arXiv:2601.07352v1 [math.RT] 12 Jan 2026

外三角范畴上容许模型结构的同伦范畴

SHUN-JIE LI、YANG GAO、PU ZHANG*

上海交通大学数学科学学院，上海 200240，中国

Abstract. 外三角范畴是正合范畴与三角范畴的共同推广。H. Nakaoka 和 Y. Palu 已证明，弱幂等完备外三角范畴上容许模型结构的同伦范畴是一个三角范畴。本文利用 A. Heller 和 D. Happel 给出的经典三角构造，为 Nakaoka-Palu 定理提供另一种证明。事实上，本文中三角的类 Δ 与 Δ 中的三角$\widetilde{}$类之间存在关系 $\Delta = -\Delta$，因此，同伦范畴上的这两种三角结构是同构的。

关键词：（弱幂等完备）外三角范畴；同伦范畴；三角范畴；（可容许）模型结构；Hovey 三元组

2020年数学主题分类：18N40，18G80，18N55

1. 引言

H. Nakaoka 和 Y. Palu 引入的外三角范畴 [26], ，同时推广了正合范畴和三角范畴。事实上，存在许多既非正合范畴也非三角范畴的外三角范畴（例如参见 [26, 2.18, 3.30]）。近期研究表明，外三角范畴为研究同调代数、Auslander-Reiten 理论、倾斜理论、Gorenstein 同调代数和余扭对等问题提供了统一框架和有力方法（例如参见 [2, 17, 33, 12, 25, 18]）。

D. Quillen [28], 引入的模型结构及其同伦范畴被广泛应用于代数和拓扑学，尤其是在表示论、同调代数、 K理论和同伦论中（例如参见 [29, 30, 14, 24, 16, 13, 6]）。M. Hovey [15] 提出了阿贝尔模型结构，并发现阿贝尔模型结构与 Hovey 三元组之间存在一一对应。A. Beligiannis 和 I. Reiten [1] 构造了弱投射模型结构，并发现弱投射模型结构与具有反变有限核的遗传完备余挠对之间存在一一对应（另见 [3]）。这两类模型结构都定义在阿贝尔范畴上，而这两个对应关系通过余挠对建立了模型结构与表示论之间的联系。

* 通讯作者。lishunjie@sjtu.edu.cn gyang112358@sjtu.edu.cn pzhang@sjtu.edu.cn。

J. Gillespie [5], 将 Hovey对应推广到了弱幂等完备正合范畴，X. Y. Yang [31]则将其推广到了带真类的三角范畴。Nakaoka 和 Palu [26, 第 5] 节进一步将这一对应关系推广到弱幂等完备外三角范畴。更令人惊讶的是，他们证明，弱幂等完备外三角范畴上的可容许模型结构的同伦范畴是三角范畴。参见[26, 定理 6.20]。由于与可容许模型结构相关联的两个余挠对不一定是遗传的，且相应的纤维化对象-纤维对象不一定构成 Frobenius范畴，因此 Nakaoka-Palu 定理意义非凡；即便对于阿贝尔模型结构，这一结果此前也未曾出现。

对于范畴 $\mathcal{A}$ 上的模型结构 (余纤维化、Fib、Weq)，Quillen 的同伦范畴 Ho($\mathcal{A}$) 按定义是关于弱等价类 Weq 的局部化范畴 $\mathcal{A}[\mathrm{Weq}^{-1}]$ （其中 $\mathcal{A}$ 是范畴）。记局部化函子为 $\gamma\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$。Quillen [28, I, 3.10, Remark]定义了函子 Σ、$\Omega : \mathrm{Ho}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$，并指出它们满足三角范畴公理的单侧版本。然而，一般而言， Σ 和 Ω 并非 Ho($\mathcal{A}$) 的自等价，且 Ho($\mathcal{A}$) 不是三角范畴。事实上，Ho($\mathcal{A}$) 按 [1] 的意义是预三角的：即 (Σ、Ω) 是一个伴随对，(Ho($\mathcal{A}$)、Ω) 是左三角的，而 (Ho($\mathcal{A}$) Σ) 是右三角的，并满足一些相容条件。

对于弱幂等完备外三角范畴 ($\mathcal{A}$, $\mathbb{E}$, $\mathfrak{s}$) 上的一个容许模型结构，Nakaoka 和 Palu [26] 利用余扭对 ($\mathcal{C}$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$) 和 ($\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, $\mathcal{F}$) 的完备性，重构了函子 Σ 和 Ω，引入了一个群同态l： $\mathbb{E}(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})(Z, \Sigma X)$，并证明 Σ 和 Ω 互为准逆。他们将一个标准三角定义为

$$X \xrightarrow{\gamma(f)} Y \xrightarrow{\gamma(g)} Z \xrightarrow{l(\delta)} \Sigma X$$

Ho($\mathcal{A}$) 中由局部化函子 γ 将$\mathcal{A}$中的一个 $\mathbb{E}$-三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 映射所得的像，并配以“连接态射” $l(\delta)$： $Z \longrightarrow \Sigma X$；最后，他们证明了 $\widetilde{\mathrm{Ho}(\mathcal{A})}$ (Σ, Δ) 是一个三角范畴（[26, 定理 6.20]），其中 Δ 是 Ho($\mathcal{A}$) 中与标准三角形同构的三角形类。当 $\mathcal{A}$ 是一个弱幂等完备正合范畴时，可以在 Gillespie [6, 定理 6.34] 中找到 Nakaoka-Palu 定理的一个更直接的证明。

一个好的定理应当允许有不同的证明。本文将由态射 $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}$ 诱导的 Ho($\mathcal{A}$) 中的标准三角定义为

$$X \xrightarrow{\gamma(f)} Y \xrightarrow{\gamma(g)} C(f) \xrightarrow{\gamma(h)} \Sigma X$$

其由 $\mathcal{A}$ 中的交换图诱导而来

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \Sigma X & \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ Y & \xrightarrow{g} & C(f) & \xrightarrow{h} & \Sigma X & \overset{f_*\delta_X}{\dashrightarrow} & \end{array}$$

其中，$X \longrightarrow M \longrightarrow \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow}$ 是 X 的悬挂序列。这种标准三角形的构造类似于 Frobenius 范畴的稳定范畴中的构造，见 A. Heller [11]和 D. Happel [7, 8]。相应的三角类记为 Δ。本文的主要结果定理 3.5 声称，$(\mathrm{Ho}(\mathcal{A}), \Sigma, \Delta)$ 是一个三角范畴。这为 Nakaoka-Palu 定理提供了另一种证明。

~本文中的 Δ 三角与 [26] 中的 Δ 三角之间具有如下关系

$$\Delta = -\widetilde{\Delta}$$

也就是说，三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ 属于 Δ 当且仅当 $X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} \Sigma X$ 属于 $\widetilde{\Delta}$。~因此，有一个三角同构 $(\mathrm{Ho}(\mathcal{A}), \Sigma, \Delta) \cong (\mathrm{Ho}(\mathcal{A}), \Sigma, \widetilde{\Delta})$。见定理 3.12。众所周知，一般而言 $\Delta \neq \widetilde{\Delta}$。

Nakaoka-Palu 定理是一个非凡的发现，也是原证明中 [26,定理 6.20] 的关键技巧，即引入“连接态射”，这需要一番冗长的论证。有趣的是，$\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$中的两类三角分别由 $\mathcal{A}$中的 $\mathbb{E}$-三角诱导：$\mathcal{A}$中的一个标准三角 $X \overset{\gamma(f)}{\longrightarrow} Y \overset{\gamma(g)}{\longrightarrow} Z \overset{\gamma(h)\delta}{\longrightarrow} \Sigma X$ 由 [26] 中的 $\mathbb{E}$-三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$诱导，而本文中的一个标准三角 $X \overset{\gamma(f)}{\longrightarrow} Y \overset{\gamma(g)}{\longrightarrow} C(f) \overset{\gamma(h)}{\longrightarrow} \Sigma X$ 则由 $\mathbb{E}$-三角 $Y \xrightarrow{g} C(f) \xrightarrow{h} \Sigma X \overset{f_*\delta_X}{\dashrightarrow}$ 诱导。

2. 预备知识

2.1. 外三角范畴。设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴，带有一个双加性函子$\mathbb{E}: \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \longrightarrow$ 阿贝尔群范畴。元素 $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$称为一个 $\mathbb{E}$-扩张，而零元素$0 \in \mathbb{E}(Z, X)$称为分裂的 $\mathbb{E}$-扩张。对于 $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$，$f: X \longrightarrow X'$, $g: Z' \longrightarrow Z$，有 $\mathbb{E}$-扩张 $f_*\delta := \mathbb{E}(Z, f)(\delta) \in \mathbb{E}(Z, X')$以及 $g^*\delta := \mathbb{E}(g, X)(\delta) \in \mathbb{E}(Z', X)$。由于 $\mathbb{E}$ 是一个双函子，根据定义有 $g^* f_* \delta = f_* g^* \delta \in \mathbb{E}(Z', X')$。

设 $\delta_1 \in \mathbb{E}(Z, X)$和 $\delta_2 \in \mathbb{E}(Z', X')$。由 $\mathbb{E}$的可加性，有一个自然同构

$$\mathbb{E}(Z \oplus Z', X \oplus X') \cong \mathbb{E}(Z, X) \oplus \mathbb{E}(Z, X') \oplus \mathbb{E}(Z', X) \oplus \mathbb{E}(Z', X').$$

通过此同构，将对应于 $(\delta_1, 0, 0, \delta_2)$ 的元素记为 $\delta_1 \oplus \delta_2 \in \mathbb{E}(Z \oplus Z', X \oplus X')$。

$\mathcal{A}$ 中的两个态射序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 和 $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z$ 若存在同构 $\varphi: Y \longrightarrow Y'$ 使得 $f' = \varphi f$, $g = g'\varphi$，则称它们等价。将 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 的等价类记为 $[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z]$。令

$$[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z] \oplus [X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'] = [X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{g \oplus g'} Z \oplus Z'].$$

定义 2.1 ([26, 2.9]). 设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴，并配有一个双加性函子 $\mathbb{E}: \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \longrightarrow$ 阿贝尔群范畴。$\mathfrak{s}$ 到 $\mathbb{E}$ 的一个加性实现 是一个对应关系，它将任意 $\mathbb{E}$-扩张 $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$ 映射到一个等价类 $\mathfrak{s}(\delta) = [X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z]$，并满足以下条件：

(1) 设 $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$ 和 $\delta' \in \mathbb{E}(Z', X')$ 为 $\mathbb{E}$-扩张，且 $\mathfrak{s}(\delta) = [X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z]$ 和$\mathfrak{s}(\delta') = [X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z']$。那么对于任意态射 $u: X \longrightarrow X'$ 和 $w: Z \longrightarrow Z'$，满足

$u_*\delta = w^*\delta'$，存在一个态射 $v: Y \longrightarrow Y'$，使得下列交换图可交换 s.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

在此情形下，态射序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 称为 $\delta \in \mathbb{E}(Z,\ X)$ 的一种实现，记为 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$。

（2）对于可裂 $\mathbb{E}$-扩张 $0 \in \mathbb{E}(Z,\ X)$，$\mathfrak{s}(0) = [X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \oplus Z \xrightarrow{(0\ 1)} Z]$.（3）

对于 $\mathbb{E}$-扩张 $\delta_1 \in \mathbb{E}(Z,\ X)$、$\delta_2 \in \mathbb{E}(Z',\ X')$，有 $\mathfrak{s}(\delta_1 \oplus \delta_2) = \mathfrak{s}(\delta_1) \oplus \mathfrak{s}(\delta_2)$。

定义 2.2 ([26, 定义 2.12])。设 $\mathcal{A}$ 为一个加性范畴。若三元组 $(\mathcal{A},\ \mathbb{E},\ \mathfrak{s})$ 满足以下条件 (ET1)、(ET2)、(ET3)、(ET3)$^{\mathrm{op}}$、(ET4)、(ET4)$^{\mathrm{op}}$，则称其为一个外三角范畴。

(ET1) $\mathbb{E}:\ \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \longrightarrow$ 阿贝尔群范畴是一个双加性函子。

(ET2) $\mathfrak{s}$ 是 $\mathbb{E}$的一个加性实现。

(ET3) 对于任意的 $\mathbb{E}$-扩张的实现 $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$和 $\delta' \in \mathbb{E}(Z', X')$:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\vdots & & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} & \end{array}$$

若 $vf = f'u$，则存在 $w:\ Z \longrightarrow Z'$ 使得 $wg = g'v$ 且 $u_*\delta = w^*\delta'$。

(ET3)$^{\mathrm{op}}$ 对于任意的 $\mathbb{E}$-扩张的实现 $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$和 $\delta' \in \mathbb{E}(Z', X')$:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\ {\scriptstyle u}\vdots & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow & & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} & \end{array}$$

若 $wg = g'v$，则存在 $u:\ X \longrightarrow X'$ 使得 $f'u = vf$ 且 $u_*\delta = w^*\delta'$。

(ET4) 对于任意的 $\mathbb{E}$-扩张的实现 $\delta \in \mathbb{E}(Z', X)$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{E}(X', Y)$:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{f'} & Z' & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\ \| & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle d}\vdots & & \\ X & \overset{h}{\dashrightarrow} & Z & \overset{h'}{\dashrightarrow} & Y' & \overset{\zeta}{\dashrightarrow} & \\ & & {\scriptstyle g'}\downarrow & & {\scriptstyle e}\vdots & & \\ & & X' & = & X' & & \\ & & {\scriptstyle \varepsilon}| & & |{\scriptstyle \eta} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array}$$

存在 $\mathbb{E}$-扩张 $\zeta \in \mathbb{E}(Y',\ X)$ 和 $\eta \in \mathbb{E}(X',\ Z')$ 的实现，使得该交换图可交换，且 $d^*\zeta = \delta$、$f'_*\varepsilon = \eta$、$f_*\zeta = e^*\varepsilon$。

(ET4)$^{\mathrm{op}}$ 对于 $\mathbb{E}$-扩张 $\zeta \in \mathbb{E}(Y',\ X)$ 和 $\eta \in \mathbb{E}(X',\ Z')$ 的任意实现：

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \overset{f}{\dashrightarrow} & Y & \overset{f'}{\dashrightarrow} & Z' & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \\
X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{h'} & Y' & \overset{\zeta}{\dashrightarrow} & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle e} & & \\
 & & X' & = & X' & & \\
 & & {\scriptstyle \varepsilon}\,| & & |\,{\scriptstyle \eta} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

存在 $\mathbb{E}$-扩张 $\delta \in \mathbb{E}(Z',\ X)$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{E}(X',\ Y)$ 的实现，使得该交换图可交换，且 $d^*\zeta = \delta$、$f'_*\varepsilon = \eta$、$f_*\zeta = e^*\varepsilon$。

若情况如此，则 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 对 $\mathbb{E}$-扩张 $\delta \in \mathbb{E}(Z,\ X)$ 的实现称为 $\mathbb{E}$-三角，f 称为 $\mathbb{E}$-膨胀，而 g 称为 $\mathbb{E}$-塌缩。

定理 2.3 （[26, 推论 3。12]）。设（$\mathcal{A}$、$\mathbb{E}$、$\mathfrak{s}$）是一个外三角范畴。对于任意 $\mathbb{E}$-三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 和对象 $W \in \mathcal{A}$，存在阿贝尔群的正合列：

$$\mathcal{A}(W,X) \xrightarrow{\mathcal{A}(W,f)} \mathcal{A}(W,Y) \xrightarrow{\mathcal{A}(W,g)} \mathcal{A}(W,Z) \xrightarrow{(\delta_\#)_W} \mathbb{E}(W,X) \xrightarrow{\mathbb{E}(W,f)} \mathbb{E}(W,Y) \xrightarrow{\mathbb{E}(W,g)} \mathbb{E}(W,Z)$$

and

$$\mathcal{A}(Z,W) \xrightarrow{\mathcal{A}(g,W)} \mathcal{A}(Y,W) \xrightarrow{\mathcal{A}(f,W)} \mathcal{A}(X,W) \xrightarrow{(\delta^\#)_W} \mathbb{E}(Z,W) \xrightarrow{\mathbb{E}(g,W)} \mathbb{E}(Y,W) \xrightarrow{\mathbb{E}(f,W)} \mathbb{E}(X,W)$$

其中 $(\delta_\#)_W\varphi := \varphi^*\delta$ 且 $(\delta^\#)_W\psi := \psi_*\delta$。

推论 2.4. 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 是外三角范畴中的一个 $\mathbb{E}$-三角 $\mathcal{A}.$

(1) 对于 $\mathcal{A}$中的任意态射 $\varphi\colon W \longrightarrow Z$，$\varphi^*\delta = 0$ 当且仅当 φ 可经由 g分解。(2) 对于 $\mathcal{A}$中的任意态射 $\psi\colon X \longrightarrow W$，$\psi_*\delta = 0$ 当且仅当 ψ 可经由 f分解。

推论 2.5 ([26, 3.6])**.** 设 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴。假设存在一个由 $\mathbb{E}$-三角组成的交换图

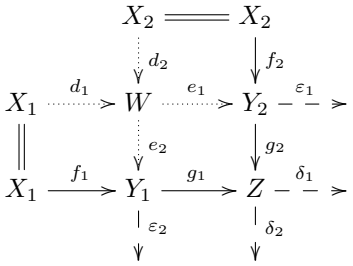
$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\
{\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow & & \\
X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} &
\end{array}$$

其中 $u_*\delta = w^*\delta'$。若 u、v、w 中任意两个是同构，则第三个也是同构。

设 $(\mathcal{A},\ \mathbb{E},\ \mathfrak{s})$ 为一个外三角范畴。对于 $\mathcal{A}$ 中任意的 $\mathbb{E}$-三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \dashrightarrow$，记 Z =Cone(f)，并记 X =CoCone(g)。由推论 2.5，Cone(f) 和 CoCone(g) 在同构意义下唯一。

2.2. **图引理**。

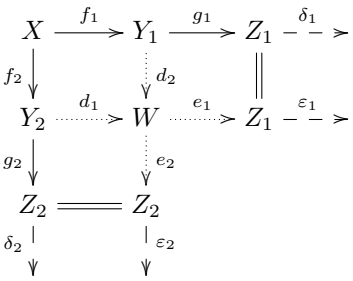
命题 2.6 （[26, 命题 3.15]）。 设 （$\mathcal{A}$、 $\mathbb{E}$、 $\mathfrak{s}$） 为一个外三角范畴， $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z \overset{\delta_1}{\dashrightarrow}$ 和 $X_2 \xrightarrow{f_2} Y_2 \xrightarrow{g_2} Z \overset{\delta_2}{\dashrightarrow}$ 为 $\mathbb{E}$-三角形。那么存在一个由 $\mathbb{E}$-三角形组成的交换图



使得 $(g_2)^*\delta_1 = \varepsilon_1$, $(g_1)^*\delta_2 = \varepsilon_2$, $(d_1)_*\delta_1 + (d_2)_*\delta_2 = 0$。

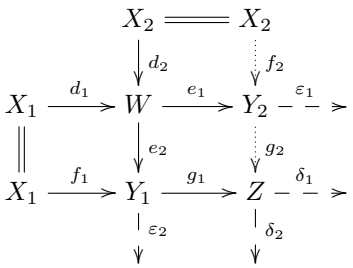
我们还需要命题 2.6 的对偶形式。

命题 2.7. 设 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴，且 $X \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z_1 \overset{\delta_1}{\dashrightarrow}$, $X \xrightarrow{f_2} Y_2 \xrightarrow{g_2} Z_2 \overset{\delta_2}{\dashrightarrow}$ 是 $\mathbb{E}$-三角形。那么存在一个由 $\mathbb{E}$-三角形构成的交换图



使得 $(f_2)_*\delta_1 = \varepsilon_1$, $(f_1)_*\delta_2 = \varepsilon_2$, $(e_1)^*\delta_1 + (e_2)^*\delta_2 = 0$.

命题 2.8 ([26, 命题 3.17])。 设$(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴，并且$X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z \overset{\delta_1}{\dashrightarrow}$、$X_2 \xrightarrow{d_2} W \xrightarrow{e_2} Y_1 \overset{\varepsilon_2}{\dashrightarrow}$ 和 $X_1 \xrightarrow{d_1} W \xrightarrow{e_1} Y_2 \overset{\varepsilon_1}{\dashrightarrow}$ 是 $\mathbb{E}$-三角形，满足$f_1 = e_2 d_1$。那么存在一个由 $\mathbb{E}$-三角形构成的交换图



使得 $(g_1)^*\delta_2 = \varepsilon_2$, $(g_2)^*\delta_1 = \varepsilon_1$, $(d_1)_*\delta_1 + (d_2)_*\delta_2 = 0$。

2.3. **同伦笛卡尔方块**。与三角范畴中的同伦笛卡尔方块（[27, 定义 1.4.1]）类似，有

定义 2.9 ([9,定义 3.1])。 外三角范畴 $\mathcal{A}$中的一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ W & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

若 $X\overset{\binom{f}{a}}{\longrightarrow} Y\oplus W\overset{(b\ -g)}{\longrightarrow} Z\overset{\delta}{\dashrightarrow},)$是一个 $\mathbb{E}$-三角，则称其为同伦笛卡尔。

命题 2.10 ([9, 3。2] 或 [22, 1。20])。 设$(\mathcal{A},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 为一个外三角范畴。若下方交换图中的两行都是 $\mathbb{E}$-三角，且满足 $u_*\delta=\delta'$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & \| & & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} & \end{array}$$

则存在一个态射 v，使得该交换图交换，并且 $X\overset{\binom{u}{-f}}{\longrightarrow} Y\oplus X'\overset{(v,\ f')}{\longrightarrow} Y'\overset{(g'\ *\delta)}{\dashrightarrow}$是一个 $\mathbb{E}$-三角。

对偶地，有

命题 2.11。 设 $(\mathcal{A},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴。若下方交换图中的两行都是 $\mathbb{E}$-三角形，并且具有 $w^*\delta'=\delta$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\ \| & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow & & \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} & \end{array}$$

则存在一个态射 v使得该交换图可交换，且 $Y\overset{\binom{g}{v}}{\longrightarrow} Z\oplus Y'\overset{(-w,}{\longrightarrow}\ Z'\overset{f_*\delta')}{\dashrightarrow}$是一个 $\mathbb{E}$-三角形。

推论 2.12 ([26, 3。16])。 设 $(\mathcal{A},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴。则

(1) 对于一个 $\mathbb{E}$-膨胀 f： $X\longrightarrow Y$和一个态射 a： $X\longrightarrow X'$，$\binom{f}{a}$ 是一个 $\mathbb{E}$-膨胀。

(2) 对于一个 $\mathbb{E}$-压缩 g： $Y\longrightarrow Z$ 和一个态射 b： $Z'\longrightarrow Z$，(g,b) 是一个 $\mathbb{E}$-压缩 n.

作为 [20, 定理 3.3] 的对偶，有

命题 2.13. 设$(\mathcal{A},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴。若下方交换图中的两行都是 $\mathbb{E}$-三角，且具有 $vf=f'$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\ \| & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow & & \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} & \end{array}$$

那么存在一个态射 w 使得该交换图可交换，且 $w^*\delta'=\delta$，此外$Y\overset{\binom{g}{v}}{\longrightarrow} Z\oplus Y'\overset{(-w,}{\longrightarrow}\ Z'\overset{f_*\delta')}{\dashrightarrow}$是一个 $\mathbb{E}$-三角。

引理 2.14. 设 $(\mathcal{A},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴。假设 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\overset{\delta}{\dashrightarrow}$是一个 $\mathbb{E}$-三角，且 $\varphi:X\longrightarrow X'$ 和 $\psi:Z'\longrightarrow Z$ 是 $\mathcal{A}$中的同构。那么$X'\xrightarrow{f\varphi^{-1}}Y\xrightarrow{g}Z\overset{\varphi_*\delta}{\dashrightarrow}$ 和 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{\psi^{-1}g}Z'\overset{\psi^*\delta}{\dashrightarrow}$ 是 $\mathbb{E}$-三角形。

证明。 假设 $\mathfrak{s}(\varphi_*\delta)=[X'\xrightarrow{x}D\xrightarrow{y}Z]$。由 (ET2)，存在 $\alpha:Y\longrightarrow D$，使得下面的 $\mathbb{E}$-三角形交换图交换:

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\
{\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \| & & \\
X' & \xrightarrow{x} & D & \xrightarrow{y} & Z & \overset{\varphi_*\delta}{\dashrightarrow} & .
\end{array}$$

由推论 2.5， α 是一个同构。由交换图可知

$$\begin{array}{ccccc}
X' & \xrightarrow{f\varphi^{-1}} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
\| & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \| \\
X' & \xrightarrow{x} & D & \xrightarrow{y} & Z
\end{array}$$

$\mathfrak{s}(\varphi_*\delta)=[X'\xrightarrow{f\varphi^{-1}}Y\xrightarrow{g}Z]$。类似地， $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{\psi^{-1}g}Z'\overset{\psi^*\delta}{\dashrightarrow}$ 是一个 $\mathbb{E}$-三角形。 □

命题 2.15。 设$(\mathcal{A},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴，且 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{f'}Z'\overset{\delta}{\dashrightarrow}$、$X\xrightarrow{h}Z\xrightarrow{h'}Y'\overset{\zeta}{\dashrightarrow}$ 和 $Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{g'}X'\overset{\varepsilon}{\dashrightarrow}$ 是满足 $h=gf$的 $\mathbb{E}$-三角形。那么存在一个由 $\mathbb{E}$-三角形构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{f'} & Z' & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\
\| & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & \\
X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{h'} & Y' & \overset{\zeta}{\dashrightarrow} & \\
 & & {\scriptstyle g'}\downarrow & & {\scriptstyle e}\downarrow & & \\
 & & X' & = & X' & & \\
 & & {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

使得 $d^*\zeta=\delta$， $f'_*\varepsilon=\eta$， $f_*\zeta=e^*\varepsilon$。此外 $Y\xrightarrow{\binom{f'}{g}}Z'\oplus Z\xrightarrow{(-d,\ h')}Y'\overset{f_*\zeta)}{\dashrightarrow}$是一个 $\mathbb{E}$-三角。**证明**。根据命题 2.13，存在一个态射 $d:Z'\longrightarrow Y'$使得 $df'=h'g$、 $d^*\zeta=\delta$，且 $Y\xrightarrow{\binom{f'}{g}}Z'\oplus Z\xrightarrow{(-d,\ h')}Y'\overset{f_*\zeta)}{\dashrightarrow}$是一个 $\mathbb{E}$-三角。根据命题 2.8，可得以下由 $\mathbb{E}$-三角组成的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Z' & = & Z' & & \\
 & & {\scriptstyle\binom{1}{0}}\downarrow & & {\scriptstyle\tilde{d}}\downarrow & & \\
Y & \xrightarrow{\binom{f'}{g}} & Z'\oplus Z & \xrightarrow{(-d,h')} & Y' & \overset{f_*\zeta}{\dashrightarrow} & \\
\| & & {\scriptstyle(0,1)}\downarrow & & {\scriptstyle e}\downarrow & & \\
Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{g'} & X' & \overset{\varepsilon}{\dashrightarrow} & \\
 & & 0\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\eta}} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

使得 $f_*\zeta = e^*\varepsilon$，$(g')^*\tilde{\eta} = 0$，$\binom{1}{0}_*\tilde{\eta} + \binom{f'}{g}_*\varepsilon = 0$。因此

$$(1,0)_*\tbinom{1}{0}_*\tilde{\eta} + (1,0)_*\tbinom{f'}{g}_*\varepsilon = \tilde{\eta} + f'_*\varepsilon = 0.$$

令 $\eta = -\tilde{\eta}$。于是 $f'_*\varepsilon = \eta$。根据引理 2.14，$Z' \xrightarrow{d} Y' \xrightarrow{e} X' \overset{\eta}{\dashrightarrow}$ 是一个 $\mathbb{E}$-三角。然后 $eh' = g'$。证明完毕。□

下面给出命题 2.7 的一个更强版本。

命题 2.16。设 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴，且 $X \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z_1 \overset{\delta_1}{\dashrightarrow}$、$X \xrightarrow{f_2} Y_2 \xrightarrow{g_2} Z_2 \overset{\delta_2}{\dashrightarrow}$ 是 $\mathbb{E}$-三角。那么存在一个由 $\mathbb{E}$-三角组成的交换交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 & \overset{\delta_1}{\dashrightarrow} & \\
{\scriptstyle f_2}\downarrow & & \vdots{\scriptstyle d_2} & & \| & & \\
Y_2 & \overset{d_1}{\dashrightarrow} & W & \overset{e_1}{\dashrightarrow} & Z_1 & \overset{\varepsilon_1}{\dashrightarrow} & \\
{\scriptstyle g_2}\downarrow & & \vdots{\scriptstyle e_2} & & & & \\
Z_2 & = & Z_2 & & & & \\
{\scriptstyle \delta_2}\vdots & & \vdots{\scriptstyle \varepsilon_2} & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & &
\end{array}$$

使得 $(f_2)_*\delta_1 = \varepsilon_1$、$(f_1)_*\delta_2 = \varepsilon_2$、$(e_1)^*\delta_1 + (e_2)^*\delta_2 = 0$。此外，$X \xrightarrow{\binom{f_1}{f_2}} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{(d_2,\ -d_1)} W \overset{e_1^*\delta_1}{\dashrightarrow}$ 是一个 $\mathbb{E}$-三角。

证明。根据推论 2.12，$\binom{f_1}{f_2}$ 是一个 $\mathbb{E}$-膨胀。因此有一个 $\mathbb{E}$-三角 $X \xrightarrow{\binom{f_1}{f_2}} Y_1 \oplus_{Y_2} \xrightarrow{(d_2,-d_1)} W \overset{\kappa}{\dashrightarrow}$。根据命题 2.8，存在如下由 $\mathbb{E}$-三角构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Y_1 & = & Y_1 & & \\
 & & {\scriptstyle \binom{1}{0}}\downarrow & & \vdots{\scriptstyle d_2} & & \\
X & \xrightarrow{\binom{f_1}{f_2}} & Y_1 \oplus Y_2 & \xrightarrow{(d_2,-d_1)} & W & \overset{\kappa}{\dashrightarrow} & \\
\| & & {\scriptstyle (0,1)}\downarrow & & \vdots{\scriptstyle \tilde{e_2}} & & \\
X & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & \xrightarrow{g_2} & Z_2 & \overset{\delta_2}{\dashrightarrow} & \\
 & & {\scriptstyle 0}\vdots & & \vdots{\scriptstyle \tilde{\varepsilon_2}} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & Y_2 & = & Y_2 & & \\
 & & {\scriptstyle \binom{0}{1}}\downarrow & & \vdots{\scriptstyle \tilde{d_1}} & & \\
X & \xrightarrow{\binom{f_1}{f_2}} & Y_1 \oplus Y_2 & \xrightarrow{(d_2,-d_1)} & W & \overset{\kappa}{\dashrightarrow} & \\
\| & & {\scriptstyle (1,0)}\downarrow & & \vdots{\scriptstyle e_1} & & \\
X & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 & \overset{\delta_1}{\dashrightarrow} & \\
 & & {\scriptstyle 0}\vdots & & \vdots{\scriptstyle \tilde{\varepsilon_1}} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

其中 $\kappa = \tilde{e_2}^*\delta_2 = e_1^*\delta_1$、$\binom{f_1}{f_2}_*\delta_2 + \binom{1}{0}_*\tilde{\varepsilon_2} = 0$、$\binom{f_1}{f_2}_*\delta_1 + \binom{0}{1}_*\tilde{\varepsilon_1} = 0$。因此

$$-\tilde{e_2}d_1 = g_2,\ \ \tilde{d_1} = -d_1,\ \ e_1d_2 = g_1.$$

对两边应用 $(1,0)_*$，得到 $(f_1)_*\delta_2 + \tilde{\varepsilon_2} = 0$；对两边应用 $(0,1)_*$，得到 $(f_2)_*\delta_1 + \tilde{\varepsilon_1} = 0$。令 $e_2 = -\tilde{e_2}$, $\varepsilon_1 = -\tilde{\varepsilon_1}$,$\varepsilon_2 = -\tilde{\varepsilon_2}$。那么

$$e_2d_1 = g_2,\ (f_1)_*\delta_2 = \varepsilon_1,\ (f_2)_*\delta_1 = \varepsilon_2,\ e_1^*\delta_1 + e_2^*\delta_2 = 0.$$

根据引理 2.14， $Y_1 \xrightarrow{d_2} W \xrightarrow{e_2} Z_2 \overset{\varepsilon_1}{\dashrightarrow}$ 和 $Y_2 \xrightarrow{d_1} W \xrightarrow{e_1} Z_1 \overset{\varepsilon_2}{\dashrightarrow}$ 是 $\mathbb{E}$-三角形。证明至此完成。□

两个同伦笛卡尔方块的复合仍是同伦笛卡尔的。

命题 2.17 ([10])**.** 设$(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 为一个外三角范畴。考虑 $\mathcal{A}$中的以下交换图。

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z'. \end{array}$$

如果这两个方块在 $\mathcal{A}$ 中是同伦笛卡尔的，那么外侧矩形也是同伦笛卡尔的。

2.4. **模型结构**。 态射 $f:\ X \longrightarrow Y$ 是态射 $g:\ X' \longrightarrow Y'$的直缩，前提是存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\varphi_1} & X' & \xrightarrow{\psi_1} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{\varphi_2} & Y' & \xrightarrow{\psi_2} & Y \end{array}$$

使得 $\psi_1\varphi_1 = \mathrm{Id}_X$、 $\psi_2\varphi_2 = \mathrm{Id}_Y$。

定义 2.18 ([29])。 范畴 $\mathcal{M}$ 上的模型结构 是由态射类组成的三元组 (CoFib，Fib，Weq)，其中这些态射分别称为余纤维化、纤维化、弱等价，并满足以下公理:

(CM1)（三取二公理）设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 是 $\mathcal{M}$中的态射。如果 $f,\ g,\ gf$ 中有两个是弱等价，那么第三个也是弱等价。

(CM2)（直缩公理）若 f是 g的一个直缩，且 g是余纤维化（分别为纤维化、弱等价），那么 f也是如此。

(CM3)（提升公理）给定一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{s}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

其中 $i \in$ 属于 CoFib， $p \in$ 属于 Fib， $\cap$ 属于 Weq；若 $i \in$ 属于 CoFib 且 $\cap$ 属于 Weq，或 $p \in$ 属于 Fib，则存在一个态射 $s:\ B \longrightarrow X$，使得 $a = si,\ \ b = ps$。

(CM4)（分解公理）任意态射 $f\colon X \longrightarrow Y$都有两种分解 $f = pi = qj$，其中 $i \in$ 余纤维化 $\cap$ Weq $p \in$ Fib， $j \in$ 余纤维化且 $q \in$ Fib $\cap$ Weq。

定义 TCoFib $:=$ 余纤维化 $\cap$Weq，TFib $:=$ Fib $\cap$Weq。TCoFib 和 TFib 中的态射分别称为平凡纤维化 和平凡纤维化。

设 (CoFib、Fib、Weq) 是范畴 $\mathcal{M}$ 上的一个模型结构，其中含有零对象。对象 X称为纤维化对象，如果 $0 \longrightarrow X$ 是一个纤维化。记 $\mathcal{C}$ 为纤维化对象类。对象 Y称为纤维对象，如果 $Y \longrightarrow 0$ 是一个纤维。记 $\mathcal{F}$ 为纤维对象类。对象 W 是一个

平凡对象，如果 $0 \longrightarrow W$ 是一个弱等价，或者等价地， $W \longrightarrow 0$ 是一个弱等价。记 $\mathcal{W}$ 为平凡对象类。

2.5. **容许模型结构与 Hovey 三元组**。

定义 2.19 ([26, 定义 5.5])。 外三角范畴 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 上的模型结构 (CoFib，Fib，Weq) 若满足以下条件，则称为容许的。

(1) CoFib $=\{\mathbb{E}$-膨胀 $f \mid$ 锥$(f) \in \mathcal{C}\}$。 (2) Fib $=\{\mathbb{E}$-退化 $f \mid$ 余锥$(f) \in \mathcal{F}\}$。 (3) TCoFib $=\{\mathbb{E}$-膨胀 $f \mid$ 锥$(f) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}\}$。 (4) TFib $=\{\mathbb{E}$-退化 $f \mid$ 余锥$(f) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}\}$。

对于外三角范畴 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 的对象类 $\mathcal{X}$，令 $\mathcal{X}^{\perp}:=\{Y \in \mathcal{A} \mid \mathbb{E}(\mathcal{X}, Y)=0\}$，其中 $\mathbb{E}(\mathcal{X}, Y)=0$ 表示对于所有 $X \in \mathcal{X}.$， $\mathbb{E}(X, Y)=0$。对于 $\mathbb{E}(Y, \mathcal{X})=0$ 和${}^{\perp}\mathcal{X}$，同样如此。

定义 2.20 ([26, 定义 4.1]). 设 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴。对象类的一个对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 称为余挠对，如果 $\mathcal{X}={}^{\perp}\mathcal{Y}$ 且 $\mathcal{Y}=\mathcal{X}^{\perp}$。

若对任意对象 $A \in \mathcal{A}$，都存在 $\mathbb{E}$-三角形，则余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 称为完备的：

$$A \longrightarrow Y \longrightarrow X \dashrightarrow, \qquad Y' \longrightarrow X' \longrightarrow A \dashrightarrow,$$

其中 $Y \in \mathcal{Y},\ X \in \mathcal{X},\ X' \in \mathcal{X},\ Y' \in \mathcal{Y}$。

定义 2.21. 设 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴。 $\mathcal{A}$ 中的对象类三元组 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ 称为*Hovey* 三元组，如果 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ 和 $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的完备余挠对，且 $\mathcal{W}$ 满足 $\mathbb{E}$-三角形的“三取二”性质；也就是说，若一个 $\mathbb{E}$-三角形的三个项中有两个属于 $\mathcal{W}$，则第三个也属于 $\mathcal{W}$。

加性范畴 $\mathcal{A}$ 是弱幂等完备的，当且仅当其中任意分裂单态射都有余核，或者等价地，其中任意分裂满态射都有核。

引理 2.22 ([26, 条件 5。8], [19, 命题 C])。 设$(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 为一个外三角范畴。则以下条件等价。

(1) $\mathcal{A}$ 中的任意分裂单态射都有余核。(2) $\mathcal{A}$ 中的任意分裂满态射都有核。(3) $\mathcal{A}$ 中的任意分裂单态射都是一个 $\mathbb{E}$-膨胀。(4) $\mathcal{A}$ 中的任意分裂满态射都是一个 $\mathbb{E}$-收缩。(5) </style}如果是一个 -膨胀，那么也是。(6) 如果 de 是一个 $\mathbb{E}$-收缩，那么 d也是。

满足上述等价条件的外三角范畴称为弱幂等完备外三角范畴。Nakaoka 和 Palu [26] 将 Hovey 的对应推广到了外三角范畴。

定理2.23 ([26, 节 5])。 设$(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个弱幂等完备的外三角范畴。那么， $\mathcal{A}$ 上的容许模型结构与 $\mathcal{A}$中的 *Hovey* 三元组之间存在一一对应，由下式给出：

$$(\mathrm{CoFib},\ \mathrm{Fib},\ \mathrm{Weq}) \mapsto (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$$

其中， $\mathcal{C}$、 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{W}$ 分别是余纤维对象、纤维对象和零对象的类；其逆对应由下式给出：

$$(\mathcal{C},\ \mathcal{F},\ \mathcal{W}) \mapsto (\mathrm{CoFib},\ \mathrm{Fib},\ \mathrm{Weq})$$

其中，$\mathrm{CoFib} = \{\mathbb{E}\text{-膨胀}\ \ f \mid \mathrm{Cone}(f) \in \mathcal{C}\}$，$\mathrm{Fib} = \{\mathbb{E}\text{-收缩}\ \ f \mid \mathrm{CoCone}(f) \in \mathcal{F}\}$，并且

$$\mathrm{Weq} = \{pi \mid i \text{是一个 } \mathbb{E}\text{-膨胀}，\mathrm{Cone}(i) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}，\quad p \text{是一个 } \mathbb{E}\text{-收缩}，\mathrm{CoCone}(p) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}\}.$$

2.6. **容许模型结构的同伦范畴**。 设 $\mathcal{S}$ 是范畴 $\mathcal{M}$中的一类态射。根据 P. Gabriel - M. Zisman [4], ，关于 $\mathcal{M}$对 $\mathcal{S}$ 的局部化范畴 $\mathcal{M}[\mathcal{S}^{-1}]$ 总是存在的。

引理 2.24 ([21, 引理 2.2。1])。 设 $\mathcal{C}$ 是一个加性范畴， $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{C}$中一类态射。假设$\mathrm{Id}_X \in \mathcal{S}$, $\forall\ X \in \mathcal{C}$，并且 $\mathcal{S}$ 对余积封闭，即若 σ 和 τ属于 $\mathcal{S}$，则 $\sigma \oplus \tau$ 属于 $\mathcal{S}$。那么 $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ 是一个加性范畴，且局部化函子$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ 是加性的。

定义2.25 ([28])。 范畴 $\mathcal{M}$ 上的模型结构 (CoFib，Fib，Weq) 的同伦范畴，其中 $\mathcal{M}$ 具有零对象，是局部化范畴 $\mathcal{M}[\mathrm{Weq}^{-1}]$，记作 Ho($\mathcal{M}$)。记 $\gamma\colon\ \mathcal{M} \longrightarrow$Ho($\mathcal{M}$) 为局部化函子。

设 (CoFib，Fib，Weq) 是弱幂等完备外三角范畴 ($\mathcal{A}$，$\mathbb{E}$，$\mathfrak{s}$) 上的一个模型结构。由引理 2.24，Ho($\mathcal{A}$) 是一个加性范畴，且 $\gamma\colon\ \mathcal{A} \longrightarrow$ Ho($\mathcal{A}$) 是一个加性函子。

定理 2.26 ([23,定理 1。1])。 设 (余纤维化、Fib、Weq) 是弱幂等完备加性范畴 $\mathcal{A}$上的一个模型结构。那么，嵌入 $\mathcal{C} \cap \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}$与局部化函子 $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 的复合诱导出一个范畴等价

$$(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})/(\mathcal{C} \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{W}) \cong \mathrm{Ho}(\mathcal{A}),$$

其中 $\mathcal{C}$、 $\mathcal{F}$、 $\mathcal{W}$ 分别是纤维化对象、纤维对象和平凡对象的类。

推论 2.27. 设(CoFib、Fib和Weq)是弱幂等完备外三角范畴$(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$上的一个容许模型结构，而 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ 是相应的 *Hovey* 三元组。对于任意态射 $f\colon\ X \longrightarrow Y$，其中 $X,\ Y \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$, 若其属于Ho($\mathcal{A}$) ，则存在一个态射$f'\colon\ X \longrightarrow Y$，属于 $\mathcal{A}$，使得 $f = \gamma(f')$。

证明。 由定理 2.26 可知，存在一个范畴等价 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})/(\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$， $[f]\mapsto\gamma(f)$，且该等价保持对象。因此，由同构 $\mathrm{Hom}^{(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})/(\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W})}(X,Y)\cong\mathrm{Hom}^{\mathrm{Ho}(\mathcal{A})}(X,Y)$ 可得所述结论，其中 $X,\ Y\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$。□

设（$\mathcal{C}$， $\mathcal{F}$， $\mathcal{W}$）是弱幂等完备外三角范畴（$\mathcal{A}$， $\mathbb{E}$， $\mathfrak{s}$）中的一个 Hovey 三元组。利用余挠对（$\mathcal{C}$， $\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$）和（$\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$， $\mathcal{F}$）的完备性，对于任意对象 $X\in\mathcal{A}$，都有以下 $\mathbb{E}$-三角形：

$$R_X\longrightarrow QX\xrightarrow{\rho_X}X\dashrightarrow,\qquad QX\xrightarrow{\sigma_X}RQX\longrightarrow Q_X\dashrightarrow$$

其中 $QX\in\mathcal{C}$、 $R_X\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$， $RQX\in\mathcal{F}$， $Q_X\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$。由于 $\mathcal{C}$ 对扩张封闭，$RQX\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$。注意， $\rho_X\in$ 是 TFib， $\sigma_X\in$ 是 TCoFib。因此，在 Ho($\mathcal{A}$) 中有一个同构：

$$\gamma(\sigma_X)\circ\gamma(\rho_X)^{-1}:X\longrightarrow RQX.$$

对于每个对象 $X\in\mathcal{A}$，可以选择两个 $\mathbb{E}$-三角形 $R_X\longrightarrow QX\xrightarrow{\rho_X}X\dashrightarrow$ 和 $QX\xrightarrow{\sigma_X}RQX\longrightarrow Q_X\dashrightarrow$，从而在 Ho($\mathcal{A}$) 中得到一个规范同构

$$\theta_X:=\gamma(\sigma_X)\circ\gamma(\rho_X)^{-1}:X\longrightarrow RQX.$$

以下观察对于主定理的证明十分重要。

命题 2.28 ([26, 第 5 节。3])。 对于： $X\longrightarrow Y$ 中的任意态射 f，存在一个~态射 f： $RQX\longrightarrow RQY$，使得下图在 $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 中交换

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\theta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_Y} \\ RQX & \xrightarrow{\gamma(\tilde{f})} & RQY, \end{array}$$

其中 θ_X 和 θ_Y 是典范同构。

事实上，考虑 Ho($\mathcal{A}$) 中的态射 $\theta_Y\circ f\circ\theta_X^{-1}$： $RQX\longrightarrow RQY$。根据推论 2.27，存在 $\mathcal{A}$ 中的态射 $\tilde{f}$： $RQX\longrightarrow RQY$，使得 $\theta_Y\circ f\circ\theta_X^{-1}=\gamma(\tilde{f})$。

3. 可容许模型结构的同伦范畴

我们将给出 Nakaoka - Palu 定理的另一种证明，该定理断言：弱幂等完备外三角范畴上的容许模型结构的同伦范畴是三角范畴。

3.1. 关于容许模型结构的两个事实。设 (CoFib，Fib，Weq) 是弱幂等完备外三角范畴 ($\mathcal{A}$， $\mathbb{E}$， $\mathfrak{s}$) 上的一个容许模型结构，而 ($\mathcal{C}$， $\mathcal{F}$， $\mathcal{W}$) 是相应的 Hovey 三元组。

利用命题 2.6、命题 2.7 以及容许模型结构和 Hovey 三元组的定义，可得以下引理。

引理 3.1 ([26, 5。12])。 (1) 设 f 是一个 $\mathbb{E}$-膨胀。那么， f 是弱等价，当且仅当 $\mathrm{Cone}(f)\in\mathcal{W}$。

(2) 设 g 是一个 $\mathbb{E}$-满射。当且仅当 余锥(g) $\in\mathcal{W}$ 时， g 是弱等价 .

以下事实分别是涉及弱等价的 (ET3)、(ET3)$^{\mathrm{op}}$ 和 (ET2) 的变式。

引理 3.2. (1) 假设下方交换图中的两行都是 $\mathbb{E}$-三角：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{p} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & & & \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{p'} & Z' & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} & . \end{array}$$

若 f 和 g 是弱等价，则存在一个弱等价 $h\colon\ Z \longrightarrow Z'$，使得$hp = p'g$ 和 $f_*\delta = h^*\delta'$。

(2) 假设下方交换图中的两行都是 $\mathbb{E}$-三角：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{p} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\ & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{p'} & Z' & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} & . \end{array}$$

若 g 和 h 是弱等价，则存在一个弱等价 $f\colon\ X \longrightarrow X'$，使得$gi = i'f$ 和 $f_*\delta = h^*\delta'$。

(3) 假设下图中的两行都是 $\mathbb{E}$-三角，且 $f_*\delta = h^*\delta'$：

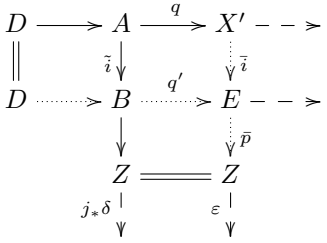
$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{p} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{p'} & Z' & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} & . \end{array}$$

如果 f 和 h 是弱等价，则存在一个弱等价 $g\colon\ Y \longrightarrow Y'$，使得$gi = i'f$ 和 $p'g = hp$。

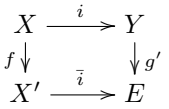
证明。 (1) 由于 f 是弱等价，因此有 $f = qj\colon X \xrightarrow{j} A \xrightarrow{q} X'$，其中 $j \in$ 是 TCoFib，$q \in$是 TFib。根据命题 2.16，存在一个由 $\mathbb{E}$- 三角形构成的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{p} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & {\scriptstyle j'}\downarrow & & \| & & \\ A & \overset{\tilde{i}}{\dashrightarrow} & B & \dashrightarrow & Z & \overset{j_*\delta}{\dashrightarrow} & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ C & = & C & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \end{array}$$

使得左上方的方块是同伦笛卡尔的。由于 $j \in$ 是 TCoFib，因此有 $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$，从而 $j' \in$是 TCoFib。根据命题 2.15，存在一个由 $\mathbb{E}$-三角形构成的交换图：



使得 $\varepsilon = q_* j_* \delta = f_* \delta$，且右上方的方块是同伦笛卡尔的。由于 $q \in$ TFib，有 $D \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$，因此 $q' \in$ TFib。置 $g' = q' j'$。则 $g' \in$ Weq。由命题 2.17，该方块

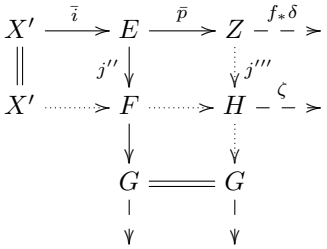


也是同伦笛卡尔的。因此 $X \overset{\binom{f}{i}}{\rightarrowtail} X' \oplus Y \overset{(\bar{i},\ -g')}{\rightarrowtail} E \dashrightarrow$是一个 $\mathbb{E}$-三角。应用 Hom(–, Y')，得到一个正合序列

$$\mathcal{A}(E, Y') \xrightarrow{\mathcal{A}((\bar{i},-g'),Y')} \mathcal{A}(X' \oplus Y, Y') \xrightarrow{\mathcal{A}(\binom{f}{i},Y')} \mathcal{A}(X, Y')$$

由于 $(i',\ -g)\binom{f}{i} = 0$，存在一个态射 $g'' :\ E \longrightarrow Y'$，使得 $(i',\ -g) = g'' \circ (\bar{i},\ -g')$，即，$g''i = i'$ 且 $g''g' = g$。因此，根据三取二公理，$g'' \in$Weq。

因此有一个分解 $g'' = q''j'' :\ E \xrightarrow{j''} F \xrightarrow{q''} Y'$，其中 $j'' \in$ TCoFib，且 $q'' \in$ TFib。由 (ET4)，存在一个由 $\mathbb{E}$-三角构成的交换图：



使得 $(j''')^*\zeta = f_*\delta$。由于 $j'' \in \mathbf{TCoFib}$，因此有 $G \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$，从而 $j''' \in \mathbf{TCoFib}$。由命题 2.8，存在一个由 $\mathbb{E}$-三角构成的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K & = & K & & \\
 & & \downarrow & & \vdots & & \\
X' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & H & \overset{\zeta}{\dashrightarrow} & \\
\| & & {\scriptstyle q''}\downarrow & & \vdots{\scriptstyle q'''} & & \\
X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{p'} & Z' & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\end{array}$$

使得 $(q''')^*\delta' = \zeta$。由于 $q'' \in \mathbf{TFib}$，因此有 $K \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$，从而 $q''' \in \mathbf{TFib}$。令$h = q'''j'''$。则 $h \in \mathbf{Weq}$，且有如下 $\mathbb{E}$-三角形交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{p} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g'}\downarrow & & \| & & \\
X' & \xrightarrow{\bar{i}} & E & \xrightarrow{\bar{p}} & Z & \overset{f_*\delta}{\dashrightarrow} & \\
\| & & {\scriptstyle g''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{p'} & Z' & \overset{\delta'}{\dashrightarrow} & \\
\end{array}$$

其中 $h^*\delta' = (j''')^*(q''')^*\delta' = (j''')^*\zeta = f_*\delta$，且 $hp = p'g''g' = p'g$。这就完成了 (1) 的证明。

断言 (2) 是 (1) 的对偶，而 (3) 的证明与 (1) 的证明类似。 □

3.2. **悬移函子与环函子**。设 $(\mathbf{CoFib}, \mathbf{Fib}, \mathbf{Weq})$ 是弱幂等完备外三角范畴 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 上的一个容许模型结构，$\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 为其同伦范畴，$(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ 为相应的 Hovey 三元组。Nakaoka 和 Palu [26] 定义了悬挂函子 Σ: $\mathrm{Ho}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 和环函子 $\Omega : \mathrm{Ho}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$，并证明了 Σ与 Ω 互为准逆。我们将为这一结果提供另一种证明。

由余扭对 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ 的完备性可知，对于任意对象 $X \in \mathcal{A}$，存在一个$\mathbb{E}$-三角 $X \xrightarrow{i_X} M \xrightarrow{p_X} \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow}$，其中 $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ 且 $\Sigma X \in \mathcal{C}$，称为X的 **悬挂序列**。此外，由余扭对 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W},\ \mathcal{F})$ 的完备性可知，对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 X，存在一个 $\mathbb{E}$-三角 $\Omega X \xrightarrow{j_X} K \xrightarrow{q_X} X \overset{\varepsilon_X}{\dashrightarrow}$，其中 $K \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ 且 $\Omega X \in \mathcal{F}$，称为 X的 **环序列**。

对于每个对象 $X \in \mathcal{A}$，固定一个悬挂序列 $X \xrightarrow{i_X} M \xrightarrow{p_X} \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow}$。对于 $\mathcal{A}$ 中的任意态射 $f\colon X \longrightarrow Y$，应用 $\mathcal{A}(-,\ N)$ 可得一个态射 $k\colon M \longrightarrow N$。于是，根据 (ET3)，存在一个态射 $g : \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$，属于 $\mathcal{A}$，使得下列交换图可交换：

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{i_X} & M & \xrightarrow{p_X} & \Sigma X & \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} & \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle k}\vdots & & \vdots{\scriptstyle g} & & \\
Y & \xrightarrow{i_Y} & N & \xrightarrow{p_Y} & \Sigma X & \overset{\delta_Y}{\dashrightarrow} & \\
\end{array}$$

以及 $f_*\delta_X = g^*\delta_Y$。定义 $\Sigma f := \gamma(g) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$。那么 $\Sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 是一个定义良好的函子（[26, 6.2]），且 Σ 是可加的。$\mathcal{A}$ 中 Σf 的一个代表元 g 也记作 Σf。

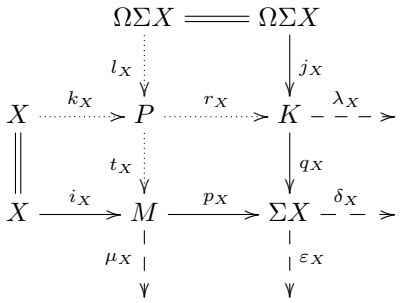
由于 M，$N \in \mathcal{W}$，任意态射 $k\colon M \longrightarrow N$ 都是弱等价。若 f 是弱等价，则根据引理 3.2，上述 g 可选为一个弱等价 g，使得 $\Sigma f = \gamma(g)$。因此，Σ 将 $\mathcal{A}$ 中的弱等价映为 Ho($\mathcal{A}$) 中的同构。根据局部化函子的泛性质，$\Sigma\colon \mathcal{A} \longrightarrow$ Ho($\mathcal{A}$) 诱导出一个函子 Σ: Ho($\mathcal{A}$) $\longrightarrow$ Ho($\mathcal{A}$)，使得$\Sigma = \Sigma \circ \gamma$。

对于 $\mathcal{A}$ 中的对象 X、Y，令 $(X \oplus Y, e^X, e^Y)$ 为 $\mathcal{A}$ 中 X 和 Y 的余积。由于局部化函子 $\gamma\colon \mathcal{A} \longrightarrow$ Ho($\mathcal{A}$) 是加性的（参见引理 2.24），$(X \oplus Y, \gamma(e^X)\ \gamma(e^Y))$ 是 Ho($\mathcal{A}$) 中 X 和 Y 的余积。由于 $\Sigma\colon \mathcal{A} \longrightarrow$ Ho($\mathcal{A}$) 是加性函子，$(\Sigma(X \oplus Y)\ \Sigma e^X, \Sigma e^Y)$ 是 Ho($\mathcal{A}$) 中 ΣX 和 ΣY 的余积。因此，函子 $\bar{\Sigma}$: Ho($\mathcal{A}$) $\longrightarrow$ Ho($\mathcal{A}$) 保持 Ho($\mathcal{A}$) 中的余积，故 Σ 是加性的，称为悬挂函子，简记为 Σ。

对偶地，对于任意对象 $X \in \mathcal{A}$，固定一个环序列 $\Omega X \xrightarrow{jx} K \xrightarrow{qx} X \overset{\varepsilon x}{\dashrightarrow}$。对于 $\mathcal{A}$ 中的任意态射$f\colon X \longrightarrow Y$，存在一个态射 $h\colon \Omega X \longrightarrow \Omega Y$，属于 $\mathcal{A}$，使得 $h_*\varepsilon_X = f^*\varepsilon_Y$。定义 $\Omega f := \gamma(h) \in$ Ho($\mathcal{A}$)。于是 $\Omega\colon \mathcal{A} \longrightarrow$ Ho($\mathcal{A}$) 是一个加性函子。Ωf 在 $\mathcal{A}$ 中的一个代表元 h 也记作 Ωf。类似地，Ω 诱导出一个加性函子 Ω: Ho($\mathcal{A}$) $\longrightarrow$ Ho($\mathcal{A}$)，使得 $\Omega = \Omega \circ \gamma$，称为环函子，简记为 Ω。

命题 3.3 ([26, 命题 6。14])。令 Σ,Ω: Ho($\mathcal{A}$) $\longrightarrow$ Ho($\mathcal{A}$) 分别为悬挂函子和环函子。则 Id $\cong \Sigma\Omega$ 和 Id $\cong \Omega\Sigma$。

证明。这里我们给出另一种证明。自然同构 η : Id $\longrightarrow \Sigma\Omega$ 的定义与 [26] 相同。对于对象 $X \in \mathcal{A}$，有悬挂序列 $X \xrightarrow{ix} M \xrightarrow{px} \Sigma X \overset{\delta x}{\dashrightarrow}$ 和环序列 $\Omega\Sigma X \xrightarrow{jx} K \xrightarrow{qx} \Sigma X \overset{\varepsilon x}{\dashrightarrow}$。由命题 2.6，存在一个由 $\mathbb{E}$-三角形构成的交换图：



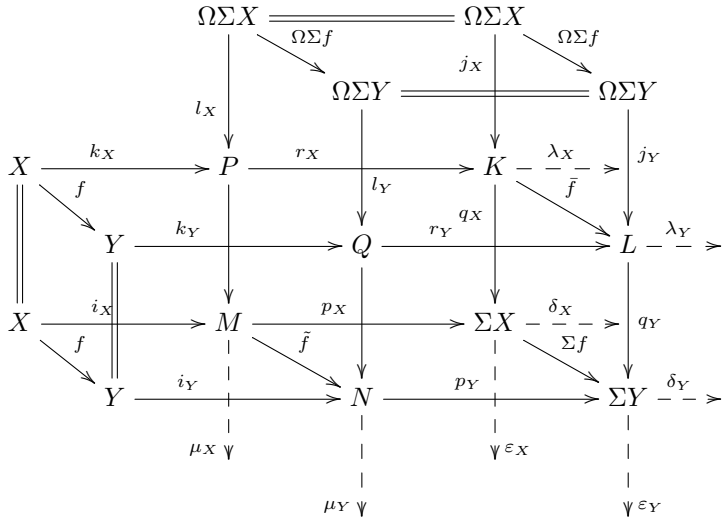
使得 $(q_X)^*\delta_X = \lambda_X$，$(p_X)^*\varepsilon_X = \mu_X$，$(k_X)_*\delta_X + (l_X)_*\varepsilon_X = 0$. 由于 $K \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$，有$k_X \in$ TCoFib。由于 l_X 是一个 $\mathbb{E}$-余纤维化且 Cone(l_X) $\in \mathcal{W}$，由引理 3.1 可知l_X是一个弱等价，因此 $\eta_X := \gamma(l_X)^{-1}\gamma(k_X)\colon X \longrightarrow \Omega\Sigma X$是 Ho($\mathcal{A}$) 中的一个同构。

还需证明 $\eta_X\colon X \longrightarrow \Omega\Sigma X$ 关于 X 是函子性的。Nakaoka 和 Palu [26] 已通过他们引入的“连接态射”的性质证明了这一点。这里我们给出一个直接证明。为此，我们首先证明，对于 $\mathcal{A}$ 中任意态射 $f\colon X \longrightarrow Y$，下列方图

在 Ho($\mathcal{A}$) 中交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \Omega\Sigma X \\ {\scriptstyle \gamma(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega\Sigma\gamma(f)} \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & \Omega\Sigma Y. \end{array} \tag{3.1}$$

由命题 2.6 以及 Σ和 Ω 的定义可得如下 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathbb{E}$-三角形交换图:



使得

$$\begin{array}{cccc} f_*\delta_X = (\Sigma f)^*\delta_Y, & (q_X)^*\delta_X = \lambda_X, & (p_X)^*\varepsilon_X = \mu_X, & (k_X)_*\delta_X + (l_X)_*\varepsilon_X = 0, \\ (\Sigma f)^*\varepsilon_Y = (\Omega\Sigma f)_*\varepsilon_X, & (q_Y)^*\delta_Y = \lambda_Y, & (p_Y)^*\varepsilon_Y = \mu_Y, & (k_Y)_*\delta_Y + (l_Y)_*\varepsilon_Y = 0. \end{array}$$

由于

$$\begin{aligned} f_*\lambda_X &= f_*(q_X)^*\delta_X = (q_X)^* f_*\delta_X \\ &= (q_X)^*(\Sigma f)^*\delta_Y = ((\Sigma f)q_X)^*\delta_Y \\ &= (q_Y\bar{f})^*\delta_Y = \bar{f}^*(q_Y)^*\delta_Y \\ &= \bar{f}^*\lambda_Y, \end{aligned}$$

由 (ET2) 可知，存在一个态射 $s\colon P \longrightarrow Q$，使得 $sk_X = k_Y f$且 $r_Y s = fr_X$。由于

$$\begin{aligned} (sl_X - l_Y(\Omega\Sigma f))_*\varepsilon_X &= s_*(l_X)_*\varepsilon_X - (l_Y)_*(\Omega\Sigma f)_*\varepsilon_X = -s_*(k_X)_*\delta_X - (l_Y)_*(\Sigma f)^*\varepsilon_Y \\ &= -(sk_X)_*\delta_X - (\Sigma f)^*(l_Y)_*\varepsilon_Y = -(sk_X)_*\delta_X + (\Sigma f)^*(k_Y)_*\delta_Y \\ &= -(sk_X)_*\delta_X + (k_Y)_*(\Sigma f)^*\delta_Y = -(sk_X)_*\delta_X + (k_Y)_* f_*\delta_X \\ &= (-sk_X + k_Y f)_*\delta_X = 0_*\delta_X = 0, \end{aligned}$$

由推论 2.4 可知， $sl_X - l_Y(\Omega\Sigma f)$ 可经由 $K \in \mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ 分解，因此在 Ho($\mathcal{A}$) 中， $\gamma(sl_X) = \gamma(l_Y(\Omega\Sigma f))$。因此，在 Ho($\mathcal{A}$) 中有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\gamma(k_X)} & P & \xleftarrow{\gamma(l_X)} & \Omega\Sigma X \\ {\scriptstyle\gamma(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma(s)} & & \downarrow{\scriptstyle\Omega\Sigma\gamma(f)} \\ Y & \xrightarrow[\gamma(k_Y)]{} & Q & \xleftarrow[\gamma(l_Y)]{} & \Omega\Sigma Y. \end{array}$$

由此可知，方块 (3.1) 在 Ho($\mathcal{A}$) 中交换。特别地，若 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是弱等价，则下列方块也在 Ho($\mathcal{A}$) 中交换：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\eta_Y} & \Omega\Sigma Y \\ {\scriptstyle\gamma(f)^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Omega\Sigma\gamma(f)^{-1}} \\ X & \xrightarrow{\eta_X} & \Omega\Sigma X. \end{array}$$

对于 Ho($\mathcal{A}$) 中任意态射 $g : X \longrightarrow Y$，由命题 2.28，存在一个 f in$\mathcal{A}$ 中的态射，使得下列方块在 Ho($\mathcal{A}$) 中交换：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ {\scriptstyle\theta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_Y} \\ RQX & \xrightarrow{\gamma(f)} & RQY \end{array}$$

其中 $\theta_X = \gamma(\sigma_X)\gamma(\rho_X)^{-1}$, $\theta_Y = \gamma(\sigma_Y)\gamma(\rho_Y)^{-1}$。因此 $g = \gamma(\rho_Y)\gamma(\sigma_Y)^{-1}\gamma(f)\gamma(\sigma_X)\gamma(\rho_X)^{-1}$。结合 Ho($\mathcal{A}$) 中下列交换方块：

$$\begin{array}{ccccccccccc} X & \xrightarrow{\gamma(\rho_X)^{-1}} & QX & \xrightarrow{\gamma(\sigma_X)} & RQX & \xrightarrow{\gamma(f)} & RQY & \xrightarrow{\gamma(\sigma_Y)^{-1}} & QY & \xrightarrow{\gamma(\rho_Y)} & Y \\ {\scriptstyle\eta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta_{QX}} & & \downarrow{\scriptstyle\eta_{RQX}} & & \downarrow{\scriptstyle\eta_{RQY}} & & \downarrow{\scriptstyle\eta_{QY}} & & \downarrow{\scriptstyle\eta_Y} \\ \Omega\Sigma X & \xrightarrow{\Omega\Sigma\gamma(\rho_X)^{-1}} & \Omega\Sigma QX & \xrightarrow{\Omega\Sigma\gamma(\sigma_X)} & \Omega\Sigma RQX & \xrightarrow{\Omega\Sigma\gamma(f)} & \Omega\Sigma RQY & \xrightarrow{\Omega\Sigma\gamma(\sigma_Y)^{-1}} & \Omega\Sigma QY & \xrightarrow{\Omega\Sigma\gamma(\rho_Y)} & \Omega\Sigma Y \end{array}$$

便得到交换方块：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ {\scriptstyle\eta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta_Y} \\ \Omega\Sigma X & \xrightarrow{\Omega\Sigma g} & \Omega\Sigma Y. \end{array}$$

也就是说， $\eta = (\eta_X)$ 是一个自然同构。

类似地，存在一个自然同构 ζ : Id $\longrightarrow\Omega\Sigma$。 □

3.3. **Ho() 上的三角结构**。设 (CoFib，Fib，Weq) 是弱幂等完备外三角范畴 ($\mathcal{A}$，$\mathbb{E}$，$\mathfrak{s}$) 上的一个容许模型结构，($\mathcal{C}$，$\mathcal{F}$，$\mathcal{W}$) 是相应的 Hovey 三元组，Σ 是悬挂函子。我们将定义 Ho($\mathcal{A}$) 中的 distinguished triangles 类 Δ。

定义 3.4。设 $f: X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个态射，且 $X \xrightarrow{i_X} M \xrightarrow{p_X} \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow}$ 是 X 的悬挂序列。那么在 $\mathcal{A}$ 中存在一个由 $\mathbb{E}$-三角形组成的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i_X} & M & \xrightarrow{p_X} & \Sigma X & \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \| & \\ Y & \xrightarrow{g} & C(f) & \xrightarrow{h} & \Sigma X & \overset{f_*\delta_X}{\dashrightarrow} \end{array}$$

Ho($\mathcal{A}$) 中的三角

$$X \xrightarrow{\gamma(f)} Y \xrightarrow{\gamma(g)} C(f) \xrightarrow{\gamma(h)} \Sigma X$$

称为由 f 诱导的 标准三角。用 Δ 表示 Ho($\mathcal{A}$) 中与标准三角同构的三角所成的类。

这里的三角与 [7, 8, 11], 中的经典构造相似，但不同于 [26] 中的构造。 [26] 中 Ho($\mathcal{A}$) 的标准三角 $X \overset{\gamma(f)}{\longrightarrow} Y \overset{\gamma(g)}{\longrightarrow} Z \overset{\gamma(l)(\delta)}{\longrightarrow} \Sigma X$ ，是 γ 将 $\mathcal{A}$ 中的一个 $\mathbb{E}$-三角 $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 连同 Ho($\mathcal{A}$) 中的一个“连接态射”$l(\delta): Z \longrightarrow \Sigma X$ 映射所得的像。

3.4. **主要结果**。

定理 3.5. 设 (余纤维化、Fib、Weq) 是弱幂等完备外三角范畴 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$上的一个容许模型结构，$\Sigma: \mathrm{Ho}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 为悬挂函子，且 Δ 是定义 3.4 中的三角类。那么 $(\mathrm{Ho}(\mathcal{A})\ \Sigma, \Delta)$ 是一个三角范畴。

为证明定理 3.5，根据命题 3.3，只需验证公理 (TR1)、(TR2)、(TR3) 和 (TR4)。

对于任意对象 $X \in$Ho($\mathcal{A}$)，考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i_X} & M & \xrightarrow{p_X} & \Sigma X & \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle 1_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \| & \\ X & \xrightarrow{i_X} & M & \xrightarrow{p_X} & \Sigma X & \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} \end{array}$$

其中 $X \xrightarrow{i_X} M \xrightarrow{p_X} \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow}$ 是 X 的悬挂序列。根据定义， $X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X \longrightarrow M \longrightarrow \Sigma X$ 是一个标准三角。由于 $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$、 $M \cong 0$ 属于 Ho($\mathcal{A}$)。因此，三角 $X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$ 属于 Δ。

~对于任意态射 $f: X \longrightarrow Y$ in Ho($\mathcal{A}$)，根据命题 2.28，存在一个态射 $f: RQX \longrightarrow RQY$ in $\mathcal{A}$ ，使得下方方块在 Ho($\mathcal{A}$) 中交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \theta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_Y} \\ RQX & \xrightarrow{\gamma(\tilde{f})} & RQY \end{array}$$

其中 θ_X 和 θ_Y 是 Ho($\mathcal{A}$) 中的同构。令 $RQX \overset{\gamma(f)}{\succ} RQY \overset{\gamma(\tilde{g})}{\succ} C(\tilde{f}) \overset{\gamma(h)}{\succ} \Sigma RQX$ 为由 f 诱导的标准三角。那么在 Ho($\mathcal{A}$) 中存在一个三角同构:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\gamma(\tilde{g})\circ\theta_Y} & C(f) & \xrightarrow{\Sigma\theta_X^{-1}\circ\gamma(\tilde{h})} & \Sigma X \\ {\scriptstyle\theta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_Y} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma\theta_X} \\ RQX & \xrightarrow{\gamma(\tilde{f})} & RQY & \xrightarrow{\gamma(\tilde{g})} & C(f) & \xrightarrow{\gamma(\tilde{h})} & \Sigma RQX. \end{array}$$

因此，第一行属于 Δ，这表明 Ho($\mathcal{A}$) 中的每个态射 f 都可以嵌入到 Δ中的一个三角形内。这就完成了 (TR1) 的证明。

为了证明 (TR2)，只需验证以下引理。

引理 3.6。 对于一个标准三角 $X \overset{\gamma(f)}{\succ} Y \overset{\gamma(g)}{\succ} C(f) \overset{\gamma(h)}{\succ} \Sigma X$，若它属于$\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$，则三角形$Y \overset{\gamma(g)}{\succ} C(f) \overset{\gamma(h)}{\succ} \Sigma X \overset{-\Sigma\gamma(f)}{\succ} \Sigma Y$ 属于 Δ。

证明。 根据定义，存在一个 $\mathbb{E}$-三角形的交换图，位于 $\mathcal{A}$中:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i_X} & M & \xrightarrow{p_X} & \Sigma X & \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ Y & \xrightarrow{g} & C(f) & \xrightarrow{h} & \Sigma X & \overset{f_*\delta_X}{\dashrightarrow} & . \end{array}$$

根据 Σ 的定义，在 $\mathcal{A}$中存在一个 $\mathbb{E}$-三角形的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i_X} & M & \xrightarrow{p_X} & \Sigma X & \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & N & \xrightarrow{p_Y} & \Sigma Y & \overset{\delta_Y}{\dashrightarrow} & \end{array}$$

使得 $f_*\delta_X = f'^*\delta_Y$，其中 $\Sigma\gamma(f) = \gamma(f')$。根据命题 2.11，存在一个态射$t:\ C(f) \longrightarrow N$，使得下面的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{g} & C(f) & \xrightarrow{h} & \Sigma X & \overset{f_*\delta_X}{\dashrightarrow} & \\ \| & & {\scriptstyle t}\vdots & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & N & \xrightarrow{p_Y} & \Sigma Y & \overset{\delta_Y}{\dashrightarrow} & \end{array}$$

在 $\mathcal{A}$ 中可交换，且右侧方块是同伦笛卡尔的，也就是说，

$$C(f) \xrightarrow{\binom{h}{t}} \Sigma X \oplus N \xrightarrow{(-f',\ p_Y)} \Sigma Y \overset{g_*\delta_Y}{\dashrightarrow}$$

是一个 $\mathbb{E}$-三角。因此有一个由 $\mathbb{E}$-三角组成的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{i_Y} & N & \xrightarrow{p_Y} & \Sigma Y & \overset{\delta_Y}{\dashrightarrow} & \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle\binom{0}{1}}\downarrow & & \| & & \\ C(f) & \xrightarrow{\binom{h}{t}} & \Sigma X \oplus N & \xrightarrow{(-f',\ p_Y)} & \Sigma Y & \overset{g_*\delta_Y}{\dashrightarrow} & \end{array}$$

根据定义，有由 g 诱导的标准三角：

$$Y \xrightarrow{\gamma(g)} C(f) \xrightarrow{\gamma\binom{h}{t}} \Sigma X \oplus N \xrightarrow{\gamma(-f',p_Y)} \Sigma Y$$

由于 $N \in \mathcal{W}$, N 是 Ho($\mathcal{A}$) 中的零对象。因此，$Y \overset{\gamma(g)}{\succ} C(f) \overset{\gamma(h)}{\succ} \Sigma X \overset{-\Sigma\gamma(f)}{\succ} \Sigma Y$ 是 Δ 中的一个三角。□

为证明 (TR3)，我们首先证明一个引理，该引理表明标准三角中的两个项属于$\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$。

引理 3.7。对于 $Ho(\mathcal{A})$ 中的任意标准三角 $X \overset{\gamma(f)}{\succ} Y \overset{\gamma(g)}{\succ} C(f) \overset{\gamma(h)}{\succ} \Sigma X$，存在一个态射 $f\colon RQX \longrightarrow RQY$ 于 $\mathcal{A}$ 中，以及 $Ho(\mathcal{A})$ 中的一个三角同构：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\gamma(f)} & Y & \xrightarrow{\gamma(g)} & C(f) & \xrightarrow{\gamma(h)} & \Sigma X \\ {\scriptstyle\theta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_Y} & & \downarrow{\scriptstyle w} & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma\theta_X} \\ RQX & \xrightarrow{\gamma(\tilde{f})} & RQY & \xrightarrow{\gamma(\tilde{g})} & C(\tilde{f}) & \xrightarrow{\gamma(\tilde{h})} & \Sigma RQX \end{array}$$

其中第二行是由 f 诱导的标准三角，而 RQX 和 RQY 属于 $\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$。

证明。回顾一下，根据余扭对 $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ 和 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ 的完备性，在 $\mathcal{A}$ 中存在 $\mathbb{E}$-三角形：

$$R_X \longrightarrow QX \xrightarrow{\rho_X} X \dashrightarrow, \qquad QX \xrightarrow{\sigma_X} RQX \longrightarrow Q_X \dashrightarrow$$
$$R_Y \longrightarrow QY \xrightarrow{\rho_Y} Y \dashrightarrow, \qquad QY \xrightarrow{\sigma_Y} RQY \longrightarrow Q_Y \dashrightarrow$$

其中 $QX, QY \in \mathcal{C}$, $R_X, R_Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, $RQX, RQY \in \mathcal{F}$, $Q_X, Q_Y \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$。因此 ρ_X, $\sigma_X, \rho_Y, \sigma_Y$ 是弱等价，并且在 Ho($\mathcal{A}$) 中有典范同构：

$$\theta_X := \gamma(\sigma_X) \circ \gamma(\rho_X)^{-1} : X \longrightarrow RQX, \qquad \theta_Y := \gamma(\sigma_Y) \circ \gamma(\rho_Y)^{-1} : Y \longrightarrow RQY$$

将 $\mathcal{A}(QX, -)$ 应用于 $R_Y \longrightarrow QY \xrightarrow{\rho_Y} Y \dashrightarrow$，得到一个正合序列

$$\mathcal{A}(QX, QY) \xrightarrow{\mathcal{A}(QX, \rho_Y)} \mathcal{A}(QX, Y) \longrightarrow \mathbb{E}(QX, R_Y)$$

由于 $\mathbb{E}(QX, R_Y) = 0$，存在一个态射 $f\colon QX \longrightarrow QY$，使得 $f\rho_X = \rho_Y f$。将$\mathcal{A}(-, RQY)$ 应用于 $QX \xrightarrow{\sigma_X} RQX \longrightarrow Q_X \dashrightarrow$，得到一个正合序列

$$\mathcal{A}(RQX, RQY) \xrightarrow{\mathcal{A}(\sigma_X, RQY)} \mathcal{A}(QX, RQY) \longrightarrow \mathbb{E}(Q_X, RQY)$$

由于 $\mathbb{E}(Q_X, RQY) = 0$，存在一个态射 $f\colon RQX \longrightarrow RQY$，使得 $f\sigma_X = \sigma_Y f$。

考虑 X 和 QX的悬移序列：

$$X \longrightarrow M_X \longrightarrow \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow}, \quad QX \longrightarrow M_{QX} \longrightarrow \Sigma QX \overset{\delta_{QX}}{\dashrightarrow}.$$

根据 $\Sigma\rho_X$的定义，在 $\mathcal{A}$中有如下 $\mathbb{E}$-三角形的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & M_X & \longrightarrow & \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle\rho_X}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma\rho_X} \\ QX & \longrightarrow & M_{QX} & \longrightarrow & \Sigma QX \overset{\delta_{QX}}{\dashrightarrow} \end{array}$$

s使得 $(\rho_X)_*\delta_X = (\Sigma\rho_X)^*\delta_{QX}$。此外，在 $\mathcal{A}$ 中存在如下 $\mathbb{E}$-三角形的交换图 ：

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & M_X & \longrightarrow & \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \| \\ Y & \xrightarrow{g} & C(f) & \xrightarrow{h} & \Sigma X \overset{f_*\delta_X}{\dashrightarrow} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} QX & \longrightarrow & M_{QX} & \longrightarrow & \Sigma QX \overset{\delta_{QX}}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle \bar{f}}\downarrow & & \downarrow & & \| \\ QY & \xrightarrow{\bar{g}} & C(\bar{f}) & \xrightarrow{\bar{h}} & \Sigma QX \overset{\bar{f}_*\delta_{QX}}{\dashrightarrow} \end{array}.$$

考虑 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathbb{E}$-三角形交换图：

$$\begin{array}{ccccc} QY & \xrightarrow{\bar{g}} & C(\bar{f}) & \xrightarrow{\bar{h}} & \Sigma QX \overset{\bar{f}_*\delta_{QX}}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle\rho_Y}\downarrow & \overset{\varphi}{\vdots}\!\downarrow & & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma\rho_X} \\ Y & \xrightarrow{g} & C(f) & \xrightarrow{h} & \Sigma X \overset{f_*\delta_X}{\dashrightarrow} \end{array}$$

由于

$$(\rho_Y)_*\bar{f}_*\delta_{QX} = (\rho_Y\bar{f})_*\delta_{QX} = (f\rho_X)_*\delta_{QX} = f_*(\rho_X)_*\delta_{QX} = f_*(\Sigma\rho_X)^*\delta_X = (\Sigma\rho_X)^*f_*\delta_X$$

根据引理 3.2 (3)，存在一个弱等价 φ，使得上述交换图可交换。

考虑 RQX 的悬挂序列 $RQX \quad \succ M_{\underline{RQX}} \quad \succ \Sigma\underline{RQX} \overset{\delta_{RQX}}{\succ}$。根据 $\Sigma\sigma_X$ 的定义，在 $\mathcal{A}$ 中有如下 $\mathbb{E}$-三角形的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} QX & \longrightarrow & M_{QX} & \longrightarrow & \Sigma QX \overset{\delta_{QX}}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle\sigma_X}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma\sigma_X} \\ RQX & \longrightarrow & M_{RQX} & \longrightarrow & \Sigma RQX \overset{\delta_{RQX}}{\dashrightarrow} \end{array}$$

使得 $(\Sigma\sigma_X)^*\delta_{RQX} = (\sigma_X)_*\delta_{QX}$。此外，在 $\mathcal{A}$ 中有一个由 $\mathbb{E}$-三角形构成的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} RQX & \longrightarrow & M_{RQX} & \longrightarrow & \Sigma RQX \overset{\delta_{RQX}}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle\tilde{f}}\downarrow & & \downarrow & & \| \\ RQY & \xrightarrow{\tilde{g}} & C(\tilde{f}) & \xrightarrow{\tilde{h}} & \Sigma RQX \overset{\tilde{f}_*\delta_{RQX}}{\dashrightarrow} \end{array}.$$

考虑 $\mathcal{A}$ 中由 $\mathbb{E}$-三角形构成的以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} QY & \xrightarrow{\bar{g}} & C(\bar{f}) & \xrightarrow{\bar{h}} & \Sigma QX \overset{\bar{f}_*\delta_{QX}}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle\sigma_Y}\downarrow & \overset{\psi}{\vdots}\!\downarrow & & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma\sigma_X} \\ RQY & \xrightarrow{\tilde{g}} & C(\tilde{f}) & \xrightarrow{\tilde{h}} & \Sigma RQX \overset{\tilde{f}_*\delta_{RQX}}{\dashrightarrow} \end{array}$$

由于

$$(\sigma_Y)_*\bar{f}_*\delta_{QX} = (\sigma_Y\bar{f})_*\delta_{QX} = (\tilde{f}\sigma_X)_*\delta_{QX} = \tilde{f}_*(\sigma_X)_*\delta_{QX} = \tilde{f}_*(\Sigma\sigma_X)^*\delta_{RQX} = (\Sigma\sigma_X)^*\tilde{f}_*\delta_{RQX}$$

根据引理 3.2 (3)，存在一个弱等价 ψ，使得上述交换图成立。

因此，在 $\mathcal{A}$ 中有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & C(f) & \xrightarrow{h} & \Sigma X \\
{\scriptstyle\rho_X}\uparrow & & {\scriptstyle\rho_Y}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \uparrow{\scriptstyle\Sigma\rho_X} \\
QX & \xrightarrow{\bar{f}} & QY & \xrightarrow{\bar{g}} & C(\bar{f}) & \xrightarrow{\bar{h}} & \Sigma QX \\
{\scriptstyle\sigma_X}\downarrow & & {\scriptstyle\sigma_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma\sigma_X} \\
RQX & \xrightarrow{\tilde{f}} & RQY & \xrightarrow{\tilde{g}} & C(\tilde{f}) & \xrightarrow{\tilde{h}} & \Sigma RQX
\end{array} \tag{3.2}$$

其中，第一、第二和第三行在 γ 下的像分别是由 f、 $\bar{f}$ 和 $\tilde{f}$ 诱导的标准三角形。由于 $\theta_X = \gamma(\sigma_X) \circ \gamma(\rho_X)^{-1}$， $\theta_Y = \gamma(\sigma_Y) \circ \gamma(\rho_Y)^{-1}$，对 (3.2) 应用 γ，得到 Ho($\mathcal{A}$) 中的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\gamma(f)} & Y & \xrightarrow{\gamma(g)} & C(f) & \xrightarrow{\gamma(h)} & \Sigma X \\
{\scriptstyle\theta_X}\downarrow & & {\scriptstyle\theta_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma(\psi)\circ\gamma(\varphi)^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma\theta_X} \\
RQX & \xrightarrow[\gamma(\tilde{f})]{} & RQY & \xrightarrow[\gamma(\tilde{g})]{} & C(\tilde{f}) & \xrightarrow[\gamma(\tilde{h})]{} & \Sigma RQX
\end{array}$$

证明至此完成。 □

为证明 (TR3)，由引理 3.7，只需验证以下引理。

引理 3.8。假设下图中的两行都是 $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 中的标准三角形，且具有 X、Y、X'、$Y' \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$，并且左侧方框在 $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 中交换。则存在一个态射 $w' \colon C(f) \longrightarrow C(f')$，使得该图在 $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 中交换。

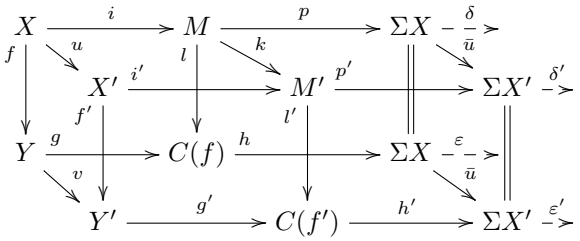
$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\gamma(f)} & Y & \xrightarrow{\gamma(g)} & C(f) & \xrightarrow{\gamma(h)} & \Sigma X \\
{\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v'} & & \vdots{\scriptstyle w'} & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma u'} \\
X' & \xrightarrow{\gamma(f')} & Y' & \xrightarrow{\gamma(g')} & C(f') & \xrightarrow{\gamma(h')} & \Sigma X'
\end{array}$$

证明。由于 X, X', Y, $Y' \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$，根据推论 2.27，存在态射 $u \colon X \longrightarrow X'$, $v \colon Y \longrightarrow Y'$，它们属于 $\mathcal{A}$，使得 $u' = \gamma(u)$ $v' = \gamma(v)$。因此 $\gamma(f'u - vf) = \gamma(f')\gamma(u) - \gamma(v)\gamma(f) = \gamma(f')u' - v'\gamma(f) = 0$。根据定理 2.26，有等价关系 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})/(\mathcal{C} \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$,$[l] \mapsto \gamma(l)$。因此 $[f'u - vf] = 0$，即 $f'u - fv \colon X \longrightarrow Y'$ 可通过对象 W 分解，该对象属于 $\mathcal{C} \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$：

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f'u-fv} & Y' \\
& \searrow \quad \nearrow & \\
& W &
\end{array}$$

由悬挂序列 $X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} \Sigma X \xrightarrow{\delta} \cdots$ 和 $\mathbb{E}(\Sigma X, W) = 0$，可知每个态射 $X \longrightarrow W$ 在 $\mathcal{A}$ 中都可经由 i分解。因此， $f'u - vf \colon X \longrightarrow Y'$ 可经由 i分解，即存在一个态射 $\varphi \colon M \longrightarrow Y'$，使得 $f'u - vf = \varphi \circ i$。现在考虑以下

$\mathbb{E}$-三角形在 $\mathcal{A}$ 中的交换图（注意，左侧的平行四边形在 $\mathcal{A}$中不交换，但在 Ho($\mathcal{A}$) 中交换）：



其中 $\Sigma\gamma(u) = \gamma(\bar{u})$， $f_*\delta = \varepsilon$， $f'_*\delta' = \varepsilon'$， $u_*\delta = \bar{u}^*\delta'$。由于 $i_*\delta = 0$，有

$$\begin{aligned} v_*\varepsilon &= v_*f_*\delta = (vf)_*\delta = (f'u - \varphi i)_*\delta \\ &= f'_*u_*\delta = f'_*\bar{u}^*\delta' = \bar{u}^*f'_*\delta' = \bar{u}^*\varepsilon'. \end{aligned}$$

由 (ET2)，存在一个态射 $w\colon\ C(f) \longrightarrow C(f')$，属于 $\mathcal{A}$，使得 $wg = g'v$， $h'w = \bar{u}h$。因此

$$\gamma(w)\gamma(g) = \gamma(g')\gamma(v), \quad \gamma(h')\gamma(w) = \gamma(\bar{u})\gamma(h) = \Sigma\gamma(u)\gamma(h) = \Sigma u'\gamma(h).$$

令 $w' = \gamma(w)\colon\ C(f) \longrightarrow C(f')$ 属于 Ho($\mathcal{A}$)。那么

$$w'\gamma(g) = \gamma(g')v', \quad \gamma(h')w' = \Sigma u'\gamma(h).$$

证明至此完成。 □

为了证明 **(TR4)**，我们需要以下两个引理。

引理 3.9。设 $X \xrightarrow{f} Y$ 和 $Y \xrightarrow{g} Z$ 是 Ho($\mathcal{A}$) 中的两个态射。则存在 $f'\colon\ X' \longrightarrow Y'$ 和 $g'\colon\ Y' \longrightarrow Z'$ 中的余纤维化，使得下列交换图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ X' & \xrightarrow{\gamma(f')} & Y' & \xrightarrow{\gamma(g')} & Z' \end{array}$$

在Ho($\mathcal{A}$)中交换，其中 u、 v、 w 是 Ho($\mathcal{A}$) 中的同构。

证明。根据命题 2.28，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle \theta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_Z} \\ RQX & \xrightarrow{\gamma(\tilde{f})} & RQY & \xrightarrow{\gamma(\tilde{g})} & RQZ \end{array} \tag{3.3}$$

~在 Ho($\mathcal{A}$) 中，其中 f和 $\tilde{g}$是 $\mathcal{A}$中的态射，而 θ_X、 θ_Y、 θ_Z是 Ho($\mathcal{A}$) 中的同构。根据~分解公理，存在 $f = pi$，其中 $i \in$是余纤维化， $p \in$ 是 TFib。根据分解公理，存在 $\tilde{g}p = p'i'$，其中 $i' \in$是余纤维化， $p' \in$ 是 TFib。于是，在 $\mathcal{A}$中有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} RQX & \xrightarrow{\tilde{f}} & RQY & \xrightarrow{\tilde{g}} & RQZ \\ \| & & \uparrow{\scriptstyle p} & & \uparrow{\scriptstyle p'} \\ RQX & \xrightarrow{i} & U & \xrightarrow{i'} & V. \end{array} \tag{3.4}$$

将 γ 应用于图 (3.4) 和 (3.3)，可得到 Ho($\mathcal{A}$) 中的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle\theta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_Y} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_Z} \\ RQX & \xrightarrow{\gamma(\tilde{f})} & RQY & \xrightarrow{\gamma(\tilde{g})} & RQZ \\ \| & & \uparrow{\scriptstyle\gamma(p)} & & \uparrow{\scriptstyle\gamma(p')} \\ RQX & \xrightarrow{\gamma(i)} & U & \xrightarrow{\gamma(i')} & V \end{array}$$

复合这些竖直态射，可得 Ho($\mathcal{A}$）中的下列交换图):

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle\theta_X}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma(p)^{-1}\theta_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma(p')^{-1}\theta_Z} \\ RQX & \xrightarrow[\gamma(i)]{} & U & \xrightarrow[\gamma(i')]{} & V \end{array}$$

其中，竖直态射是 Ho($\mathcal{A}$) 中的同构，且 i 和 i' 是余纤维化。 □

设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f'} Z' \overset{\delta_f}{\dashrightarrow}$ 是一个 $\mathbb{E}$-三角，其中 f 是一个余纤维化。取 X的悬挂序列 $X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow}$。将 $\mathcal{A}(-, M)$ 应用于 $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \overset{\delta_f}{\dashrightarrow}$，得到一个正合序列

$$\mathcal{A}(Y, M) \xrightarrow{\mathcal{A}(f,M)} \mathcal{A}(X, M) \xrightarrow{(\delta_f)^{\#}} \mathbb{E}(Z', M)$$

由于 $Z' \in \mathcal{C}$和 $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, $\mathbb{E}(Z', M) = 0$。因此，存在一个态射 $k\colon Y \longrightarrow M$，使得$kf = i$。由 (ET3)，存在一个态射 $l_f\colon Z' \longrightarrow \Sigma X$，使得该交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{f'} & Z' & \overset{\delta_f}{\dashrightarrow} \\ \| & & {\scriptstyle k}\downarrow & & {\scriptstyle l_f}\downarrow & \\ X & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & \Sigma X & \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} \end{array}$$

$\mathbb{E}$-三角形可交换，且 $l_f^*\delta_X = \delta_f$。

引理 3.10. 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f'} Z' \overset{\delta_f}{\dashrightarrow}$ 是一个 $\mathbb{E}$-三角，其中 f 是纤维化。那么存在一个三角同构于 $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 中

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\gamma(f)} & Y & \xrightarrow{\gamma(g)} & C(f) & \xrightarrow{\gamma(h)} & \Sigma X \\ \| & & \| & & {\scriptstyle\gamma(t)}\downarrow & & \| \\ X & \xrightarrow{\gamma(f)} & Y & \xrightarrow{\gamma(f')} & Z' & \xrightarrow{-\gamma(l_f)} & \Sigma X \end{array}$$

whe其中第一行是由 f 导出的标准三角，且 $l_f\colon\ Z' \longrightarrow \Sigma X$满足 $l_f^*\delta_X = \delta_f$.

证明。 根据命题 2.7，存在一个由 $\mathbb{E}$-三角形构成的交换图，其中位于 $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & \Sigma X & \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} & \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \vdots & & \| & & \\
Y & \overset{g}{\dashrightarrow} & C(f) & \overset{h}{\dashrightarrow} & \Sigma X & \dashrightarrow & \\
{\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle t}\vdots & & & & \\
Z' & = & Z' & & & & \\
{\scriptstyle \delta_f}\vdots & & \vdots & & & &
\end{array}$$

给定 $t^*\delta_f + h^*\delta_X = 0$。由于 t 是一个 $\mathbb{E}$-亏折，且 CoCone(t) $= M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$，因此有 $t \in$ TFib，从而 $\gamma(t)$ 是 Ho($\mathcal{A}$) 中的同构。我们断言，在 Ho($\mathcal{A}$) 中，$\gamma(-l_f t) = \gamma(h)$。事实上，对 $X \longrightarrow M \longrightarrow \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow}$ 应用 $\mathcal{A}(C(f), -)$ 可得到一个正合序列

$$\mathcal{A}(C(f), M) \xrightarrow{\mathcal{A}(C(f),p)} \mathcal{A}(C(f), \Sigma X) \xrightarrow{(\delta_X)_\#} \mathbb{E}(C(f), X)$$

由于

$$(\delta_X)_\#(l_f t + h) = (l_f t + h)^*\delta_X = t^*(l_f)^*\delta_X + h^*\delta_X = t^*\delta_f + h^*\delta_X = 0$$

$l_f t + h\colon\ C(f) \longrightarrow \Sigma X$ 经过 $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ 分解。由于 $M = 0$ 属于 Ho($\mathcal{A}$)，因此在 Ho($\mathcal{A}$) 中，$\gamma(-l_f t) = \gamma(h)$。这证明了该断言，并完成了证明。□

为了验证 (TR4)，只需考虑 Ho($\mathcal{A}$) 中的标准三角形。根据引理 3.9 和 3.10，只需考虑形如 $X \overset{\gamma(f)}{\succ} Y \overset{\gamma(f')}{\succ} Z' \overset{-\gamma(l_f)}{\succ} \Sigma X$ 且 $f \in$CoFib 的三角形。也就是说，只需证明以下引理。

引理 3.11. 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Z' \overset{\delta_f}{\dashrightarrow}$，$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} X' \overset{\delta_g}{\dashrightarrow}$，$X \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{k} Y' \overset{\delta_h}{\dashrightarrow}$ 是满足 $h = gf$ 的 $\mathbb{E}$-三角形，且 f 和 g 是余纤维化。假设 $l_f\colon\ Z' \longrightarrow \Sigma X$，$l_g : X' \longrightarrow \Sigma Y$，$l_h : Y' \longrightarrow \Sigma X$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射，且

$$l_f^*\delta_X = \delta_f, \quad l_g^*\delta_Y = \delta_g, \quad l_h^*\delta_X = \delta_h.$$

那么存在态射 α' 和 β'，它们属于 Ho($\mathcal{A}$)，使得下方交换图中的第三列属于 Δ

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\gamma(f)} & Y & \xrightarrow{\gamma(i)} & Z' & \xrightarrow{-\gamma(l_f)} & \Sigma X \\
\| & & {\scriptstyle \gamma(g)}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha'}\vdots & & \| \\
X & \xrightarrow{\gamma(h)} & Z & \xrightarrow{\gamma(k)} & Y' & \xrightarrow{-\gamma(l_h)} & \Sigma X \\
 & & {\scriptstyle \gamma(j)}\downarrow & & {\scriptstyle \beta'}\vdots & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\gamma(f)} \\
 & & X' & = & X' & \xrightarrow{-\gamma(l_g)} & \Sigma Y \\
 & & {\scriptstyle -\gamma(l_g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\Sigma\gamma(i))(-\gamma(l_g))} & & \\
 & & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma\gamma(i)} & \Sigma Z' & &
\end{array}$$

且该交换图在Ho($\mathcal{A}$)中可交换。

证明。 由于 $f,\ g$ 是 $\mathbb{E}$-膨胀，根据(ET4)，存在态射 α、 β ，它们属于 $\mathcal{A}$ ，使得以下 $\mathbb{E}$-三角形的交换图在 $\mathcal{A}$中可交换

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i} & Z' & \overset{\delta_f}{\dashrightarrow} & \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\
X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{k} & Y' & \overset{\delta_h}{\dashrightarrow} & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\
 & & X' & = & X' & & \\
 & & {\scriptstyle \delta_g}\downarrow & & {\scriptstyle \delta_\alpha}\downarrow & &
\end{array}$$

其中第三列是一个 $\mathbb{E}$-三角，且 $\alpha^*\delta_h = \delta_f$, $i_*\delta_g = \delta_\alpha$, $f_*\delta_h = \beta^*\delta_g$。 由于 $g \in$ CoFib，因此有 $X' \in \mathcal{C}$，从而 $\alpha \in$ CoFib。由引理 3.10，存在一个态射 $l_\alpha : X' \longrightarrow \Sigma Z'$，使得 $l_\alpha^*\delta_{Z'} = \delta_\alpha$ ，且下图中的第三列属于 Δ。

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\gamma(f)} & Y & \xrightarrow{\gamma(i)} & Z' & \xrightarrow{-\gamma(l_f)} & \Sigma X \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \gamma(g)} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma(\alpha)} & & \| \\
X & \xrightarrow{\gamma(h)} & Z & \xrightarrow{\gamma(k)} & Y' & \xrightarrow{-\gamma(l_h)} & \Sigma X \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \gamma(j)} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma(\beta)} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\gamma(f)} \\
 & & X' & = & X' & \xrightarrow{-\gamma(l_g)} & \Sigma Y \\
 & & {\scriptstyle -\gamma(l_g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\gamma(l_\alpha)} & & \\
 & & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma\gamma(i)} & \Sigma Z' & &
\end{array}$$

剩下需要证明该交换图在 Ho($\mathcal{A}$) 中交换。这显然，因为 $\alpha i = kg$ 且 $\beta k = j$。

我们断言 $-\gamma(l_h)\gamma(\alpha) = -\gamma(l_f)$。事实上，将 $\mathcal{A}(Z', -)$ 作用于悬挂序列 $X \longrightarrow M_X \longrightarrow \Sigma X \overset{\delta_X}{\dashrightarrow}$，得到一个正合序列

$$\mathcal{A}(Z', M_X) \longrightarrow \mathcal{A}(Z', \Sigma X) \xrightarrow{(\delta_X)_\#} \mathbb{E}(Z', X)$$

由于

$$(\delta_X)_\#(l_h\alpha - l_f) = (l_h\alpha - l_f)^*\,\delta_X = \alpha^* l_h^*\delta_X - l_f^*\delta_X = \alpha^*\delta_h - \delta_f = 0$$

it f由此可知， $l_h\alpha - l_f$可通过 $M_X \in \mathcal{F}\cap\mathcal{W}$分解，因此在 Ho($\mathcal{A}$) 中有 $-\gamma(l_h)\gamma(\alpha) = -\gamma(l_f)$.

接下来，我们断言 $-\gamma(l_\alpha) = -(\Sigma\gamma(i))\gamma(l_g)$。事实上，将 $\mathcal{A}(X',\ -)$ 应用于悬挂序列 $Z' \longrightarrow M_{Z'} \longrightarrow \Sigma Z' \overset{\delta_{Z'}}{\dashrightarrow}$，可得到一个正合序列

$$\mathcal{A}(X', M_{Z'}) \longrightarrow \mathcal{A}(X', \Sigma Z') \xrightarrow{(\delta_{Z'})_\#} \mathbb{E}(X', Z')$$

由于

$$\begin{aligned}
(\delta_{Z'})_\#\,(l_\alpha - (\Sigma i)l_g) &= (l_\alpha - (\Sigma i)l_g)^*\,\delta_{Z'} = l_\alpha^*\delta_{Z'} - l_g^*(\Sigma i)^*\delta_{Z'} \\
&= \delta_\alpha - l_g^* i_*\delta_Y = \delta_\alpha - i_* l_g^*\delta_Y = \delta_\alpha - i_*\delta_g = 0
\end{aligned}$$

于是 l_α $-(\Sigma i)l_g$ 经过因子分解通过 $M_{Z'} \in \mathcal{F}\cap\mathcal{W}$，因此 $-\gamma(l_\alpha) = -(\Sigma\gamma(i))\gamma(l_g)$ 属于 Ho($\mathcal{A}$) .

还需证明 $-(\Sigma\gamma(f))\gamma(l_h) = -\gamma(l_g)\gamma(\beta)$。将 $\mathcal{A}(Y', -)$ 应用于悬挂序列 $Y \longrightarrow M_Y \longrightarrow \Sigma Y \xrightarrow{\delta_Y}$，可得一个正合序列

$$\mathcal{A}(Y', M_Y) \longrightarrow \mathcal{A}(Y', \Sigma Y) \xrightarrow{(\delta_Y)_\#} \mathbb{E}(Y', Y)$$

由于

$$\begin{aligned}(\delta_Y)_\#((\Sigma f)l_h - l_g\beta) &= ((\Sigma f)l_h - l_g\beta)^*\,\delta_Y = l_h^*(\Sigma f)^*\delta_Y - \beta^* l_g^*\delta_Y \\ &= l_h^* f_*\delta_X - \beta^*\delta_g = f_* l_h^*\delta_X - \beta^*\delta_g = f_*\delta_h - \beta^*\delta_g = 0\end{aligned}$$

那么 $(\Sigma f)l_h - l_g\beta$可经由 $M_Y \in \mathcal{F}\cap\mathcal{W}$分解，因此 $-(\Sigma\gamma(f))\gamma(l_h) = -\gamma(l_g)\gamma(\beta)$ 于 $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 中。□

定理 3.5 的证明至此完成。

3.5. 两类三角的关系。 在本小节中，~我们证明，3.4 节中的三角类 Δ 与 Nakaoka 和 Palu [26, 第 6 节中的三角类 Δ ~满足关系 $\Delta = -\Delta$。也就是说，三角$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ 属于 $\widetilde{\Delta}$ 当且仅当三角 $X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} \Sigma X$ 属于 Δ，因此 ~存在三角同构 $(\mathrm{Ho}(\mathcal{A})\ \Sigma, \Delta) \cong (\mathrm{Ho}(\mathcal{A})\ \Sigma, \Delta)$。

设 $(\mathrm{CoFib}, \mathrm{Fib}, \mathrm{Weq})$ 是弱幂等完备外三角范畴 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 上的一个容许模型结构，且 Σ 为悬挂函子。回顾三角类$\widetilde{\Delta}$的定义。$\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 中的三角 $X \xrightarrow{\gamma(f)} Y \xrightarrow{\gamma(g)} Z \xrightarrow{l(\delta)} \Sigma X$ 称为标准三角，若 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta}$ 是 $\mathcal{A}$中的一个 $\mathbb{E}$-三角，并且 $l(\delta) : Z \longrightarrow \Sigma X$ 是如下定义的“连接态射”。对于 $\mathcal{A}$ 中满足下列条件的态射 $Z \xleftarrow{w} D \xrightarrow{d} \Sigma X$

$$w \in \mathrm{TFib},\quad w^*\delta = d^*\delta_X.$$

定义 $l(\delta) := \gamma(d)\circ\gamma(w)^{-1} : Z \longrightarrow \Sigma X$ (见 [26, 定义 6.9])。将 $\widetilde{\Delta}$ 记为 $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 中与标准三角同构的三角所成的类。

假设 $(\mathcal{C}, [1], \mathcal{E})$ 是一个三角范畴。设 $-\mathcal{E} := \{X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} X[1] \mid X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \in \mathcal{E}\}$。由公理 (TR1)、(TR2)、(TR3) 和 (TR4) 可知，$(\mathcal{C}, [1], -\mathcal{E})$ 也是一个三角范畴，并且存在一个三角同构

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, -\mathrm{Id}_{[1]}) : (\mathcal{C}, [1], \mathcal{E}) \cong (\mathcal{C}, [1], -\mathcal{E})$$

其中 $-\mathrm{Id}^{[1]} : [1] \longrightarrow [1]$ 是自然同构：对于任意 $X \in \mathcal{C}$, $-$，$\mathrm{Id}^{[1]}(X) = -\mathrm{Id}^{X[1]}$.

然而，众所周知，$-\mathcal{E} \neq \mathcal{E}$ 一般而言并非如此。事实上，存在这样的例子：$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ 属于 $\mathcal{E}$，但 $X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} X[1]$ **不**属于 $\mathcal{E}$ ([32, 例 2.5.5])。

定理 3.12。 设 (余纤维化、Fib、Weq) 是弱幂等完备外三角范畴$(\mathcal{A}、\ \mathbb{E}、\ \mathfrak{s})$上的一个容许模型结构，且 Σ为悬挂函子。设~Δ 是 3.4 中定义的三角类，并设 Δ 是 [26] 中定义的三角类。则~$\Delta = -\Delta$，从而存在一个三角同构

$$(\mathrm{Id}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{A})}, -\mathrm{Id}_{\Sigma}) : (\mathrm{Ho}(\mathcal{A}),\ \Sigma,\ \Delta) \cong (\mathrm{Ho}(\mathcal{A}),\ \Sigma,\ \widetilde{\Delta}).$$

证明。设 $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} \Sigma X'$ 是 Δ中的一个三角。则它同构于标准三角 $X \xrightarrow{\gamma(f)} Y \xrightarrow{\gamma(g)} C(f) \xrightarrow{\gamma(h)} \Sigma X$，其中 $Y \xrightarrow{g} C(f) \xrightarrow{h} \Sigma X \overset{f_*\delta_X}{\dashrightarrow}$是 $\mathcal{A}$中的一个 $\mathbb{E}$-三角。考虑 $\mathcal{A}$中态射的如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & \Sigma X & \overset{\delta_X}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & & & \| & \\ Y & \xrightarrow{g} & C(f) & \xrightarrow{h} & \Sigma X & \overset{f_*\delta_X}{\dashrightarrow} \end{array}$$

其中第一行是 X 的悬挂序列。由命题 2.10，存在一个态射 $t: M \longrightarrow C(f)$，使得上述交换图可交换，且左方的方块是同伦笛卡尔的，即

$$X \xrightarrow{\binom{-f}{i}} Y \oplus M \xrightarrow{(g,\ t)} C(f) \overset{h^*\delta_X}{\dashrightarrow}$$

是一个 $\mathbb{E}$-三角。根据“连接态射”的定义（见 Nakaoka - Palu[26, 定义 6.9]），可得 $l(h^*\delta_X) = \gamma(h)$，因此

$$X \xrightarrow{\gamma\binom{-f}{i}} Y \oplus M \xrightarrow{\gamma(g,\ t)} C(f) \xrightarrow{\gamma(h)} \Sigma X$$

是 Ho($\mathcal{A}$) 中 Nakaoka - Palu [26] 意义下的一个标准三角。由于 $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ 是 Ho($\mathcal{A}$) 中的零对象，该标准三角同构于

$$X \xrightarrow{-\gamma(f)} Y \xrightarrow{\gamma(g)} C(f) \xrightarrow{\gamma(h)} \Sigma X.$$

由于 $\widetilde{\Delta}$ 对同构封闭，三角 $X \xrightarrow{-\gamma(f)} Y \xrightarrow{-\gamma(g)} C(f) \xrightarrow{-\gamma(h)} \Sigma X$ 也属于 $\widetilde{\Delta}$。因此，三角

$$X' \xrightarrow{-f'} Y' \xrightarrow{-g'} Z' \xrightarrow{-h'} \Sigma X$$

$\widetilde{\Delta}$属于 Δ。

反之，设 $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} \Sigma X'$ 是 $\widetilde{\Delta}$中的一个三角形。那么它同构于标准三角 $X \xrightarrow{\gamma(f)} Y \xrightarrow{\gamma(g,\ l)\delta} \Sigma X$，其中 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 是 $\mathcal{A}$中的一个 $\mathbb{E}$-三角，且 $l(\delta)$: $Z \longrightarrow \Sigma X$ 是连接态射。根据命题 2.7，在 $\mathcal{A}$中存在一个由 $\mathbb{E}$-三角组成的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \overset{\delta}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle s}\downarrow & & \| & \\ M & \overset{d}{\cdots\!\!>} & W & \overset{e}{\cdots\!\!>} & Z & \overset{i_*\delta}{\dashrightarrow} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle t}\downarrow & & & \\ \Sigma X & = & \Sigma X & & & \\ {\scriptstyle \delta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*\delta_X} & & & \end{array}$$

使得 $e^*\delta + t^*\delta_X = 0$。由于 $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$，有 $e \in$ TFib，因此 $l(\delta) = -\gamma(t) \circ \gamma(e)^{-1}$。注意，

$$X \xrightarrow{\gamma(f)} Y \xrightarrow{\gamma(s)} W \xrightarrow{\gamma(t)} \Sigma X$$

是定义 3.4 中的标准三角。由交换图可得

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\gamma(f)} & Y & \xrightarrow{\gamma(s)} & W & \xrightarrow{\gamma(t)} & \Sigma X \\ \| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \gamma(e)} & & \| \\ X & \xrightarrow{\gamma(f)} & Y & \xrightarrow{\gamma(g)} & Z & \xrightarrow{-l(\delta)} & \Sigma X \end{array}$$

使得 $X \xrightarrow{\gamma(f)} Y \xrightarrow{\gamma(g)} Z \xrightarrow{-l(\delta)} \Sigma X$ 属于 Δ。因此，三角 $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{-h'} \Sigma X'$ 属于 Δ。由于 Δ 对同构封闭，三角 $X' \xrightarrow{-f'} Y' \xrightarrow{-g'} Z' \xrightarrow{-h'} \Sigma X'$ 也属于 Δ。□

3.6. **Frobenius 外三角范畴的稳定范畴**。与 Frobenius 范畴类似，可以定义 Frobenius 外三角范畴及其稳定范畴。采用与定理 3.5 类似的方法，可以证明 Frobenius 外三角范畴的稳定范畴是三角范畴。（这里的外三角范畴**不**必为弱幂等完备。）另见 Nakaoka - Palu [26, 定义 7.1，注 7.5]。

利益披露声明

作者声明不存在需要披露的竞争性利益。

资助

本研究获得国家自然科学基金（项目编号：12131015）资助。

References

[1] Beligiannis, A., Reiten, I. (2007). 挠理论的同调与同伦方面。 *Mem. Amer.Math. Soc.* 188(883).[2] Chang, W., Zhou, P., Zhu, B. (2019). Frobenius 外三角范畴中的簇子代数与余挠对。 *Algebr. Represent. Theory* 22(5): 1051 - 1081.[3] Cui, J., Lu, X. S., Zhang, P. (2025). 由一个遗传完备余挠对导出的模型结构。 *J. Pure Appl. Algebra* 229: 107958.[4] Gabriel, P., Zisman, M. (1967). *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Ergeb. Math. Grenzgeb., Band 35. Berlin-Heidelberg-New York: 施普林格出版社.[5] Gillespie, J. (2011). 正合范畴上的模型结构。 *J. Pure Appl. Algebra* 215(12): 2892 - 2902.[6] Gillespie, J. (2024). *Abelian Model Category Theory*. Cambridge Stud. Adv. Math. 215. 剑桥：剑桥大学出版社。[7] Happel, D. (1987). 关于有限维代数的导出范畴。 *Comment. Math. Helv.* 62(3): 339 - 389.[8] Happel, D. (1988). *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite-dimensional Algebras*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 119. 剑桥：剑桥大学出版社。[9] He, J. (2019). 协变有限子范畴的扩张再探。 *Czechoslovak Math. J.* 69(144): 403 - 415.[10] He, J., Xie, C., Zhou, P. (2023). 外三角范畴中的同伦笛卡尔方块。 *Open Math.* 21(1): 20220570.[11] Heller, A. (1960). 同调代数中的环空间函子。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 96: 382 - 394.[12] Herschend, M., Liu, Y., Nakaoka, H. (2021). n-外三角范畴（I）：定义与基本性质。 *J. Algebra* 570: 531 - 586.

[13] Hirschhorn, P.S. (2003). *Model Categories and Their Localizations*. Math. Surveys Monogr. 99. 普罗维登斯, 罗得岛州：美国数学会。[14] Hovey, M. (1999). *Model Categories*. Math. Surveys Monogr., Vol. 63. 普罗维登斯, 罗得岛州：美国数学会。[15] Hovey, M. (2002). 余挠对、模型范畴结构与表示论。 *Math. Z.* 241(3): 553 - 592.[16] Hovey, M., Shipley, B., Smith, J. (2000). 对称谱。 *J. Amer. Math. Soc.* 13(1): 149 - 208.[17] Hu, J., Zhang, D., Zhou, P. (2020). 外三角范畴中的真类与Gorenstein性。 *J. Algebra*551: 23 - 60.[18] Iyama, O., Nakaoka, H., Palu, Y. (2024). 外三角范畴中的 Auslander-Reiten 理论。 *Trans. Amer.Math. Soc. Ser. B* 11: 248 - 305.[19] Klapproth, C. n-扩张闭子范畴（属于） n-外三角范畴。arXiv:2209.01128v3.[20] Kong, X., Lin, Z.Q., Wang, M. X. (2024). 外三角范畴的 (ET4) 公理。 *Comm. Algebra*52(7): 2724 - 2736.[21] Krause, H. (2022). *Homological Theory of Representations*. Cambridge Stud. Adv. Math. 195. 剑桥：剑桥大学出版社。[22] Liu, Y., Nakaoka, H. (2019). 外三角范畴上的孪生余挠对之心。 *J. Algebra* 528: 96 - 149.[23] Lu, X. S., Zhang, P. 同伦范畴与纤维模型结构。arXiv:2501.15898v1.[24] Morel, F., Voevodsky, V. (1999). A^1-概形的同伦论。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (90): 45 - 143.[25] Nakaoka, H., Ogawa, Y., Sakai, A. (2022). 外三角范畴的局部化。 *J. Algebra* 611: 341 - 398.[26] Nakaoka, H., Palu, Y. (2019). 外三角范畴、Hovey孪生余挠对与模型结构。 *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* 2: 117 - 193.[27] Neeman, A. (2001). *Triangulated Categories*. Ann. of Math. Stud. 148. 普林斯顿：普林斯顿大学出版社。[28] Quillen, D. (1967). *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Math., Vol. 43. Berlin-New York: 施普林格出版社。[29] Quillen, D. (1969). 有理同伦论。 *Ann. of Math.* (2)90: 205 - 295.[30] Quillen, D. (1973). 高等代数 K-理论。I. 收录于： *Lecture Notes in Math.* 341. Berlin-New York: 施普林格出版社，页 85 - 147。[31] Yang, X. Y. (2015). 三角范畴上的模型结构。 *Glasg. Math. J.* 57: 263 - 284.[32] Zhang, P. (2015). *Triangulated Categories and Derived Categories*. 北京：科学出版社。[33] Zhu, B., Zhuang, X. (2020). 外三角范畴中的倾斜子范畴。 *Front. Math. China* 15(1): 225 - 253.