arXiv:2601.07346v1 [cond-mat.stat-mech] 12 Jan 2026

球面斐波那契图上波茨相变的曲率驱动的偏移：图卷积迁移学习研究

Zheng Zhou, [1] Xu-Yang Hou, [1] 以及 Hao Guo[1, 2, *1] *School of Physics, Southeast University, Jiulonghu Campus, Nanjing 211189 China,*
[2] *Hefei National Laboratory, Hefei 230088, China*

我们研究了球面斐波那契图上的铁磁性 q态波茨模型。这些图通过在球面上嵌入准均匀点，并利用弦长截断距离定义相互作用构造而成，该截断距离经过选择，使所得网络近似具有四邻居连通性。通过将 Swendsen-Wang团簇蒙特卡罗模拟与直接作用于邻接结构和节点自旋的图卷积网络（图卷积网络，GCNs）相结合，我们建立了一个统一的相分类框架，适用于规则平面晶格以及弯曲且不规则的球面图。在平面晶格上的基准测试展示了一种高效的迁移策略：将波茨自旋固定二值化为一个有效伊辛变量后，在伊辛模型上预训练的单个图卷积网络无需重新训练，即可定位不同 q 值对应的相变区域。将这一策略应用于球面图后，我们发现，相对于平面基准，曲率和缺陷诱导的连通性不规则性只会使推断出的相变温度产生适度偏移。进一步分析表明，曲率诱导的临界温度偏移在 q 较小时最为显著，并随着 q 增大而迅速减弱；这一趋势与如下物理图像一致：在二维中，对于 $q > 4$，波茨模型会经历从连续相变到弱一级相变的转变，并伴随关联长度显著减小。

I. 引言

近年来，机器学习已发展成为一种强大的工具，能够直接从原始构型中识别相变，是对传统热力学方法的重要补充。早期的开创性研究表明，无需明确了解序参量，神经网络便可自动检测相变附近构型的定性变化 [1–5]。基于这些认识，后续研究系统地将这一思路拓展到多种经典和量子模型，证实了机器学习方法在各类物理系统中的适用性和稳定性 [6–9]。这些方法还进一步推广到不同空间维度的系统，展现出对维数变化的强大鲁棒性和泛化能力 [10–12]。此外，一系列研究探讨了机器学习模型抵御噪声和有限尺寸效应的鲁棒性，表明即使在非理想数据条件下，仍有可能可靠地识别相变 [13–15]。除了定性分类，后续研究还探索了利用机器学习技术定量提取临界点和有效临界指数，从而使这些方法成为分析相变行为的定量工具[16–20]。

早期的大多数成功案例都采用了卷积神经网络（CNN），这类网络假设类图像数据位于规则网格上 [16, 21, 22]。然而，对于曲面和不规则晶格，数据并非排列在平移不变的网格上；相反，“最近邻居”的概念由相互作用图编码。这种不匹配促使人们采用基于图的学习模型。图卷积网络直接作用于图邻接结构，因此能够在统一框架下处理规则和非规则晶格 [23–25]。

弯曲或不规则晶格上的相变，也为探究几何与连通性如何在标准欧几里得范式之外塑造集体现象提供了研究场景。在许多情形下，例如受限于弯曲流形的自旋自由度，或缺乏规则嵌入的相互作用网络，系统并非平移不变布拉菲晶格，“最近邻”也无法由单一键长唯一确定 [26–28]。一种自然的方法是将系统视为定义在图上的统计模型，其中几何信息主要通过连通性体现。

在离散自旋模型中，铁磁 q态波茨模型是伊辛模型的一种经典推广，在二维晶格上呈现丰富的临界行为。在无限平面方格晶格上，临界温度的精确值已知，为 $T_c^{2\mathrm{D}}(q)/J = 1/\ln(1+\sqrt{q})$；当 $q \le 4$ 时发生连续相变，当 $q > 4$ [29] 时发生一级相变。这些精确的平面结果提供了成熟的基准，使波茨模型成为评估曲率和不规则配位数如何改变球面图临界性质的理想试验平台。对 $T_c^{2\mathrm{D}}(q)$ 的精确了解提供了明确的参照，可据此量化非欧几里得几何引起的偏移。

一项实际挑战是如何将球面均匀离散化，以便与平面晶格进行有意义的比较，同时又能以简单的方式构造任意 N。我们采用球面斐波那契晶格 [30–32], ，通过闭式构造实现准均匀覆盖。基于这组点构建的任何局部相互作用图都不可避免地包含配位

* guohao.ph@seu.edu.cn

缺陷。为了模拟“类似方格晶格”的局部环境，我们通过弦长截断距离 r_c定义相互作用图，并选择使四邻居节点数量最多的截断距离。由此得到的球面图以四邻居节点为主，同时含有一定比例的三邻居和五邻居格点。该构造拓展了我们近期关于球面斐波那契晶格伊辛模型的研究 [25]，并为推广至 $q > 2$ 提供了一致的基准。

为在不同温度下高效采样平衡态波茨构型，我们采用 Swendsen-Wang 簇蒙特卡罗算法 [33–37]。该方法通过更新整体 Fortuin-Kasteleyn（FK）簇，缓解相变附近的临界减速。除了提高采样效率，FK 表示还直观地展现了不规则图上的连通性和畴形成。为进行相分类，我们采用图卷积网络：对于固定的相互作用图，每个构型由节点自旋和邻接矩阵表示，图卷积网络则输出有序相和无序相的置信度分数。我们采用“极端温度”监督训练方案，将极低温和极高温下的构型分别标记为有序态和无序态。随后，在整个温度范围内评估训练好的网络，并在两种输出置信度相近处确定相变区域。为避免针对每个 q 单独训练一个网络，我们引入了一条简单的二值化规则，将 q 态波茨自旋映射为有效伊辛变量。由此，预训练于伊辛模型的图卷积网络可直接用于不同 q 下二值化后的波茨构型，同时保留与相分类相关的大尺度畴几何。我们首先以精确的 $T_c^{2D}(q)$ 为基准，在平面方格晶格上验证这一迁移策略，然后将同一框架应用于斐波那契图上的球面波茨模型。

本研究的主要目标有三： (i) 构建并表征适用于波茨模拟的近似四邻居球面斐波那契图；(ii) 开发统一的图卷积网络相分类框架，适用于平面和球面晶格，并包括一种基于二值化、可跨越 q 的高效迁移策略；(iii) 量化相较于平面基准，曲率和局部连通性如何影响球面上的波茨临界温度。通过结合受控图构建、Swendsen-Wang 采样和基于图的学习，我们系统地比较了T_c（q），考察几何（平面与球面）、自旋多重度以及局部连通性（通过 r_c 调节）的影响。

II. 球面斐波那契晶格

我们通过球面斐波那契构造 [31],在半径为 R 的球面上放置 N 个格点，将球面离散化；该构造可生成准均匀点集。笛卡尔第 i 个格点的坐标（$i = 1$、2、.....、 N）为

$$x_i = \sqrt{R^2 - z_i^2}\,\cos\theta_i, \qquad y_i = \sqrt{R^2 - z_i^2}\,\sin\theta_i,$$
$$z_i = R\left(\frac{2i-1}{N} - 1\right), \qquad \theta_i = 2\pi i\,\varphi, \tag{1}$$

其中， $\varphi = (\sqrt{5}-1)/2$ 为黄金分割倒数。图 1 展示了 $N = 1000$ 对应的斐波那契点在两个正交投影视图（正面和顶部）中的分布。

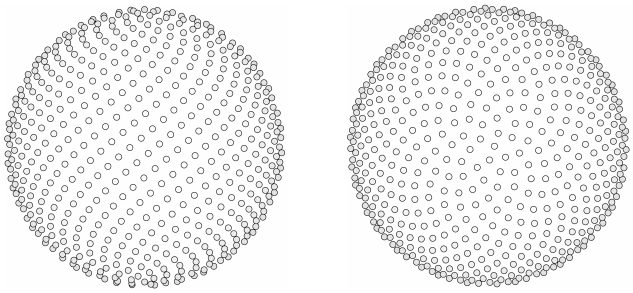


图 1. $N = 1000$ ($R = 10$)的球面斐波那契点，分别为正交投影的正视图（左）和俯视图（右）。

为了在这个不规则点集上定义短程相互作用，我们引入截断半径 r_c来构造相互作用图：如果两个格点 i 和 j 之间的弦长距离

$$d_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| \tag{2}$$

满足 $d_{ij} < r_c$。

在数值模拟中，固定球面半径 R和格点总数 N 后，我们通常会选取合适的截断半径（r_c）（或等价地，选取无量纲比 r_c/R），使得到的相互作用图近似为四邻居图。举例来说，对于 $N = 1000$和 $R = 10$，选择 $r_c/R = 0.1298$ （即 $r_c = 1.298$）后，绝大多数格点都是四邻居。配位统计为（N_3, N_4, N_5） $=$(76, 850, 74)，对应的平均配位数为 $\bar{z} =$$(3N_3 + 4N_4 + 5N_5)/N \simeq 3.998$。在这种构造下，晶格中只有少量不可避免的三邻居和五邻居格点作为配位缺陷，同时仍然很好地近似了四邻居晶格。图 2 展示了所得连通性，视角与图 1 相同。

III. 球面斐波那契晶格上的 q 态波茨模型

A. 自旋构型

q i 每个格点都携带一个离散自旋变量 σ_i $\in$的 q 态波茨模型是一种经典自旋模型

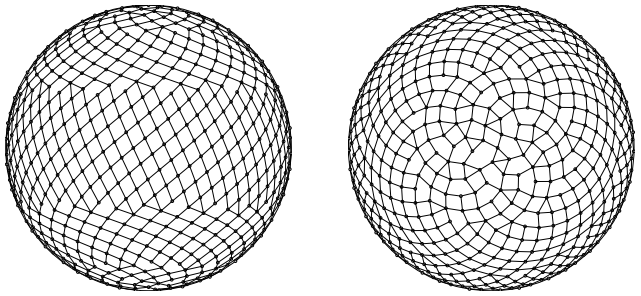


图2。使用 $r_c/R = 0.1298$ 根据图1中的斐波那契点构造的相互作用图：具有 $d_{ij} < r_c$ 的点对之间以边相连（正投影前视图/顶视图）。

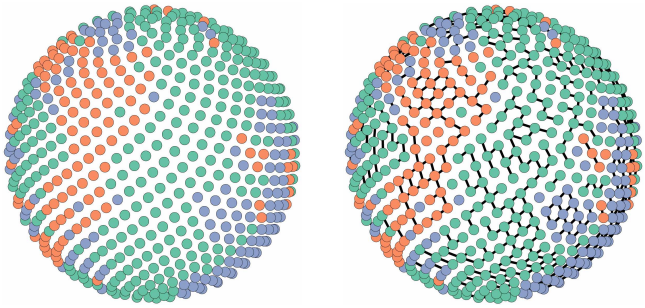


图3. Swendsen–Wang 算法中的键激活（$N = 1000$、$R = 10$和 $r_c/R = 0.1298$）。左：$T/J = 1.0$ 时、$q = 3$ 下的代表性自旋构型。右：叠加了激活的FK键的相同构型，这些键将自旋相同的邻居连接成 FK团簇。

$\{0, 1, \ldots, q-1\}$。哈密顿量定义为

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \tag{3}$$

其中，$\langle i, j \rangle$ 遍历所有满足 $d_{ij} < r_c$ 的相互作用对，$J > 0$ 为耦合常数，δ 为克罗内克δ函数。当 $q = 2$ 时，模型退化为伊辛模型。我们以 J/k_B 为单位测量温度 T，相应的玻尔兹曼权重为

$$P(\{\sigma_i\}) \propto \exp\left(\frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \right). \tag{4}$$

为方便起见，以下采用自然单位制，并令玻尔兹曼常数为 $k_B = 1$。在无限平面方格晶格上，q态波茨模型的临界温度精确为 $T_c^{2\mathrm{D}}(q)/J = 1/\ln(1+\sqrt{q})$ [29]，；当 $q \le 4$ 时，相变为二级，而当 $q > 4$ 时，相变为一级。在本文中，我们研究球面斐波那契晶格上 q 态波茨模型的相变性质。

我们使用 Swendsen-Wang 簇蒙特卡罗算法 [33–37]生成平衡构型。在 Fortuin-Kasteleyn (FK) 表示中，每条最近邻边 $\langle i, j \rangle$ 在满足 $\sigma_i = \sigma_j$时以概率 $p_{\mathrm{add}} = 1 - e^{-J/T}$ 激活；若满足 $\sigma_i \neq \sigma_j$，则保持未激活。这些激活的边将自旋相同的格点连接成 FK团簇。随后，将每个团簇作为整体重新赋予一个新的自旋值，该值从$\{0, \ldots, q-1\}$中均匀抽取。这种团簇翻转保持细致平衡，并显著抑制 T_c附近的临界减速。

在数值模拟中，对于每组参数（R、N、r_c）和 q，均在共同的温度范围 $T/J \in [0.01, 4.0]$ 内进行 Swendsen–Wang 团簇模拟，步长为 $\Delta T/J = 0.01$。在每个温度下，我们从随机初始构型开始，进行 $N_{\mathrm{eq}} = 2000$ 次平衡化扫描，随后每间隔 40 次扫描记录 $N_{\mathrm{samp}} = 100$ 个构型。保存的构型被视为近似不相关样本。

平衡自旋构型及其对应的激活的FK键均被记录；后者用于可视化团簇连通性（图 3）。这些构型还被用作后续机器学习分析的输入。图 3 展示了 $q = 3$ 在 $T/J = 1.0$ 时的 FK 团簇几何，该结果是在参数为 $N = 1000$、$R = 10$ 和 $r_c/R = 0.1298$ 的球面斐波那契晶格上获得的：左图显示自旋构型，右图叠加显示了一次 Swendsen-Wang 更新中的激活的FK键。由于键只在取值相同的自旋之间激活，键网络直接勾勒出 FK 团簇，并提供了相关结构的可视化。

B. 平面基准与基于二值化的图卷积网络估计器

在将图卷积网络应用于球面波茨模型之前，我们先在二维方格晶格上验证该方法。方格晶格可以表示为一个图，其中晶格点为节点，最近邻耦合为边。我们采用与球面伊辛分析 [25] 相同的图卷积网络架构：输入为自旋构型和邻接矩阵，输出为两个分量（p_{o}，p_{d}），表示对有序相和无序相的分类置信度。与处理平面图像的卷积神经网络相比，图卷积网络直接在图结构上运行，并在统一框架下处理规则和非规则晶格 [23]。

在平面 $q = 3$上直接训练。首先，我们在边长为 $L = 128$的方格晶格上，直接对二维 $q = 3$ 波茨模型训练图卷积网络。使用 Swendsen-Wang 算法，我们生成极低温 $T/J \in [0.01, 0.05]$ 下的平衡构型（标记为有序态，取值为（$p_{\mathrm{o}}, p_{\mathrm{d}}$）$= (1, 0)$），以及极高温 $T/J \in [100, 104]$ 下的平衡构型（标记为无序态，取值为（p_{o}，p_{d}）$= (0, 1)$） [1]。节点特征采用原始波茨自旋值 $\sigma_i \in \{0, 1, 2\}$，每个节点编码为一个标量

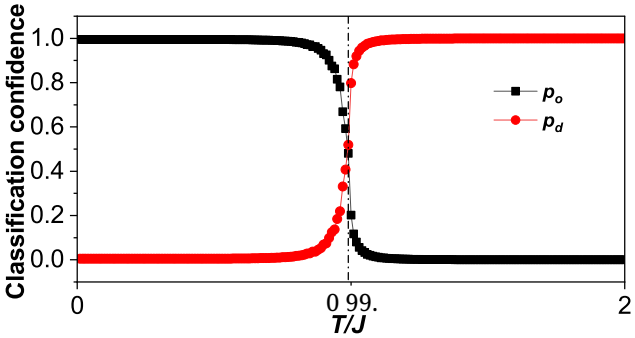


图4. 二维 $q = 3$ 波茨模型（$L = 128$）的 GCN 置信度。

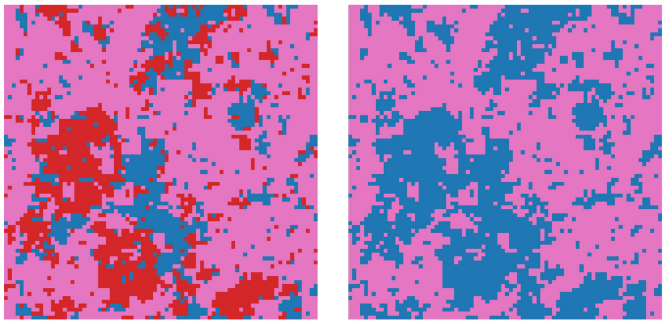


图5. 平面Potts构型（q=3）及其在 $T/J = 1.0$处二值化后的版本。左：Potts自旋 $\{\sigma_i\}$；右：二值化伊辛自旋 $\{s_i = \pm 1\}$（见方程5）。

节点。训练收敛后，我们冻结网络，并在 $T/J \in [0.01, 4.0]$ 上执行推理，得到$p_o(T)$和 $p_d(T)$。

图4展示了针对 q =3 得到的置信曲线。随着 T 增大，$p_o(T)$ 单调下降，而 $p_d(T)$ 相应上升。在我们的模拟分辨率（$\Delta T = 0.01J$）下，两条曲线于 $T/J \simeq 0.99$ 处相交，与精确临界值 $T_c^{2D}(3)/J \approx 0.9950$ 高度吻合。这一基准验证了：仅使用极端温度下的构型进行训练的图卷积网络，能够正确识别相变，从而捕捉底层畴结构的变化。

二值化与迁移学习。为每个 q 单独训练一个网络在计算上效率低下。近期的卷积神经网络研究表明，将 Potts 自旋适当地二值化为两组后，在伊辛模型上训练的网络可以迁移到 q 态波茨模型，而不会丢失临界信息 [38]。受此启发，我们在图卷积网络框架中采用二值化策略。对于给定的 q，我们将 q 自旋态划分为两组，并定义一个有效伊辛变量 $s_i = \pm 1$，如下：

$$s_i = \begin{cases} -1, & \sigma_i \in \{0, 1, \ldots, \lfloor (q-1)/2 \rfloor\}, \\ +1, & \sigma_i \in \{\lfloor (q-1)/2 \rfloor + 1, \ldots, q-1\}. \end{cases} \tag{5}$$

例如，对于 $q = 3$，我们选择 $s_i = -1$ 作为 $\sigma_i = 0$，并选择 $s_i = +1$ 作为 $\sigma_i = 1$，2。此映射将取 q 值的波茨场粗粒化为二值场，同时保持相互作用图不变。在团簇层面，它近似保留了与所选划分相关的畴的大尺度几何特征，尤其是分隔这两组的界面，同时舍弃同一组内不同波茨状态之间的差异。

在网络架构保持不变的情况下，我们使用二值化后的 s_i 作为输入，重新计算了 $q = 3$ 数据集的置信度曲线。如图 6 所示，交点仍位于 $T_c/J \approx 0.99$，这表明二值化不会破坏 Potts 簇几何结构所承载的临界信息。为直观展示这一点，图 5 比较了原始 Potts 构型与其二值化后的构型

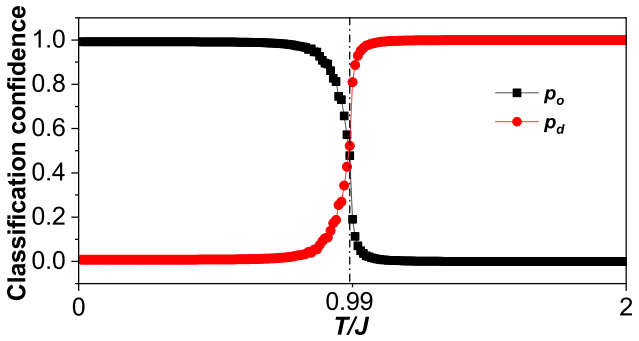


图6. 二值化后，二维 $q = 3$ 波茨模型（$L = 128$）的图卷积网络置信度曲线。

在 $T/J = 1.0$ 下对应于 $q = 3$的版本：大尺度簇轮廓基本保持不变。

基于这些观察，我们采用一种更经济的策略：在二维伊辛模型上训练单个图卷积网络，然后将其直接应用于二值化的 q 态波茨构型。具体而言，我们使用 $L = 128$伊辛模型进行训练，采用 $T/J \in [0.01, 0.05]$（有序态）和 $T/J \in [100, 104]$（无序态）下的构型，并将伊辛自旋$s_i = \pm 1$ 作为节点特征。训练完成后，所有参数均被冻结。随后，我们为 $q \in \{2, \ldots, 8, 10, 15\}$ 取值范围为$T/J \in [0.5, 1.5]$的平面波茨模型生成平衡构型，对每个构型进行二值化，并将其输入这个伊辛预训练GCN，以获得 p_o（T）和p_d（T）。

图7展示了带有$q \in \{2, \ldots, 8, 10, 15\}$的二维波茨模型的图卷积网络置信度曲线，$p_o(T)$和 $p_d(T)$。随着温度升高，$p_o(T)$单调下降，而 $p_d(T)$则相应上升。$p_o(T) \simeq p_d(T)$的交点随着 q 增大而向较低温度移动——这一趋势与 $T_c^{2D}(q)$的精确下降相符。此外，对于 $q > 4$，相变区域明显变得更加陡峭，体现了该相变预期的一级特征。

对 T_c 及不确定性进行自助法估计。为从置信曲线中提取定量的临界温度 $T_c(q)$，可以在一个

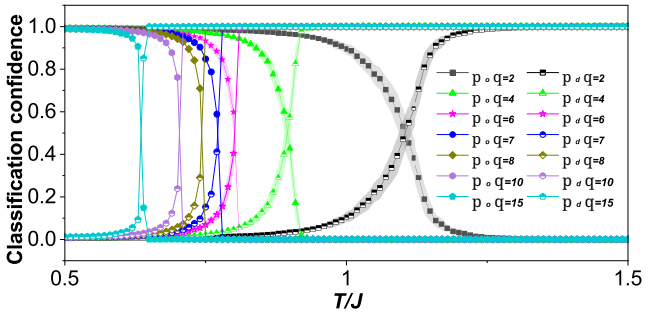


图7. 将伊辛预训练图卷积网络应用于温度范围 $T/J \in [0.5, 1.5]$ 内的二值化二维波茨模型构型，可得到置信度曲线 $p_o(T)$ 和 $p_d(T)$，对应于 $q \in \{2, \ldots, 8, 10, 15\}$ ($L = 128$)。

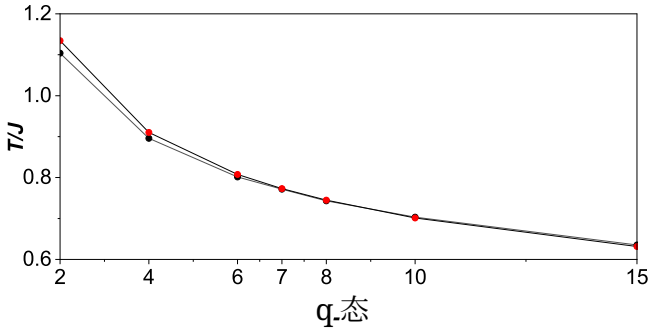


图8. 二维波茨模型（$L = 128$）的 $T_c(q)$。黑色：通过伊辛预训练图卷积网络和自助法得到的数值；红色：精确结果 $T_c^{2D}(q)/J = 1/\ln(1+\sqrt{q})$。

$p_o(T) = p_d(T)$狭窄区间内拟合交点。然而，对于一级相变，置信曲线在交点附近可能变化极快，导致常规误差传播不稳定。因此，我们采用自助法重采样 [39–41]：在每个温度下，对分类结果进行有放回重采样，以生成多个伪数据集；提取每个伪数据集的交点，并收集自助法样本 $\{T_c^{(b)}(q)\}$。随后将这组样本的均值和标准差分别作为最终估计值 $T_c(q)$及其统计不确定性。更多实现细节见附录 C。

采用这一自举程序，我们得到平面基准的临界温度为 $T_c^{(2D)}(q)/J$ ={1.1038(8) 0.9877(18) 0.8958(4) 0.8439(5) 0.8016(1), 0.7715(2) 0.7429(1) 0.7034(1) 0.6354(1)} for$q \in \{2, \ldots, 8, 10, 15\}$（不确定度对应末两位数字）。图 8 将这些数值与精确结果 $T_c^{2D}(q)/J = 1/\ln(1+\sqrt{q})$进行了比较，二者高度吻合。所报告的不确定度仅反映有限采样所产生的统计涨落。剩余的 $\sim 1\%$ 偏差归因于基于图卷积网络的估计器固有的小幅系统偏差；该偏差在网络超参数变化时仍保持稳定（见附录）。

平面基准表明：(i) 图卷积网络能够准确定位规则二维波茨模型的临界点；(ii) 经过二值化后，伊辛预训练 GCN 无需重新训练即可迁移到不同的 q，同时保留临界信息。因此，我们将同一框架应用于球面波茨模型，以量化曲率和球面拓扑相对于平面基准对 T_c 的影响。

C. 球面图卷积网络分析与几何效应

通过伊辛预训练图卷积网络实现 q 上的球面迁移。

在球面上，每个构型都被视为定义在球面斐波那契晶格上的标量场，其中节点对应晶格点，自旋作为节点特征，而边连接弦长距离小于截断距离 r_c 的格点对。我们首先仅使用球形伊辛模型（$q = 2$）以及参数 $R = 10$、$N = 1000$ 和 $r_c/R = 0.1298$ 对图卷积网络进行训练。来自低温区间 $T/J \in [0.01, 0.05]$ 的构型被标记为有序态，而来自高温区间 $T/J \in [100, 104]$ 的构型被标记为无序态。训练完成后，网络参数被冻结。随后，将这个冻结的图卷积网络直接应用于 $q > 2$ 的二值化球面 Potts 构型。

$q = 3$ 在$T/J = 1.0$ 下的典型球面 Potts 构型及其二值化对应结果如图 9 所示。二值化后，大尺度的簇边界和特征长度尺度得以保留，而原始的 Potts 状态则被压缩为两个有效类别。这种二值化过程中的视觉一致性，为将球面伊辛预训练图卷积网络迁移到球面上的多状态 Potts 模型提供了几何上的依据。

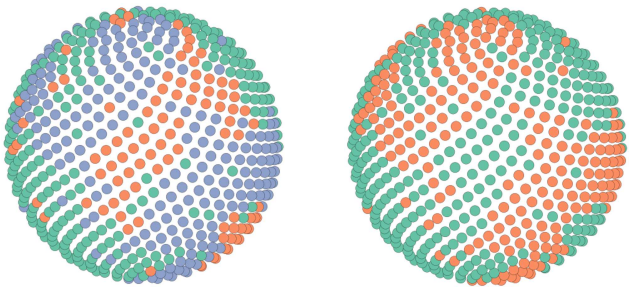


图 9. 球面 Potts 构型及其二值化版本（$q = 3$；左侧为原始版本，右侧为二值化版本），位于 $T/J = 1.0$。

在 $q = 3$ 处进行迁移基准测试。为了验证在球面图上的迁移策略，我们首先在 $q = 3$ 处进行基准测试。图 10 上图展示了由直接在球面 $q = 3$ 构型上训练的图卷积网络得到的置信曲线，其交点位于 $T_c/J \approx 0.98$。下图展示了我们的主要迁移方法：首先将球面 $q = 3$ 构型二值化，然后输入冻结的图卷积网络

该网络预先在球形伊辛模型上训练。此过程得到的交点位于 $T_c/J \approx 1.01$。两种估算结果相差仅几个百分点，证实了基于二值化的迁移策略是有效的。

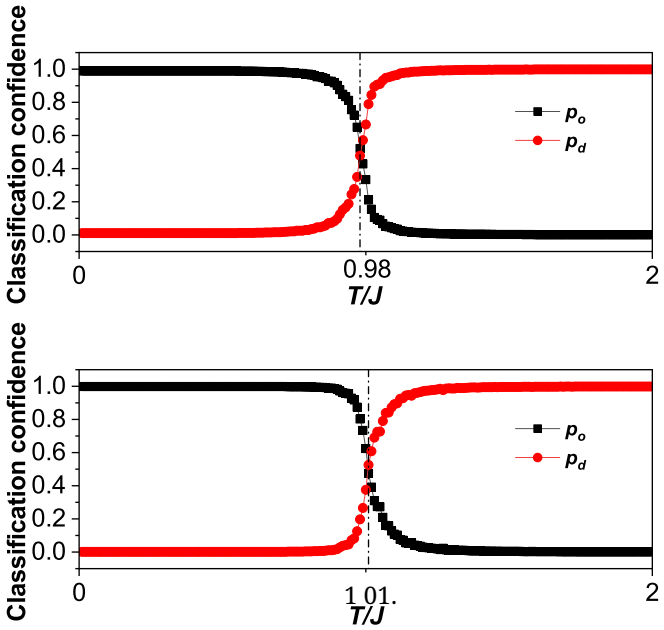


图 10. 球面 $q = 3$ 波茨图卷积网络置信度曲线：直接训练（上）与基于二值化数据进行球面伊辛预训练后的迁移学习（下）。

完成上述验证后，我们将相同的球面伊辛预训练图卷积网络应用于固定图上的球面波茨模型，其中 $q \in \{2, \ldots, 8, 10, 15\}$。为与二维波茨模型在 $L = 128$ 下的 $T_c(q)$ 平面结果直接比较，几何设置如下：$N = 128 \times 128 = 16384$、$R = 10$ 和 $r_c/R = 0.0321$。该几何的配位统计为（N_3、N_4、N_5）=(210, 15658, 516)，平均配位数为 $\bar{z} \simeq 4.018$。因此，约 95.6% 的节点为四配位，其余 $\sim 4.4\%$ 为三配位或五配位缺陷。图11（上）显示了所得的 GCN 置信度曲线 $p_o(T)$ 和 $p_d(T)$。随着 q 增大，交叉温度 $p_o(T) \simeq p_d(T)$ 向较低值移动，且对于 $q > 4$，交叉行为明显变得更加尖锐，这与一级相变相符。自助法分析给出 $T_c^{\mathrm{sph}}(q)/J$ ={1.1273(6) 0.9976(10) 0.9072(3) 0.8519(3), 0.8095(3) 0.7734(1) 0.7441(1) 0.7042(1) 0.6349(1)}对于 $q \in \{2, \ldots, 8, 10, 15\}$。对于 $q = 2$，提取出的 T_c与我们此前的球面斐波那契格点 Ising 研究 [25]一致。

与方格晶格不同，方格晶格中的有限尺寸效应往往十分显著；我们先前的球面伊辛研究表明，在相同的图构造方案下，增加固定球面上的斐波那契点数量 N，推得的相变温度仅发生微弱变化。因此，我们不再进行

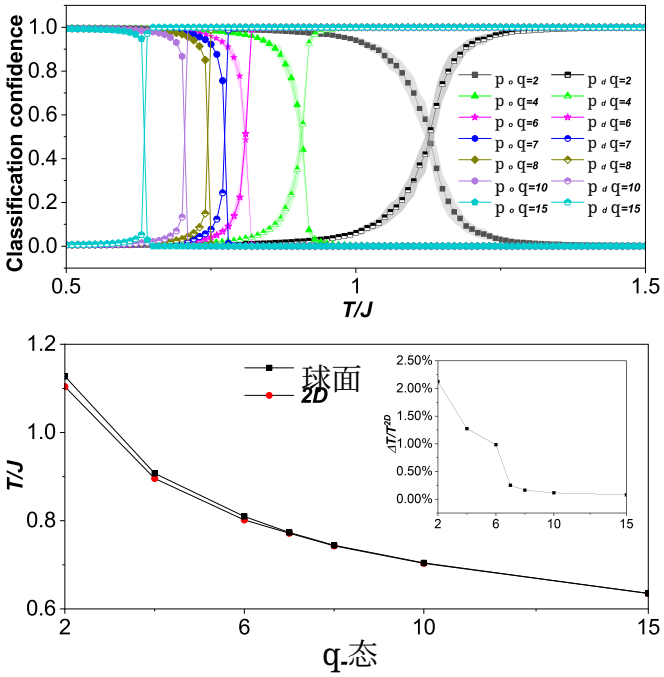


图11. 球面波茨模型结果与平面基准线的比较。上：固定球面斐波那契图（$N = 128 \times 128 = 16384$、$R = 10$和 $r_c/R = 0.0321$）上二值化 $q \in \{2, \ldots, 8, 10, 15\}$ 的 GCN置信度曲线 p_o（T）和 p_d（T）。下：临界温度随 q的变化：球面 T_c^{sph}（q）（黑色）与方格晶格（红色）上的平面 $T^{2}{}_{\mathrm{Dc}}$（q）进行比较。插图显示了球面与平面临界温度 ΔT之间的相对差异，并以平面临界温度 $T_c^{2\mathrm{D}}$归一化。

球面波茨模型的明确有限尺寸分析。相反，我们采用 $N = 16384$ 作为具有代表性的球面离散化，并用它来量化相对于平面基准的几何偏移。

将 N =16384 处的球面估计值与平面基准进行比较，对于 $q \in \{2, \ldots, 8, 10, 15\}$，$T_c^{(2\mathrm{D})}(q)/J$ = {1.1038, 0.9877, 0.8958, 0.8439, 0.8016, 0.7715, 0.7429, 0.7034, 0.6354}，我们得到相对偏移量（$T_{球面c}$ − $T_{(二维)c}$）/$T_{(二维)c}$ = $\Delta T/T^{2\mathrm{D}c}$ ≈{2.13% 1.00% 1.27% 0.95% 0.98% 0.25% 0.16%, 0.11% −0.08%}，对应相同序列的 q。因此，球面-平面差异会随着 q 快速减小：对于 $q < 6$，差异约为 1%；而对于 $q \geq 7$，则急剧降至 0.25% 以下。

对于 $q > 4$，这种行为可以从二维波茨模型的弱一级相变机制自然地理解。众所周知，$q = 4$ 标志着连续相变与一级相变之间的临界边界。对于 $q > 4$，严格来说，该相变是一级相变；然而，当q 仅略大于 4（通常为 $q = 5$、6）时，一级相变特征极弱，并伴有显著的赝临界行为。在此区间内，潜热极小，且相变附近的关联长度异常巨大，因此

表I. 不同截断距离 r_c/R 下球面斐波那契图（$R = 10$, $N = 1000$）的配位统计。

r_c/R	N_3 (w_3)	N_4 (w_4)	N_5 (w_5)	N_6 (w_6)	N_7 (w_7)	N_8 (w_8)
0.1298	76 (7.6%)	850 (85%)	74 (7.4%)	–	–	–
0.1500	–	26 (2.6%)	240 (24%)	734 (73.4%)	–	–
0.1700	–	–	8 (0.8%)	722 (72.2%)	224 (22.4%)	46 (4.6%)

比热和磁化率等可观测量在有限长度尺度 [42–44]上呈现出表观的近发散行为，这是连续相变的典型特征。从重整化群的角度来看，这种弱一级行为源于不动点湮灭及其伴随的行走动力学；它们在有限尺度上形成宽广的准临界（交叉）区间，而系统最终会在尺度足够大时流向真正的一级相变 [45]。

在这一宽广的准临界区间内，球面 Fibonacci 图、整体曲率以及少量配位缺陷所引入的微弱几何扰动，更容易改变涨落和簇几何。因此，从分类器交点中提取的表观临界温度 T_c 会发生百分比量级的偏移。随着 q 增加，一级相变特征增强，关联长度迅速减小。因此，相应的交叉窗口显著变窄，从而有效降低了所提取的 T_c 对几何扰动的敏感性。这自然解释了为什么对于 $q \geq 7$，球面-平面差异会迅速降至 10^{-3} 水平。

固定 N时截断距离和平均配位数的影响。最后，我们通过改变截断距离 r_c ，同时保持 $R = 10$ 和$N = 1000$不变，研究局部连通性如何影响T_c 。三种取值 r_c/R =0.1298、0.1500、0.1700对应的配位分布列于表I中。对于 $r_c/R = 0.1298$ ，图主要由四邻居位点组成（$\bar{z} \simeq 3.998$）；对于 r_c/R =0.1500，五邻居和六邻居位点占主导（$\bar{z} \simeq 5.71$）；而对于 $r_c/R = 0.1700$，六邻居、七邻居和八邻居位点占主导（$\bar{z} \simeq 6.31$）。因此，通过调节 r_c，我们可以在同一球面上，从稀疏的、近似四邻居网络过渡到连接稠密的图。

相应的 $T_c^{\mathrm{sph}}(q;\, r_c)$ 数值列于表II中。对于每个 q，T_c^{sph}均随r_c显著上升。以 $q = 3$为例，$T_c^{\mathrm{sph}}(3;$ r_c/R =0.1298、0.1500、0.1700)$/J \simeq$ (1.0085、1.5254、1.7058)，当连通性从稀疏变为稠密时，数值约增加一倍。这一趋势适用于所有 q：随着平均配位数 $\bar{z}$ 从 ~ 4.0 增至 ~ 6.3，T_c^{sph}系统性地向上移动，而 T_c 随 q 单调下降的趋势保持不变。这些发现表明，局部连通性的变化主要会对 T_c的整体幅度进行缩放，而

表II。不同 r_c/R下、$N = 1000$ 处的球面波茨临界温度 T_c^{sph}（q; r_c）。

q	$r_c/R = 0.1298$	$r_c/R = 0.1500$	$r_c/R = 0.1700$
2	1.1564(16)	1.7544(33)	1.9630(47)
3	1.0085(15)	1.5254(33)	1.7058(32)
4	0.9081(8)	1.3665(15)	1.5191(20)
5	0.8496(8)	1.2722(26)	1.4178(11)
6	0.8048(2)	1.2042(4)	1.3296(12)

自旋多重度 q 决定了相变阶数以及临界温度对 q的相对依赖关系。

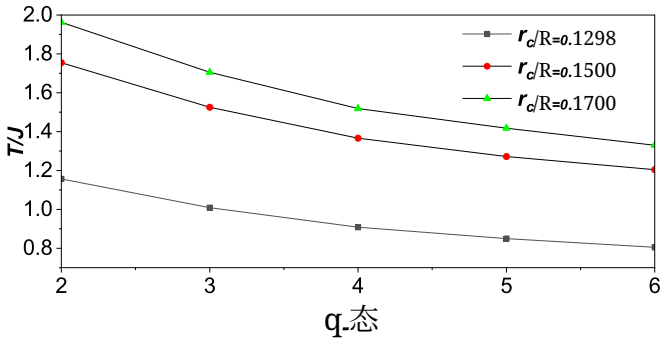


图 12. 固定 $R = 10$和 $N = 1000$时，不同截断距离 $r_c/R = 0.1298$、0.1500、0.1700 对应的临界温度 $T_c^{\mathrm{sph}}(q;\, r_c)$ 随 q的变化。

总之，这些结果表明，球面伊辛预训练图卷积网络能够可靠地迁移到二值化球面波茨模型，其得到的临界温度与平面基准高度吻合。对于局部四邻居图，球面斐波那契晶格上的临界温度已与平面基准高度一致，而曲率和配位缺陷带来的偏移仅为百分比量级。随着 q 增大，球面与平面之间的差异迅速减小；这可从波茨相变的弱一级特性自然地加以解释，尤其是对于$q > 4$：当 q 仅略高于 4 时，宽广的准临界区会增强系统对微弱几何扰动的敏感性；而在较大的 q 下，增强的一级特性会显著缩窄交叉行为窗口，从而有效降低提取出的T_c 对几何效应的敏感性。固定 N时，改变 r_c 主要会使每个 q的整体相变温度按比例缩放，而 $T_c(q)$的函数形式基本保持不变。总体而言，这些观察结果支持将几何影响（曲率和连通性）与自旋多重度 q的内在作用明确区分开来，而这两者均由统一的基于GCN的框架加以捕捉。

IV. 结论

我们研究了球面斐波那契图上的铁磁性 q态波茨模型，量化了曲率

和不规则配位数相较于平面基准对相变的影响。球面图采用弦距离截断构建，该截断使局部四配位最大化，从而形成以四邻网络为主、配位缺陷比例受控的网络。我们使用 Swendsen-Wang 簇算法生成平衡构型，并记录 Fortuin-Kasteleyn 键以可视化连通性。

我们使用直接作用于图邻接矩阵和节点自旋的图卷积网络（GCN）来确定临界温度。在平面晶格上验证该方法后，我们提出了一种基于自旋二值化的迁移策略。这样，无需重新训练，就能将经过伊辛预训练的 GCN 应用于不同的 q 。即使在一级相变附近，自助重采样也能提供稳健的 T_c 估计。

对于近似四邻居的球面图， T_c 中的曲率诱导偏移在q 较小时最为明显（对于 $q < 7$，约为 $1 - 2\%$），而对于 $q \geq 7$则降至约 0.2% 或更低。这与 $q > 4$下波茨相变的弱一级特征一致，意味着较小的 q 会增强几何敏感性，而随着 q 增加，这类效应会迅速减弱。在N固定时，提高截断距离 r_c （从而提高平均配位数 $\bar{z}$）主要会使所有 q的 T_c 上移，同时单调的 q依赖关系和相变级数保持不变。这些结果清晰地区分了几何效应（即曲率和连通性）与自旋多重度 q的作用。

更广泛地说，本研究表明，图卷积网络为规则图和弯曲图上的相分类提供了统一框架，且两者使用相同的邻接关系与自旋输入表示。球面斐波那契离散化、簇蒙特卡罗采样与基于二值化的迁移学习相结合，为研究非欧几何上的多态模型提供了一种可扩展的方法。该框架还可扩展至其他弯曲流形、不同的图构造方式，或更高的 q 区域，在这些区域中一级行为会更加显著。代码和图生成器可在合理请求后提供。

V. 致谢

H. G. 获量子科学与技术创新计划—国家科技重大专项（项目编号：2021ZD0301904）和国家自然科学基金委员会（项目编号：12447216）资助。X. Y. H. 获国家自然科学基金委员会（项目编号：12405008）资助。

Zheng Zhou 和 Xu-Yang Hou 对本工作贡献相同。

附录 A：球面波茨模型的 Swendsen-Wang 簇更新

我们使用 Swendsen–Wang（SW）簇蒙特卡罗算法，在球面斐波那契图上生成铁磁 q态波茨模型的平衡构型。本节概述在非规则相互作用图上进行的一次 SW扫描。

相互作用图。系统定义在嵌入半径为 R 的球面上的图 $G = (V, E)$上，其中$|V| = N$ 个格点位于斐波那契坐标 $\{\boldsymbol{r}_i\}_{i=1}^{N}$处。如果两个格点 i 和 j 之间的弦长距离

$$d_{ij} \equiv |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| \tag{A1}$$

满足 $d_{ij} < r_c$，则二者相连。我们将相互作用对记为 $\langle i, j\rangle \in E$。该图上的波茨哈密顿量为

$$H(\{\sigma\}) = -J \sum_{\langle i,j\rangle} \delta_{\sigma_i,\sigma_j}, \qquad \sigma_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}, \quad J > 0, \tag{A2}$$

逆温度为 $\beta \equiv 1/T$ （令 $k_B = 1$）。

Fortuin–Kasteleyn键激活。SW算法在 Fortuin–Kasteleyn (FK) 表示中使用辅助键变量。给定自旋构型 $\{\sigma_i\}$，仅当两个自旋相同时，才会在边 $\langle i, j\rangle$ 上激活一条键：

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{with probability } p_{\text{add}} = 1 - e^{-\beta J}, \text{ if } \sigma_i = \sigma_j, \\ 0, & \text{if } \sigma_i \neq \sigma_j. \end{cases} \tag{A3}$$

因此，键只会出现在同类自旋区域内。

簇识别与重新着色（一次 SW 扫描）。令 $E_{\text{act}} = \{\langle i, j\rangle \in E : \ b_{ij} = 1\}$ 为激活键的集合。子图 (V, E_{act}) 分解为连通分量（FK团簇） $\{C_\alpha\}$。

一次 SW 扫描步骤如下：

1. 键构造： 根据方程（A3）对所有 b_{ij} 进行采样。

2.簇重新着色： 对于每个 FK团簇 C_α，均匀随机选择一个新的波茨状态 $\sigma'_\alpha \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ 并将其赋予该团簇

$$\sigma_i \leftarrow \sigma'_\alpha, \qquad \forall\, i \in C_\alpha. \tag{A4}$$

通过整体重新赋予整个簇状态，该更新执行非局部移动，能够在临界性附近有效地去相关长波长涨落。

细致平衡与效率。SW 更新可视为在联合FK自旋—键系综中交替进行条件采样：先在给定自旋的条件下采样键，再在给定键的条件下采样自旋。这一构造确保马尔可夫链满足细致平衡，并以正确的玻尔兹曼分布作为其平稳分布。与局部单自旋

更新相比，簇翻转通过将强相关区域作为一个整体进行更新，大幅缓解了临界减速。

附录 B：图卷积网络架构和训练细节

我们将每个自旋构型视为定义在相互作用图上的图信号。图卷积网络（GCN）以图连通性和节点自旋为输入，并输出有序相和无序相对应的两个置信度分数。

相互作用图和矩阵。对于半径为 R 的球面上的球面斐波那契点集 $\{\boldsymbol{r}_i\}_{i=1}^{N}$，我们构造一个具有 $\mathcal{V}=\{1,\dots,N\}$ 的无权无向相互作用图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$。如果两个顶点 i 和 j 之间的弦长距离 $d_{ij}=|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|$ 小于截断半径 r_c，则将它们连接起来。邻接矩阵$\boldsymbol{A}\in\{0,1\}^{N\times N}$ 定义为

$$A_{ij}=\begin{cases}1, & i\neq j \text{ and } d_{ij}<r_c,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases} \tag{B1}$$

度矩阵为 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_N)$，其中 $d_i=\sum_j A_{ij}$。我们使用随机游走归一化拉普拉斯矩阵

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{rw}}=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}). \tag{B2}$$

图卷积网络仅使用 $\boldsymbol{A}$（因此也使用 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{rw}}$）；显式坐标 $\{\boldsymbol{r}_i\}$ 仅用于构建连通性。

节点特征。对于每个蒙特卡罗构型，我们构造一个节点特征矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{N\times F}$。对于伊辛模型，$F=1$ 和 $X_i=s_i\in\{-1,+1\}$。对于波茨模型，我们使用原始波茨标签 $X_i=\sigma_i$（用于在固定 q 下直接训练），或者使用下文定义的二值化变量$X_i=s_i$（用于跨 q 进行迁移学习）。

图卷积层。单个图卷积层的实现形式如下：

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{ReLU}\left(\boldsymbol{L}^{\mathrm{rw}}\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{W}_h+\boldsymbol{b}_h\right), \tag{B3}$$

其中，$\boldsymbol{W}_h\in\mathbb{R}^{F\times F_h}$ 是可训练权重矩阵，$\boldsymbol{b}_h\in\mathbb{R}^{F_h}$ 是可训练偏置（广播至所有节点），逐元素应用 $\mathrm{ReLU}(x)=\max(x,0)$，而 $\boldsymbol{H}\in\mathbb{R}^{N\times F_h}$ 是隐藏节点嵌入。

图级读出与置信度输出。为对整个构型进行分类，我们通过全局平均池化聚合节点嵌入，

$$\boldsymbol{h}_{\mathcal{G}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{H}_i\in\mathbb{R}^{F_h}, \tag{B4}$$

随后通过一个全连接层生成两个逻辑值，

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{W}_{\mathrm{o}}\,\boldsymbol{h}_{\mathcal{G}}+\boldsymbol{b}_{\mathrm{o}}\in\mathbb{R}^2, \tag{B5}$$

以及一个 Softmax 输出

$$(p_{\mathrm{o}},p_{\mathrm{d}})=\mathrm{softmax}(\boldsymbol{z}),\qquad \mathrm{softmax}(z_k)=\frac{\mathrm{e}^{z_k}}{\sum_{\ell=1}^{2}\mathrm{e}^{z_\ell}}. \tag{B6}$$

这里，p_{o} 和 p_{d} 分别被解释为有序相和无序相的置信度。

极端温度下的监督训练。网络采用监督方式进行训练，使用极端温度下生成的构型：低温构型标记为有序态 (1,0)，高温构型标记为无序态 (0,1)。将真实标签记为 $\boldsymbol{y}\in\{(1,0),(0,1)\}$，我们最小化交叉熵损失

$$\mathcal{L}=-\sum_{k\in\{o,d\}}y_k\ln p_k. \tag{B7}$$

训练收敛后，网络参数将被冻结。随后，对目标温度范围内采样的构型进行推理，得到置信度曲线 $p_{\mathrm{o}}(T)$ 和 $p_{\mathrm{d}}(T)$。

二值化（波茨 $\to$伊辛），用于跨越 q 迁移。为了对不同的 q 使用同一个经 Ising 预训练的分类器，我们将 Potts 自旋 $\sigma_i\in\{0,1,\dots,q-1\}$ 映射为二值变量 $s_i=\pm1$：

$$s_i=\begin{cases}-1, & \sigma_i\in\{0,1,\dots,\lfloor(q-1)/2\rfloor\},\\ +1, & \sigma_i\in\{\lfloor(q-1)/2\rfloor+1,\dots,q-1\}.\end{cases} \tag{B8}$$

对于偶数和奇数 q，此规则均无歧义。在迁移设置中，我们将式 (B8) 应用于每个波茨构型以获得 $\{s_i\}$，并将 $\boldsymbol{X}=(s_1,\dots,s_N)^T$输入同一相互作用图上冻结的伊辛预训练图卷积网络。

从置信曲线估计 T_c。对于每个 q，我们将相变区域确定为满足$p_{\mathrm{o}}(T)\simeq p_{\mathrm{d}}(T)$ 的温度。在离散温度网格上，这对应于 $p_{\mathrm{o}}(T)-p_{\mathrm{d}}(T)$ 发生符号变化的区间。随后，通过插值或正文中描述的自举程序提取临界温度 T_c。

附录 C：T_c 的自助法估计与系统偏差讨论

对于每个温度 T_i，训练后的 GCN 针对每个构型输出一个双分量 logit 向量 $\boldsymbol{o}=(o_{\mathrm{o}},o_{\mathrm{d}})$。我们通过 softmax 函数将逻辑值转换为分类置信度：

$$p_{\mathrm{o}}=\frac{\mathrm{e}^{o_{\mathrm{o}}}}{\mathrm{e}^{o_{\mathrm{o}}}+\mathrm{e}^{o_{\mathrm{d}}}},\qquad p_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{e}^{o_{\mathrm{d}}}}{\mathrm{e}^{o_{\mathrm{o}}}+\mathrm{e}^{o_{\mathrm{d}}}},\qquad (p_{\mathrm{o}}+p_{\mathrm{d}}=1). \tag{C1}$$

曲线 $p_{\mathrm{o}}(T)$ 和 $p_{\mathrm{d}}(T)$ 分别表示有序态和无序态的置信度。由于 $p_{\mathrm{o}}+p_{\mathrm{d}}=1$，判据 $p_{\mathrm{o}}=p_{\mathrm{d}}$ 等价于 $p_{\mathrm{o}}=0.5$。

温度分组与样本均值。数据按温度分组：对于每个 T_i，我们有 N_{samp} 个平衡构型（在我们的实现中为 $N_{\mathrm{samp}}=100$ 个）。令 $\{p_{o,i}^{(k)}\}_{k=1}^{N_{\mathrm{samp}}}$ 表示在 T_i 下预测的有序态置信度值。经验均值

置信度为

$$\widehat{p}_{\mathrm{o}}(T_i) = \frac{1}{N_{\mathrm{samp}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{samp}}} p_{o,i}^{(k)}. \tag{C2}$$

自助重采样。为估计每个温度下有限采样导致的 T_c 统计不确定性，我们在每个 T_i 下分别进行非参数自助法。对于第 b 次自助重采样，我们进行有放回抽样：

$$\{p_{o,i}^{(k)}\}_{k=1}^{N_{\mathrm{samp}}} \;\longrightarrow\; \{p_{o,i}^{*(k)}\}_{k=1}^{N_{\mathrm{samp}}}, \tag{C3}$$

并计算重采样均值：

$$\widehat{p}_{\mathrm{o}}^{(b)}(T_i) = \frac{1}{N_{\mathrm{samp}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{samp}}} p_{o,i}^{*(k)}. \tag{C4}$$

对所有 i 重复此过程，即可得到置信曲线 $\widehat{p}_{\mathrm{o}}^{(b)}(T)$ 的一次自助法实现。

从每条自助法曲线中提取 T_c 。对于每条自助法曲线，我们将相变定位为 $\widehat{p}_{\mathrm{o}}^{(b)}(T)$ 穿过 0.5 的第一个温度区间。定义

$$\Delta_i^{(b)} = \widehat{p}_{\mathrm{o}}^{(b)}(T_i) - 0.5. \tag{C5}$$

如果 $\Delta_i^{(b)}\Delta_{i+1}^{(b)} < 0$，则 T_i 与 T_{i+1} 之间存在交点。如果由于噪声出现多个交点，我们取温度最低的交点（第一次符号变化）来定义 $T_c^{(b)}$。

给定交点区间（T_i,T_{i+1}），我们通过线性插值估计 $T_c^{(b)}$:

$$T_c^{(b)} = T_i + \frac{0.5 - \widehat{p}_{\mathrm{o}}^{(b)}(T_i)}{\widehat{p}_{\mathrm{o}}^{(b)}(T_{i+1}) - \widehat{p}_{\mathrm{o}}^{(b)}(T_i)} \, (T_{i+1} - T_i). \tag{C6}$$

在扫描的温度范围内未显示交点的自助法重复样本将被丢弃。

最终估计与不确定性。汇总所有有效的自助法估计值 $\{T_c^{(b)}\}_{b=1}^{N_{\mathrm{boot}}}$（其中 $N_{\mathrm{boot}} = 2000$），我们报告

$$\overline{T_c} = \frac{1}{N_{\mathrm{eff}}} \sum_{b=1}^{N_{\mathrm{eff}}} T_c^{(b)}, \quad \delta T_c = \sqrt{\frac{1}{N_{\mathrm{eff}} - 1} \sum_{b=1}^{N_{\mathrm{eff}}} \left(T_c^{(b)} - \overline{T_c}\right)^2}, \tag{C7}$$

其中， N_{eff} 是出现交点的自助法副本数。不确定度 δT_c 量化了每个温度下有限构型采样导致的统计涨落；它不包括有限温度步长 ΔT、有限尺寸修正或模型/架构依赖性带来的系统效应。

[1] G. Carleo 和 M. Troyer，利用人工神经网络求解量子多体问题，《科学》355，602（2017年）。[2] J. Carrasquilla 和 R. G. Melko，机器学习物质的相，《自然 · 物理》 13，431（2017年）。[3] D. L. Deng、X. Li 和 S. DasSarma，神经网络态中的量子纠缠，《物理评论X》7，021021（2017年）。[4] P. Zhang、H. Shen 和 H. Zhai，利用神经网络学习拓扑不变量，《物理评论快报》120，066401（2018年）。[5] K. Ch'ng、J. Carrasquilla、R. G. Melko 和 E. Khatami，机器学习强关联费米子的相，《物理评论X》7，031038（2017年）。[6] C.-D. Li、D.-R. Tan 和 F.-J. Jiang，神经网络在二维波茨模型相变研究中的应用，《物理学年鉴》391，312（2018年）。[7] D. Kim 和 D.-H. Kim，学习伊辛临界性的最小神经网络，《物理评论E》98，022138（2018年）。

[8] L. Wang，《通过无监督学习发现相变》，《物理评论B》94，195105（2016年）。[9] Z. Li、M. Luo 和 X. Wan，《利用卷积神经网络通过有限尺寸标度提取临界指数》，《物理评论B》99，075418（2019年）。[10] D. Bachtis、G. Aarts 和 B. Lucini，《将不同的相变映射到神经网络》，《物理评论E》102，053306（2020年）。[11] A. Canabarro、F. F. Fanchini、A. L. Malvezzi、R. Pereira 和 R. Chaves，《利用机器学习揭示相变》，《物理评论B》100，045129（2019年）。[12] F. D'Angelo 和 L. B¨ottcher，《利用生成式神经网络学习伊辛模型》，《物理评论研究》2，023266（2020年）。[13] S. J. Wetzel，《相变的无监督学习：从主成分分析到变分自编码器》，《物理评论E》96，022140（2017年）。[14] K. Mills 和 I. Tamblyn，《用于通过观测进行直接、无特征学习的深度神经网络：二维自旋模型案例》，《物理评论E》97，032119

（2018年）。[15] A. Morningstar 和 R. G. Melko，《在临界性附近对伊辛模型进行深度学习》，《机器学习研究杂志》18，1（2018年）。[16] A. Tanaka 和 A. Tomiya，《通过卷积神经网络检测相变》，《日本物理学会志》86，10 7566 86 063001 2017年。/JPSJ. .（）。[17] E. P. L. van Nieuwenburg、Y.-H. Liu 和 S. D. Hu-ber，《通过混淆学习相变》，《自然物理》13，435（2017年）。[18] C. Alexandrou、A. Athenodorou、C. Chrysostomou 和 S. Paul，《通过深度学习自编码器研究二维伊辛模型的临界温度》，《欧洲物理学杂志B辑》93，10.1140/epjb/e2020-100506-5（2020年）。[19] I. Corte、S. Acevedo、M. Arlego 和 C. A. Lamas，《探索神经网络训练策略以确定受挫磁性模型中的相变》，《计算材料科学》198，10 1016 2021 110702 2021年。/j.commatsci. .（）。[20] H. M. Yau 和 N. Su，《自旋模型中人工神经网络的泛化能力》，《SciPost物理核心》5，10.21468/SciPostPhysCore.5.2.032（2022年）。[21] M. J. S. Beach、A. Golubeva 和 R. G. Melko，《在科斯特利茨–托利亚斯跃迁处利用机器学习研究涡旋》，《物理评论B》97，045207（2018年）。[22] W. Zhang、J. Liu 和 T.-C. Wei，《渗流模型和 XY模型中的相变机器学习》，《物理评论E》99，032142（2019年）。[23] C.-H. Song、Q.-C. Gao、X.-Y. Hou、X. Wang、Z. Zhou、Y. He、H. Guo 和 C.-C. Chien，《在球面斐波那契晶格上对xy 模型进行机器学习》，《物理评论研究》4，023005（2022年）。[24] J. Zhou、G. Cui、S. Hu、Z. Zhang、C. Yang、Z. Liu、L. Wang、C. Li 和 M. Sun，《图神经网络：方法与应用综述》，《AI Open》1，57（2020年）。[25] Z. Zhou、C.-H. Song、X.-Y. Hou 和 H. Guo，《在球面斐波那契晶格上对伊辛模型进行机器学习》，《新物理学杂志》27，124601（2025年）。[26] M. KLEMAN，《曲面晶体、缺陷与无序》，《现代物理评论》38，605（1989年）。[27] W. Janke 和 R. Villanova，《三维随机晶格上的伊辛模型：蒙特卡罗研究——第134208号文章》，《物理评论B》66，10.1103/Phys-RevB.66.134208（2002年）。[28] L. Giomi，*Unordinary order: A theoretical, computational and experimental investigation of crystalline order in curved space* 2009（雪城大学，）。[29] F. WU，《波茨模型》，《现代物理评论》54，235（1982年）。[30] A. Gonzalez，《利用斐波那契晶格和经纬度格点测量球面面积》，《数学地球科学》42，49（2010年）。[31] J. H. Hannay 和 J. F. Nye，《球面上的斐波那契数值积分》，《物理学杂志A辑：数学与通论》37，11591（2004年）。[32]B. Keinert、M. Innmann、M. Saenger 和 M. Stamminger，《球面斐波那契映射》，《ACM图形学汇刊》34，10.1145/2816795.2818131（2015），ACM SIGGRAPH亚洲会议，日本神户，2015年11月2日至5日。[33] R. EDWARDS 和 A. SOKAL，《Fortuin-Kasteleyn-Swendsen-Wang表示及蒙特卡罗算法的推广》，《物理评论D》38，2009（1988）。[34] A. Galanis、D. Stefankovic 和 E. Vigoda，《平均场Potts模型上的Swendsen-Wang算法》，《随机结构与算法》54，82（2019）。[35] A. Barbu 和 S.-C. Zhu，《将Swendsen-Wang推广至任意后验概率采样》，《IEEE模式分析与机器智能汇刊》27，1239 2005( )。[36] A. Blanca 和 R. Gheissari，《通过Swendsen-Wang动力学对低温下的波茨模型进行采样》，载于 *2023 IEEE 64TH ANNUAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE, FOCS*，IEEE计算机科学基础年度研讨会（IEEE；IEEE计算机学会计算机科学数学基础技术委员会，2023），第2006–2020页，第64届IEEE计算机科学基础年度研讨会（FOCS），加利福尼亚州圣克鲁斯，2023年11月6日至9日。[37] D. Ivaneyko、J. Ilnytskyi、B. Berche 和 Y. Holovatch，《随机位点伊辛模型的临界性：Metropolis、Swendsen-Wang和Wolff蒙特卡罗算法》，《凝聚态物理》8，149（2005）。[38] K. Fukushima 和 K. Sakai，《在伊辛模型上训练的卷积神经网络能否检测q态波茨模型的相变？》，《理论与实验物理进展》2021，10 1093 057 2021。/ptep/ptab（）。[39] B. Efron，《自助法：重新审视刀切法》，载于 *Breakthroughs in statistics: Methodology and distribution* 1992 569 593（Springer，），第–页。[40] H. Kawano 和 T. Higuchi，《空间物理学中的自助法：最小方差分析的误差估计》，《地球物理研究快报》22，307（1995）。[41] C.-Y. Lee，*Size Scaling in Ising Model*，博士论文（2022）。[42] K. Binder，《二维q态波茨模型的静态与动态临界现象》，《统计物理学杂志》24，69（1981）。[43] E. Buddenoir 和 S. Wallon，《一级相变点处波茨模型的关联长度》，《物理学杂志A辑：数学与通论》26，3045（1993）。[44] S. Iino、S. Morita、N. Kawashima 和 A. W. Sandvik，《探测二维Potts模型中弱一级相变的信号》，《日本物理学会志》88，034006（2019）。[45] V. Gorbenko、S. Rychkov 和 B. Zan，《步行行为、弱一级相变与复共形场论 II：$Q > 4$处的二维波茨模型》，SciPost Phys. 5，050（2018）。