho}_j)$，其中 $\tilde{\rho}_j = 2^j d_\Omega(x)$。此外，对于每个 $p \in [1,\infty]$，$\tilde{f}_j \in L^p(I(\tilde{\rho}_j))$，并且

$$\|\tilde{f}_j\|_{L^1} \lesssim_d \Theta[\partial\Omega \cap B_{\tilde{\rho}_j}(x_0)]\,(\varepsilon + \overline{\nu}_1(x_0,\tilde{\rho}_j))\,.$$

(b) 对于每个 $1 \le k \le M$，函数 f_k 支撑于 $I(\rho_k)$，其中 $\rho_k = 2^k\sqrt{t}$，并且满足：对于任意 p、$q \ge 1$,

$$\|f_k\|_{L^p(\partial\Omega;L^q((0,t)))} \lesssim_d \Theta[\partial\Omega \cap B_{\rho_k}(x_0)]^{1/p}\rho_k^{-(d+1)+2/q+(d-1)/p}(\varepsilon + \bar{\nu}_p(x_0,\rho_k))\,.$$

(c) 函数 $f^\sharp$ 支撑于 $(0,\infty)\times B_{\sqrt{t}}(x_0)$，并且对任意 $p, q \ge 1$,

$$\begin{aligned}\|f^\sharp\|_{L^p(\partial\Omega;L^q((0,t)))} \lesssim_d \Theta[\partial\Omega \cap B_{\sqrt{t}}(x_0)]^{1/p}(\varepsilon + \bar{\nu}_p(x_0,\sqrt{t}))\,t^{1/q+(d-1)/(2p)}\\ \times \min\{d_\Omega(x)^{-(d+1)}, t^{-(d-1)/2}\}\end{aligned}$$

(d) 函数 f 支撑于 $(0,\infty)\times(B_{2r}(x_0)\setminus B_{r/2}(x_0))$，并且对所有 $(s,y)\in(0,\infty)\times\partial\Omega$,

$$|\check{f}(s,y)| \lesssim_d r^{-d-1}\,.$$

证明。步骤 *1*。我们考虑函数 f_j，其中 $1 \le j \le N$。平均值为零以及支集性质由构造立即得出。若 $j > 1$，则 $f_j \in L^\infty(I(\tilde{\rho}_j))$ 由引理 6.8 得出；若 $j = 1$，则由引理 6.9 得出。剩下只需估计 $\|f_j\|_{L^1}$。我们有

$$\|\tilde{f}_j\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1(I(\tilde{\rho}_j)\setminus I(\tilde{\rho}_{j-1}))} + \|m_j\|_{L^1} + \|m_{j-1}\|_{L^1}\,.$$

我们的假设 $t \le r^2/2$ 意味着，对每个 j，都有 $\tilde{\rho}_j \le \sqrt{t}/2 < r/2$。我们还有 $\tilde{\rho}_j = 2^j d_\Omega(x) \ge 2d_\Omega(x)$。因此，我们可以应用引理 6.7，得到

$$\|m_j\|_{L^1} = \left|\iint_{I(\tilde{\rho}_j)} f(s,y)\,ds\,\mathcal{H}^{d-1}(y)\right| \lesssim_d \varepsilon\,.$$

同样的界适用于 $\|m_{j-1}\|_{L^1}$。（注意，情形 $j = 1$ 是平凡的，因为 $m_0 = 0$。）由于 是（ε，r）-良好的，我们有 $\Theta[\partial\Omega \cap B_{\tilde{\rho}_j}(x_0)] \gtrsim_d 1$。这证明了从 $\|m_j\|_{L^1} + \|m_{j-1}\|_{L^1}$ 到 $\|f_j\|_{L^1}$ 的界的贡献具有所声称的形式。

为了估计 $\|f\|_{L^1(I(\tilde\rho_j)\setminus I(\tilde\rho_{j-1}))}$，当 $j>1$ 时我们使用引理 6.8，当 $j=1$时使用引理 6.9，并注意到 $\tilde\rho_j\le r/2$ 和 $\tilde\rho_1=2d_\Omega(x)\le 4d_\Omega(x)$。在这两种情况下，我们得到

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1(I(\tilde\rho_j)\setminus I(\tilde\rho_{j-1}))}&\lesssim_d \tilde\rho_j^{-(d-1)}\int_{\partial\Omega\cap B_{\tilde\rho_j}(x_0)}(\varepsilon+|\nu(y)-\nu(x_0)|)\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\\&\le \tilde\rho_j^{-(d-1)}\mathcal{H}^{d-1}(B_{\tilde\rho_j}(x_0)\cap\partial\Omega)\,(\varepsilon+\overline{\nu}_1(x_0,\tilde\rho_j))\\&\le \Theta[\partial\Omega\cap B_{\tilde\rho_j}(x_0)](\varepsilon+\bar\nu_1(x_0,\tilde\rho_j))\,.\end{aligned}$$

步骤 *2*。我们考虑函数 f_k，其中 $k=1,\ .....,\ M$。

由于 supp $f_k\subset I(\rho_k)\setminus I(\rho_{k-1})=I(\rho_k)\setminus I(\rho_k/2)$，且对于每个 $k=1,\ .....,\ M$都有 $\rho_k\le r$，我们可以应用引理 6.8，从而得到对于任意 $p,\ q\ge 1$

$\|f_k\|_{L^p(\partial\Omega;L^q((0,t)))}$

$$\begin{aligned}&\lesssim_d\left(\int_{\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0)}\left(\int_0^{\rho_k^2}(\varepsilon+|\nu(y)-\nu(x_0)|)^q\rho_k^{-(d+1)q}\,ds\right)^{p/q}d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right)^{1/p}\\&=\rho_k^{-(d+1)+2/q}\left(\int_{\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0)}(\varepsilon+|\nu(y)-\nu(x_0)|)^p\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right)^{1/p}\\&\le\rho_k^{-(d+1)+2/q}\left(\varepsilon\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0))^{1/p}+\left(\int_{\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0)}|\nu(y)-\nu(x_0)|^p\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right)^{1/p}\right)\\&\le\rho_k^{-(d+1)+2/q}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0))^{1/p}(\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,\rho_k))\\&\le\Theta[\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0)]^{1/p}\rho_k^{-(d+1)+2/q+(d-1)/p}(\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,\rho_k))\,.\end{aligned}$$

这证明了所声称的界。

步骤 *3*。为了估计 $f^\sharp$，我们区分以下两种情形：$\sqrt{t}<4d_\Omega(x)$（即 $N=0$）和 $\sqrt{t}\ge 4d_\Omega(x)$（即 $N\ge 1$）。

若 $\sqrt{t}<4d_\Omega(x)$，则

$$f^\sharp(s,y)=\mathbb{1}_{I(\sqrt{t})}(s,y)f(s,y)\,.$$

由引理 6.9，我们类似于步骤 2 可得，

$\|f^\sharp\|_{L^p(\partial\Omega;L^q((0,t)))}$

$$\begin{aligned}&\lesssim_d\left(\int_{\partial\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0)}\left(\int_0^t(\varepsilon+|\nu(y)-\nu(x_0)|)^q d_\Omega(x)^{-(d+1)q}\,ds\right)^{p/q}d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right)^{1/p}\\&\lesssim\Theta[\partial\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0)]^{1/p}t^{1/q+(d-1)/(2p)}\,d_\Omega(x)^{-(d+1)}(\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,\rho_k))\,.\end{aligned}$$

这就证明了此情形下所声称的界。

同时，如果 $\sqrt{t}\ge 4d_\Omega(x)$，那么

$$f^\sharp(s,y)=m_N(s,y)+\mathbb{1}_{I(\sqrt{t})\setminus I(\tilde\rho_N)}(s,y)f(s,y)\,.$$

To对于 $\|f^\sharp\|_{L^p(\partial\Omega;\, L^q((0,\, t)))}$ 的界，我们按照步骤 1 中的方法进行论证。根据引理 6.7，我们有

$$\begin{aligned}\|m_N\|_{L^p(\partial\Omega;L^q((0,t)))} &= \left|\iint_{I(\tilde\rho_N)} f(s,y)\,ds\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right| \tilde\rho_N^{-2/q'}\mathcal{H}^{d-1}(B_{\tilde\rho_N}(x_0)\cap\partial\Omega)^{-1/p'}\\ &\lesssim_d \varepsilon\,\tilde\rho_N^{-2/q'}\mathcal{H}^{d-1}(B_{\tilde\rho_N}(x_0)\cap\partial\Omega)^{-1/p'}\\ &\le \varepsilon\,\Theta[B_{\tilde\rho_N}(x_0)\cap\partial\Omega]^{-1/p'}\,\tilde\rho_N^{-(d-1)/p'-2/q'}\end{aligned}$$

由于 $\Theta[\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0)]\gtrsim_d 1$，且 x_0 是 (ε,r)-良好的，并且 $\tilde\rho_N\le(1/2)\sqrt{t}$，因此该界具有所声称的形式。此外，由引理 6.8，得到

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{1}_{I(\sqrt{t})\setminus I(\tilde\rho_N)}(s,y)f\|_{L^p(\partial\Omega;L^q((0,t)))}\\ &\qquad\lesssim_d t^{-(d+1)/2+1/q}\left(\int_{B_{\sqrt{t}}(x_0)\cap\partial\Omega}(\varepsilon+|\nu(y)-\nu(x_0)|)^p\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right)^{1/p}\\ &\qquad\lesssim t^{-(d+1)/2+1/q+(d-1)/(2p)}\,\Theta[B_{\sqrt{t}}(x_0)\cap\partial\Omega]^{1/p}(\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,\sqrt{t}))\,.\end{aligned}$$

这也证明了此情形下所声称的界。

˘步骤 *4.* 最后，我们估计 f。根据构造，

$$\check f(s,y)=\mathbb{1}_{I(\rho_M)^c}f(s,y)\,.$$

由于 $\rho_M\ge\frac{r}{2}$，我们有

$$\begin{aligned}((0,t)\times\partial\Omega)\cap I(\rho_M)^c &= (0,t)\times(\partial\Omega\setminus B_{\rho_M}(x_0))\\ &\subseteq (0,t)\times(\partial\Omega\setminus B_{r/2}(x_0))\,.\end{aligned}$$

˘ 我们还记得，根据构造，f 支撑于 $B_{2r}(x_0)$，因此 $\operatorname{supp} f\subseteq(0,\infty)\times B_{2r}(x_0)\setminus B_{r/2}(x_0)$。

若 $y\in\partial\Omega\cap B_r(x_0)^c$，则由 (28) 可得

$$|\check f(s,y)|\lesssim_d s^{-d/2}(rs^{-1}+r^{-1})e^{-\frac{r^2}{16s}}\,. \tag{32}$$

若改为 $y\in\partial\Omega\cap(B_r(x_0)\setminus B_{r/2}(x_0))$，则由引理 6.5 可得，

$$\min\{|x-y|^2,|x^*-y|^2\}\ge\frac{1-2\varepsilon}{4}r^2\,,$$

对所有 $y\in(\partial\Omega\cap B_r(x_0))\setminus B_{r/2}(x_0)$ 均成立。因此，对于 $\varepsilon\le 1/4$ and $y\in\partial\Omega\cap(B_r(x_0)\setminus B_{r/2}(x_0))$，我们可以估计

$$\begin{aligned}|\check f(s,y)| &\lesssim_d s^{-1-\frac{d}{2}}\left(|y-x|e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}+|y-x^*|e^{-\frac{|x^*-y|^2}{4s}}\right)\\ &\lesssim_d rs^{-1-d/2}e^{-\frac{r^2}{32s}}\,.\end{aligned} \tag{33}$$

结合 (32) 和 (33)，以及对任意 $\alpha\le 0$ 都有 $\sup_{\tau>0}\tau^\alpha e^{-1/\tau}\lesssim_\alpha 1$ 这一事实，可得 f 上所需的逐点界。□

6.5. **完成命题 6.6 的证明**。现在，我们将上一小节中证明的 f 分解各部分的界，与第 5 节中为诺伊曼边值问题建立的估计结合起来。

命题 *6.6* 的证明。取一个 (ε, r)-优点 $x_0 \in \partial\Omega$，并令 $x \in \Gamma_r(x_0, \varepsilon)$ 和 $t \in (0, r^2/2] \cap (0, \kappa R^2]$。令 u, f, g 按命题 6.6 陈述之后的方式定义。我们的首要目标是证明，对于任意 $p > d-1$，都有

$$\begin{aligned} t^{d/2}\,|u(t,x)| \lesssim_{d,\delta,M,p} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,3t/2]\times B_{2r}(x_0))} \Theta[\partial\Omega \cap B_{2r}(x_0)] \\ \times \left((\varepsilon + \bar\nu_p(x_0, r)) e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{c(1+\delta)t}} + e^{-\frac{r^2}{c(1+\delta)t}} \right). \end{aligned} \tag{34}$$

我们按照 (31) 分解 f，并将 $\tilde u_j, u_k, u^\sharp$, 和 $\check{}u$ 定义为边值问题 (15) 在相应边界数据 $\tilde f_j, f_k, f^\sharp$ 和 $\check{}f$ 下的解。令 $u^\flat$ 为以下方程的解

$$\begin{cases} (\partial_s - \Delta) u^\flat(s,y) = g(s,y) & \text{for } (s,y) \in (0,\infty)\times\Omega\,, \\ u^\flat(0,y) = 0 & \text{for } y \in \Omega\,, \\ \frac{\partial}{\partial \nu_y} u^\flat(s,y) = 0 & \text{for } (s,y) \in (0,\infty)\times\partial\Omega\,. \end{cases}$$

由热方程的线性性可得

$$u(t,x) = \sum_{1\le j\le N} \tilde u_j(t,x) + \sum_{1\le k\le M} u_k(t,x) + u^\sharp(t,x) + \check u(t,x) + u^\flat(t,x)\,.$$

我们使用定理 5.2、引理 5.4，以及引理 6.10 中得到的 $\tilde f_j, f_k, f^\sharp$ 和 $\check{}f$ 的界，分别估计这些项。

˜步骤 *1.* 估计来自 $\tilde u_j$ 的贡献。根据构造，每个 f_j 的积分为零，且支撑于 $I(\tilde\rho_j)$，其中 $\tilde\rho_j = 2^j d_\Omega(x)$，并且对于 $1 \le j \le N$，有 $4\tilde\rho_j^2 \le t$。我们的目标是应用引_理 5.4，其中该引理中的 ρ, R, ρ_0 分别取为 $\tilde\rho_j, \sqrt{t/\kappa}$ 和 ,$_M\sqrt{t}$，而 $c_{\kappa,M}$ 尚待指定。

要应用该引理，我们需要验证

$$\sup_{y\in B_{2c_{\kappa,M}\sqrt{t}}(0)\setminus\{y_d>\varphi(y')\}} \big(|y|^2 + 4\varphi(y')(\varphi(y') - y_d)\big) < t/\kappa\,.$$

由于 $x_0 \in \partial\Omega$ 和 φ 连续，我们推得 $\varphi(0) = 0$。因此，由于 $|\nabla\varphi| \le M$，有

$$|\varphi(y')| \le M|y'| \quad \text{for all } y' \in \mathbb{R}^{d-1}\,.$$

因此，根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}
&\sup_{y\in B_{2c_{\kappa,M}\sqrt{t}}(0)\setminus\{y_d>\varphi(y')\}} \big(|y|^2+4\varphi(y')(\varphi(y')-y_d)\big)\\
&\qquad\le \sup_{y\in B_{2c_{\kappa,M}\sqrt{t}}(0)\setminus\{y_d>\varphi(y')\}} \big(|y|^2+4|\varphi(y')|^2+4|y_d||\varphi(y')|\big)\\
&\qquad\le \sup_{y\in B_{2c_{\kappa,M}\sqrt{t}}(0)\setminus\{y_d>\varphi(y')\}} \big(|y|^2+4M^2|y'|^2+4M|y_d||y'|\big)\\
&\qquad\le \sup_{y\in B_{2c_{\kappa,M}\sqrt{t}}(0)\setminus\{y_d>\varphi(y')\}} \big(|y|^2+4M^2|y'|^2+2M|y|^2\big)\\
&\qquad\le 4c_{\kappa,M}^2(1+4M^2+2M)t\,.
\end{aligned}$$

因此，如果我们选择 $c_{\kappa,\ M}=\frac{1}{4\sqrt{\kappa}\ (1+4M^2+2M)}<\frac{1}{2\sqrt{\kappa}\ (1+4M^2+2M)}$，就可以将引理 5.4 应用于上述指定的参数。这就得到

$$\begin{aligned}
|\tilde u_j(t,x)| &\lesssim_{d,\delta,M} \|\tilde f_j\|_{L^1} t^{-d/2}\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,3t/2)\times B_{\sqrt{t}}(x_0))} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{12(1+\delta)t}} \min\{1,\tilde\rho_j/(c_{\kappa,M}\sqrt{t})\}^\alpha\\
&\lesssim_{d,\delta,M,\kappa} \|\tilde f_j\|_{L^1} t^{-d/2}\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,3t/2)\times B_{\sqrt{t}}(x_0))} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{12(1+\delta)t}} (2^j d_\Omega(x)/\sqrt{t})^\alpha\,,
\end{aligned}$$

其中 α 仅取决于 d，δ，M。注意到，引理 5.4 的假设，即 $t\ge 4\max\{c_{\kappa,M}^2 t,\tilde\rho_j^2\}$，得到了满足，因为 $4c_{\kappa,\ M}^2\le 1$ 且 $4\tilde\rho_j^2\le t$。

为了估计 $\|f_j\|_{L^1}$，我们使用引理 6.10，得到

$$\|\tilde f_j\|_{L^1}\lesssim_d \Theta[\partial\Omega\cap B_{\tilde\rho_j}(x_0)]\,(\varepsilon+\bar\nu(x_0,\tilde\rho_j))\le \Theta[\partial\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0)]\,(\varepsilon+\bar\nu_1(x_0,\sqrt{t}))\,.$$

利用 $\tilde\rho_N=2^N d_\Omega(x)\le\sqrt{t}$，我们从而可以估计

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{1\le j\le N}\tilde u_j(t,x)\Big| &\lesssim_{d,\delta,M,\kappa} \Theta[\partial\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0)](\varepsilon+\bar\nu(x_0,\sqrt{t}))t^{-d/2}\\
&\qquad\times\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,3t/2)\times B_{\sqrt{t}}(x_0))} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{12(1+\delta)t}} \sum_{1\le j\le N}(2^j d_\Omega(x)/\sqrt{t})^\alpha\\
&\lesssim_{d,\delta,M,\kappa} \Theta[\partial\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0)](\varepsilon+\bar\nu_1(x_0,\sqrt{t}))t^{-d/2}\\
&\qquad\times\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,3t/2)\times B_{\sqrt{t}}(x_0))} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{12(1+\delta)t}} (2^N d_\Omega(x)/\sqrt{t})^\alpha\\
&\lesssim_{d,\delta,M,\kappa} \Theta[\partial\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0)](\varepsilon+\bar\nu_1(x_0,\sqrt{t}))t^{-d/2}\\
&\qquad\times\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((t/2,3t/2)\times B_{\sqrt{t}}(x_0))} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{12(1+\delta)t}}\,.
\end{aligned}\tag{35}$$

这就证明了 $\tilde u_j$对 u 的贡献满足所需的估计。

步骤 *2.* 估计来自 u_k 的贡献。我们将应用定理 5.2。为此，固定 $p\in(d-1,\ \infty)$ 和 $q\in(2p/(p-d+1)\ \infty)$，并注意到这一选择满足该定理的假设。我们还注意到，f_k 支撑于 $[0,\infty)\times\omega$，且

$\omega = \partial\Omega \cap B_{\rho_k}(x_0)$。由此可得

$$|u_k(t,x)| \lesssim_{d,p,q,\delta} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times(B_{\rho_k}(x_0)\cap\partial\Omega))} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{8(1+\delta)t}} \|f_k\|_{L^p(\partial\Omega;L^q((0,t)))} \times \Theta[\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0)]^{\frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'})} \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0))^{\frac{1}{p'}-\frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'})}.$$

利用引理 6.10 给出的关于 $\|f_k\|_{L^p(\partial\Omega;L^q((0,t)))}$ 的界，以及界 $\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0)) \le \Theta[\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0)]\rho_k^{d-1}$，再结合在允许范围内 $\frac{1}{p'} - \frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'}) > 0$ 对于 p,q 成立这一事实，我们得到

$$|u_k(t,x)| \lesssim_{d,p,q,\delta} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times(B_{\rho_k}(x_0)\cap\partial\Omega))} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{8(1+\delta)t}} (\varepsilon + \bar\nu_p(x_0,\rho_k)) \times \rho_k^{-d}\Theta[\partial\Omega\cap B_{\rho_k}(x_0)].$$

因此，利用 $\rho_k \le r$，我们可以估计

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{1\le k\le M} u_k(t,x)\Big| &\lesssim_{d,p,\delta} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_r(x_0)\cap\partial\Omega)} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{8(1+\delta)t}} (\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,r)) \\ &\quad\times \Theta[\partial\Omega\cap B_r(x_0)] \sum_{1\le k\le M}\rho_k^{-d} \\ &\lesssim_{d,p,\delta} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_r(x_0)\cap\partial\Omega)} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{8(1+\delta)t}} (\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,r)) \\ &\quad\times \Theta[\partial\Omega\cap B_r(x_0)]\, t^{-d/2} \sum_{1\le k\le M} 2^{-dk} \\ &\lesssim_{d,p,\delta} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_r(x_0)\cap\partial\Omega)} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{8(1+\delta)t}} (\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,r)) \\ &\quad\times \Theta[\partial\Omega\cap B_r(x_0)]\, t^{-d/2}.\end{aligned} \tag{36}$$

这就证明了来自 u_k 的贡献满足所需的界。

步骤 *3.* 估计来自 $u^\sharp$ 的贡献。函数 $f^\sharp$ 支撑于 $(0,\infty)\times B_{\sqrt{t}}(x_0)$。按照步骤 2 中的取法，令 p 和 q，应用定理 5.2，得到

$$|u^\sharp(t,x)| \lesssim_{d,\delta,p,q} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_{\sqrt{t}}(x_0)\cap\partial\Omega)} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{8(1+\delta)t}} \|f^\sharp\|_{L^p(\partial\Omega;L^q((0,t)))} \times \Theta[\partial\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0)]^{\frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'})} \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0))^{\frac{1}{p'}-\frac{2}{d-1}(\frac{d}{2}-\frac{1}{q'})}.$$

根据引理 6.10，我们有

$$\|f^\sharp\|_{L^p(\partial\Omega;L^q((0,t)))} \lesssim_d \Theta[\partial\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0)]^{1/p}(\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,\sqrt{t}))\, t^{1/q-(d-1)/(2p')}.$$

仿照步骤 2 的论证，我们得到

$$|u^\sharp(t,x)| \lesssim_{d,p,\delta} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_{\sqrt{t}}(x_0)\cap\partial\Omega)} (\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,\sqrt{t}))\Theta[\partial\Omega\cap B_{\sqrt{t}}(x_0)] t^{-d/2} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{8(1+\delta)t}}. \tag{37}$$

步骤 *4.* 估计 $\check{u}$. 我们将对 $p = \infty$ 和任意固定的 $\check{q} \in (2, \infty)$ 应用定理 5.2。由于 f 支撑于 $(0, \infty) \times (B_{2r}(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0))$，我们得到

$$|\check{u}(t,x)| \lesssim_{d,\delta,q} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0))} e^{-\frac{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega\setminus B_{r/2}(x_0))^2}{8(1+\delta)t}} \|\check{f}\|_{L^\infty(\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0);L^q((0,t))} \times \Theta[\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0)]\, t^{1/q'-1/2}\,.$$

根据引理 6.10 中的逐点界，我们有

$$\|\check{f}\|_{L^\infty(\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0);L^q((0,t))} \lesssim_{d,q} r^{-d-1} t^{1/q}\,.$$

注意，对任意 $y \in \partial\Omega \setminus B_r(x_0)$，我们有 $|x-y| \geq r/2$，因为 $x \in B_{r/2}(x_0)$。由引理 6.5 可知，对任意 $y \in \partial\Omega \cap B_r(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0)$，我们有

$$|x-y| \gtrsim |y-x_0| \geq r/2\,.$$

因此，有 $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega \setminus B_{r/2}(x_0)) \gtrsim r$。结合假设 $t \leq r^2/2$，我们得到以下界

$$|\check{u}(t,x)| \lesssim_{d,\delta,q} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0))} e^{-\frac{r^2}{c(1+\delta)t}} \Theta[\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0)]\, t^{-d/2}\,. \tag{38}$$

步骤 *5.*（估计 $u^\flat$）根据杜哈梅尔原理，

$$u^\flat(t,x) = \int_0^t \int_\Omega k_\Omega(t-s,x,y) g(s,y)\, dy\, ds\,.$$

Fro根据定义 (26) 以及截断函数 χ 的选取，可知 t

$$|g(s,y)| \lesssim (r^{-2}s^{-d/2} + s^{-1-d/2}) e^{-\frac{r^2}{16s}} \mathbb{1}_{B_{2r}(x_0)\setminus B_r(x_0)}(y) \quad \text{for } (s,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d\,. \tag{39}$$

由（39）以及对 k_Ω 的假设界，我们得到，由于 $x \in \Omega \cap B_{r/2}(x_0)$ 且 $t \in (0,\ r^2/2]$,

$$\begin{aligned}
|u^\flat(t,x)| &\lesssim_d \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_{2r}(x_0))} \\
&\qquad \times \int_0^t \int_{\Omega\cap B_{2r}(x_0)\setminus B_r(x_0)} \frac{sr^{-2}+1}{s^{1+d/2}(t-s)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(1+\delta)(t-s)} - \frac{r^2}{16s}}\, dy\, ds \\
&\leq r^d \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_{2r}(x_0))} \\
&\qquad \times \int_0^t \frac{1}{s^{1+d/2}(t-s)^{d/2}} e^{-\frac{r^2}{8(1+\delta)(t-s)} - \frac{r^2}{16s}}\, ds \\
&\leq r^d e^{-\frac{r^2}{32(1+\delta)t}} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_{2r}(x_0))} \\
&\qquad \times \int_0^t \frac{1}{s^{1+d/2}(t-s)^{d/2}} e^{-\frac{r^2}{32(1+\delta)}\left(\frac{1}{t-s}+\frac{1}{s}\right)}\, ds\,.
\end{aligned} \tag{40}$$

剩余的积分估计如下

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{s^{1+d/2}(t-s)^{d/2}} e^{-\frac{r^2}{32(1+\delta)}(\frac{1}{t-s}+\frac{1}{s})}\,ds &= t^{-d}\int_0^1 \frac{1}{\tau^{1+d/2}(1-\tau)^{d/2}} e^{-\frac{r^2}{32(1+\delta)t}(\frac{1}{1-\tau}+\frac{1}{\tau})}\,d\tau \\ &\lesssim_d t^{-d}\int_0^{1/2} \frac{1}{\tau^{1+d/2}} e^{-\frac{r^2}{32(1+\delta)t\tau}}\,d\tau \\ &\lesssim_{d,\delta} t^{-d/2} r^{-d},\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $\sup_{\eta>0}\eta^{1+d/2}e^{-1/\eta}\lesssim_d 1$ 和 $t\le r^2/2$。将最后一个估计代入 (40)，得到

$$|u^\flat(t,x)| \lesssim_d t^{-d/2} e^{-\frac{r^2}{32(1+\delta)t}} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,t]\times B_{2r}(x_0))}. \tag{41}$$

结合 (35)、(36)、(37)、(38) 和 (41)，以及 $\Theta[\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0)]\gtrsim_d 1$ 这一事实，并利用由 H¨older 不等式可知，对于任意 $s>0$，$p\ge 1$，有 $\bar\nu_1(x_0,s)\le\bar\nu_p(x_0,s)$，即可得到 (34)。

在完成命题的证明之前，我们先指出

$$0\le e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}} - e^{-\frac{|x-x_0|^2}{t}} \le 4\varepsilon e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{2t}}. \tag{42}$$

事实上，当 $\varepsilon d_\Omega(x)^2\le t$ 时，我们使用引理 6.5、泰勒展开以及 $\frac{1}{1-2\varepsilon}\le 1+4\varepsilon$ 对于 $\varepsilon\in(0,\frac14]$ 这一事实，得到

$$e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}} \ge e^{-\frac{|x-x_0|^2}{t}} \ge e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}} e^{-\frac{4\varepsilon d_\Omega(x)^2}{t}} \ge e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}}\Big(1-\frac{4\varepsilon d_\Omega(x)^2}{t}\Big) \ge e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}} - 4\varepsilon e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{2t}}.$$

对于所有 $s\ge 0$，我们还使用了 $0\le se^{-s/2}\le 1$。若改为 $\varepsilon d_\Omega(x)^2>t$，则再次由引理 6.5，且由于对于所有 $\varepsilon>0$，$e^{-\frac{1}{2\varepsilon}}\le\varepsilon$，

$$e^{-\frac{|x-x_0|^2}{t}} \le e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}} \le e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{2t}} \le \varepsilon e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{2t}}.$$

这证明了 (42)。

为推导出命题 6.6 中所述的界，我们使用

$$k_{\mathbb{R}^d}(t,x,x)+k_{\mathbb{R}^d}(t,x,x^*) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\Big(1+e^{-\frac{|x-x^*|^2}{4t}}\Big) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\Big(1+e^{-\frac{|x-x_0|^2}{t}}\Big).$$

将此与 (34)、(42) 以及以下事实结合起来：

$$\Theta[\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0)]\gtrsim_d 1, \quad \text{and} \quad \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,3t/2]\times B_{2r}(x_0))}\gtrsim_d 1$$

（后者 由 $x\in B_{2r}(x_0)$ 和命题 4.1 可得，因为 $t\to 0$），由此得到

$$\begin{aligned}&\Big|(4\pi t)^{d/2}k_\Omega(t,x,x) - 1 - e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}}\Big| \\ &\lesssim_{d,\delta,M,p} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,3t/2]\times B_{2r}(x_0))}\Theta[\partial\Omega\cap B_{2r}(x_0)]\Big((\varepsilon+\bar\nu_p(x_0,r))e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{c(1+\delta)t}} + e^{-\frac{r^2}{c(1+\delta)t}}\Big)\end{aligned}$$

对于某个普适的 $c>0$。至此，命题 6.6 的证明完成。 □

7. Constructing a good subset of the boundary

在上一节中，我们证明了边界上优点附近热核的逐点界。本节将量化边界上「大多数」点都是优点这一事实，并由此说明，上一节得到的热核界在几乎整个边界区域 $d_\Omega \lesssim \sqrt{t}$ 上都成立。

对于边界为 Lipschitz 正则的有界集，Brown 在 [7]中论证了边界上「大多数」点都是优点。然而，为了证明定理 1.2，当 Ω 为凸集时，我们需要得到对几何依赖关系更明确的定量估计。这是第 7.2 节的主题。在此之前，我们将在第 7.1 小节回顾 Brown 在 Lipschitz 情形下的证明，并补充一些细节。

7.1. 大良集。 我们回顾一下，$(\varepsilon,\ r)$-优点$x \in \partial\Omega$ 的概念是在定义 6.1 中引入的，相应的集合 $\Gamma_r(x,\ \varepsilon)$ 则出现在定义 6.3 中。

定义 7.1。 若子集 $G \subset \partial\Omega$ 中的每个点 $x \in G$ 都是一个(ε, r)-优点，则称其为(ε, r)-良集。

定义 7.2. 若 $G \subset \partial\Omega$ 是一个(ε, r)-良集，我们定义其对应的锯齿区域

$$\mathcal{G} := \bigcup_{x\in G} \Gamma_r(x,\varepsilon)\,.$$

Note 命题 6.6 给出的 $k_\Omega(t,x,x)$ 估计恰好适用于 $x \in \mathcal{G}$.

对我们而言，需要存在一个 (ε, r)-良集 G ，它具有以下两个性质：

(i) 对应的锯齿区域 $\mathcal{G}$ 覆盖边界区域 $\{x \in \Omega$ 的很大一部分：当 s 足够小时， $d_\Omega(x) < s\}$ ；(ii) 我们能够控制法向量 $\bar\nu_p(x, s)$ 的局部振荡，其中 $x \in G$ ，从而使命题 6.6 中的误差很小。

以下结果保证了这是可能的。

引理 7.3. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ 是一个开且有界的 *Lipschitz* 集。存在一族(ε, r)-良集 $\{G_{\varepsilon,r}\}_{\varepsilon,r}$ ，使得对每个 $\varepsilon \in (0, 1/4]$ 和 $p \in [1,\infty)$，均有

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{x\in G_{\varepsilon,r}} \bar\nu_p(x,r) = 0\,, \tag{43}$$

且相应的锯齿区域$\mathcal{G}_{\varepsilon,r}$ 满足，对于每个 $\varepsilon \in (0, 1/4]$,

$$\lim_{r\to 0^+} \limsup_{s\to 0^+} \frac{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}_{\varepsilon,r}|}{|\{x\in\Omega : d_\Omega(x) < s\}|} = 0\,. \tag{44}$$

由于 Ω 有界且为 Lipschitz 区域，我们有 $|\{x \in \Omega :\ d_\Omega(x)\ < s\}| = s\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)(1+o(1))$，当 $s \to 0^+$ 时（见 (8)），因此 (44) 等价于将分母替换为 $s\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)$后的相应陈述。

证明。步骤 *1*。我们先证明，若 $G \subset \partial\Omega$ 是 (ε, r)-良好的，则

$$\limsup_{s\to 0^+} \frac{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}|}{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}|} \leq \frac{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \setminus G)}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}\,. \tag{45}$$

论证与 [14, 引理 3.5] 的证明非常相似，但这里考虑的是 $\partial\Omega$的单侧邻域，而非双侧邻域（另见 [7, 命题 1.3] 和 [2, 引理 2.7]）。记

$$\begin{aligned} |\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}| = {} & |\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}| \\ & - |\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\} \cap \mathcal{G}|\,. \end{aligned} \tag{46}$$

为分析第二项，取稍后确定的某个 $\delta \in (0,1)$ $\varepsilon' > 0$，我们选取 $\nu_1, \dots,$ $\nu_N \in \mathbb{S}^{d-1}$ 以及互不相交的闭集 $F_1, \dots, F_N \subset G$，使得$\mathcal{H}^{d-1}(\bigcup_{i=1}^N F_i) \geq (1-\delta)\mathcal{H}^{d-1}(G)$，并且对所有 $x \in F_i$都有 $|\nu(x) - \nu_i| \leq \epsilon'$。这些集合可按如下方式构造。由卢辛定理 [12, 定理 7.10], , 存在一个闭集 $\Sigma \subset G$，使得 $\mathcal{H}^{d-1}(\Sigma) \geq (1-\delta/2)\mathcal{H}^{d-1}(G)$，且 $\nu|_\Sigma$ 连续。集合$F(\nu) := \{x \in \Sigma : |\nu(x) - \nu| < \varepsilon'\}$ 构成 Σ 的一个开覆盖，其指标为 $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$。由 Σ的紧致性，存在 $\nu_1, \dots, \nu_N \subset \mathbb{S}^{d-1}$，使得 $\{F(\nu_i)\}_{i=1}^N$ 构成 Σ的一个开覆盖。定义 $F_1 := F(\nu_1)$。现在我们继续归纳构造互不相交的闭集和互不相交的集合 F_j，其中 $j = 2, \dots, N$。给定 $F_1, \dots, F_{j-1}$，我们按如下方式构造 F_j。由于 $\mathcal{H}^{d-1}|_\Sigma$ 是一个正则测度，我们可以找到一个紧集 $F_j \subset F(\nu_j) \setminus (\cup_{i<j} F_i)$，使得 $\mathcal{H}^{d-1}(F_j) \geq (1-\delta/2)$ $\mathcal{H}^{d-1}(F(\nu_j) \setminus (\cup_{i<j} F_i))$。注意，由构造可知，对每个 $i < j$ 都有 $\operatorname{dist}(F_i, F_j) > 0$，并且

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{d-1}(\cup_{i=1}^N F_i) &= \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^{d-1}(F_i) \\ &\geq (1-\delta/2)\mathcal{H}^{d-1}(\Sigma) \\ &\geq (1-\delta/2)^2 \mathcal{H}^{d-1}(G)\,. \end{aligned}$$

由于 $(1-\delta/2)^2 = 1 - \delta + \delta^2/4 > 1-\delta$ 这一集合 $\{F_i\}_{i=1}^N$ 满足所需的性质。

假设 $s_0 \leq r/2$ 和 $s_0 \leq \operatorname{dist}(F_i, F_j)/2$ 对所有 $i \neq j$均成立。我们定义映射 $(\cup_{i=1}^N F_i) \times (0, s_0) \to \mathbb{R}^d$，其定义为 $(x, s) \mapsto x - s\nu_i$，若 $x \in F_i$。我们声称，若 ε'取得足够小，则该映射是单射，且其值域是 $\mathcal{G}$的子集。为说明其值域是 $\mathcal{G}$的子集，我们证明 $x - s\nu_i \in \Gamma_{\varepsilon,r}(x)$。事实上，若 $x \in F_i$，那么由于 $|\nu(x) - \nu_i| < \varepsilon'$，我们得到

$$\begin{aligned} ((x - \nu_i s) - x) \cdot \nu(x) &= -s\nu_i \cdot \nu(x) \\ &= -s - s(\nu_i - \nu(x)) \cdot \nu(x) \\ &\leq -s + s\varepsilon' \\ &= -(1-\varepsilon')|(x - s\nu_i) - x|\,. \end{aligned}$$

若 $\varepsilon' \leq 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}$ 这就证明了 $x - \nu_i s \in \Gamma_{\varepsilon,r}(x)$，因此我们的映射的像包含于 $\mathcal{G}$。还需证明该映射是单射。由于 $|\nu_i| = 1$ 且

$s_0 < \mathrm{dist}(F_i, F_j)/2$，显然，对于不同的 i， $F_i \times (0, s_0)$ 的像彼此不相交。为导出矛盾，假设存在 $x, y \in F_i, s, s' \in (0, s_0)$ 使得 $x - s\nu_i = y - s'\nu_i$。由于 $s_0 < r/2$，我们得到 $|x - y| = |s - s'| < s_0 < r/2$。因此，由于 x, y 是 (ε, r)-good，我们推出

$$\begin{aligned} |s - s'| &= |(s - s')\nu_i \cdot \nu_i| \\ &= |(x - y) \cdot \nu_i| \\ &\leq |(x - y) \cdot \nu(x)| + |(x - y) \cdot (\nu_i - \nu(x))| \\ &\leq \varepsilon |x - y| + \varepsilon' |x - y| \\ &= (\varepsilon + \varepsilon')|s - s'| \,. \end{aligned}$$

只要 $\varepsilon + \varepsilon' < 1$，这就产生矛盾。因此，我们得出结论：当 $\varepsilon' < \min\{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}, 1 - \varepsilon\}$ 时，所构造的映射是单射的。

面积公式 [11, 定理 3.2。3] 现在表明，对于 $0 < s < s_0$，

$$\begin{aligned} |\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\} \cap \mathcal{G}| &\geq \sum_{i=1}^N |\{x - \rho\nu_i : x \in F_i, 0 < \rho < s\}| \\ &\geq (1 - (\epsilon')^2/2) \sum_{i=1}^N \int_{\{x - \rho\nu_i : x \in F_i, 0 < \rho < s\}} \frac{dy}{\nu_i \cdot \nu(x)} \\ &= s(1 - (\epsilon')^2/2) \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^{d-1}(F_i) \\ &\geq s(1 - (\epsilon')^2/2)(1 - \delta)\mathcal{H}^{d-1}(G) \,. \end{aligned}$$

取 $\varepsilon' = \sqrt{2\delta}$，使其相对于 ε 足够小，将所得界代入（46），并除以 $|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}|$，我们得出结论：当 s 足够小时（取决于 ε， δ， r）

$$\frac{|\{x \in \mathbb{R}^d : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}|}{|\{x \in \mathbb{R}^d : d_\Omega(x) < s\}|} \leq 1 - (1 - \delta)^2 \frac{s\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}{|\{x \in \mathbb{R}^d : d_\Omega(x) < s\}|} \frac{\mathcal{H}^{d-1}(G)}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} \,.$$

正如我们在（8）中已经指出的，由于 Ω 是有界的 Lipschitz 区域，有

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{s\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}{|\{x \in \mathbb{R}^d : d_\Omega(x) < s\}|} = 1$$

从而

$$\limsup_{s \to 0^+} \frac{|\{x \in \mathbb{R}^d : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}|}{|\{x \in \mathbb{R}^d : d_\Omega(x) < s\}|} \leq 1 - (1 - \delta)^2 \frac{\mathcal{H}^{d-1}(G)}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} \,.$$

通过令 $\delta \to 0$ 并使用 $\mathcal{H}^{d-1}(G) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) - \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \setminus G)$，即可得到 (45) 中的界。

步骤 2. 固定 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$。我们证明，对每个 $r > 0$，都存在一个 (ε, r)-良集$G_{\varepsilon, r} \subset \partial\Omega$，使得

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \setminus G_{\varepsilon,r})}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} = 0$$

and

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{x\in G_{\varepsilon,r}} \bar{\nu}_1(x, r) = 0\,.$$

鉴于 (45)，第一个性质推出 (44)，而第二个性质对 $p = 1$ 推出 (43)。下一步将把结果推广到 $p > 1$。

为了构造 $G_{\varepsilon, r}$，首先注意到，根据拉德马赫定理，对于 $\mathcal{H}^{d-1}$-几乎处处的$x \in \partial\Omega$，存在定义良好的向外单位法向量。定义 $\nu\colon \partial\Omega \to \mathbb{S}^{d-1}$，在该法向量存在时令其等于此法向量。

固定一个递减的 $\{r_k\}_{k\geq 1} \subset (0, \infty)$，使得 $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$。于是，根据拉德马赫定理和勒贝格微分定理，分别定义函数 $R_k\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$,$\nu_k\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$，如下：

$$R_k(x) := \sup_{y\in\partial\Omega\cap B_{r_k}(x)} \frac{|\nu(x)\cdot(y-x)|}{|x-y|}\,,$$
$$\nu_k(x) := \sup_{s<r_k} \frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega\cap B_s(x))} \int_{\partial\Omega\cap B_s(x)} |\nu(x)-\nu(y)|\, d\mathcal{H}^{d-1}(y)\,,$$

当 $k \to \infty$ 时，它们在 $\partial\Omega$ 上收敛于 0 $\mathcal{H}^{d-1}$-几乎处处。根据叶戈罗夫定理，对于任意 $\delta > 0$，存在集合 $G_\delta \subset \partial\Omega$，使得 $\{R_k\}_k$ 和 $\{\nu_k\}_k$ 在 G_δ 上一致收敛于 0，并且 $\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \setminus G_\delta) \leq \delta\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)$。

取一个递减序列 $\{\delta_j\}_{j\geq 1} \subset (0,1)$，满足 $\delta_j \to 0$。由此可知，对于任意固定的 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$，以及任意 j，都存在 $k_{j,\varepsilon}$，使得对所有 $k \geq k_{j,\varepsilon}$ 和所有 $x \in G_{\delta_j}$，均有

$$|R_k(x)| < \varepsilon \quad \text{and} \quad |\nu_k(x)| \leq 1/j\,.$$

不失一般性，我们可以假设 $\lim_{j\to\infty} k_{j,\varepsilon} = \infty$。注意，序列 $\{r_{k_{j,\varepsilon}}\}_{j\geq 1}$ 在 $j \to \infty$ 时趋于零，并且界 $|R_k(x)| < \varepsilon$ 保证 G_{δ_j} 是一个 $(\varepsilon, r_{k_{j,\varepsilon}})$-良集。

给定 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$，对于 $r \leq \sup_{j\geq 1} r_{k_{j,\varepsilon}}$，定义 $j(r,\varepsilon) := \sup\{j\colon r_{k_{j,\varepsilon}} \geq r\}$，并令$G_{\varepsilon,r} := G_{\delta_{j(r,\varepsilon)}}$。对于 $r > \sup_{j\geq 1} r_{k_{j,\varepsilon}}$，则令 $G_{\varepsilon,r} = \emptyset$。按构造，$G_{\varepsilon,r}$ 是一个 (ε, r)-良集，且

$$\sup_{x\in G_{\varepsilon,r}} \bar{\nu}_1(x, r) \leq \frac{1}{j(r,\varepsilon)} \qquad \text{and} \qquad \frac{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \setminus G_{\varepsilon,r})}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} \leq \delta_{j(r,\varepsilon)}\,.$$

由于我们有 $\lim_{j\to\infty} \delta_j = 0$，并且对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，当 $r \to 0$ 时，$j(r, \varepsilon) \to \infty$，这表明所构造的集合具有本步骤开头所述的性质。

步骤 *3*。 为了完成证明，我们需要证明 (43) 对所有 $p \in [1,\infty)$ 都成立。由于根据步骤 2，它对 $p=1$ 成立，因此只需证明，如果

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{x\in G_{\varepsilon,r}} \bar\nu_p(x,r) = 0$$

对于某个 $p\in[1,\infty)$，那么它对所有 $p\in[1,\infty)$ 都成立。事实上，根据 H¨older 不等式，并且由于 $|\nu-\nu'|\le 2$ 对任意 $\nu,\ \nu'\in\mathbb{S}^{d-1}$ 都有，对任意 $1\le p_1<p_2<\infty$ 及所有 $x_0\in G_{\varepsilon,\ r}$，以及 $\eta>0$，都有

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(B_\eta(x_0)\cap\partial\Omega)}\int_{B_\eta(x_0)\cap\partial\Omega}|\nu(x_0)-\nu(y)|^{p_1}\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right)^{1/p_1}\\
&\qquad\le\left(\frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(B_\eta(x_0)\cap\partial\Omega)}\int_{B_\eta(x_0)\cap\partial\Omega}|\nu(x_0)-\nu(y)|^{p_2}\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right)^{1/p_2}\\
&\qquad\le 2^{1-p_1/p_2}\left(\frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(B_\eta(x_0)\cap\partial\Omega)}\int_{B_\eta(x_0)\cap\partial\Omega}|\nu(x_0)-\nu(y)|^{p_1}\,d\mathcal{H}^{d-1}(y)\right)^{1/p_2}.
\end{aligned}$$

对 $0<\eta<r$ 取上确界，得到

$$\bar\nu_{p_1}(x_0,r)\le\bar\nu_{p_2}(x_0,r)\le 2^{1-p_1/p_2}\bar\nu_{p_1}(x_0,r)^{p_1/p_2}\,,$$

由此立即得到所需结论。引理 7.3 的证明至此完成。□

7.2. 凸集的显式构造。 本小节中，我们将针对底集为凸集的情形，细化上一小节的结果。我们的构造部分基于早先在 [14], 中的工作，但在细节上有所不同；我们力求以自包含的方式呈现所有内容。

下文中，当 Ω 为凸集时，我们将采用以下良集的具体选择。

定义 7.4。 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为一个开凸集。对于 $\varepsilon\in(0,\ 1/2]$ 和 $r\in(0,\ \varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)]$，定义

$$G_{\varepsilon,r}:=\{x\in\partial\Omega:\exists y\in\Omega\ s.t.\ |y-x|=r/\varepsilon, B_{r/\varepsilon}(y)\subset\Omega\}$$

并令 $\mathcal{G}_{\varepsilon,\ r}$ 为相应的锯齿区域。

接下来，我们论证 $G_{\varepsilon,\ r}$ 是一个（ε，r）-良集，并且（44）和（43）成立。事实上，在凸情形下，我们将能够推出后面两个极限关系的定量版本。具体而言，我们将证明以下命题。

命题 7.5. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 是一个开凸集。对于 $\varepsilon\in(0,1/2]$ 且 $r\in(0,\varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)]$, 集合 $G_{\varepsilon,r}$ 是(ε,r)-良好的。此外，如果 $s\in(0,r/2]$，那么

$$|\{x\in\Omega:d_\Omega(x)<s\}\setminus\mathcal{G}_{\varepsilon,r}|\lesssim_d\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\,\frac{sr}{\varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\,,$$

并且，如果 $x \in G_{\varepsilon,r}$，那么

$$\sup_{y\in B_r(x)\cap\partial\Omega}\left[\sup_{\nu_y\in\{\nu\in\mathbb{S}^{d-1}:(z-y)\cdot\nu<0\ \ \forall z\in\Omega\}}|\nu(x)-\nu_y|\right]\lesssim_d \varepsilon\,.$$

该命题的证明依赖于两个引理，我们将在下文陈述并证明它们。

对于 $R\in(0,\ r_{\mathrm{in}}(\Omega)]$, 定义 $G_R^0\subset\partial\Omega$ 如下:

$$G_R^0:=\{x\in\partial\Omega:\exists y\in\Omega\text{ s.t. }|y-x|=R,\ B_R(y)\subset\Omega\}\,. \tag{47}$$

注意，对于每个 $y\in\{x\in\Omega:\ d_\Omega(x)=R\}$ 至少存在一个 $x\in\partial\Omega$，使得x，y 满足构造G_R^0的条件。注意，$G_{\varepsilon,\ r}=G^0_{r/\varepsilon}$.

引理 7.6。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为开凸集，并令 G_R^0 按(47)中的定义给出。若$R>\frac{r}{2\varepsilon}$，则 G_R^0 是一个$(\varepsilon,\ r)$-良集。

证明。固定 $x_0\in G_R^0$，并令 $y\in\Omega$ 满足 $|x_0-y|=R$ 和 $B_R(y)\subset\Omega$。

我们断言，$\partial\Omega$ 在 x_0 处存在外向单位法向量，且该法向量等于 $\nu(x_0)=\frac{x_0-y}{|x_0-y|}$。事实上，在 x_0 处的 Ω 的任一支撑超平面也必定是 $B_R(y)$ 在 x_0 处的支撑超平面；又由于 $B_R(y)$ 在 x_0 处有唯一的支撑超平面，即 $\{z\in\mathbb{R}^d:(y-x_0)\cdot(z-x_0)=0\}$，故断言得证。注意，因此我们有 $y=x_0-\nu(x_0)R$。

若 $x\in\partial\Omega\ \cap B_r(x_0)$，那么根据 G_R^0 的构造可知，$|x-y|\geq R$。因此，

$$R^2\leq|x-y|^2=|x-x_0+\nu(x_0)R|^2=|x-x_0|^2+2(x-x_0)\cdot\nu(x_0)R+R^2\,,$$

由于 $x\in B_r(x_0)$，这意味着

$$(x-x_0)\cdot\nu(x_0)\geq-\frac{|x-x_0|^2}{2R}\geq-\frac{r}{2R}|x-x_0|\,. \tag{48}$$

由于 Ω 是凸集，我们有 $(x-x_0)\cdot\nu(x_0)\leq 0$，只要 $x\in\partial\Omega$。因此，只要 $R>\frac{r}{2\varepsilon}$，G_R^0 就是一个 $(\varepsilon,\ r)$-良集。□

引理 7.7。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为一个开凸集，并设 G_R^0 按 (47) 中的定义给出。若$x_0\in G_R^0$，$x\in B_s(x_0)\cap\partial\Omega$ 且 $0<s<R$，并且若 $\nu\in\mathbb{S}^{d-1}$ 满足 $\Omega\subset\{z\in\mathbb{R}^d:(z-x)\cdot\nu<0\}$，则

$$\nu(x_0)\cdot\nu\geq 1-c\Big(\frac{s}{R}\Big)^2\quad and\quad|\nu(x_0)-\nu|\leq\sqrt{2c}\,\frac{s}{R}$$

其中 $c>0$ 仅依赖于 d。

证明。给定 $x_0\in G_R^0$，取 $y\in\Omega$，使得 $|x_0-y|=R$ 且 $B_R(y)\subset\Omega$。令 x 和ν 如引理中所述。

根据构造，有

$$\{z\in\mathbb{R}^d:(z-x)\cdot\nu\geq 0\}\subset\Omega^c\subset B_R(y)^c\,.$$

特别地，对于任意满足 $(z-x)\cdot\nu=0$ 的 z，我们有

$$|y-z|\geq R\,.$$

取 $z = y + ((x-y)\cdot\nu)\nu$，得到 $|(y-x)\cdot\nu| \geq R$。由于 $y \in \Omega$，且由于 ν 是经过 x 的支撑超平面的外向单位法向量，我们有 $(x-y)\cdot\nu \geq 0$，因此

$$(x-y)\cdot\nu \geq R$$

在前面的证明中，我们已证明 $y = x_0 - R\nu(x_0)$，因此得到

$$\nu(x_0)\cdot\nu \geq 1 - \frac{(x-x_0)\cdot\nu}{R}\,.$$

令 $\alpha := \nu(x_0)\cdot\nu$，并写作 $\nu = \alpha\nu(x_0) + \nu^\perp$，其中 $\nu^\perp \cdot \nu(x_0) = 0$，则上述不等式意味着

$$\alpha \geq 1 - \alpha\frac{(x_0-x)\cdot\nu(x_0)}{R} - \frac{(x_0-x)\cdot\nu^\perp}{R} \geq 1 - \frac{|x-x_0|^2}{2R^2}\alpha - \frac{|x-x_0|}{R}\sqrt{1-\alpha^2}\,,$$

这里用到了 $|\nu^\perp| = \sqrt{1-\alpha^2}$ 和 (48)。

考虑不等式

$$a \geq 1 - \frac{1}{2}\beta^2 a - \beta\sqrt{1-a^2}$$

对 $a \in [0,1]$ 和 $\beta \in (0,1)$。由于该不等式的右端是定义在 $[0,1]$ 上关于 a 的严格凸函数，并且当 a 充分接近 1 时，不等式显然严格成立；当 a 充分接近 0 时，不等式不成立，因此存在唯一的 $a^* = a^*(b)$，使得该不等式对所有 $a \in [a^*, 1]$ 均成立，而对 $a \in [0, a^*)$ 不成立。计算可得

$$a^*(\beta) = \frac{4 + 2\beta^2 - 2\beta^2\sqrt{8+\beta^2}}{4 + 8\beta^2 + \beta^4}\,.$$

通过泰勒展开，存在常数 $c > 0$，使得当 $\beta \in (0,\ 1)$ 时

$$\alpha^*(\beta) \geq 1 - c\beta^2\,.$$

由上述讨论可得

$$\nu(x_0)\cdot\nu \geq a^*(|x-x_0|/R) \geq 1 - c\Big(\frac{|x-x_0|}{R}\Big)^2 \geq 1 - c\Big(\frac{s}{R}\Big)^2\,.$$

这就完成了第一个不等式的证明。

利用我们刚刚证明的不等式，可得

$$|\nu(x_0) - \nu| = \sqrt{2 - 2\nu(x_0)\cdot\nu} \leq \sqrt{2c}\,\frac{s}{R}\,.$$

这就完成了引理的证明。 □

命题 7.5 的证明。$G_{\varepsilon,\,r} = G^0_{r/\varepsilon}$ 是一个（ε、r）-良集这一事实由引理 7.6 得出。关于 $|\{x \in \Omega :\ d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}_{\varepsilon,\,r}|$ 的界出现在 [14,引理 5.4]的证明中。（应注意的是，该论文中构造的良集与 $G_{\varepsilon,\,r}$略有不同，但它包含于 $G_{\varepsilon,\,r}$中。）关于 $|\nu(x) - \nu_y|$ 的界由引理 7.7 得出。□

由于下面将需要这一结果，我们记下引理 7.7 的以下推论，其中量化说明了如何根据 Ω ε、r为所构造的良集中的 x_0 选择命题 6.6 中出现的 R、φ、和 κ。

引理 7.8。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为一个开凸集。若 $\varepsilon \in (0,\ 1/2]$ 且 $r \in (0,\ \varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)]$ 并且$x_0 \in G_{\varepsilon,\ r}$ 则存在一个凸函数 $\varphi\colon\ \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$，满足 $\varphi(0) = |\nabla\varphi(0)| = 0$，$0 \le \varphi(x') \le \varepsilon|x'|$，$\|\nabla\varphi\|_\infty \lesssim_d \varepsilon$ 它将 $\partial\Omega$ 参数化为 $B_r(x_0)$。特别地，对于 $R = r$、$\kappa = 1/2$ 以及 $M \lesssim_d \varepsilon$，命题 *6.6* 的假设均成立。

证明。取 Q 使其满足 $Q^{-1}\nu(x_0) = (0, \dots, 0, -1)$（这样的 Q 并不唯一，但这无关紧要）。存在函数 φ，满足 $\varphi(0) = |\nabla\varphi(0)| = 0$，并且经平移和旋转后在 $B_r(x_0)$ 中局部参数化边界；这由 Ω 的凸性以及假设$x_0 \in G_{\varepsilon,\ r}$ 且 $r < r_{\mathrm{in}}(\Omega)$ 可得。由凸性以及假设 x_0 为 $(\varepsilon,\ r)$-良好，可知对于 $|x'| < r$，$0 \le \varphi(x') \le \varepsilon|x'|$ 成立。

假设 $\nabla\varphi(x')$ 定义良好，则 $\partial\Omega$ 在 $Q(x',\ \varphi(x'))$ 处的外向单位法向量 $+x_0$ 存在，且由下式给出

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\varphi(x')|^2}} Q(\nabla\varphi(x'), -1)\,.$$

因此，$|\nabla\varphi(x')|$ 的界可由引理 7.7 以及 $\nu(x_0) = Q(0,\ \dots\dots,\ 0,\ -1)$ 这一事实推出。□

8. Proof of Theorems 1.3, 1.4, 1.5 and 1.6

本节将所有内容汇总起来，从而得到引言中陈述的热核界。

定理 *1.3* 的证明。鉴于将命题 4.1 应用于 $R = d_\Omega(x)$，

$$\left|k_\Omega(t,x,x) - (4\pi t)^{-d/2}\right| \lesssim_{\delta,\eta} t^{-d/2}\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta/2,x}((0,t]\times B_{d_\Omega(x)}(x))} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{(1+\delta)t}}\,,$$

对于所有满足 $d_\Omega(x) \ge \eta\sqrt{t}$ 的 $x \in \Omega$ $t > 0$。由推论 3.2 应用于 $t_0 = \eta^{-2} r_{\mathrm{in}}(\Omega)$，我们得出

$$\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta/2,x}((0,t]\times B_{d_\Omega(x)}(x))} \le C_{\Omega,\delta,\eta}\,,$$

其中我们用到了 $t \le \eta^{-2} d_\Omega(x)^2 \le \eta^{-2} r_{\mathrm{in}}(\Omega)^2 = t_0$。定理 1.3 的证明至此完成。□

定理 *1.4* 的证明。论证与前一个证明类似，只不过这里我们使用推论 3.4，而不是推论 3.2。由此得到以下界

$$\left|k_\Omega(t,x,x) - (4\pi t)^{-d/2}\right| \lesssim_{d,\eta,\delta} \frac{e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{(1+\delta)t}}}{V_\Omega(x,\sqrt{t})}\,.$$

注意到假设 $d_\Omega(x) \ge \eta\sqrt{t}$ 意味着

$$V_\Omega(x,\sqrt{t}) = |\Omega \cap B_{\sqrt{t}}(x)| \ge |B_{\eta\sqrt{t}}(x) \cap B_{\sqrt{t}}(x)| = |B_1| \min\{\eta^d, 1\} t^{d/2}\,. \qquad \square$$

定理 *1.5* 的证明。对某个固定的 $p > d-1$，我们应用引理 7.3。给定一个序列 $\{\varepsilon_j\}_{j\geq 1} \subset (0, 1/4]$，其极限为 $\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$，以及一个序列 $\{\delta_j\}_{j\geq 1} \subset (0,1)$，其极限为 $\lim_{j\to\infty} \delta_j = 0$，我们可以找到一个序列 $\{r_j\} \subset (0,1)$，使得对于每个 j 和每个 $0 < r \leq r_j$，都存在一个 (ε_j, r)-良集 $G_{\varepsilon_j,r}$，满足

$$\limsup_{s\to 0} \frac{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}_{\varepsilon_j,r}|}{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}|} \leq \frac{\delta_j}{2}$$

and

$$\sup_{x\in G_{\varepsilon_j,r}} \bar{\nu}_p(x, r) \leq \delta_j \,.$$

这里，$\mathcal{G}_{\varepsilon_j,\, r}$ 是与$G_{\varepsilon_j,\, r}$相关联的锯齿区域。接下来，我们可以找到一个序列$\{s_j\} \subset (0,\ \infty)$，使得对于每个 j 和每个 $0 \leq r \leq r_j$，都有

$$\sup_{0<s\leq s_j} \frac{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}_{\varepsilon_j,r}|}{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}|} \leq \delta_j$$

如有必要，减小 s_j后，我们可以假设对于每个 j 都有 $s_j \leq r_j$，且 $\lim_{j\to\infty} s_j = 0$。

现在，对于给定的 $r > 0$，令 $j(r) \geq 1$ 为满足 $s_j \geq r$的最大整数 j，并令 $\mathcal{G}_r := \mathcal{G}_{\varepsilon_{j(r)},\ r_{j(r)}} \cap \{x \in \Omega :\ d_\Omega(x) < r\}$。于是

$$\sup_{0<s\leq r} \frac{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}_r|}{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}|} \leq \sup_{0<s\leq s_{j(r)}} \frac{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}_{\varepsilon_{j(r)},r_{j(r)}}|}{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}|} \leq \delta_{j(r)}$$

and

$$\sup_{x\in G_{\varepsilon_{j(r)},r_{j(r)}}} \bar{\nu}_p(x, r_{j(r)}) \leq \delta_{j(r)} \,.$$

注意，当 $r \to 0$时，$j(r) \to \infty$，因为当 $j \to \infty$时，$s_j \to 0$。

若 $x \in \mathcal{G}_r$，则根据构造，对于某个$x_0 \in G_{\varepsilon_{j(r)},\ r_{j(r)}}$，有$x \in \Gamma_{r_j(r)}(x_0,\ \varepsilon_{j(r)})$。由于$\partial\Omega$ 是 Lipschitz 的，因此对任意充分小的 $r > 0$，都存在一个 Lipschitz 函数φ: $\mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$，满足 $\varphi(0) = 0$ 且 $\|\nabla\varphi\|_\infty \lesssim_\Omega 1$，并在局部参数化$B_r(x_0)$中的 $\partial\Omega$。因此，我们可以应用命题 6.6，取 $\kappa = 1/2$，从而得到

$$\left|(4\pi t)^{d/2} k_\Omega(t, x, x) - 1 - e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}}\right| \lesssim_{d,\delta,\Omega,p} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,3t/2]\times B_{2r_{j(r)}}(x_0))} \Theta[\partial\Omega \cap B_{2r_{j(r)}}(x_0)] \times \left((\varepsilon_{j(r)} + \delta_{j(r)}) e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{c(1+\delta)t}} + e^{-\frac{r_{j(r)}^2}{c(1+\delta)t}}\right),$$

对所有 $t \in (0, r_{j(r)}^2/2]$。由于 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 的，我们有 $\Theta[\partial\Omega \cap B_{2r_{j(r)}}(x_0)] \lesssim_\Omega 1$，并且根据 Corollary 3.2 及 $t_0 = 1$，有 $\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,3t/2]\times B_{2r_{j(r)}}(x_0))} \lesssim_\Omega 1$。由于 $r \leq r_{r(j)}$ 且 $d_\Omega(x) < r$ 对任意 $x \in \mathcal{G}_r$ 都成立，我们得出

$$\left|(4\pi t)^{d/2} k_\Omega(t, x, x) - 1 - e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}}\right| \lesssim_{d,\delta,\Omega,p} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{c(1+\delta)t}} \left(\varepsilon_{j(r)} + \delta_{j(r)} + e^{-\frac{r^2}{c(1+\delta)t}}\right)$$

对于所有 $x \in \mathcal{G}_r$ 和 $t \in (0, r^2/2]$。由于按构造 $\lim_{r\to 0^+} \varepsilon_{j(r)} + \delta_{j(r)} = 0$，令 $\mathcal{E}(r) := \varepsilon_{j(r)} + \delta_{j(r)}$ 即可完成证明。□

定理 *1.6* 的证明。 对于定理中的 ε, r，令 $G_{\varepsilon,r}$ 为第 7.2 节中构造的 (ε, r)-良集，$\mathcal{G}_{\varepsilon, r}$ 为相应的锯齿区域。根据命题 7.5，我们有

$$\frac{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\} \setminus \mathcal{G}_{\varepsilon,r}|}{|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}|} \lesssim_d \frac{sr\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}{\varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}|} \tag{49}$$

对所有 $s < r/2$，并且

$$\sup_{x \in G_{\varepsilon,r}} \bar{\nu}_p(x, r) \lesssim_d \varepsilon\,, \tag{50}$$

对任意 $p \geq 1$。由引理 A.3 和余面积公式，

$$\begin{aligned} |\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}| &\geq s\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big(1 - \frac{s}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{d-1} \\ &\gtrsim_d s\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\,, \end{aligned}$$

其中第二步用到了假设 $0 < s < r/2 \leq \varepsilon r_{\mathrm{in}}(\Omega)/2 \leq r_{\mathrm{in}}(\Omega)/8$。结合 (49)，这就证明了 (4)。

对任意 $x \in \mathcal{G}_{\varepsilon,\, r}$，存在一个 $x_0 \in G_{\varepsilon,\, r}$，使得 $x \in \Gamma_r(x_0,\ \varepsilon)$。由引理 7.8，我们可以将命题 6.6 应用于 $R = r,\ \kappa = 1/2, M \lesssim_d 1$，从而得出

$$\begin{aligned} \Big|(4\pi t)^{d/2} k_\Omega(t, x, x) - 1 - e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}}\Big| &\lesssim_{d,\delta,p} \|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,3t/2]\times B_{2r}(x_0))} \Theta[\partial\Omega \cap B_{2r}(x_0)] \\ &\quad \times \Big((\varepsilon + \bar{\nu}_p(x_0, r)e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{c(1+\delta)t}} + e^{-\frac{r^2}{c(1+\delta)t}}\Big)\,, \end{aligned} \tag{51}$$

对所有 $t \in (0,\ r^2/2]$。

接下来需要对（51）右端出现的若干项进行估计。由（50）可知，$\bar{\nu}_p(x_0,\ r) \lesssim_d \varepsilon$。由于 Ω 是凸集，引理 A.1 意味着 $\Theta[\partial\Omega \cap B_{2r}(x_0)] \lesssim_d 1$。由推论 3.4 可知，

$$\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,x}((0,3t/2]\times B_{2r}(x_0))} \lesssim_{d,\delta} \frac{t^{d/2}}{V_\Omega(x, \sqrt{t})}\,.$$

由引理 A.4，且由于 $\Omega \cap B_{r/2}(x_0) \subset \Omega \cap B_r(x)$，

$$\frac{t^{d/2}}{V_\Omega(x, \sqrt{t})} \leq \frac{r^d}{V_\Omega(x, r)} \leq \frac{r^d}{V_\Omega(x_0, r/2)}\,.$$

由于 x_0 是 $(\varepsilon,\ r)$-good，且 $\varepsilon \in (0,\ 1/4]$，可知

$$\begin{aligned} \Omega \cap B_{r/2}(x) &\supseteq \{y \in \mathbb{R}^d : (y - x) \cdot \nu(x) < -\varepsilon|y - x|\} \cap B_{r/2}(x) \\ &\supseteq \{y \in \mathbb{R}^d : (y - x) \cdot \nu(x) < -|y - x|/4\} \cap B_{r/2}(x)\,, \end{aligned}$$

因此

$$V_\Omega(x_0, r/2) \gtrsim_d r^d\,.$$

因此我们得到 $\|k_\Omega\|_{G^\infty_{\delta,\ x}((0,\ 3t/2]\times B_{2r}(x_0))} \lesssim_{d,\ \delta} 1$。

对每个 $x \in \mathcal{G}_\varepsilon$ 使用 $d_\Omega(x) < r/2$，r，我们得到

$$\Big|(4\pi t)^{d/2} k_\Omega(t, x, x) - 1 - e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{t}}\Big| \lesssim_{d,\delta,p} e^{-\frac{d_\Omega(x)^2}{c(1+\delta)t}}\Big(\varepsilon + e^{-\frac{r^2}{c(1+\delta)t}}\Big)$$

对所有 $x \in \mathcal{G}_{\varepsilon,\, r}$ 以及 $t \in (0,\ r^2/2]$。定理1的证明至此完成。 6. □

AppendixA. Convex geometry toolbox

在本附录中，我们记录一些凸几何方面的内容。本附录与 [16], 中的附录相似，但并不完全相同。我们将要用到的大多数结果，要么是专家熟知的，要么可以由已知结果推出。

我们首先回顾一个事实：凸集的周长随集合包含关系单调递增。

引理 A.1。 如果$\Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是凸集，那么

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega') \leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\,.$$

特别地，如果$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是凸的，且 $x \in \mathbb{R}^d, r > 0$ 那么

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \cap B_r(x)) \leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_r(x)) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_1(0)) r^{d-1}\,.$$

第二个引理给出了距离函数 d_Ω 的水平集大小的上界和下界。其表述使用内切半径，该半径定义见 (2)。下界在 [20]中得到证明，而上界则由引理 A.1 推出。

Lem引理 A.2. 若$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是有界凸集，则对任意 $s \in (0, r_{\mathrm{in}}(\Omega)]$

$$\Big(1 - \frac{s}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{d-1} \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \leq \mathcal{H}^{d-1}(\{x \in \Omega : d_\Omega(x) = s\}) \leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\,.$$

利用余面积公式和引理 A.2 中的界，可以证明下一个引理。

L引理 A.3. 若$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是有界凸集，则对任意 $s \in [0, r_{\mathrm{in}}(\Omega\qquad\qquad)]$

$$s\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big(1 - \frac{s}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{d-1} \leq |\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}| \leq s\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\,.$$

证明. 根据余面积公式，我们可以写成

$$|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}| = \int_0^s \mathcal{H}^{d-1}(\{x \in \Omega : d_\Omega(x) = \tau\})\, d\tau\,.$$

根据引理 A.2，我们可得

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \int_0^s \Big(1 - \frac{\tau}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)_+^{d-1} d\tau \leq |\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < s\}| \leq s\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\,.$$

由于 $d - 1 \geq 0$，我们可以利用单调性得到界

$$\int_0^s \Big(1 - \frac{\tau}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)_+^{d-1} d\tau \geq s\Big(1 - \frac{s}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)_+^{d-1}\,.$$

这就完成了引理 A.3 的证明。 □

在本文中，我们多次用到 Bishop–Gromov 比较定理的以下推论。初等证明见 [16, 引理 A.5]。

引理 A.4. 若$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是凸集，则函数

$$(0,\infty) \ni r \mapsto \frac{|\Omega \cap B_r(a)|}{r^d}$$

对于任意固定的 $a \in\Omega$，都是非增的。

下述断言见于 [16, 命题 A.6], ，其中也给出了证明。

命题 A.5. 固定 $d \geq 1$。给定 $c_1 > 0$ ，存在 $c_2 > 0$ ，使其具有以下性质。若 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是开、有界且凸的，则

$$\begin{aligned}
&|\Omega + B_r| - |\Omega| \geq r\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \quad \textit{for all } r > 0\,,\\
&|\Omega + B_r| - |\Omega| \lesssim_d \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) r\Big[1 + \Big(\frac{r}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{d-1}\Big] \quad \textit{for all } r > 0\,,\\
&|\Omega + B_r| \leq c_2\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) r\Big(\frac{r}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{d-1} \quad \textit{for all } r \geq c_1 r_{\mathrm{in}}(\Omega)\,.
\end{aligned}$$

本附录的最后一个结果讨论了在 Ω 的若干子集上对局部测度 $V_\Omega(x,r)$ 的倒数进行积分。该结果的关键之处在于，它表明 $V_\Omega(x,r)$ 变小的区域，其测度相对较小。

命题 A.6. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ 是一个开、有界且凸的集合。那么，对于任意 $r > 0$ 和可测的 $\omega \subset\Omega$ ，都有

$$\int_\omega \frac{r^d}{V_\Omega(x,r)}\,dx \leq \frac{4^d}{|B_1(0)|}|\omega + B_r(0)|$$

and

$$\int_\omega \frac{r^d}{V_\Omega(x,r)}\,dx \leq \frac{4^d}{|B_1(0)|}\left[|\omega| + \frac{r^2\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big(2(d-1) + \Big(\frac{r}{r_{\mathrm{in}}(\Omega)}\Big)^{d-2}\Big)\right].$$

证明。 我们首先证明第一个界。

设 $\{x_k\}_{k=1}^M \subset \omega$ 是一组点，满足：若 $B_r(x_k) \cap B_r(x_j)$，则 $= \emptyset$ 当且仅当 $k \neq j$ 且 $\omega \subset \cup_{k=1}^M B_{2r}(x_k)$。可以通过如下归纳法证明这样一组点的存在性。先在 ω 中任取一点；随后，给定一组有限点，其两两距离为 $\geq 2r$，我们要么能在ω 中找到一个新点，使其到所有先前各点的距离均为 $\geq 2r$ ，要么这组点满足$\omega \subset \cup_k B_{2r}(x_k)$。由于 ω 有界，该算法会在有限步后终止。

于是有

$$\int_\omega \frac{r^d}{V_\Omega(x,r)}\,dx \leq \sum_{k=1}^M \int_{\omega\cap B_{2r}(x_k)} \frac{r^d}{V_\Omega(x,r)}\,dx\,.$$

利用引理 A.4 以及由包含关系可知，对所有$x \in B_{2r}(x_k)$，$V_\Omega(x, 4r) \geq V_\Omega(x_k, 2r)$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^M \int_{\omega\cap B_{2r}(x_k)} \frac{r^d}{V_\Omega(x,r)}\,dx &\leq \sum_{k=1}^M \int_{\omega\cap B_{2r}(x_k)} \frac{(4\sqrt{t})^d}{V_\Omega(x,4r)}\,dx \\ &\leq \sum_{k=1}^M \int_{\omega\cap B_{2r}(x_k)} \frac{4^d r^d}{V_\Omega(x_k,2r)}\,dx \\ &= 4^d r^d \sum_{k=1}^M \frac{|\omega\cap B_{2r}(x_k)|}{|\Omega\cap B_{2r}(x_k)|} \\ &\leq 4^d r^d M\,.\end{aligned}$$

由于 $\{B_r(x_k)\}_{k=1}^M$ 互不相交，且 $\cup_{k=1}^M B_r(x_k) \subset \omega + B_r(0)$，我们得到

$$M = \frac{\sum_{k=1}^M |B_r(x_k)|}{|B_r(0)|} = \frac{|\cup_{k=1}^M B_r(x_k)|}{r^d|B_1(0)|} \leq \frac{|\omega + B_r(0)|}{r^d|B_1(0)|}\,.$$

因此，我们已经证明，对于任意 $r>0$，$\omega\subset\Omega$，均有

$$\int_\omega \frac{r^d}{V_\Omega(x,r)}\,dx \leq \frac{4^d}{|B_1(0)|}|\omega + B_r(0)|\,,$$

由此完成了命题中第一个界的证明。

对于第二个界，我们需要更精确地分析 Ω 边界附近的情形。为此，我们将 ω 分解为两个互不相交的集合，定义如下：

$$\omega_1 := \{x\in\omega : \operatorname{dist}(x,\{d_\Omega > r\}) < 3r\}\,,\quad \omega_2 := \{x\in\omega : \operatorname{dist}(x,\{d_\Omega > r\}) \geq 3r\}\,.$$

为了估计 ω_1 上的积分，我们利用如下事实：若 $x\in\omega_1$，则存在 $y\in\{z\in\Omega : d_\Omega(z) > r\}$，满足 $|x-y|<3r$。引理 A.4 蕴含

$$\frac{r^d}{V_\Omega(x,r)} \leq \frac{(4r)^d}{V_\Omega(x,4r)} \leq \frac{(4r)^d}{V_\Omega(y,r)} = \frac{4^d}{|B_1(0)|}\,,$$

其中，第二步使用 $B_r(y)\subset B_{4r}(x)$，第三步使用 $B_r(y)\subset\Omega$。因此，

$$\int_{\omega_1} \frac{r^d}{V_\Omega(x,r)}\,dx \leq \frac{4^d}{|B_1(0)|}|\omega_1|\,. \tag{52}$$

为了估计 ω_2 上的积分，我们按照命题中第一个界的证明方法进行。与之前相同，我们可以选取 $\{x_k\}_{k=1}^M \subset \omega_2$ 个点构成的有限集合，使得 $\overline{B_r(x_k)}\cap B_r(x_j) = \emptyset$ 若 $k\neq j$ 且 $\omega_2 \subset \cup_{k=1}^M B_{2r}(x_k)$，由此得出

$$\int_{\omega_2} \frac{r^d}{V_\Omega(x,r)}\,dx \leq 4^d r^d M\,. \tag{53}$$

因此，只需对 M进行界定。接下来需要控制 M。为此请注意，由于$|x_k - x_j| \geq 2r$ 对所有 $k \neq j$都成立，

$$M = \frac{\sum_{k=1}^{M} |B_r(x_k)|}{|B_1(0)|r^d} = \frac{\left|\cup_{k=1}^{M} B_r(x_k)\right|}{|B_1(0)|r^d}\,.$$

此外，注意到由于 $x_k \in \omega_2 \subset \{x \in \Omega\colon \text{距} x,\ \{d_\Omega > r\} \geq 3r\}$

$$B_r(x_k) \cap (\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < r\} + B_{2r}(0)) = \emptyset$$

and

$$B_r(x_k) \subset \omega_2 + B_r(0)\,.$$

因此，按照闵可夫斯基求和的记号，我们有

$$\begin{aligned} |B_1(0)|r^d M &= \left|\cup_{k=1}^{M} B_r(x_k)\right| \\ &\leq |(\omega_2 + B_r(0)) \setminus (\{x \in \Omega : d_\Omega(x) > r\} + B_{2r}(0))| \\ &\leq |(\Omega + B_r(0)) \setminus (\{x \in \Omega : d_\Omega(x) > r\} + B_{2r}(0))| \\ &= |\Omega + B_r(0)| - |\{x \in \Omega : d_\Omega(x) > r\} + B_{2r}(0)|\,, \end{aligned} \tag{54}$$

其中最后一步使用了 $\{x \in \Omega\colon\ d_\Omega(x) > r\} + B_{2r}(0) \subset \Omega + B_r(0)$。

根据命题 A.5 中的第一和第二个界，

$$|\Omega + B_r| \leq |\Omega| + \sqrt{t}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big[1 + \Big(\frac{r}{r_{\text{in}}(\Omega)}\Big)^{d-1}\Big]\,,$$

$$\begin{aligned} |\{x \in \Omega\colon\ d_\Omega(x) > r\} + B_{2r}(0)| &\geq |\{x \in \Omega\colon\ d_\Omega(x) > r\}| \\ &\quad + 2r\mathcal{H}^{d-1}(\partial\{x \in \Omega : d_\Omega(x) > r\})\,. \end{aligned}$$

由引理 A.3,

$$|\{x \in \Omega : d_\Omega(x) > r\}| = |\Omega| - |\{x \in \Omega : d_\Omega(x) < r\}| \geq |\Omega| - r\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\,.$$

由引理 A.2,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{d-1}(\partial\{x \in \Omega : d_\Omega(x) > r\}) &\geq \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big(1 - \frac{r}{r_{\text{in}}(\Omega)}\Big)_+^{d-1} \\ &\geq \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big(1 - \frac{(d-1)r}{r_{\text{in}}(\Omega)}\Big)\,. \end{aligned}$$

将这些界代入 (54) 得

$$\begin{aligned} |B_1(0)|r^d M &\leq \Big(|\Omega| + r\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big[1 + \Big(\frac{r}{r_{\text{in}}(\Omega)}\Big)^{d-1}\Big]\Big) \\ &\quad - \Big(|\Omega| - r\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) + 2r\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)\Big(1 - \frac{(d-1)r}{r_{\text{in}}(\Omega)}\Big)\Big) \\ &= \frac{r^2\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)}{r_{\text{in}}(\Omega)}\Big[2(d-1) + \Big(\frac{r}{r_{\text{in}}(\Omega)}\Big)^{d-2}\Big]\,, \end{aligned}$$

将此估计代入（53），并将所得界与（52）结合，命题的证明即告完成。□

References

[1] L. Ambrosio、A. Colesanti 和 E. Villa，若干类闭集的外闵可夫斯基内容，《数学年刊》342（2008），第4期，727–748。[2] R. Ba˜nuelos、T. Kulczycki 和 B. Siudeja，利普希茨区域上对称稳定过程的迹，《函数分析杂志》257（2009），第10期，3329–3352。[3] T. P. Branson 和 P. B. Gilkey，带边界流形上拉普拉斯算子的渐近行为，《偏微分方程通讯》15（1990），第2期，245–272。[4] M. van den Berg，光滑边界的欧几里得空间中凸区域的 trace($e^{t\Delta}$) 一致界，《数学物理通讯》92（1984），525–530。[5] M. van den Berg，热方程的渐近行为及与 Dirichlet 拉普拉斯算子相关的迹的界，《函数分析杂志》71（1987），279–293。[6] J. Brossard 和 R. Carmona，能否听出分形的维数？《数学物理通讯》104（1986），103–122。[7] R. M. Brown，利普希茨区域上的热核的迹，《美国数学会汇刊》339（1993），第2期，889–900。[8] B. E. J. Dahlberg 和 C. E. Kenig，Hardy空间以及 L^p 中利普希茨区域上拉普拉斯方程的诺伊曼问题，《数学年刊》（第2辑）125（1987），437–466。[9] E. B. Davies，《热核与谱理论》，剑桥数学论丛，第92卷，剑桥大学出版社，剑桥，1989。[10] L. C. Evans，《偏微分方程》，数学研究生教程，第19卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2010。[11] H. Federer，《几何测度论》，数学科学基础丛书，第153卷，施普林格出版社，纽约，1969。[12] G. B. Folland，《实分析》，第二版，纯数学与应用数学（纽约），威利—跨学科出版物，威利出版社，纽约，1999。[13] R. L. Frank、A. Laptev 和 T. Weidl，《Schr ¨odinger 算子：特征值与 Lieb–Thirring不等式》，剑桥高等数学研究丛书，第200卷，剑桥大学出版社，剑桥，2023。[14] R. L. Frank 和 S. Larson，利普希茨区域上 Dirichlet 拉普拉斯算子的两项谱渐近公式，《纯粹与应用数学杂志》766（2020），195–228。[15] R. L. Frank 和 S. Larson，Dirichlet 拉普拉斯算子的两项 Weyl公式中的误差，《数学物理杂志》61（2020），043504。[16] R. L. Frank 和 S. Larson，利普希茨区域上 Dirichlet 和 Neumann 拉普拉斯算子的黎斯平均渐近行为，《数学发明》241（2025），999–1079。[17] R. L. Frank 和 S. Larson，凸区域上 Dirichlet 和 Neumann 拉普拉斯算子的半经典不等式，《纯粹与应用数学通讯》，即将出版。预印本（2024），arXiv:2410.04769。[18] M. Kac，能否听出鼓的形状？《美国数学月刊》73（1966），第4期，1–23。[19] P. Kr¨oger，欧几里得空间中有界区域上的诺伊曼特征值上界，《函数分析杂志》106（1992），第2期，353–357。[20] S. Larson，内平行体周长的一个界，《函数分析杂志》271（2016），第3期，610–619。更正刊于《函数分析杂志》279（2020），第5期。[21] S. Larson，凸区域上 Dirichlet 拉普拉斯算子的黎斯平均的渐近形状优化，《谱理论杂志》9（2019），第3期，857–895。勘误刊于《谱理论杂志》11（2021），第4期。[22] P. Li 和 S. T. Yau，关于 Schr ¨odinger 算子的抛物型核，《数学学报》156（1986），第3–4期，153–201。

[23] E. H. Lieb 和 M. Loss，《分析》。第二版，数学研究生教程，第 14 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001 年。[24]S. Minakshisundaram 和 ˚A. Pleijel，《黎曼流形上拉普拉斯算子特征函数的一些性质》。Canadian J. Math. 1 （1949 年），第 3 期，242–256。[25] J. Moser，《抛物型微分方程的 Harnack 不等式》，Comm. Pure Appl. Math. 17（1964 年），101–134。[26] H. P. McKean 和 I. M. Singer，《拉普拉斯算子的曲率与特征值》。J. Differential Geom. 1 （1967 年），43–69。[27] J. Nash，《抛物型方程与椭圆型方程解的连续性》，Amer. J. Math.80（1958 年），931–954。[28]M. Shubin，《偏微分方程导论》。数学研究生教程，第 205 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2020 年。

(Rupert L.Frank) Mathematisches Institut, Ludwig-Maximilians Universität München, Theresienstr. 39, 80333 München, Germany, and Munich Center for Quantum Science and Technology, Schellingstr. 4, 80799 München, Germany, and Mathematics 253-37, Caltech, Pasadena, CA 91125, USA电子邮件地址：r.frank@lmu.de

(SimonLarson) Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and the University of Gothenburg, SE-41296 Gothenburg, Sweden电子邮件地址：larsons@chalmers.se