arXiv:2601.07358v1 [math.AG] 12 Jan 2026

Pro-étale 动机与凝实刚性

Raphaël Ruimy、Swann Tubach 和 Sebastian Wolf

摘要

我们引入了取系数于任意凝聚环谱的 pro-étale 动机系数系统和 pro-étale 动机谱，并证明它们支持六种运算。在局部 étale 有界概形上，étale 动机谱嵌入 pro-étale 动机谱。随后，我们利用凝聚范畴论的框架，为任意 $\mathbb{Z}$-线性凝聚范畴定义一种$\widehat{}$凝实化过程。pro-étale 动机自然地提升为凝聚范畴；我们证明，其固化与 Fargues-Scholze 定义的固化层范畴非常接近，经过适当修改后可用于概形：这是一项刚性结果。因此，与刚解析背景不同，我们得到概形上的 solid 层支持六种运算，并构造出动机的凝实实现函子，扩展了 ℓ-adic 实现函子。凝实实现函子与系数变换相容，因此无需离开可呈范畴的背景，即可恢复 $\mathbb{Q}_\ell$-adic 实现函子。

目录

1 概形上的固化层。 9

1.1 pro-étale topos 回顾 .91.2 阿贝尔范畴。 .121.3 导出范畴 .201.4 通过凝聚范畴论研究固化层 .25

2 Pro-étale 动机。 30

2.1 基本定义和性质 .312.2 函子性 .352.3 局部化.372.4 双向性.422.5 pro-étale 动机的六函子 .452.6 从 étale 动机得到的嵌入定理 .49

3 刚性　　性定理。 53

3.1 固体动机。.533.2 将固化层嵌入固化动机.543.3 刚性定理.57

引言

ℓ-adic 上同调的系数系统

Betti 上同调可以用复点拓扑空间上的层来表示；同样，德拉姆上同调最好通过 $\mathscr{D}$-模理论来理解；最后，挠 étale 上同调是通过小 étale 位点上的挠层定义的。在上述所有例子中，上同调都是借助系数系统来表示的：在 Grothendieck 的构想中，这是一个纤维化于概形范畴之上的范畴，并配备了额外的函子性（例如六种运算），从而可以定义以此类系统为系数的上同调。

为 ℓ-adic 上同调找到合适的系数系统更具挑战性。首先需要指出，实际上应该有两种这样的系数系统：一种是大（更准确地说是可呈示）系数系统，另一种是小系数系统，它应作为可构造对象的子范畴包含在前者之中。可构造 ℓ-adic 层的理论已十分成熟。其最初的构造见于 [BBD82] ，针对域上的有限型概形，通过取（同伦）极限得到：

$$\mathrm{D}_c^b(-,\mathbb{Z}_\ell) = \lim_n \mathrm{D}_c^b(-,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

其中右侧是小 étale 位点上的可构造层。随后，Ekedahl 在诺特概形上构造了一个可呈系数系统： [Eke90]。实际上，通过对阿贝尔范畴中的 étale 层的导出范畴取 ℓ-完备化$\mathrm{D}((-)_{\text{ét}},\ \mathbb{Z})^\wedge_\ell$，即可恢复后者（这是 [CD16]所采用的方法）。Ekedahl 系数系统的一个缺点是它与有理化的相容性不佳，事实上

$$\mathrm{D}((-)_{\text{ét}},\mathbb{Z})^\wedge_\ell \otimes \mathrm{D}(\mathbb{Q}) \simeq 0.$$

为了建立一个性质良好的理论，需要追踪环上的自然拓扑 $\mathbb{Z}_\ell$ 和 $\mathbb{Q}_\ell$。来自 [BS15] 的经典思想是，不像 Ekedahl 理论那样在范畴意义下进行 ℓ-完备化，而是可以利用概形的 ***pro-étale*** 位点 来追踪这些拓扑。事实上，可以将 $\mathbb{Z}_\ell$ 和 $\mathbb{Q}_\ell$ 都视为 pro-étale 位点上的层，并以一种考虑到其拓扑的方式来处理。现在，系数系统的一个自然候选是阿贝尔范畴 $\mathrm{D}((-)_{\text{proét}},\mathbb{Z}_\ell)$ 中 pro-étale 位点上的 $\mathbb{Z}_\ell$-模的导出范畴。事实上，在这种情况下有

$$\mathrm{D}((-)_{\text{proét}},\mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathrm{D}(\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{D}((-)_{\text{proét}},\mathbb{Q}_\ell),$$

正如预期的那样。然而，这个系统远未具备所有理想的函子性特性。例如，真基变换定理对于这一系数系统已经不成立 [HHL+25，备注 7。15]。本工作的目标之一，是提供一种具备所有预期函子性特性、同时仍与上述意义下的有理化相容的理论。

Voevodsky 动机及其 ℓ-进实现

另一个动机来自 Voevodsky 动机的理论，尤其是 ℓ-adic 实现函子理论。Voevodsky étale 动机构成概形 $\mathrm{DM}_{\text{ét}}$上的通用 étale 局部系数系统；后者（特别是所有关键的函子性）是在

[Voe92、Ayo14、CD16]中构造的。 ℓ-adic 上同调理论通过 ℓ-adic 实现函子与 étale 动机理论相联系。理解这些实现函子的一个有力工具是刚性定理（参见例如 [BH21] 中关于最一般情形的此类定理）：从 étale 概形到光滑 X-概形的左 Kan 延拓给出一个自然映射

$$\mathrm{D}((-)_{\text{ét}}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{DM}_{\text{ét}}$$

它在 ℓ-完备化后成为等价。因此， ℓ-完备化给出了一个指向 Ekedahl 系数系统的自然映射

$$\mathrm{DM}_{\text{ét}} \to (\mathrm{DM}_{\text{ét}})^{\wedge}_{\ell} \simeq \mathrm{D}((-)_{\text{ét}}, \mathbb{Z})^{\wedge}_{\ell},$$

我们称之为 ℓ-进实现。对于上文提到的$\mathrm{D}((-)_{\text{ét}}, \mathbb{Z})^{\wedge}_{\ell}$与有理化不相容这一点，另一种理解方式是： $\mathbb{Q}$ 在该函子下被映到0 。此外，根据上述刚性定理可以推出， ℓ进上同调可由$\mathrm{DM}_{\text{ét}}$中的单位的 ℓ-完备化 $\mathbb{Z}^{\wedge}_{\ell}$ 表示。这个动机有一个令人不快的特点：它在混合特征下不具有基变换稳定性（见 [Cis25]）：该文证明，这种稳定性会推出独立于ℓ 的结果，而这些结果实际上过于强，不可能成立。

本文的另一个主要目标是构建一个新框架，使 ℓ-进实现函子具有格外良好的性质：我们的思路是构造一个由***pro-étale*** 动机构成的系数系统 $\mathrm{DM}^{\text{proét}}$ ，它是 $\mathrm{DM}_{\text{ét}}$ 的扩张，并允许我们考虑系数取值于拓扑环的动机。随后，我们再次得到一个典范映射

$$\mathrm{D}((-)_{\text{proét}}, \mathbb{Z}_{\ell}) \to \mathrm{DM}_{\text{proét}}(-, \mathbb{Z}_{\ell})$$

我们非常希望它是一个等价： ℓ-进实现函子届时只需通过将系数扩张到拓扑环 $\mathbb{Z}_{\ell}$ 来给出，而该拓扑环将表示ℓ-进上同调，并且在基变换下稳定。然而，这种设想过于乐观，因为右侧是一个系数系统，而左侧不是，因为它不满足真基变换。为挽救这一局面，我们引入一种方法来固化上述范畴，这一方法建立在以下工作的思想之上： [CS21] 和 [FS24]。

概形上的 solid 层

凝聚阿贝尔群（点的 pro-étale 位点上的阿贝尔群层）可以看作拓扑阿贝尔群的一种模型。固化理论旨在描述一种非阿基米德完备性：solid 阿贝尔群构成凝聚阿贝尔群的一个全子范畴，例如，其中包含 p-adic Banach 空间这一全子范畴。$\widehat{\ }$在刚性解析世界中，Fargues 和 Scholze 在 $\mathbb{Z}$-$\widehat{\ }$系数 [FS24第七章]中发展了固化层理论。它们是 $\mathbb{Z}$-模的 pro-étale 层的子范畴，规模足够小，因而具备一些良好的函子性；同时又足够大，能够对所有极限和余极限封闭。事实上，在解析情形下，固化层可以赋予所谓的五函子形式体系：其主要特点是任意拉回函子都有左伴随，并且任意基变换都成立。然而，在这种情形下，固化层无法赋予六函子形式体系，因为真投影公式一般并不成立（[FS24，警告 VII.2.5]）。

本文的第一步是将固化层框架推广到概形。设 X是一个拟紧拟分离（qcqs）概形，设 $\mathcal{P}$ 是素数集的一个子集，并设 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$。若 $j\colon U \to X$ 是一个 pro-étale 映射，且可写成 étale 映射 $j_\alpha\colon U_\alpha \to X$ 的余滤极限，其中每个 U_α 都是仿射的，则我们定义

$$j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \coloneqq \lim_\alpha (j_\alpha)_\sharp \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}.$$

于是将 X 上的固化层 阿贝尔范畴定义为 $\mathrm{Sh}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 关于自然映射 $j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \to j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 的局部化 $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$。于是，如果一个 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$- 模上的 pro-étale 层复形 $\widehat{}$ 的上同调层都是固体，我们就称它为固体。我们用 $\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 表示 $\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 中由固对象张成的全子范畴。最后，若 Λ 是一个固体 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-代数$\widehat{}$，我们定义

$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \coloneqq \mathrm{Mod}_\Lambda(\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}).$$

我们证明，这些范畴具备一个良好的固化层范畴所应有的所有基本性质。

定理 A。 *(定理 1.2.8、推论 1.3.2、命题 1.3.11 和 推论 1.3.12)* 设X 是一个拟紧拟分离概形。

1. 子范畴 $\mathrm{Sh}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 是 $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 的阿贝尔范畴，并且对扩张、小极限、余极限和基变换封闭。它由 *P*-挠可构造 *étale* 层的 *pro*-范畴紧生成。

2. *[HRS23]*意义下的可构造复形是固体的，即存在包含映射 $\mathrm{D}_c^b(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \subseteq \mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$。对于 $\mathbb{Q}_\ell$ 系数的情形也成立。

3. 设 Λ 是一个固体 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-代数$\widehat{}$。包含映射

$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \subseteq \mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}},\Lambda)$$

存在左伴随 $(-)^{\blacksquare}$，并且与余极限和基变换相容。存在唯一的对称幺半结构 $\otimes^{\blacksquare}$，使函子 $(-)^{\blacksquare}$成为对称幺半函子。

本文的一项主要结果是，与解析情形不同，范畴 $\mathrm{D}(-,\Lambda)^{\blacksquare}$ 在所有 $\mathcal{P}$ 中素数均可逆的概形上支持完整的六函子形式（见定理 E）。

Pro-étale 动机

我们将通过与一个合适的 pro-étale 动机范畴进行比较，在固化层上构造六运算。注意，若我们知道 $\mathrm{DM}_{\text{ét}}$ 具有六函子，那么刚性定理便意味着，对于满足 n 可逆的概形，$\mathrm{D}((-)_{\text{ét}},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 也具有六函子。我们希望将这一方法应用于固化层。第一步是定义动机和动机谱的 pro-étale 版本。

现在我们回顾 Morel 和 Voevodsky 关于概形 X上$\mathbb{A}^1$-不变动机谱的构造（étale 局部版本）：我们从光滑

X-概形的范畴 Sm_X 出发，并赋予其 étale 拓扑，进而构造谱超层范畴 $\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_X, \mathrm{Sp})$；étale 动机谱范畴 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}(X)$ 则是 $\mathbb{A}^1$-局部层的子范畴经 $\mathbb{P}^1$-稳定化所得。就我们的目的而言，Sm_X 范畴太小了：我们希望用 pro-étale 拓扑替代 étale 拓扑。为此，我们定义弱光滑 X X-概形范畴 WSm_X，它是这样一个 X-概形范畴：其中的结构态射均可表示为光滑态射与弱 étale 态射的有限复合。与光滑映射一样，弱光滑映射的局部结构很简单：在源上 Zariski 局部地，它们可以写成复合

$$Y \xrightarrow{f} \mathbb{A}^n_X \to X$$

与 f 弱 étale（这是 引理 2.1.7）。于是，范畴 $\mathrm{SH}^{\text{proét}}(X)$ 被定义为子范畴 $\mathrm{SH}^{\mathrm{S}^1\,\text{pro}'\text{et}}(X)$ 的 $\mathbb{P}^1$-稳定化，其中这些对象是范畴 $\mathrm{Sh}^{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_X, \mathrm{Sp})$ 中的 $\mathbb{A}^1$-局部对象；该范畴由 WSm_X 上谱的 pro-étale 超层构成。主要结果是，pro-étale 动机谱能够承载六函子，但其形式比通常动机谱上的六函子稍弱（要得到例外函子，我们需要有限表示假设，而不只是通常的有限型假设）；此外，在某些有限性假设下，étale 动机谱嵌入 pro-étale 动机谱中：

定理 B. *(推论 2.5.6 和 定理 2.6.2)* 我们有一个函子

$$\mathrm{SH}_{\text{proét}} : \mathrm{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$$

它属于一个六函子形式体系。更确切地说，

1. 我们有如下伴随函子对：
   - 对于任意概形态射 f，我们有一个伴随(f^*, f_*)，其中 f^* 函子$\mathrm{SH}_{\text{pro}'\text{et}}(f)$。
   - 对于拟紧拟分离概形之间的有限表示 f，我们有一个伴随$(f_!\ f_!)$。存在一个自然变换 $f_! \to f_*$；若 f 进一步是真态射，则它是一个等价。
   - 在任意 X上，$\mathrm{SH}_{\text{pro}'\text{et}}(X)$上具有闭幺半结构$(\otimes_X, \mathrm{Hom}_X)$。
2. 设 $f\colon Y \to X$ 是拟紧拟分离概形之间的有限表示态射。那么，$f_!$ 的构造与拉回相容。
3. 对于任意拟紧拟分离概形之间的有限表示态射 $f\colon X \to Y$，我们有一个自然同构
$$(f_!M) \otimes N \to f_!(M \otimes f^*N).$$
4. 实际上，我们可以做得更好：在一个对应范畴上得到一个作为松对称幺半函子的六函子形式体系。该范畴编码了 *1*、*2* 和 *3* 中大部分所需的相容性（见 定理 2.5.4）。
5. 对任意 $f\colon X \to S$ 拟紧拟分离概形之间的有限表示光滑态射，采用2.4.4中的记号，有自然等价 $f^! \simeq \Sigma^{\Omega_f} \circ f^*$。

6. 对任意闭浸入 $i\colon F \to X$，若其开补集 $j\colon X \setminus F \to X$ 是 *qcqs* 的，则有如下自然变换的正合三角

$$j_!j^! \to \mathrm{Id} \to i_*i^*$$

$$i_!i^! \to \mathrm{Id} \to j_*j^*$$

由相应伴随的单位和余单位给出。

最后，若 X 是一个局部 *étale* 有界（定义 *2.6.1*）拟紧拟分离概形，则典范函子

$$\mathrm{SH}_{\text{ét}}(S) \to \mathrm{SH}_{\text{proét}}(S)$$

是全忠实的。

请注意，在上述定理中，几乎所有结论都需要假设相关态射是有限表示的。之所以必须作此假设，是因为第六点是证明上述所有其他性质的关键。对于拟紧拟分离概形之间的非有限表示闭浸入，其开补集可能不是拟紧的，因此不存在局部化序列，见注 2.3.5。这也解释了 [FS24第 VII 节]中刚性解析情形下的不同表现。在解析几何中，闭浸入的开补集很少是拟紧的，因此本文中的论证不适用于该情形。

凝聚范畴论

设 Λ 是一个凝聚 $\mathbb{Z}_p$-代数。带有 Λ-系数的 pro-étale 动机的系数系统 $\mathrm{DM}_{\text{proét}}(-, \Lambda)$ 定义为 $\mathrm{SH}_{\text{proét}}$ 中的 $H\Lambda$-模范畴。根据抽象的一般原理，它也具有六函子形式。左 Kan 延拓定义了一个函子

$$\mathrm{D}((-)_{\text{proét}}, \Lambda) \to \mathrm{DM}_{\text{proét}}(-, \Lambda).$$

正如我们上文所见，这个映射不可能是等价，因为定义域不具有六种运算，而陪域具有。要解决这个问题，我们需要将上面的映射固化。我们已经了解了固化左侧意味着什么，现在需要为右侧提供一个类似的步骤。为此，我们采用 [Mar21、MW24、MW22] 中发展的内范畴理论。基本思想是，凝聚 ∞-范畴是副有限集位点上的 ∞-范畴层，而凝聚函子就是层之间的映射。若一个凝聚 ∞-范畴逐点可呈示，且某些方块可伴随化（见定义 1.4.3；事实上，这相当于具有凝聚意义下的余极限），则称其为可呈示的。若一个凝聚函子逐点具有伴随函子，且某些方块可伴随化（见命题 1.4.5；同样，这相当于与凝聚余极限相容），则它具有左伴随或右伴随。范畴 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$ 定义为由可呈示凝聚范畴及凝聚左伴随函子构成的范畴。与通常的范畴 Pr^{L} 一样，这个范畴在 $- \otimes^{\mathrm{cond}} -$ 中赋予了对称幺半结构 [MW22]。后者是 Lurie 张量积的凝聚版本。给定一个凝聚范畴 $\mathbf{C}$，可以通过取整体截面来“忘掉拓扑”，从而得到底层范畴 $\mathbf{C}(*)$。

基　　本文中广泛使用的凝聚 ∞-范畴示例是

$$\underline{\mathrm{D}}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda)\colon K\mapsto \mathrm{D}((X\times K)_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda)$$

and

$$\underline{\mathrm{Solid}}_{\Lambda}\colon K\mapsto \mathrm{D}(K,\Lambda)^{\blacksquare},$$

其中 K 遍历副有限集范畴。我们还设 $\mathrm{Mod}_{\Lambda}:=\mathrm{D}(*_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda)$。于是，$\underline{\mathrm{Mod}}_{\Lambda}$-线性凝缩可呈示 ∞-范畴的固化 定义为$\mathcal{C}^{\blacksquare}:=\mathcal{C}\otimes^{\mathrm{cond}}_{\mathrm{Mod}_{\Lambda}}\mathrm{Solid}_{\Lambda}$。利用这些工具，我们可以恢复概形上的固化层：

命题 C。 *(命题 1.4.17)* 设 X 是一个拟紧拟分离概形。那么

$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}=\underline{\mathrm{D}}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda)^{\blacksquare}(*).$$

刚性定理

现在我们已准备好证明刚性定理。为了使其成立，我们假设$\mathcal{P}$中的所有素数在我们的概形上都是可逆的，因为否则 étale 上同调可能不是 $\mathbb{A}^1$-不变的。最自然的想法是考察由以下内容定义的凝缩可呈示 ∞-范畴

$$\underline{\mathrm{DM}}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X,\Lambda)\colon K\mapsto \mathrm{DM}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X\times K,\Lambda),$$

将其固化并取整体截面。这得到一个可呈示 ∞-范畴，我们将其记为 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\ \mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_X,\ \Lambda)^{\blacksquare}$.[1] 我们自动得到一个映射

$$\mathrm{D}(-,\Lambda)^{\blacksquare}\to \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_{(-)},\Lambda)^{\blacksquare}$$

我们预期它是一个等价。然而，目前我们还不知道如何证明这一点。主要障碍在于，我们不知道陪域中的单位是否完备。为绕过这一问题，我们进一步局部化这个范畴。让我们先退一步，从有效情形开始。记 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)$ 为 $\mathrm{SH}^{S^1}{}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X)$ 中的 Λ-模范畴；我们自然得到一个凝聚的、呈现单幺的 ∞-范畴

$$\underline{\mathrm{D}}^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)\colon K\mapsto \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_{X\times K},\Lambda)$$

在 X 上的 ∞-范畴 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$ 的固体 $\mathbb{A}^1$-不变层随后定义为 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}(*)$。以下结果实质上说明固化层具有同伦不变性；我们通过挠 étale 情形将其推广出来：

定理 D。 *(定理 3.2.6)* 假设 $\mathcal{P}$ 中的每个素数在 X上都是可逆的。函子

$$\rho_{\sharp}^{\blacksquare}\colon \mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}\to \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$$

沿包含映射 $X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}\to\mathrm{WSm}_X$ 作 *Kan* 延拓，再进行 $\mathbb{A}^1$-局部化后得到的函子是全忠实的，与所有小极限与小余极限、所有拉回以及 $f_{\sharp}$ 关于 f弱 *étale* 的情况相容。

[1]请注意，由于我们上文引入的抽象固化仅对具有 $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$- 代数系数的情形有定义，因此我们目前还没有一个良好的整数系数 solid 动机范畴。我们的方法也无法立即推广到整数系数的情形：主要障碍在于 引理 1.2.7 在整数系数下不成立。我们计划在未来的工作中进一步探讨这一问题。

现在注意，若 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}(1)$ 是带基点概形 $(\mathbb{G}_{mX}, 1)$ 上的自由层，则存在一个自然映射 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}(1) \to \lim_{n\in\Pi\mathcal{P}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1) \simeq \mu_{\infty,\mathcal{P}}$ 其中 $\Pi\mathcal{P}$ 是那些 n 仅能被 P 中素数整除的元素所成的集合，并且有 $\mu_{\infty,\mathcal{P}} \coloneqq \lim_{n\in\Pi\mathcal{P}} \mu_n$。通常的挠刚性定理蕴含，挠 étale 层相对于此映射是局部的。因此，前挠 étale 层也如此。进一步分析可知，此映射的源与靶都是紧对象（见定理 3.3.7 的证明），因而我们看到$\rho_\sharp^{\blacksquare}$ 落在局部对象子范畴中。这是一个很好的迹象，因为$\mu_{\infty,\mathcal{P}}$ 是 $\otimes$-可逆的，所以相对于此映射作局部化也会强制实现 Tate 稳定性。由此引出以下定义：我们将 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda)^{\blacksquare}$（分别将 $\mathrm{DM}(X,\Lambda)^{\blacksquare}$）定义为 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$（分别为 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$）在这些映射处的局部化

$$M(1) \to M \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}} \mu_{\infty,\mathcal{P}}$$

对所有 M。现在我们终于可以陈述刚性结果：

定理 E. *(定理 3.3.7 和 命题 3.3.9)* 假设$\mathcal{P}$中的每个素数在 X上都可逆。函子

$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$$

诱导等价

$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{DM}(X,\Lambda)^{\blacksquare}.$$

特别地，$\mathrm{D}(-,\Lambda)^{\blacksquare}$ 带有概形上的六函子 X，且 $\mathcal{P}$ 中的每个素数在 X 上都可逆。若 R 是一个交换（离散）环，则可得到一个固体 $\mathcal{P}$进实现函子：

$$\rho_{\blacksquare}\colon \mathrm{DM}_{\text{ét}}(X,R) \to \mathrm{DM}_{\text{proét}}(X, R\otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \to \mathrm{DM}(X, R\otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} \simeq \mathrm{D}(X, R\otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$$

接下来，我们可以将我们的实现与经典的 ℓ进实现进行比较。

命题 F. *(推论 3.3.12)* 我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DM}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho_{\blacksquare}} & \mathrm{D}(X,\mathbb{Z}_\ell)^{\blacksquare} \\ {\scriptstyle\otimes\mathbb{Q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\otimes\mathbb{Q}} \\ \mathrm{DM}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow[\rho_{\blacksquare}]{} & \mathrm{D}(X,\mathbb{Q}_\ell)^{\blacksquare} \end{array}$$

将经典交换图限制在对称幺半左伴随函子上

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DM}_{\text{ét,gm}}(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho_\ell} & \mathrm{D}^b_c(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}_\ell) \\ {\scriptstyle\otimes\mathbb{Q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\otimes\mathbb{Q}} \\ \mathrm{DM}_{\text{ét,gm}}(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow[\rho_{\mathbb{Q}_\ell}]{} & \mathrm{D}^b_c(X_{\text{ét}},\mathbb{Q}_\ell) \end{array},$$

其中 ρ_ℓ 是 ℓ-进实现函子，对应于 *[CD16]*，而 $\rho_{\mathbb{Q}_\ell}$ 是 $\mathbb{Q}_\ell$-进实现函子，对应于 *[RS20, 2.1.2]*。

在特征零概形上，上述结果对 $\mathbb{Z}$ 以及有限阿代尔环$\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}$ 取代 $\mathbb{Z}_\ell$ 和 $\mathbb{Q}_\ell$时也成立。这使我们能够以另一种方式定义代数$\mathcal{N} \in \mathrm{DM}^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})\ \mathbb{Z})$，其上的模即为 Nori 动机，正如 [RT24b]中所考虑的那样。在后续工作中，我们计划研究本文构造的谱类比。这将导出谱 Nori 动机的定义。

致谢

RR 感谢 Frédéric Déglise、Fabrizio Andreatta 和 Jean Fasel 对本项目的支持与关注。ST 感谢 Sophie Morel 的支持。SW 谨向他的导师 Denis-Charles Cisinski 致谢，感谢他建议 SW 思考这一课题，并与 SW 进行了许多有益的讨论。SW 也感谢 Remy van Dobben de Bruyn 就本文内容进行的有益讨论。

RR 感谢 Prin 2022、动机与 L 函数的算术以及 ANR-21-CE40-0015 HQDIAG 的支持。ST 感谢欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟“地平线 2020”研究与创新计划下的“EMOTIVE”项目（资助协议编号 101170066）以及 ANR-21-CE40-0015 HQDIAG 提供的支持。SW 衷心感谢雷根斯堡的 SFB 1085 高阶不变量项目提供的支持。该项目由德国研究联合会资助；SW 还获得了丹麦国家研究基金会通过哥本哈根几何与拓扑中心（DNRF151）提供的支持。

记号与约定

我们用 Ani 表示 anima[2] 范畴。设 C 为一个位点。我们用 PSh(C)（分别用 Sh(C)）表示 C 上以 anima 为值的预层（分别为超层）范畴。记 Sh(C, Sets) 为集合层的全子范畴。若 R 是 Sh(C, Sets) 中的一个环，则记 Sh(C R) 为 R-模范畴。处理取值于 a ∞-范畴的位点上的预层时，我们始终使用超层，而不使用层。为便于阅读，我们有时会省略“∞”，直接将 ∞-范畴称为范畴（其凝聚类比亦然，定义见定义 1.4.1）。最后，我们考虑的所有概形都是拟紧拟分离的。

1 概形上的 solid 层。

本节将 [FS24，第 VII.1 节和第 VII 节2] 的内容推广到概形上。首先，我们回顾 第 1.1 节中有关 pro-étale 层的一些预备知识。接着，在 第 1.2 节中，我们定义 solid pro-étale 层的阿贝尔范畴，并证明其主要性质。然后，在 第 1.3 节中，我们研究概形上的固化层的导出范畴。这两节都主要遵循 [FS24，§VII]中的内容。最后，在第 1.4 节中，我们借助凝聚范畴论的思想，从另一个角度来阐述固化层。这种方法将在第 3 节中用于固化 第 2 节中构造的 pro-étale 动机范畴。

1.1 关于 pro-étale topos 的回顾

若 X 是一个概形，我们记 $X_{\text{proét}}$ 为由弱 étale X -概形组成的X的小 pro-étale 位点，并用 $X_{\text{proét}}^{\text{aff}}$ 表示由 étale X-概形的余滤极限构成的子范畴，其过渡映射为仿射映射，且这些概形本身也是仿射概形。回忆 [BS15，§2] 中称一个仿射概形为 w-可缩的，若它的任意 pro-étale 覆盖都存在截面。若任意开覆盖都分裂，且其闭点集是闭集，则称它为 w-局部的。我们经常使用[BS15，定理 18]：仿射概形 w是 w-可缩的，当且仅当它是-局部的，其在闭点处的所有局部环都是严格 hensel 的，并且它的是极端不连通的

[2]也称为空间、 ∞-群胚、Kan复形、集合 ...

profinite 集。最后，w-局部仿射概形之间的态射若将闭点映到闭点，则称为 w-局部的。

1.1.1. 设 $X = \mathrm{Spec}(R)$ 是一个仿射概形，且 $i\colon Z = \mathrm{Spec}(R/I) \to X$ 是一个闭浸入。回忆由 [BS15，引理 2.212]，基变换函子

$$- \otimes_R R/I\colon \mathrm{Ind}(R_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ind}((R/I)_{\text{ét}})$$

具有一个全忠实右伴随

$$\mathrm{Hens}_R(-)\colon \mathrm{Ind}((R/I)_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ind}(R_{\text{ét}}).$$

如同上述文献中一样，我们常常略微简化记号，直接写作

$$\widetilde{(-)}\colon Z^{\mathrm{aff}}_{\text{proét}} \to X^{\mathrm{aff}}_{\text{proét}}$$
$$V \mapsto \widetilde{V}$$

对应的概形范畴上的函子（我们也将其记作 Hens_X）。该函子是全忠实的，并且是基变换函子的左伴随。因此，对于 X上的一个原 étale 层F，层 i^*F 可以描述为与预层

$$V \mapsto F(\widetilde{V}).$$

命题 1.1.2。 设 W是一个 w-可缩仿射概形，并令 $i\colon W^c \to W$为其闭点子概形的包含映射。则 $\mathrm{Hens}_W(W^c) = W$。

证明。记 $W^c = \mathrm{Hens}_W(W^c)$。首先回忆，$W^c$是 w-可缩的：根据 [BS15，引理 2.1，w是 [-局部的；其局部环是代数闭域，且其 π_0 与 W的$\widetilde{\ }$相同。由亨泽尔化函子的完全忠实性，我们有 $W^c \times_W W^c = W^c$，$\widetilde{\ }$，从而得到一个映射 $W^c \to W^c$。给定一个 pro-étale 覆盖 $W\prime \to W^c$，其拉回 $W\prime \times_{\widetilde{W^c}} W^c \to W^c\widetilde{\ }$是可分裂的。由于 $W\prime \times_{\widetilde{W^c}} W^c = W\prime \times_{\widetilde{W^c}} (W^c \times_W W^c) = W\prime \times_W W^c$，该分裂通过伴随给出一个映射$\frown W^c \to W'$。由伴随性再次可知，它是我们的 pro-étale 覆盖的一个分裂。因此，$\frown W^c$ 也是 w-可缩的。

此外，典范映射 $W^c \to \widetilde{W^c}$是一个闭浸入，因为它是$\frown W^c \to W$沿映射 $W^c \to W$的拉回，而 $W^c \to W^c$是一个亨泽尔对（事实上，这可由Hens_W 的泛性质以及 [Aut18，Tag 09XI (2)]推出）。我们断言，$\frown W^c \to W^c$ 恰好是闭点子概形。事实上，根据 [HRS23，推论 4，4]，它在 π_0 上诱导出一个同构；断言由此成立，因为$\frown W^c$的每个连通分支都有唯一的闭点，这是因为 W^c是 w-局部的。由于典范映射

$$\widetilde{W^c} \to W$$

是 pro-étale 的，w-局部，并且在闭点上诱导出一个同构，因此由 [BS15，引理 2.38] 的证明可知，它是一个同构。 □

注记 1.1.3（大小问题）。由于弱 étale X-概形范畴并非小范畴，因此会引发一些集合论问题。归根结底，这些问题总是可以规避的，而且不会对我们的结果造成任何重大影响。对于比较谨慎的读者，我们建议以下两种阅读本文的方式之一：

1. 一劳永逸地固定两个强不可达基数 $\delta < \epsilon$。于是，所有概形都假定为 δ-小的，而所有范畴构造（例如在一个位点上取层）都相对于由 ϵ确定的较大宇宙进行。特别地，Sh($X_{\text{proét}}$) 总是指 δ-小的弱 étale X-概形上的 ϵ-小 anima 的超层；凝聚 anima 的 ∞-范畴 Cond(Ani) 也同理。

2. 如果读者不想使用宇宙，可以按如下方式进行。对于概形 X，选择一个强极限基数 κ，使得 X 是 κ-小的。记 $X_{\text{proét},\,\kappa}$为 κ-小弱 étale X-概形范畴。假设 κ 是强极限基数，便保证了在 $X_{\text{proét},\,\kappa}$中有足够多的 w-可缩概形。然后我们定义

$$\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}) \coloneqq \mathrm{colim}_{\kappa}\, \mathrm{Sh}(X_{\text{proét},\kappa})$$

凝聚 anima 范畴也类似。Clausen 和 Scholze 在 [CS21] 中采用了这种方法。

引理 1.1.4. 设 X 是一个拟紧概形。那么存在概形的一个满射态射 $f\colon E \to X$，其中 E 是既约的、0 维的仿射概形，且其所有局部环都是可分闭域。此外，对于这样的概形 E，我们有一个典范等价

$$\mathrm{Sh}(E_{\text{proét}}) \simeq \mathrm{Cond}(\mathrm{Ani})_{/\pi_0(E)}.$$

证明。 由于 X 是拟紧的，我们可以假设 X 是仿射且既约的。根据 [BS15，注 2.1。11]，存在映射

$$(X^Z)^c \xrightarrow{a} X^Z \xrightarrow{b} X$$

在 b 一个 pro-开覆盖和 a 一个闭浸入下，设 X^Z 一个 w-局部概形，并且 $(X^Z)^c$是其闭点子概形。特别地，由 [BS15，引理 2.2.3] 概形 $(X^Z)^c$ 是绝对平坦的（即 既约且 0维）。

的存在性 E 由 [BS15，引理 2.2.7] 得出。现在， E的 pro-étale 位点与 E 的 pro-Zariski 位点相同，这由 [BS15，引理 2.3.8] 得到。由于 E 是 0维的，映射 $E \to \pi_0(E)$ 是一个同胚，因此引理得证。 □

推论 1.1.5。 设 W 是一个 w-可缩概形，并设 $i\colon\ W^c \to W$ 是其闭点子概形的包含映射。那么对于任意 $F \in \mathrm{Sh}(W_{\text{proét}})$，典范映射

$$\eta\colon i^*F(W^c) \to F(W)$$

是一个等价。

证明。 由 命题 1.1.2可知，映射 η 是一个等价，当且仅当 F 可表为一个 pro-仿射 étale W-概形。由于 i^*， $\Gamma(W^c,\ -)$和 $\Gamma(W,\ -)$保持筛余极限，而任意原 étale 层都是 pro-仿射 étale 可表对象的筛余极限，因此断言得证。 □

引理 1.1.6。 设 $f\colon\ X \to Y$ 是概形的一个满射态射。那么拉回函子 $f^*\colon \mathrm{Sh}(Y_{\text{proét}}) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{proét}})$ 是保守的。

证明。 我们可以立即归约到 X 和 Y 均为仿射的情形。由于 w-可缩概形构成拓扑的一个基，因此通过在任意一个 w-可缩 W 上取值所给出的函子族是保守的。利用推论 1.1.5 可知，沿映射拉回所给出的函子族

$$W^c \to W \to X$$

对于任意 w-可缩的 W 都是保守的。因此，我们可以假设 $W^c = Y$ 从而归结为 Y 是 Krull 维数为 0 且剩余域可分闭的既约概形的情形。由引理 1.1.4，我们可以选取另一个这样的概形 E，并有一个满射 $E \to X$，从而归结为情形 $X = E$。再次由 引理 1.1.4，函子 f^* 可识别为函子

$$\mathrm{Cond}(\mathrm{Ani})_{/\pi_0(X)} \to \mathrm{Cond}(\mathrm{Ani})_{/\pi_0(Y)}$$

由沿 $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ 拉回所诱导。但由构造可知，映射 $\pi_0(f)$ 是满射，因此是凝聚 anima 中的有效满射；沿其拉回是保守的。

□

引理 1.1.7。 设 $f\colon X \to Y$ 是一个概形态射。那么拉回函子f^*: 层范畴$(Y_{\text{pro\'et}}) \to$层范畴$(X_{\text{pro\'et}})$与极限相容。

证明。 这是 [Wol22，推论 4。18]。 □

1.2 阿贝尔范畴。

设 X 是一个拟紧拟分离概形。本节中，我们固定一组素数$\mathcal{P}$。回顾引言中的环 $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$。显然，环 $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 是一个拓扑环，因此我们可以将其视为凝聚环。通过拓扑斯的典范态射

$$\mathrm{Cond}(\mathrm{Set}) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{X}_{\text{pro\'et}}, \mathrm{Set}),$$

例如，参见 [HHL+25，注记 3。5]，因此，我们可以将 $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 视为 $\mathrm{Sh}(X_{\text{pro\'et}}, \mathrm{Set})$中的一个环对象。我们将 $\mathrm{Sh}(X_{\text{pro\'et}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ $= \mathrm{Mod}^{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}}(\mathrm{Sh}(X_{\text{pro\'et}}, \mathrm{Ab}))$ 记作 $\mathrm{D}(X_{\text{pro\'et}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$，它表示这个阿贝尔范畴的导出范畴。

回顾 1.2.1。 根据 [sga72，专题 VII，定理 5。7] 我们知道存在一个全忠实映射：

$$\mathrm{Pro}(X_{\text{\'et}}^{\mathrm{aff,fp}}) \to X_{\text{pro\'et}}$$

其中，左边表示由以下对象张成的$\mathrm{Pro}(X_{\text{\'et}})$ 的全子范畴：有限表示 étale X-仿射概形的余滤极限。此外，根据 [BS15，定理 2.3，以上映射诱导了相关拓扑斯之间的等价。4]。

若 $j\colon U \to X$ 是一个 pro-étale 映射，则 pro-étale 层上的拉回 j^* 有一个左伴随，记作 $j_\sharp$。

定义 1.2.2。 若 $j\colon U \to X$ 是一个 pro-étale 映射，且可表示为 étale 映射 $j_\alpha\colon U_\alpha \to X$ 的余滤极限，其中每个 U_α 都是仿射的，则定义

$$j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \coloneqq \lim (j_\alpha)_\sharp \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \in \mathrm{Sh}_{\text{pro\'et}}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}).$$

我们有一个映射 $j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \to j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$。

定义 1.2.3。设 F 是一个取值于 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-模的阿贝尔 pro-étale 层。我们称 F 为固体，如果对于每个 j 如 定义 1.2.2中的自然映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},F)\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},F)=F(U)$$

是一个等价。我们将由固对象构成的 Sh(X，$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$)$^{\blacksquare}$ 的全子范畴记作 Sh($X_{\text{proét}}$，$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$)。

最后，我们称一个 pro-étale 层是固的，如果它的上同调层构成的复形 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-模是固的，我们将由固对象构成的 D(X，$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$)$^{\blacksquare}$ 的全子范畴记作 D($X_{\text{proét}}$，$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$)。

注1.2.4。等价地，Sh(X，$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$)$^{\blacksquare}$ 是关于映射 $j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}\to j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 的反射局部化。特别地，包含映射 Sh(X，$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$)$^{\blacksquare}$ $\to$Sh($X_{\text{proét}}$，$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$) 存在一个左伴随，我们将其记作 $(-)^{\blacksquare}$，并称之为固化函子。

现在我们希望理解固化层范畴。我们的主要结果是定理1.2.8；为此，我们首先需要一些技术引理。

1.2.5. 回忆一下，集合 étale 层 F 称为可构造的，如果存在一个由拟紧局部闭子概形构成的 X 的分层，使得 F 在每个分层上都是局部常值且具有有限茎；记 $X_{\text{ét}}^{\text{cons}}$为 Sh($X_{\text{ét}}$,集合) 中由可构造 étale 层构成的全子范畴。我们将由包含映射诱导的位点态射记为 ν: Sh($X_{\text{proét}}$,集合) $\to$ Sh($X_{\text{ét}}$,集合)，并将遗忘函子 Sh($X_{\text{proét}},\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$) $\to$Sh($X_{\text{proét}}$, 集合)的左伴随记为 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}[-]$。

在许多归约中，我们需要以下关于概形的结果。

引理 1.2.6. 设 F是一个可构造 *étale* 层。则在$\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$ 中，映射

$$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\nu^*F]\to\lim_{n\in\Pi\mathcal{P}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\nu^*F],$$

其中 ΠP 是由 P 中的素数相乘得到的正整数集合，并按整除关系排序；这是一个等价。

证明。我们可以假设 F 是 étale 局部常值的：事实上，根据 [BS15，引理 6.1，11],给定 X 的一个具有拟紧分层的有限分层，限制到各分层的限制族是联合保守的，并且这些限制与极限交换，见引理1.1.7。

取一个满射 g: $E\to X$，其中 E 是 Krull 维数为 0 的仿射既约概形，且其剩余域可分闭；这由 引理 1.1.4得到。由于 g^* 是保守的，并且根据引理 1.1.6 和引理 1.1.7与极限交换，我们可以将 X 替换为 E。

在这种情况下，根据 [Sch17，推论 2，Zariski 位点与 étale site 相同。5] 因此 F是 Zariski 局部常值且具有有限茎。因此，我们可以假设它实际上是常值的；此时断言显然成立，因为余滤极限与有限和交换。 □

若阿贝尔群的 étale 层是$\mathcal{P}$-挠可构造 的，则称其为$\mathcal{P}$-挠的，并且作为集合 étale 层是可构造的。我们将 Sh$_{\mathcal{P}}^{\text{cons}}$($X_{\text{ét}}$) 记为 Sh($X_{\text{ét}}$，$\mathbb{Z}$) 的全子范畴，其中的对象是$\mathcal{P}$-挠可构造 étale 层。

在我们的情形中，有如下类似于 [FS24，命题 VII.1。6]的结果 ：

引理 1.2.7。 设(F_i) 是一个 *P*-挠构造 *étale* 层的余滤逆系统。那么对于所有 $q > 0$，在范畴 $\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$中取$\lim F_i$ 时，结果均为零。

证明。只需证明，对于任意 w-可缩的弱 étale X-概形 W 以及任意 q，阿贝尔群 $[R^q \lim F_i](W)$ 都为零。根据推论 1.1.5 和引理 1.1.7，我们可以用 W 的闭点集合 W^c 替换 X，因此不妨假设 X 是 Krull 维数为 0、剩余域可分闭的仿射既约概形。由 [Sch17，推论 2.5], ，可得 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}) = \mathrm{Sh}(|X|)$，其中 $|X|$ 是 X 的底层拓扑空间，且该空间极端不连通。现在，沿用 [FS24，命题 VII.1.6] 末尾的相同证明即可。 □

定理 1.2.8. 沿用上述记号。

1. 子范畴 $\mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 是 $\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 的弱 *Serre* 子范畴，并且对小极限与小余极限封闭。对于如上所述的 $j\colon U \to X$，对象 $j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 是 $j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 的固化。$j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 的集合生成阿贝尔范畴 $\mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$。

2. 设 F为 $\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$ 中的一个对象。以下条件等价：

(a) 层 F是 $\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$ 中的紧对象且为固体。*(b)* 层 F 是固体，并且是 $\mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$中的紧对象。*(c)* 层 F 可以表示为挠构造 *étale* 层的余滤极限。

3. $\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$ 中由满足上述等价条件的对象张成的子范畴是弱 *Serre* 子范畴。作为阿贝尔范畴，它等价于 *pro*-范畴$\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}}))$。

4. 范畴 $\mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 等价于 $\mathrm{Ind}(\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}})))$。

5. 设 K 为由 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-模构成的 *pro-étale* 层复形。则，当且仅当自然映射

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{D}(X_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}, K) \to j_* j^* K$$

对于任意 $(j\colon U = \lim_\alpha U_\alpha \to X) \in \mathrm{Pro}(X^{\mathrm{aff}}_{\text{fp ét}})$ 都是等价。

证明。 我们主要遵循 [FS24 的定理 VII.1 的证明。3]。范畴$\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}}))$由 [KS06 的命题 8.6 可知是阿贝尔范畴。7]。此外，引理 1.2.7保证函子

$$\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}})) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \tag{1}$$

是正合的。我们要证明它是全忠实的。设 (F_i) 是一个由$\mathcal{P}$-挠可构造 étale 层构成的余滤逆系统，并设 G 是一个$\mathcal{P}$-挠可构造 étale 层，我们需要证明自然映射：

$$\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z})}(F_i, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(\lim \nu^* F_i, \nu^* G)$$

是一个等价。

回顾范畴 $X_{\text{ét}}^{\text{cons}}$：集合值可构造 étale 层的范畴。我们考虑范畴 $\mathrm{Sh}(\mathrm{Pro}(X_{\text{ét}}^{\text{cons}}),\mathrm{Sets})$，即定义在 $\mathrm{Pro}(X_{\text{ét}}^{\text{cons}})$ 上的层范畴，采用相干拓扑，[Lurb，注记 7.1.1，定义 B.5。3]。根据 [Lurb，例 7.1。7] 自然映射

$$\mathrm{Pro}(X_{\text{ét}}^{\text{cons}}) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \mathrm{Sets})$$

通过 Kan 延拓诱导出一个等价 $\mathrm{Sh}(\mathrm{Pro}(X_{\text{ét}}^{\text{cons}}), \mathrm{Sets}) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \mathrm{Sets})$。特别地，它是全忠实的，因此映射

$$\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}},\mathrm{Sets})}(F_i, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\mathrm{Sets})}(\lim \nu^* F_i, \nu^* G)$$

是一个等价，因为相干拓扑是子正则的 [Lurb，推论 B.5。6]。强制要求右侧与加法相容，意味着两个不同的映射 $\lim \nu^* F_i \times \lim \nu^* F_i \to G$ 重合（左侧同理）；如前所述，我们有

$$\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}},\mathrm{Sets})}(F_i \times F_i, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\mathrm{Sets})}(\lim \nu^* F_i \times \lim \nu^* F_i, \nu^* G)$$

取等化子后，我们得到

$$\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z})}(F_i, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\mathbb{Z})}(\lim \nu^* F_i, \nu^* G).$$

此外，任意两个可构造$\mathcal{P}$-挠层的余滤极限之间的 $\sim\mathbb{Z}$-线性映射都是 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-线性的。因此，范畴 $\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}}^{\text{cons}}(X_{\text{ét}}))$ 等价于 $\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$ 的一个阿贝尔子范畴，记作 $\mathcal{C}(X)$。

根据定义，范畴$\mathcal{C}(X)$ 由满足条件 (c) 的对象张成。现在证明其中的对象都是固体的。由于固对象对极限封闭，只需证明$\mathcal{P}$-挠可构造层是固体的。设 F 是一个$\mathcal{P}$-挠可构造 étale 层，且 (U_α) 是一个由仿射 étale X-概形组成的余滤系统。记$j\colon \lim_\alpha U_\alpha \to X$ 为典范 pro-étale 映射。在交换图表中

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}, \nu^* F) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}, \nu^* F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{colim}_\alpha F(U_\alpha) & \longrightarrow & (\nu^* F)(\lim_\alpha U_\alpha) \end{array},$$

由米田引理可知右侧竖直箭头可逆，由于 [BS15，引理 5 可知底部水平箭头可逆。2]，此外，利用 引理 1.2.6 将 $j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 写成 $\mathcal{C}(X)$中的一个对象，并注意到 (1) 是全忠实的，便可看出左侧竖直箭头可逆。因此，顶部水平箭头是一个等价，这就证明了 $\nu^* F$ 是固体的。因此，$\mathcal{C}(X)$ 包含于 $\mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$。

现在我们证明，$\mathsf{C}(X)$中的对象在$\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$中也是紧对象。首先注意到，$\mathrm{Pro}(X_{\text{ét}}^{\text{cons}})$中的对象在$\mathrm{Sh}(\mathrm{Pro}(X_{\text{ét}}^{\text{cons}}), \text{集合}) \simeq \mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \text{集合})$中是紧对象；这是因为，层的滤过余极限是在$\mathrm{Pro}(X_{\text{ét}}^{\text{cons}})$上的集合值预层范畴中通过 [Lurb，注记 7.1.1]计算的。设 F 是$\mathsf{C}(X)$中的对象，并设 G 是一个 pro-étale 层，其取值为 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-模。如上所述，可以将$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(F, G)$描述为以下集合的子集：

由满足可加性的映射构成的 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}})}(F, G)$ 和 $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$-线性，即 某些映射

$\sim F \times F \to G$ 和 $F \times \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} \to G$ 一致；由于函子 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}})}(H, -)$ 对于任意 H in $\mathcal{C}(X)$ 都与滤过余极限相容，因此该描述也与滤过余极限 $\widehat{}$相容，故 F是层范畴 $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$ 中的紧对象。因此，我们证明了条件 (c) 蕴含条件 (a)。

我们还可以推出，固对象在滤过余极限下封闭：事实上，如果 $j\colon U \to X$ 是一个可以表示为来自仿射概形的 étale 映射的余滤极限的 pro-étale 映射，那么层 $j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 在 $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 中是紧对象，因为我们已经知道它属于 $\mathcal{C}(X)$。这也证明了条件 (a) 蕴含条件 (b)。

现在我们证明 4. 即，我们描述固化层的范畴。由于固对象在滤过余极限下封闭，我们有一个函子

$$\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}(X) \to \mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}.$$

由于$\mathcal{C}(X)$ 中的所有对象都是紧对象，因此它是全忠实的。根据 [KS06，命题 8.6，它也是阿贝尔范畴之间的正合函子。7]。

因为$j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$属于 $\mathcal{C}(X)$，因此它是固对象。于是，米田引理和固对象的定义给出

$$(j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} \xrightarrow{\sim} j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}.$$

因此，任意固化层 F 都存在一个来自若干个 $j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 的直和的满射，其中 j 取值如前。由于核也是固对象，我们得到一个表示

$$\bigoplus (j_\beta)_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \to \bigoplus (j_\gamma)_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \to F \to 0$$

这意味着 F 属于 $\mathrm{Ind}\mathcal{C}(X)$，因为后者在余纤维下封闭。由此我们还可推出，条件 (b) 蕴含条件 (c)，因为$\mathcal{C}(X)$ 是幂等完备的，并且根据 [Lur09，引理 5.4.2，Ind-范畴的紧对象化等同于进行幂等完备化。4]因此我们证明了 2。

到目前为止，我们已经证明了 2. 和 4.，以及第 1. 和 3. 点中除扩张下的稳定性之外的所有内容。这由 5. 得出，而我们现在来证明它。我们首先说明，任意固复形 K 都满足 5. 中的条件。沿着 Postnikov 塔进行 dévissage（注意，该公式与 K 中的极限交换，因为 j^* 根据 引理 1.1.7与极限交换），再使用谱序列论证，我们可以归约到 $K = F[0]$ 属于心的情形。策略如下：我们证明 5. 中的等式与滤过余极限交换，从而可以假设 F 是一个可构造挠 étale 层，然后对这些特定的层证明该断言。这两个步骤都使用 Breen-Deligne 分解：

由 [HRS23 引理 5.3] 可知，5. 的右侧与心中对象的滤过余极限交换。我们断言，左侧 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}, -)$ 也与层范畴 $\mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 中的滤过余极限交换。为证明这一断言，注意到 $p_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}\widehat{}$对于 $p\colon V \to X$弱 étale 且 V w-可缩的对象，是 $\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$ 的紧生成元（紧性由 [HRS23 引理 4.1]推出），因此只需证明 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(p_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}, -))$ 与滤过余极限相容。后者等于 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(p_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \otimes j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}, -)$。注意，$p_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \otimes j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$是非$\widehat{}$导出张量积，因为 $p_\sharp\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$ 是射影的。现在我们使用$j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 的 Breen-Deligne 分解，由此如同在 [CS21 推论 4.8] 中那样，可得一个函子性的收敛谱

序列 $E^{p,}{}_{*}{}^{q}(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}^{r_{p,}}{}_{i}\mathcal{P}\times V,\ -)$，其第一页具有如下形式

$$E_1^{p,q}=\prod_{i=1}^{n_p}\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}^{r_{p,i}}\times V],-)\Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(p_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}\otimes j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},-),$$

与 n_p 以及$r_{p,\ i}$ 一些普适常数。注意，层 $j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}^{r_{p,}}{}_{i}\mathcal{P}\times V$是仿射 étale X-概形的一个余滤极限，根据引理 1.2.6。因此，左侧与滤过余极限交换，这是由 [Aut18、Tag 0739] 得到的，从而汇合项也与滤过余极限交换，这就证明了该断言。因此，我们可以假设 F 是紧对象。随后还可以进一步归约为 F 是一个$\mathcal{P}$-挠可构造 étale 层，因为 5. 的两侧都与极限交换（在我们的情形中，根据引理 1.2.7，这些极限是导出的）。

现在我们将证明，对于 $K=F[0]$ 和 F 一个$\mathcal{P}$-挠可构造 étale 层，5. 是一个等价。再次，只需检查对所有 $p\colon V\to X$带有 V w-可缩的 pro-étale 仿射，在应用 $\widehat{\ }\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(p_\sharp\mathbb{Z}_{\mathcal{P}},\ -)$ 后，该映射是一个等价。注意$\widehat{\ }\qquad\widehat{\ }$，利用伴随和关于 $j_\sharp$的投影公式，5. 的右侧随后变为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(p_\sharp\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}\otimes j_\sharp\mathbb{Z}_{\mathcal{P}},\ F[0])$。再次使用 Breen-Deligne 分解，以获得 $j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 和 $(j_\alpha)_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 的同时分解，我们如上得到一个映射

$$\mathrm{colim}_\alpha\, E_*^{p,q}((j_\alpha)_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}^{r_{p,i}}\times V,F)\to E_*^{p,q}(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}^{r_{p,i}}\times V,F)$$

其谱序列在 E_1页上的形式为

$$\mathrm{colim}_\alpha\prod_{i=1}^{n_p}\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[(j_\alpha)_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}^{r_{p,i}}\times V],F)\to\prod_{i=1}^{n_p}\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}^{r_{p,i}}\times V],F).$$

对于所有 $p,\ q\in\mathbb{Z}$，此映射都是等价。事实上，由于$j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}^{r_q}{}_{\mathcal{P}}\times V=\mathrm{lim}_\alpha(j_\alpha)_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}^{r_q}{}_{\mathcal{P}}\times V$，由 [BS15，推论 5.1 可知这一点。6] 因为$j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}^{r_q}{}_{\mathcal{P}}\times V$和$(j_\alpha)_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}^{r_q}{}_{\mathcal{P}}\times V$根据引理 1.2.6都是仿射概形的极限。由于这两个谱序列等价，它们的收敛项也等价，因此该映射

$$\mathrm{colim}_\alpha\,\mathrm{H}^n\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(p_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}\otimes(j_\alpha)_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},F)\to\mathrm{H}^n\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(p_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}\otimes j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},F)$$

是一个等 。利用 $(j_\alpha)_\sharp$ 的投影公式，左侧可以写 n
equi

$$\mathrm{colim}_\alpha\,\mathrm{H}^n\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}((u_\alpha)_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},F)\simeq\mathrm{colim}_\alpha\,\mathrm{H}^n_{\text{ét}}(W_\alpha,F_{|W_\alpha})$$

采用以下笛卡尔图的记号：

$$\begin{array}{ccc}W_\alpha & \longrightarrow & V\\ \downarrow & \searrow^{u_\alpha} & \downarrow p\\ U_\alpha & \xrightarrow[j_\alpha]{} & X\end{array}.$$

根据 [Aut18，定理 09YQ]我们有

$$\mathrm{colim}_\alpha\,\mathrm{H}^n_{\text{ét}}(W_\alpha,F_{|W_\alpha})\simeq\mathrm{H}^n_{\text{ét}}(W,F_{|W})$$

与 W 该 p 沿着 j的基变换，因此将前面的操作逆向进行，我们得到

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(p_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}\otimes j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},F)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^n\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(p_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}\otimes j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},F)$$

这正是我们想要证明的。

现在我们证明 5 的逆命题。记 $\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{L\blacksquare}$ 为由满足以下条件的复形所张成的全子范畴：这些复形是 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-模的 pro-étale 层的复形 K，并且对每个如前所述的 j，映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},K)\to\Gamma(U,K)$$

是一个等价。显然，所有满足 5 的结论的复形都属于 $\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{L\blacksquare}$。特别地，根据我们刚才的证明，有 $\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}\subseteq\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{L\blacksquare}$。为证明二者相等，我们注意到包含映射 $\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{L\blacksquare}\to\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 存在一个左伴随L。注意，$D(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$在 $\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 中对余极限封闭。因此，只要证明自然映射 $L(j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})\to j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$是一个等价即可，因为后者包含于 $D(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$。由于 $j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$属于 $\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{L\blacksquare}$，只需证明对任意 $K\in\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{L\blacksquare}$，典范映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{L\blacksquare}}(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},K)\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},K)$$

是一个等价，这一点由定义可知。 □

推论 1.2.9。 若 F 是 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-模的阿贝尔*étale*层，定义在 $X_{\text{ét}}$ 上，且具有 $n\in\Pi\mathcal{P}$ *(*此记号见引理 *1.2.6* ），则层 ν^*F 是固体的。

证明。 定理 1.2.8 表明，当 F 可构造时，这一结论成立。由于固化层对余极限封闭，且 ν^* 与余极限相容，因此结论成立：根据 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，任意 [Aut18, 引理 03SA]。 □

注记 1.2.10。 在 定义 1.2.2 中，我们选择使用仿射 étale 逆极限X-概形。我们也可以改用 pro-étale 位点的其他生成元。为说明这一点，我们需要先作一些初步观察。考虑函子

$$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[-]\colon X_{\text{ét}}^{\text{cons}}\to\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}}^{\text{cons}}(X_{\text{ét}}))$$

^将一个可构造的集合层 $\mathcal{F}$ 送到其上的自由 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-模。注意，根据引理 1.2.6，该函子确实取值于全子范畴 $^{\text{cons}}_{\mathcal{P}}$**Pro(Sh**$X_{\text{ét}}$**(** $\subseteq$ **))** X**Sh(**$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$**,**$^{\blacksquare}$ **)**。此外，它保持有限余极限。由于余滤极限在 $\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}}^{\text{cons}}(X_{\text{ét}}))$中与有限余极限交换，因此，将其延拓到 pro对象后

$$\mathrm{Pro}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[-])\colon\mathrm{Pro}(\mathrm{X}_{\text{ét}}^{\text{cons}})\to\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}}^{\text{cons}}(\mathrm{X}_{\text{ét}}))$$

也与有限余极限交换。现在由引理 1.2.7 可知，显然的函子

$$\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}}^{\text{cons}}(X_{\text{ét}}))\to\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$$

是正合的，因此特别也保有限余极限。由此可得复合映射

$$\mathrm{Pro}(\mathrm{X}_{\text{ét}}^{\text{cons}})\xrightarrow{\mathrm{Pro}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[-])}\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}}^{\text{cons}}(\mathrm{X}_{\text{ét}}))\to\mathrm{Sh}(\mathrm{X}_{\mathrm{proét}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$$

也是正合的。

现在注意到，如果 $F = \lim_i F_i \in \mathrm{Pro}(X_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}})$，那么根据定义，这个函子将 F 映为 $\lim_i \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[F_i]$。特别地，如果 F 由某个 $j\colon U \to X$ in $\mathrm{Pro}(X^{\mathrm{aff}}_{\text{ét}})$ 表示，它就与 $j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 一致。根据 [Lurb, Remark 7.1.7]，$\mathrm{Pro}(X_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}})$ 中的所有对象都是拓扑斯 $\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \mathrm{Set})$ 中的拟紧拟分离对象。特别地，我们可以将它们写成可表对象 $j\colon U \to X$ in $\mathrm{Pro}(X^{\mathrm{aff}}_{\text{ét}})$ 的有限余极限。这说明典范比较映射

$$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathcal{F}]^{\blacksquare} \to \lim_i \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathcal{F}_i] \in \mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$$

可写成形如 $(j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} \to j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 的映射的有限余极限，因此是一个等价。这说明全子范畴 $\mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} \subseteq \mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 等价于对形如以下映射的更大类进行反射局部化

$$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathcal{F}] \to \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathcal{F}]^{\blacksquare} \simeq \lim_i \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathcal{F}_i].$$

上述考虑也表明，我们本可以改用一个更小的映射类。由于在 $\mathrm{Pro}(X^{\mathrm{aff}}_{\text{ét}})$ 中的 w-可缩概形同样在余极限下生成拓扑斯 $\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \mathrm{Set})$，上述论证也表明，$\mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 等价于在如下形式的映射处进行反射局部化：

$$j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \to j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$$

其中 $j\colon U \to X$ 属于 $\mathrm{Pro}(X^{\mathrm{aff}}_{\text{ét}})$，且是 w-可缩的。

命题 1.2.11。设 $f\colon Y \to X$ 是拟紧拟分离概形之间的一个映射。则

$$f^*\colon \mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \to \mathrm{Sh}(Y_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$$

保固化层。事实上，若 $j\colon U \to X$ 是仿射 ***pro-étale*** 的，且若 $j_Y\colon V = U \times_X Y \to Y$ 是其沿 f 的基变换，则有

$$f^*(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \simeq (j_Y)_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}.$$

因此，若令 $L^{\blacksquare}$ 为复合

$$\mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{(-)^{\blacksquare}} \mathrm{Sh}^{\blacksquare}(X_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \xhookrightarrow{i} \mathrm{Sh}(X_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}),$$

那么自然变换

$$L^{\blacksquare} \circ f^* \to f^* \circ L^{\blacksquare}$$

是一个等价。

证明。根据定理 1.2.8，包含映射 $\mathrm{Sh}^{\blacksquare}(Y_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \subset \mathrm{Sh}(Y_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 保持余极限；在 X 上也同样如此。利用 $\mathrm{Sh}^{\blacksquare}(X_{\text{proét}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 是由 $j\colon U \to X$ 仿射原 étale 的 $j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$ 在余极限下生成这一事实，要证明 f^* 保持固化层，只需验证每个 $f^*(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 都是固体。因此，引理的第一部分由第二部分推出。

由函子 f^* 与极限的交换性（引理 1.1.7）、étale 基变换以及注 1.2.10 可得 $f^*(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \simeq (j_Y)_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$：我们已经证明了第二部分。

现在，既然我们刚刚证明了 f^* 保持固化层，因此存在一个自然变换 $\mathrm{Ex}^{\blacksquare}_{*}\colon L^{\blacksquare}\circ f^* \to f^*\circ L^{\blacksquare}$。如上所述，函子 i保持余极限，因此函子 $L^{\blacksquare}$ 也与余极限交换。这意味着只需检验$\mathrm{Ex}^{\blacksquare}_{*}$在 $j_\sharp\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$的 $j\colon U\to X$仿射原 étale（回顾 1.2.1）处取值时是一个等价。这由已经证明的第二部分以及定理 1.2.8的第一点即可得出。

□

推论 1.2.12。 设 $f\colon X\to Y$是拟紧拟分离概形的一个满射态射，并设 F 是pro-étale 层 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-模上的层，定义在 X上，且 f^*F是固体的，那么 F也是固体的。

证明。 由 引理 1.1.7 映射 $F\to L^{\blacksquare}F$ 经 f^*映为同构，因此是等价，因为 f^* 根据 引理 1.1.6是保守的。 □

备注 1.2.13。 从固化层的定义显然可知，对于 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-模，作为 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-模是固体的，与作为 $\mathbb{Z}$-模是固体的是同一回事。事实上，我们可以按照上述相同的方式，为R-模定义 $\mathbb{Z}$ 的任意商 R 。上述所有结果在该情形下仍然成立（特别地，它们对 $R=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$成立）。

上述注记引出了以下定义：

定义 1.2.14. 设 Λ 是一个固体 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-代数， X 是一个概形。我们将 X 上系数为 Λ 的固体概形的导出范畴定义为

$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}:=\mathrm{Mod}_{\Lambda}(\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}).$$

1.3 导出范畴

沿用上一节中的 X 和 $\mathcal{P}$。回顾定理 定理 1.2.8 的第 5 条：复形 K属于 $\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$，当且仅当对于每个 $j\colon U\to X$属于 $\mathbf{Pro}(X^{\mathrm{aff}}_{/},{}^{\mathrm{fp}}{}_{\mathrm{et}})$，自然映射

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(j_\sharp^{\blacksquare}\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},K)\to j_*j^*K$$

是一个等价。

命题 1.3.1. 我们有如下结论：

1. 包含映射
$$\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}\subseteq\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$$
具有左伴随（–）$^{\blacksquare}$。

2. D（X， $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$）$^{\blacksquare}$可识别为固化层范畴中 $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$-模的导出范畴，而（–）$^{\blacksquare}$则与固化的导出函子相同。

3. $K\mapsto K^{\blacksquare}$ 的核是一个张量理想。特别地，在D（X， $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$）$^{\blacksquare}$上存在唯一的对称幺半结构 $\otimes^{\blacksquare}$，使得函子（–）$^{\blacksquare}$成为对称幺半函子。它是固化层的阿贝尔范畴上所诱导的对称幺半结构的左导出函子。该对称幺半结构在每个变量上都与小余极限和拉回相交换。

4. 上述对称幺半结构是闭的，其内部Hom 由$\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$上的内部 *Hom* 诱导而来。

5. $\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$上的 *t*-结构与余极限相容，左完备且右完备。因此，包含映射$\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}\subseteq \mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$与余极限相容。

证明。由定理 1.2.8 5 和注 1.2.10，我们可以将 [CS21, 引理 5.9] 应用于我们的 ^ ^情形（其中 Sh($X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$) 的紧生成元是 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}[W]$，对应于具有 W w-可缩性的 pro-étale 仿射映射 $W\to X$），由此得到前两点。第三点的证明与 [CS21, 定理 6.2] 的证明相同。第四点相当于证明 Hom 将成对的 FS-固对象映为 FS-固对象；这由伴随性可得。最后一点中与余极限的相容性以及右完备性，由第二点和 [Lura, 注 C.5.4.11]，中关于导出范畴的一般理论可得。左 ^完备性则源于以下事实：包含到 D($X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$) 中的映射是 t-正合的且与极限相容，并且后者具有左完备的 t-结构；这由 [BS15, 命题 3.3.3、命题 4.2.8 和命题 3.2.3] 得到。

□

^本节余下部分中，我们固定一个固体 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-代数 Λ。

推论 1.3.2. 我们有如下结论：

1. 包含映射
$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}\subseteq \mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda)$$
存在左伴随 $(-)^{\blacksquare}$，且与余极限交换。

2. 对于 $\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda)$ 中的 K，其构造与拟紧拟分离概形的任意基变换交换。

3. $K\mapsto K^{\blacksquare}$ 的核是一个张量理想。特别地，$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}$ 上存在唯一的对称幺半结构 $\otimes^{\blacksquare}$，使函子 $(-)^{\blacksquare}$ 成为对称幺半函子。此对称幺半结构在每个变量上都与小余极限及拉回交换，且是闭的，其内部 Hom 由$\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda)$上的内部 *Hom* 诱导。

证明。 我们首先注意到，根据 [Lur22，定理 4.8.4，6] 我们有
$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}\simeq \mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}\otimes_{\mathrm{D}(*_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}\mathrm{D}(*_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda). \tag{2}$$
对于 $\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\ \Lambda)$，情况同样如此。因此，我们可以使用 [Ram24，推论 1，46] 得出函子
$$(-)^{\blacksquare}\otimes\Lambda\colon \mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda)\to \mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}$$
是一个局部化函子，并且存在一个规范的包含映射
$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}\subseteq \mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda).$$
后一个包含映射与余极限的交换性，源于右伴随构成的交换方块中的这一事实
$$\begin{array}{ccc}\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare} & \longrightarrow & \mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} & \longrightarrow & \mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})\end{array}$$

垂直函子是保守的，并且根据 [Lur22，推论 4.2.3.5 和推论 4.2.3.2], 底部水平映射与余极限相容，这是因为命题 1.3.1。第二点和第三点是公式2的直接应用。

□

下面的引理广为人知，可以从 Martini-Wolf 关于内部范畴论的工作中拼合得出。

引理 1.3.3. 设$(\mathfrak{X}, \mathscr{O})$ 是一个环化的 ∞-拓扑斯。存在一个函子

$$\mathrm{Mod}_{\mathscr{O}}\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$$

它将 $U \in \mathfrak{X}^{\mathrm{op}}$ 映至模$^{\mathscr{O}_{|U}}$(层范畴$(\mathfrak{X}_{/U}, \mathrm{Sp})$)，并将 $\mathfrak{X}^{\mathrm{op}}$ 中的一个映射映至限制函子。

证明。首先，由 [MW22，命题 2.6.3.7], 可知，函子 $U \mapsto \mathfrak{X}_{/U}$ 可赋予在拓扑斯 $\mathfrak{X}$内部的初始可呈范畴结构，记为 $\Omega^{\otimes}$。对象 $\mathscr{O} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Shv}(\mathfrak{X}, \mathrm{Sp}))$（参见[MW22，定义 2.5.2.1]之后的段落）定义了一个交换 $\mathfrak{X}$-谱（[MW22，定义 2.5.3.13], 这是 $\mathfrak{X}$-范畴 $\mathrm{Sp}(\Omega)$中的一个交换环对象）。特别地，我们可以取内部于 $\mathfrak{X}$ 的模；根据 [MW22，命题 2.5.3.8], ， $\mathfrak{X}$-范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathscr{O}}(\mathrm{Sp}(\Omega))$是一个可呈的对称幺半 $\mathfrak{X}$-范畴。展开定义后，便得到一个函子

$$\mathfrak{X}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$$

发送 U到 $\mathrm{Mod}^{\mathscr{O}_{|U}}(\mathrm{Sh}(\mathfrak{X}_{/U}, \mathrm{Sp}))$，这正是我们所需要的。与遗忘函子复合到$\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$ 之后即可检验极限的保持性，在那里我们可以使用 [Lura，备注 2.1.0。5]。

□

引理 1.3.4。 设 $f\colon Y \to X$ 是拟紧拟分离概形之间的映射。

1. 函子 $f^*\colon \mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}}, \Lambda) \to \mathrm{D}(Y_{\mathrm{proét}}, \Lambda)$ 的限制到 $\mathrm{D}(X, \Lambda)^{\blacksquare}$ 后落在$\mathrm{D}(X, \Lambda)^{\blacksquare}$中。当 f 变化时，这些函子合起来给出一个函子

$$\mathrm{D}(-, \Lambda)^{\blacksquare}\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}).$$

2. 函子 $f_*\colon \mathrm{D}(Y_{\mathrm{proét}}, \Lambda) \to \mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}}, \Lambda)$ 的限制到 $\mathrm{D}(Y, \Lambda)^{\blacksquare}$ 后落在$\mathrm{D}(Y, \Lambda)^{\blacksquare}$中。特别地，这表明 *1.* 中函子 f^* 的右伴随 $f_*^{\blacksquare}$就是 f_*。

3. 如果 f是弱 *étale* 的，那么存在一个函子 $f_{\sharp}^{\blacksquare}\colon \mathrm{D}(Y, \Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}(X, \Lambda)^{\blacksquare}$，它是 f^* 的左伴随。

此外，如果 F是 f^*或 $f_{\sharp}$，而 $F^{\blacksquare}$是其固体对应物，则自然变换 $(-)^{\blacksquare} \circ F \to F^{\blacksquare} \circ (-)^{\blacksquare}$ 是一个等价。

证明。 我们首先证明第一点。显然， f^* 限制为固体$\widehat{}$范畴之间的函子命题 1.2.11 在 $\Lambda = \mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$的情形下 Λ直接给出。对于一般的 Λ，注意交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}(Y, \Lambda)^{\blacksquare} & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{D}(Y, \Lambda)^{\blacksquare} \\ {\scriptstyle -\otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}}\Lambda}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle -\otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}}\Lambda} \\ \mathrm{D}(Y, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{D}(Y, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} \end{array}$$

在竖直方向上是右伴随可交换的。这立即由公式 $\mathrm{D}(X,\ \Lambda)^{\blacksquare}\ \simeq \mathrm{D}(X,\ \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} \otimes_{\mathrm{D}(*,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}} \mathrm{D}(*,\ \Lambda)^{\blacksquare}$ 以及相对张量积的双函子性推出，因为遗忘函子 $\mathrm{D}(Y,\ \Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}(Y,\ \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 是 $\mathrm{D}(*,\ \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$-线性的，并且保持余极限。因此，一般情形 Λ 成立，这是因为遗忘函子是保守的并保持极限。

高度相容的函子 $\mathrm{D}(-,\Lambda)^{\blacksquare}$ 的构造如下：由引理 1.3.3，我们对 $X \mapsto \mathrm{Sh}((\mathrm{Sch}/X)_{\text{pro\'et}}, \mathrm{Sp})$ 有这样的函子。注意，对于每个概形 X，函子 $\mathrm{Sh}(X_{\text{pro\'et}}, \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Sh}((\mathrm{Sch}/X)_{\text{pro\'et}}, \mathrm{Sp})$ 是全忠实的，并且与张量积和拉回相容。因此，由 [MW22、命题 2.5.1.13 以及命题 2.5.2.8], ，我们在概形上得到函子 $\mathrm{D}((-)_{\text{pro\'et}}, \Lambda)$，其值位于 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$ 中。现在可以应用 [Lur22、命题 2.2.1.9] ，从而得到取值于 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$ 的函子 $\mathrm{D}(-,\Lambda)^{\blacksquare}$ ，以及它与固化函子的相容性。

由于函子 f^* 保固化层，$f_\sharp^{\blacksquare}$对弱 étale 映射的存在性以及它与固化的相容性便是形式上的。现在我们证明 f_* 保固对象。为此，注意到

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们可以假设 $\Lambda = \mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$，因为 f_* 是由函子 f_* 诱导的，其系数为 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$。令 $K \in \mathrm{D}(Y, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$。利用左完备性（命题 1.3.1 5.）以及固复形到所有复形的包含函子是 t-正合且与极限交换这一事实，我们可以假设 K 有下界。接下来，通过谱序列论证，我们可以假设 K 集中在 0 次。在这种情况下，利用 f_* 保持一致有下界复形的余极限（[HRS23，引理 5.3]），固化层上的 t-结构与余极限相容，以及固化层的阿贝尔范畴在 pro-étale 层的阿贝尔范畴中对余极限封闭，我们可以假设 K 在 $\mathrm{Sh}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$中是紧对象。在这种情况下， K 是挠 étale 层的一个余滤极限，因此我们可以假设 K 是一个可构造挠 étale 层。由 [BS15，引理 5.4.3] ，我们得出结论：因为 f_*K的上同调层是挠 étale 层，而根据推论 1.2.9，它们是固体的。 □

引理 1.3.5. 设 $f\colon X \to Y$是一个概形态射。则函子 $f^*\colon \mathrm{D}(Y,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}$ 与所有极限交换。

证明. 根据 引理 1.3.4 的第一点，我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}(Y_{\text{pro\'et}}, \Lambda) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{D}(X_{\text{pro\'et}}, \Lambda) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{D}(Y, \Lambda)^{\blacksquare} & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{D}(X, \Lambda)^{\blacksquare} \end{array}$$

其中，上方的水平函子根据引理 1.1.7 保极限，而垂直函子是全忠实的，并且由于它们是右伴随函子，故保极限。因此，下方的水平函子也保极限。 □

命题 1.3.6. 考虑一个概形的笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y' & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}.$$

函子的典范映射 $f^*p_* \to q_*g^* \mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}(Y,\Lambda)^{\blacksquare}$ 在以下任一情形下是一个等价：

1. 该态射 p 是真态射。*2.* 态射 f 是光滑的，且 P 中的所有素数在 Y 上都是可逆的。

证明。由于遗忘函子 $\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 是保守的，并且与所有 f^* 和 p_*'交换 $\widehat{\ }$，我们可以假设 $\Lambda = \mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$。在这种情况下，由于根据引理 1.3.5，所涉及的所有函子都与极限交换，且根据命题 1.3.1 的最后一点，固复形上的 t-结构是左完备的，因此我们可以将某些 $K \in \mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 替换为其截断 $\tau_{\leq n}K$，从而假设 K 有下界。由于 p_*、q_* 与一致有下界复形的滤过余极限交换（[HRS23，引理 5.3]），我们可以通过写成 $\mathrm{colim}_n \tau_{\geq n}K \simeq K$ 将情形约化到 K 有界的情况。若 K 有界，我们可以进行 dévissage，从而假设 K 集中在 0 次。再次利用与滤过余极限的交换性，定理 1.2.8 允许我们将情形约化到 K 是一个挠可构造 étale 层的情况；此时断言由 étale 上同调中的通常真/光滑基变换推出，这一结果见 [sga72，《Théorème 5.1] 》以及 [Aut18，标签 0EYU]。 □

注 1.3.7. 作为引理 1.3.5 的推论，函子 $f^*\colon \mathrm{D}(Y,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}$ 具有一个左伴随 $f_\sharp^{\blacksquare}$，我们可以将其视为相对固体 Λ-同调。注意，根据引理 1.1.7，对于非固范畴，该左伴随同样存在。然而，非固版本的性质并不理想。例如，即使使用与特征互素的挠系数，它也不会是同伦不变的，参见 [HHL+25，§7.1]。然而，根据推论 3.2.5 的证明，相对固体 Λ-同调是 $\mathbb{A}^1$-不变的。此外，命题 1.3.6 表明，对于光滑 f，它与基变换相容。

为后续使用，我们还补充如下简单观察：

引理 1.3.8。 假设 $\mathcal{P}$ 中的所有素数在 X 上都是可逆的，则层 $\mu_{\infty,\mathcal{P}} := \lim_{n\in\Pi\mathcal{P}} \mu_n$ 在 $\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 中是可逆的（记号见 引理 *1.2.6* 中的 $\Pi\mathcal{P}$）。

证明。 由于 $\mathcal{P}$ 中的所有素数在 X 上都是可逆的，概形映射 $\lim_{n\in\Pi\mathcal{P}} \mu_n \to X$ 是一个 pro-étale 覆盖。因此，我们可以假设，对于每个由$\mathcal{P}$中的素数组成的 n，都存在一个本原的 n次单位根。选取这样一组相容系统的单位根，便定义了一个同构 $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\simeq} \mu_{\infty,\mathcal{P}}$，从而证明了该断言。 □

我们以与通常的 ℓ-进层及挠 étale 层复形的比较来结束本节。

命题 1.3.9。 设 X 是一个拟紧拟分离概形，并假设 $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。那么函子

$$\mathrm{D}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}(X_{\text{proét}},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

取值于 $\mathrm{D}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\blacksquare}$，并给出一个对称幺半函子

$$\mathrm{D}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\blacksquare}.$$

此外，后者诱导出一个全忠实函子

$$\mathrm{D}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\mathrm{t}\wedge} \to \mathrm{D}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\blacksquare},$$

其中 $\mathrm{D}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\mathrm{t}\wedge}$ 是$\mathrm{D}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$的左完备化。

证明。为了证明该命题的前两部分，由于是否为固体可以通过上同调对象来检验，且函子 $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 是 t-正合的，只需证明若 $F \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$，则 $\nu^*(F)$ 是固体。这就是推论 1.2.9。该命题的最后一部分由以下事实推出：$\mathrm{D}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$■ 上的 t-结构是左完备的，并且经过左完备化后，$\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 由 [BS15, 命题 5.3.2] 可知是全忠实的。 □

回顾以下定义：

定义 1.3.10（Hemo-Richarz-Scholbach）。设 X 是一个拟紧拟分离概形。若存在 X 的一个由拟紧局部闭子概形构成的有限分层，使得复形 $K \in \mathrm{D}(X_{\text{proét}}, \Lambda)$ 在每个分层上都是可对偶的，则称其为可构造复形。记 $\mathrm{D}_{\text{cons}}(X, \Lambda)$ 为这类 K的子范畴。

另请回顾，根据 [HRS23，定理 7。7],存在一个典范等价

$$\mathrm{D}_{\text{cons}}(X, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathrm{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_\ell)$$

与 ℓ-进可构造复形的经典范畴等价，而对于$\mathbb{Q}_\ell$系数也同样成立。

命题 1.3.11。设 X是一个拟紧拟分离概形。设 $K \in \mathrm{D}_{\text{cons}}(X, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$。则 K是固体的：有 $K \in \mathrm{D}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$■。

证明。若 K 是可对偶的，则函子 $- \otimes K$ 与极限交换，因此利用 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}} = \widehat{\ } \quad \widehat{\ } \lim_n \mathbb{Z}_{\mathcal{P}}/n\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$，可知 $K \simeq \lim_n K/n$，再根据 [HRS23，命题 7。1]可得，每个 K/n 都是挠 étale 层的有界复形。

在一般情形下， K 在某种分层的各个分层上可对偶于 X。取所有分层的不交并，得到一个满射 g： $Y \to X$ 使得 g^*K 可对偶，因此是固体。由推论 1.2.12即可得出结论。 □

推论 1.3.12。设 X 是一个拟紧拟分离概形。那么，$\mathrm{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell) \subset \mathrm{D}(X_{\text{proét}}, \mathbb{Q}_\ell)$中的每个对象都属于全子范畴$\mathrm{D}(X, \mathbb{Q}_\ell)$■。

证明。给定 $K \in \mathrm{D}_{\text{cons}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$，存在 $L \in \mathrm{D}_{\text{cons}}(X, \mathbb{Z}_\ell)$ 使得 $L \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l \simeq K$，根据[HS23，推论 2。4]。因此该断言由命题 1.3.11得证。 □

1.4 通过凝聚范畴论研究固化层

现在，我们介绍另一种利用凝聚 ∞-范畴的机制，将对象限制到固对象子范畴的方法。凝聚 ∞-范畴可以视为内化于 ∞-拓扑斯 ∞-中的范畴$\mathrm{Cond}(\mathrm{Ani})$ ，即凝聚 anima 的拓扑斯。关于任意 ∞-拓扑斯内化的 ∞-范畴的一般理论，已在 [Mar21、MW24、MW22]中建立。我们在此回顾一些基本思想。

定义 1.4.1. 一个凝聚 ∞-范畴$\mathcal{C}$ 是位点 ProFin 上取值于 ∞-范畴的超层，其中 ProFin 是副有限集的位点$\mathcal{C}$: ProFin $\to \mathrm{Cat}_\infty$。凝聚 ∞-范畴之间的函子就是一个自然变换。类似地，对称幺半凝聚 ∞-范畴就是一个取值于 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 的副有限集上的超层。

若$\mathcal{C}$ 是一个凝聚范畴，且 s: $S \to T$ 是一个副有限集之间的映射，我们常将相应的过渡函子 $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(S)$记作 s^*。

以下是本文中用到的主要例子：

例1.4.2. 1. 余域纤维化的反直化，并沿 $\mathrm{ProFin}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cond(Ani)}^{\mathrm{op}}$ 限制，得到一个函子

$$\mathrm{ProFin}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_\infty; \quad S \mapsto \mathrm{Cond}(\mathrm{Ani})_{/S}.$$

我们将这个凝聚 ∞-范畴记为$\mathrm{Cond}(\mathrm{Ani})$。它在凝聚范畴论中的作用，类似于通常 ∞-范畴论中Ani 的 ∞-范畴的作用。在每个 S上取笛卡尔幺半结构后，$\mathrm{Cond}(\mathrm{Ani})$ 可规范地精化为一个对称幺半凝聚范畴，参见 [MW22，注记 2.6.2。7]。

2. 对任意可呈示的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，上述例子有一个系数取自$\mathcal{C}$ 的版本，定义如下：

$$\mathrm{ProFin}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_\infty; \quad S \mapsto \mathrm{Cond}(S, \mathcal{C}) = \mathrm{Cond}(\mathrm{Ani})_{/S} \otimes \mathcal{C},$$

其中 $\otimes$ 表示 Lurie 张量积。我们将这个凝聚 ∞-范畴记为 $\mathrm{Cond}(\mathcal{C})$。此外，若$\mathcal{C} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$，则 $\mathrm{Cond}(\mathcal{C})$ 可规范地精化为一个对称幺半凝聚 ∞-范畴。

3. 设 Λ 是一个凝聚 E_∞-环，即 $\mathrm{Cond(Sp)}$ 中的一个交换代数对象。对于任意 profinite 集 S，我们仍用 Λ 表示 Λ 到 $\mathrm{Cond}(S, \mathrm{Sp})$ 的基变换。于是存在一个对称幺半凝聚范畴，其对象为 Λ-模

$$\underline{\mathrm{Mod}}_\Lambda \colon \mathrm{ProFin}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty); \quad S \mapsto \mathrm{Mod}_\Lambda(\mathrm{Cond}(S, \mathrm{Sp})),$$

参见引理 1.3.3。

4. 若 Λ 如前所述是一个固体 $\mathbb{Z}_p$-代数，我们也得到一个固体 Λ-模的对称幺半凝聚范畴

$$\underline{\mathrm{Solid}}_\Lambda \colon \mathrm{ProFin}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty); \quad S \mapsto \mathrm{D}(S, \Lambda)^{\blacksquare}.$$

5. 设 X 为一个拟紧拟分离概形，我们有一个凝聚范畴

$$\underline{\mathrm{Sh}}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) \colon \mathrm{ProFin}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty); \quad S \mapsto \mathrm{Sh}((X \times S)_{\mathrm{pro\acute{e}t}}).$$

如前所述，我们也有一个谱版本 $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \underline{\mathrm{Sp}})$，对于任意凝聚环谱 Λ，我们有一个 Λ-线性版本 $\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \Lambda)$：$S \mapsto \mathrm{Mod}_\Lambda(\mathrm{Sh}((X \times S)^{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \mathrm{Sp}))$。

事实证明，上述所有凝聚范畴的例子都具有一些特殊性质。也就是说，按照以下意义，它们是可呈示的。

定义 1.4.3 ([MW22，§2。4])。一个凝聚 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 称为可呈示的，如果满足以下两个条件：

1. 层 $\mathcal{C}$：$\mathrm{ProFin}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 通过子范畴 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}} \subseteq \mathrm{Cat}_\infty$（非满子范畴）分解。

2. 对任意 $s\colon S \to T$，函子 $s^*\colon \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(S)$ 的左伴随 $s_!$ 满足：对于任意其他映射 $\alpha\colon T' \to T$，交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(T) & \xrightarrow{s^*} & \mathcal{C}(S) \\ {\scriptstyle \alpha^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha \times_T S)^*} \\ \mathcal{C}(T') & \xrightarrow[(s\times_T T')^*]{} & \mathcal{C}(S \times_T T') \end{array}$$

是水平左伴随可交换的。

备注 1.4.4. 很容易验证，例 1.4.2中出现的所有例子确实都是可呈示的。

凝聚 ∞-范畴的范畴是笛卡尔闭的 [Mar21，命题 3.2。11]。对于两个凝聚 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 我们将内 Hom 记作

$$\underline{\mathrm{Fun}}^{\mathrm{cond}}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Cat}_\infty)$$

并称之为从$\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$的凝聚函子范畴。取整体截面后，我们得到一个 ∞-范畴

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{cond}}(\mathcal{C},\mathcal{D}) = \underline{\mathrm{Fun}}^{\mathrm{cond}}(\mathcal{C},\mathcal{D})(*)$$

我们称其为从 ∞到$\mathcal{C}$ 的$\mathcal{D}$凝聚函子（$\mathbf{Cond(Cat}_\infty\mathbf{)}$），它自然地富化于 Cat_∞，因此定义了一个 $(\infty,2)$-范畴（见 [Mar21，备注 3.4。3]）。我们将凝聚范畴之间的伴随简单地定义为$(\infty,2)$-范畴 $\mathrm{Cond}(\mathrm{Cat}_\infty)$ [MW24，定义 3.1。1]。凝聚范畴之间的伴随函子还有如下非常明确的描述：

命题 1.4.5 ([Mar21，命题 3.2。9])。设 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是凝聚范畴之间的一个函子。那么 f 存在左伴随（分别地，是左伴随），当且仅当对任意 $S \in \mathrm{ProFin}$，函子 $f(S)$ 存在左伴随（分别地，右伴随），并且对任意映射 $s\colon S \to T$，方框

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(T) & \xrightarrow{f(T)} & \mathcal{D}(T) \\ {\scriptstyle s^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s^*} \\ \mathcal{C}(S) & \xrightarrow[f(S)]{} & \mathcal{D}(S) \end{array}$$

在水平方向上可左伴随（分别地，可右伴随）。

定义 1.4.6. 我们将由可呈示凝聚范畴及其间的左伴随函子所张成的子范畴 $\mathbf{Cond(Cat}_\infty\mathbf{)}$ 定义为可呈示凝聚范畴的 ∞-范畴 $\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$。

在点处取值定义了一个函子 $\Gamma\colon \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}} \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}$。为后文所用，我们回顾如下结果：

引理 1.4.7. 函子 $\Gamma\colon \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$ 保余极限。

证明。 参见 [MW22，命题 2.6.3 的证明。2]。 □

根据 [MW22，§2。6] 存在一种对称幺半结构 $-\otimes^{\mathrm{cond}}-$ 定义在 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$ 上，可以将其视为可呈示 ∞-范畴的 Lurie 张量积的一种凝聚变体。

定义 1.4.8。 呈现性对称幺半凝聚范畴是一个交换代数对象$\mathcal{C}\in\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}})$。

乍看起来可能有些吓人，但它有如下更明确的描述：

引理 1.4.9。 对称幺半凝聚范畴 $\mathcal{C}$ 是呈现性的对称幺半范畴，当且仅当满足以下三个条件：

1. $\mathcal{C}$ 的底层凝聚范畴是可呈示的。
2. 对任意 $S\in\mathrm{ProFin}$，张量积 $-\otimes-\colon\ \mathcal{C}(S)\times\mathcal{C}(S)\to\mathcal{C}(S)$ 在每个变量中都保持余极限。
3. 对于任意副有限集的映射 $s\colon\ S\to T$，其左伴随 $s_!\colon\ \mathcal{C}(S)\to\mathcal{C}(T)$ s^* 满足投影公式，即典范映射

$$s_!(a\otimes s^*b)\to s_!(a)\otimes b$$

对于任意 $a\in\mathcal{C}(S)$ 和 $b\in\mathcal{C}(T)$，它都是一个等价。

证明。 这可由展开定义并结合 命题 1.4.5得出，参见例如 [Cno23，定义之后的第 2 条。15]。 □

注 1.4.10。 利用上述引理，容易验证例 1.4.2中的所有例子都是可呈示对称幺半的。

注 1.4.11。 注意，对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 是笛卡尔闭的；对于两个可呈示凝聚范畴，其内 Hom 由以下凝聚子范畴给出

$$\underline{\mathrm{Fun}}^{\mathrm{cond,L}}(\mathcal{C},\mathcal{D})\subseteq\underline{\mathrm{Fun}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$$

由左伴随函子张成（这基本上可由 $-\otimes^{\mathrm{cond}}-$作为泛双线性函子的定义推出，参见 [MW22，§2。6]）。因此，对于固定的可呈示凝聚范畴 $\mathcal{T}$，我们得到一个映射

$$\underline{\mathrm{Fun}}^{\mathrm{cond,L}}(\mathcal{C},\mathcal{D})\to\underline{\mathrm{Fun}}^{\mathrm{cond,L}}(\mathcal{C}\otimes^{\mathrm{cond}}\mathcal{T},\mathcal{D}\otimes^{\mathrm{cond}}\mathcal{T})$$

即作为自然映射的转置，它关于$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 是自然的

$$\underline{\mathrm{Fun}}^{\mathrm{cond,L}}(\mathcal{C},\mathcal{D})\otimes^{\mathrm{cond}}\mathcal{C}\otimes^{\mathrm{cond}}\mathcal{T}\xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{Id}}\mathcal{D}\otimes^{\mathrm{cond}}\mathcal{T}.$$

在该点处取值，由此得到一个自然的 ∞-范畴映射

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{cond,L}}(\mathcal{C},\mathcal{D})\to\mathrm{Fun}^{\mathrm{cond,L}}(\mathcal{C}\otimes^{\mathrm{cond}}\mathcal{T},\mathcal{D}\otimes^{\mathrm{cond}}\mathcal{T})$$

此外还可以验证，取极大子群胚后，该函子在映射空间上恢复了函子 $-\otimes^{\mathrm{cond}}\mathcal{T}\colon\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}\to\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$ 的作用。

更为一致地，我们可以证明 $-\otimes^{\mathrm{cond}}-$ 可提升为一个 $(\infty,2)$-函子。由于本文实际上不需要完整的一致性，因此这里不再详述。

引理 1.4.12。 设 $f: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$ 中的一个映射，且存在一个进一步的左伴随 $g: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$。那么对于任意 $\mathcal{T} \in \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$，函子 $g \otimes^{\mathrm{cond}} \mathcal{T}$ 是 $f \otimes^{\mathrm{cond}} \mathcal{T}$ 的左伴随。

证明。 这直接由 注 1.4.11 得出。 □

定义 1.4.13。 若对每个 $S \in \mathrm{ProFin}$，函子 $f(S)$ 都是全忠实的，则称凝聚范畴的函子 $f: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是全忠实的。

引理 1.4.14。 设 $f: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$ 中的一个映射。那么对于任意 $\mathcal{T} \in \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$，若 f 的右伴随 g 是全忠实的（即 f 是一个凝聚局部化），则 $f \otimes^{\mathrm{cond}} \mathcal{T}$ 的右伴随$g \otimes^{\mathrm{cond}} \mathcal{T}$ 也是如此。

证明。 由 [MW22，命题 2.6.2。11], 我们得到如下对应：

$$\mathcal{C} \otimes^{\mathrm{cond}} \mathcal{T} \simeq \underline{\mathrm{Fun}}^{\mathrm{cond,R}}(\mathcal{T}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{D} \otimes^{\mathrm{cond}} \mathcal{T} \simeq \underline{\mathrm{Fun}}^{\mathrm{cond,R}}(\mathcal{T}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$$

其中 $\underline{\mathrm{Fun}}^{\mathrm{cond,R}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{cond}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 中由 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 两个凝聚 ∞-范畴的凝聚右伴随所张成的凝聚子范畴。凝聚函子 $g \otimes^{\mathrm{cond}} \mathcal{T}$通过上述等价，等同于与 g 进行复合。结果由 [Mar21，命题 3.8。4] 得出。 □

引理 1.4.15。 设 $f: Y \to X$ 是概形之间的一个映射。则函子 $f_\sharp: \mathrm{Sh}(Y_{\mathrm{proét}}) \to \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}})$ 自然地提升为凝聚左伴随函子 $f_\sharp: \mathrm{Sh}(Y_{\mathrm{proét}}) \to \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}})$。 — —

证明。 为说明我们得到的是一个凝聚函子，需要证明：若 $g: K \to S$ 是副有限集之间的映射，则下方方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}((Y \times K)_{\mathrm{proét}}) & \xrightarrow{f_\sharp^K} & \mathrm{Sh}((X \times K)_{\mathrm{proét}}) \\ {\scriptstyle g_Y^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_X^*} \\ \mathrm{Sh}((Y \times S)_{\mathrm{proét}}) & \xrightarrow[f_\sharp^S]{} & \mathrm{Sh}((X \times S)_{\mathrm{proét}}) \end{array}$$

可交换。转向右伴随，并注意到 g_X 是整的，由整基变换（[HHL+25，命题 6。18]）可得此结论。由于上述方块在水平方向上右伴随可交换， $f_\sharp$ 确实是一个凝聚左伴随。 □

^从此处起，我们设 Λ 是一个固体 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-代数，其中 $\mathcal{P}$ 与前文相同。

定义 1.4.16 定义。 设 $\mathcal{C} \in \underline{\mathrm{Mod}}^{\mathrm{Mod}_\Lambda}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}})$，$\mathcal{C}$ 的固化是张量积的 ct

$$\mathcal{C}^\blacksquare := \mathcal{C} \otimes^{\mathrm{cond}}_{\underline{\mathrm{Mod}}_\Lambda} \underline{\mathrm{Solid}}_\Lambda.$$

现在，我们有第二种定义 solid pro-étale 层范畴的方式：也就是说，我们可以考虑上述意义下$\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}}, \Lambda)^\blacksquare$ 的$\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}}, \Lambda)$ 的固化的底层范畴。下一个命题表明，这与定义 1.2.14中的范畴一致。

命题 1.4.17。 设 X 是一个拟紧拟分离概形。则定义 *1.4.16* 不会造成符号冲突： ∞-范畴 $\mathrm{D}(X, \Lambda)^\blacksquare$ 在 定义 *1.2.14* 中与$\mathrm{D}(X_{\mathrm{proét}}, \Lambda)^\blacksquare(*)$自然等价。

—

证明。不妨假设 $\Lambda = \mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$。注意，讨论中的两个范畴都是 $\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$的反射子范畴。对于第二个范畴，这可由引理 1.4.14 结合以下观察得到：$\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \Lambda)^{\blacksquare} \simeq$层范畴$(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) \otimes^{\mathrm{cond}}$固体$_{\Lambda}$。我们有两个固化函子

$$(-)^{\blacksquare} \colon \mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \to \mathrm{D}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$$

and

$$(-)^{\blacksquare'} \colon \mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \to \underline{\mathrm{D}}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}(*).$$

我们的目标是证明这两个反射子范畴相同。首先，假设给定一个概形映射 $f\colon Y \to X$。我们断言，交换方块

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{D}}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow{f^*} & \underline{\mathrm{D}}(Y_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \\ {\scriptstyle (-)^{\blacksquare'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (-)^{\blacksquare'}} \\ \underline{\mathrm{D}}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} & \xrightarrow[f^*]{} & \underline{\mathrm{D}}(Y_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} \end{array}$$

（它交换这一事实仅仅源于 $- \otimes^{\mathrm{cond}} -$ 的双函子性）在竖直方向上右伴随可交换。这是因为，在竖直方向取右伴随后得到的方块，正是对其中的映射（水平和竖直方向）取右伴后得到的方块

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{D}}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) & \xleftarrow{f_\sharp} & \underline{\mathrm{D}}(Y_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \\ {\scriptstyle (-)^{\blacksquare'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (-)^{\blacksquare'}} \\ \underline{\mathrm{D}}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} & \xleftarrow[f_\sharp \otimes^{\mathrm{cond}} \underline{\mathrm{Solid}}_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}}]{} & \underline{\mathrm{D}}(Y_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} \end{array}$$

其中底边是将引理 1.4.15中的凝聚函子与固体$\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}$张量积得到的。由于该方块因 $- \otimes^{\mathrm{cond}} -$ 的双函子性而交换，我们便证明了这一断言。

现在，利用引理 1.1.4，取一个概形的满射态射 $f\colon E \to X$，其中 E 是零维的，且所有 $\widehat{\ }$ 局部环都是可分闭域。复形 K 属于 $\mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}(*)$，当且仅当 f^*K 属于 $\mathrm{D}(E_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}(*)$：事实上，由引理 1.1.6，$f^*$ 是保守的；将 f^* 应用于典范映射 $K \to K^{\blacksquare'}$，会得到典范映射 $f^*K \to (f^*K)^{\blacksquare'}$，这是由我们刚刚证明的伴随可交换性得出的。由推论 1.2.12，同样的结论在 $\mathrm{D}(X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 中也成立，因此我们将命题归结为 $X = E$。但在这种情况下

$$\mathrm{D}(E_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}(*) = \underline{\mathrm{Solid}}_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}}(\pi_0(E)) = \mathrm{D}(E, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$$

$\widehat{\ }$作为 $\mathrm{D}(E_{\mathrm{pro\acute{e}t}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$的满子范畴。这里，第一个等式由 [MW22，命题 2.6.211], [MW24，定理 7.11] 和引理 1.1.4得到。第二个等式根据$\mathrm{Solid}^{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}}(\pi_0(E))$的定义成立。证明完毕。□

2 pro-étale 动机。

本节中，我们构造基概形上的 pro-étale 动机谱范畴，并证明它们构成一个系数系统，从而具备完整的六函子形式体系[3]。我们的

[3]唯一需要注意的是，例外函子仅对有限表示映射定义，而不是对通常假设的任意有限型映射定义。

构造紧随 [MV99、Ayo07a、Ayo07b、CD19、Kha16、Hoy17] 中的经典内容。我们首先在第 2.1 节 中，基于弱光滑概形的概念定义所需的 pro-étale 动机谱范畴，即定义 2.1.6。在第 2.2 节中，我们研究这一构造的基本函子性，尤其考察沿闭浸入的推前，即命题 2.2.4。这是在此情形下证明局部化定理的一个要素，我们将在第 2.3 节中证明该定理。由局部化定理出发，我们可以遵循动机六函子形式体系的一般构造原则。唯一的区别在于，在我们的情形下，局部化定理仅对拟紧开浸入成立。在第 2.4 节和第 2.5 节中，我们验证了即使在这种情况下，构造动机六函子形式体系的关键步骤仍然可行，前提是只构造有限表示态射的例外运算。最后，在第 2.6 节中，我们证明，在适当的上同调有限性假设下，étale 动机嵌入 pro-étale 动机。

2.1 基本定义和性质

定义 2.1.1。 设 X 为一个概形。我们定义上的大 *pro-étale* 位点 S-概形$\mathrm{Sch}_X^{\mathrm{proét}}$ 为所有在 X上的概形所成的范畴，并赋予其由在 fpqc 拓扑中构成覆盖的弱 étale 态射族生成的 Grothendieck 拓扑。特别地，我们可以考虑该位点上的 anima 的超完备层所成的大 *pro-étale* ∞-拓扑斯。我们将这个 ∞-范畴记为 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{proét}}(X)$。

定义 2.1.2。设 X 为一个概形。

1. 我们定义 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathrm{proét}}(X)$ 为由 $\mathbb{A}^1$-不变层所张成的 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{proét}}(X)$ 的反射子范畴。我们将 $L_{\mathbb{A}^1}$ 记为局部化函子。
2. We 我们定义 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\mathrm{proét},\bullet}(X)$ 为 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathrm{proét}}(X$ 中带基点对象所成的范畴).
3. 我们将 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathrm{S}^1}{}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X)$ 定义为 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\mathrm{proét},\bullet}(X)$ 的稳定化。存在一个无限悬挂函子

$$\Sigma^\infty\colon L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\mathrm{proét},\bullet}(X) \to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathrm{S}^1}_{\mathrm{proét}}(X).$$

通过复合左伴随，我们得到一个动机局部化函子

$$L_{\mathrm{mot}}\colon \mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X) \to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\mathrm{proét}}(X)$$

按照 Morel 和 Voevodsky 的思路，可以对其作更明确的描述。为此，回忆代数 n-单纯形

$$\Delta^n_X \coloneqq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t_0,\dots,t_n]/(\sum_{i=0}^n t_i - 1)) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} X$$

在 X 上。当 n 变化时，它们拼成一个单纯 X-概形

$$\Delta^\bullet_X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sch}_X.$$

对于 Sch_X 上的任意预层 F，我们定义

$$\mathrm{Sing}(F) = \mathrm{colim}_{n\in\Delta} F(- \times \Delta^n_X).$$

这组装成一个函子 $\mathrm{Sing}:\mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X)\to\mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X)$。我们将 $\mathrm{PSh}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sch}_X)$ 记作由 $\mathbb{A}^1$-不变预层构成的全子范畴。于是，与[AE17，定理 425] 中的论证相同，可得：

引理 2.1.3. 设 X 是一个概形。函子 $\mathrm{Sing}(-)$ 的值落在全子范畴$\mathrm{PSh}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sch}_X)$ 中，并且它是包含函子的左伴随。

命题 2.1.4. 设 X 是一个概形。动机局部化函子 $L_{\mathrm{mot}}:\mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X)\to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\text{proét}}(X)$ 与有限积可交换。

证明. 我们选取一个正则基数 κ，使得包含映射 $\mathrm{Sh}^{\text{proét}}(X)\to\mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X)$ 与 κ-滤过余极限可交换。注意，我们有一个自函子

$$\mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X)\xrightarrow{L_{\mathbb{A}^1}\circ L_{\text{proét}}}\mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X)$$

以及一个典范自然变换 $\mathrm{Id}\to L_{\mathbb{A}^1}\circ L_{\text{proét}}$。因此，我们可以考虑自函子 $L_M=$余极限$_{\tau<\kappa}(L_{\mathbb{A}^1}\circ L_{\text{proét}})^\tau$。那么对于任意预层 F，预层 $L_M(F)$是 κ-滤过余极限，由 $\mathbb{A}^1$-局部预层构成，因此也是 $\mathbb{A}^1$-局部的。此外，通常的余终性论证（参见 [Lur09，引理 6.3.3。4]的证明）表明，我们还有一个等价

$$L_M\simeq\mathrm{colim}_{\tau<\kappa}(L_{\text{proét}}\circ L_{\mathbb{A}^1})^\tau$$

因此，对于任意预层 F， $L_M(F)$ 也是一个原 étale 层。因此， L_M 定义了一个函子

$$\mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X)\to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\text{proét}}(X)$$

并且很容易看出，它是包含映射的左伴随，因此等价于 L_{mot}。这一显式描述证明了该断言，因为筛余极限与有限积可交换。

□

我们固定以下记号以备后用：

1. 笛卡尔积在 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\text{proét}}(X)$ 上定义了一个对称幺半结构，且根据命题 2.1.4，动机局部化函子是对称幺半的。此外，Yoneda 嵌入与动机局部化函子复合后，诱导出一个函子

$$\mathrm{Sch}_X\to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\text{proét}}(X).$$

若 $Y\in\mathrm{Sch}_X$，我们也将其在 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\text{proét}}(X)$ 中的像记为 Y。

2. 还有一个函子

$$(-)_+:L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\text{proét}}(X)\to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\text{proét},\bullet}(X)$$

自由添加一个基点；根据 [Rob15，推论 5.4]，，在 $L_{\mathbb{A}^1}$层范畴$_{\text{proét},\bullet}(X)$ 上存在唯一的对称幺半结构，使得 $(-)_+$ 提升为对称幺半函子，且该函子是从 $L_{\mathbb{A}^1}$层范畴$_{\text{proét}}(X)$ 到一个带基点范畴的泛函子。因此，我们得到一个对称幺半函子

$$\mathrm{Sch}_X\to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\text{proét},\bullet}(X)$$

将概形 X 映射到 X_+。注意，根据 [Rob15，命题 4.10]，该函子 Σ^∞也自然地提升为一个对称幺半函子，它在从 $L_{\mathbb{A}^1}$层范畴$_{\text{proét},\bullet}(X)$ 到稳定范畴的函子中具有泛性质。

3. 我们还有一个对称幺半函子

$$\mathrm{Sch}_{X,\bullet} \to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\text{proét},\bullet}(X)$$

将带基点的 X-概形 (Y,s)（其中 $s\colon X \to Y$是 $Y \to X$的一个截面）映到一个对象，我们也将其记为 (Y,s)。

定义 2.1.5. 设 X 是一个概形，且 $p,q \in \mathbb{N}$ 是满足 $p \geqslant q$的非负整数。动机球 $\mathrm{S}^{p,q} \in L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\text{proét},\bullet}(X)$ 是对象

$$\mathrm{S}^{p,q} := \Sigma^{p-q}(\mathbb{G}_m,1)^{\otimes q}$$

通过悬挂 $p-q$ 次 X概形 $\mathbb{G}_m \times X$ 并以 1为基点得到。若 $u \geqslant v$ 我们有$\mathrm{S}^{p,q} \otimes \mathrm{S}^{u,v} \simeq \mathrm{S}^{p+u,q+v}$。注意，与 [MV99 引理 2.15 和推论 2.18] 中一样，$\mathrm{S}^{2,1} \simeq (\mathbb{P}^1_X,*)$ 是以任意一点为基点的射影空间。

我们定义范畴 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathbb{P}^1}{}_{\text{pro\'et}}(X)$ 为通过将球 $\mathrm{S}^{2,1}$ 按 [Rob15 定义 4.8] 的意义进行 $\otimes$-求逆而得到的稳定可呈示幺半范畴。由于 $\mathrm{S}^{1,0} \underset{\sim}{} \mathrm{S}^1 \otimes \mathbb{1}_{L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\text{proét},\bullet}(X)}$ 被求逆，我们得到一个稳定的 ∞-范畴。我们将 $\mathrm{S}^{p,q}$ 在此范畴中的像记作 $\mathbb{S}(q)[p]$ 。我们记

$$\mathcal{F}(n) \simeq \mathcal{F} \otimes \mathbb{S}(1)^n$$

对于任意 $\mathcal{F} \in L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathbb{P}^1}{}_{\text{pro\'et}}(X)$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。最后我们记

$$\mathbb{S}[-]\colon \mathrm{Sch}_X \to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\text{proét},\bullet}(X) \to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathbb{P}^1}_{\text{proét}}(X)$$

这个显然的函子。

现在我们定义 pro-étale 情形下光滑 étale 位点的类似物 .

定义 2.1.6。 我们称映射 $f\colon Y \to X$ 概形的映射为弱光滑的，如果它可以写成有限个弱 étale 映射和光滑映射的复合。

引理 2.1.7。 设 $f\colon Y \to X$ 是一个弱光滑映射。那么在 Y 上 *Zariski* 局部地，我们可以将 f 写成一个复合

$$Y \to \mathbb{A}^n_X \to X$$

其中 $Y \to \mathbb{A}^n_X$ 是弱 *étale* 的， $\mathbb{A}^n_X \to X$ 是典范投影。

证明。 假设 f 是一个复合

$$Y = X_{N+1} \xrightarrow{f_N} X_N \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{f_0} X_0 = X$$

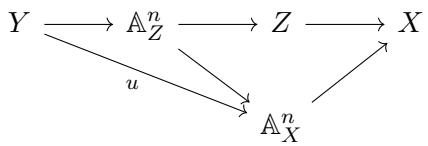
其中每个 f_i 要么是弱 étale，要么是光滑。我们对 N进行归纳法来证明该命题。若$N=0$，则我们考察的是单个态射；若它是弱 étale，结论即得；若它是光滑的，则结论由光滑态射的结构定理（[Aut18，定理 039Q]）得出。

令 $N \geqslant 1$，并假设任何可按上述方式写成由 $N-1$ 个映射构成的 f 态射，在源空间上 Zariski 局部都具有引理所述的形式。令 $f\colon Y \to X$，它可写成由上述 N 个映射复合而成。因此我们可以写成 $f = f_0 \circ g$，其中

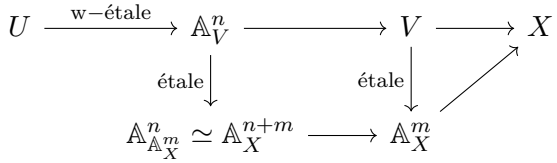
g: $Y \to Z$，由至多 $N-1$ 个上述映射复合而成。根据归纳假设，在 Y 上局部地，映射 g 具有 $Y \to \mathbb{A}^n_Z \to Z$ 的形式。将 Y 替换为其某个 Zariski 开集后，我们可以假设处于如下情形

$$Y \to \mathbb{A}^n_Z \to Z \xrightarrow{f_0} X$$

其中 $Y \to \mathbb{A}^n_Z$ 弱 étale。分两种情况。如果 f_0 是弱 étale 的，那么有一个交换图



其中 u 是弱 étale 的，因为它是一个弱 étale 映射与一个弱 étale 映射的 $\mathbb{A}^n$ 积的复合，因此结论成立。如果 f_0 是光滑的，那么在 Z 上局部地，它具有$Z \to \mathbb{A}^m_X \to X$ 的形式，其中 $Z \to \mathbb{A}^m_X$ 是 étale 的。设 V 是 Z 的一个开子集，在其上 f_0 具有此性质，并设 U 是它在 Y上的逆像。我们有一个交换图



这证明我们可以将 $U \to X$ 写成

$$U \to \mathbb{A}^{n+m}_X \to X$$

其中 $U \to \mathbb{A}^{n+m}_X$是弱 étale 的。证明至此完成。 □

定义 2.1.8. 设 X 是一个概形。

1. 我们将 X 的 ***pro-étale*** 非稳定（分别为非稳定带基点）动机同伦范畴$\mathrm{H}^{\mathrm{proét}}(X)$（分别为 $\mathrm{H}_{\mathrm{proét},\bullet}(X)$）定义为 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathrm{proét}}(X)$（分别为 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\mathrm{proét},\bullet}(X)$）中在小余极限下封闭且包含所有形如 U （分别为 U_+）的对象的最小全子范畴，其中 U是任意弱光滑的 X-概形。

2. [1]的 S-稳定 pro-étale 动机同伦范畴是 X 的最小稳定全子范畴 $\mathrm{SH}^{\mathrm{S}^1}{}_{\mathrm{pro\acute{}et}}(X)$，它是 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathrm{S}^1}{}_{\mathrm{pro\acute{}et}}(X)$ 的全子范畴，对小余极限封闭，并包含任意弱光滑 X-概形 U所对应的所有形如 $\Sigma^\infty U_+$ 的对象。

3. X 的稳定 pro-étale 动机同伦范畴是最小的稳定全子范畴 $\mathrm{SH}^{\mathrm{proét}}(X)$，它是 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathbb{P}^1}{}_{\mathrm{pro\acute{}et}}(X)$ 的全子范畴，对小余极限封闭，并包含任意弱光滑 X-概形 U 及 $n \in \mathbb{Z}$所对应的所有形如 $\mathbb{S}[U](n)$的对象。

注记 2.1.9。 设 X 是一个概形。不难看出，$\mathrm{H}_{\mathrm{proét},\bullet}(X)$ 与 $\mathrm{H}^{\mathrm{proét}}(X)$ 中带基点对象构成的范畴自然等价。同理，范畴 $\mathrm{SH}^{\mathrm{proét}}(X)$ 由 $\mathrm{H}_{\mathrm{proét},\bullet}(X)$ 经 $(\mathbb{P}^1,\infty)$-稳定化得到。我们记

$$\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}\colon \mathrm{H}_{\mathrm{proét},\bullet}(X) \to \mathrm{SH}_{\mathrm{proét}}(X)$$

诱导函子。

注记 2.1.10。 设 X 是一个概形。pro-étale 拓扑在 WSm_X 上诱导出一个拓扑。因此，映射 $\mathrm{WSm}_X \to \mathrm{Sch}_X$ 诱导出一个映射

$$L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\mathrm{proét}}(\mathrm{WSm}_X) \to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\mathrm{proét}}(X)$$

来自 $\mathbb{A}^1$-不变 pro-étale 层范畴，定义在 WSm_X 上。与 [Kha24 命题 2] 相同的证明（将 Nisnevich 拓扑替换为 pro-étale 拓扑）表明，这个函子是全忠实的，且其本质像为 $\mathrm{H}^{\mathrm{proét}}(X)$。如 [Kha24 命题 4], 所示，$\mathrm{SH}^{\mathrm{proét}}(X)$ 因而等价于 $\mathbb{P}^1$-不变对象子范畴的 $\mathbb{A}^1$ 稳定化，其中对象属于 $\mathrm{Sh}_{\mathrm{proét},\bullet}(\mathrm{WSm}_X)$。

注意，由于 定义 2.1.2 中定义的范畴上的张量积对两个变量都与余极限可交换，因此在 定义 2.1.8中定义的范畴上可诱导出一个对称幺半结构。

2.2 函子性

现在我们来讨论所有这些构造的基本函子性：

2.2.1 （基本函子性）。令 $f\colon X \to Y$ 为任意概形态射。由此诱导出一个态射 $f^*\colon \mathrm{Sh}^{\mathrm{proét}}(Y) \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{proét}}(X)$，其属于 ∞-拓扑斯。

这些函子给出一个伴随

$$f^*\colon \mathrm{SH}_{\mathrm{proét}}(Y) \leftrightarrows \mathrm{SH}_{\mathrm{proét}}(X)\colon f_*$$

其中左伴随具有典范的对称幺半结构；上述其他范畴也同样如此。

2.2.2 （附加函子性）。 对于任意概形态射 $f\colon X \to Y$，遗忘函子

$$\mathrm{Sch}_X \to \mathrm{Sch}_Y$$

给出另一个左伴随

$$f_\sharp\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{proét}}(X) \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{proét}}(Y)$$

到 f^*。函子 $f_\sharp$ 下降为一个函子

$$f_\sharp\colon L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathbb{P}^1}_{\mathrm{proét}}(X) \to L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathbb{P}^1}_{\mathrm{proét}}(Y)$$

该函子是 f^* 的左伴随。此外，对于任意 $\mathcal{F} \in L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathbb{P}^1}{}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X)$ 和 $\mathcal{G} \in L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathbb{P}^1}{}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(Y)$，单位映射 $\mathcal{F} \to f^* f_\sharp \mathcal{F}$ 诱导出一个态射

$$f_\sharp(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}) \to f_\sharp(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}.$$

这个映射是一个等价，因为它可归结为可表对象的情形，而在这种情形下结论显然。这表明函子 $f_\sharp$ 实际上是 $L_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}^{\mathbb{P}^1}{}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(Y)$-模之间的一个态射。此外，我们注意到，对于任意概形的笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{q} & X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

典范态射 $p_\sharp q^* \to g^* f_\sharp$ 是一个同构。再次可以很容易地在可表对象上验证这一点。上述讨论对非稳定范畴和带基点的非稳定范畴也同样成立。

2.2.3 （附加的光滑函子性）。 设 $f\colon X \to Y$ 是弱光滑的。则函子 $f^*\colon \mathrm{SH}^{\text{proét}}(Y) \to \mathrm{SH}^{\text{proét}}(X)$ 存在一个左伴随 $f_\sharp$，使得

1。弱光滑投影公式成立，即典范映射

$$f_\sharp(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}) \to (f_\sharp \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}$$

对任意 $\mathcal{F} \in \mathrm{SH}^{\text{proét}}(X)$ 和 $\mathcal{G} \in \mathrm{SH}^{\text{proét}}(Y)$ 都是等价。

2. 对任意笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} T \times_Y U & \xrightarrow{q} & U \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

概形的典范自然变换 $p_\sharp q^* \to g^* f_\sharp$ 是等价。

事实上，由于弱光滑映射在复合下稳定， $f_\sharp$ 是上述构造的函子的限制。这对不稳定版本和带基点的不稳定版本同样成立。

现在我们证明，在闭浸入的情形下还存在一些额外的函子性。这是迈向我们所处语境中的局部化定理的第一步。本节的首要目标是证明以下命题。

命题 2.2.4. 设 $i\colon Z \to X$ 是一个闭浸入。那么诱导函子

$$i_*\colon \mathrm{H}_{\text{proét}}(Z) \to \mathrm{H}_{\text{proét}}(X)$$

保弱可缩余极限（即以弱可缩单纯集合为指标的余极限），且诱导函子

$$i_*\colon \mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(Z) \to \mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(X)$$

保所有小余极限。

2.2.5. 为此，我们先回顾一些术语。若 $\mathcal{C}$ 是一个带有始对象 $\emptyset$ 的范畴，我们将 $\mathrm{PSh}_\emptyset(\mathcal{C})$ 记为 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ 的反射子范畴，其对象由满足 $\mathcal{F}(\emptyset) \simeq *$ 的预层 $\mathcal{F}$ 构成。

若 X 是一个概形，我们称 $\mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X)$ 中的态射 φ 为动机等价，如果 $L_{\mathrm{mot}}(\varphi)$ 是一个等价。类似地，我们称 $\mathrm{PSh}_\emptyset(\mathrm{Sch}_X)$ 中的态射为动机等价，如果将其视为 $\mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X)$ 中的映射时，它是一个动机等价。

引理 2.2.6。 函子 $i_*\colon \mathrm{PSh}_\emptyset(\text{概形}_Z) \to \mathrm{PSh}_\emptyset(\text{概形}_X)$ 保持动机等价。

证明。如 [Ayo07a, Théorème 4.5.35]所述，函子 i_* 保持 $\mathbb{A}^1$-局部等价，因此只需证明它保持 pro-étale 局部等价。设 f 是 PSh$\emptyset$(概形$_Z$) 中的 pro-étale 局部等价，即一个经过 pro-étale 超层化后变为等价的态射。注意，PSh$\emptyset$(概形$_Z$) 到 PSh(概形$_Z$) 的包含映射 $\to$ 与 $\tau_{\leq n}$交换，即 PSh$\emptyset$(概形$_Z$) 中的截断是逐点计算的。因此，i_*: PSh$\emptyset$(概形$_Z$) $\to$PSh$\emptyset$(概形$_X$) 同样与截断交换。为了证明 i_*f 是 pro-étale 局部等价，只需证明 $\tau_{\leq n}i_*f$ 经过 pro-étale 层化后变为等价。根据前面的讨论，我们可以假设 f 是 n-截断预层的映射。在这种情况下，pro-étale 层化与超层化没有区别，因此只需证明 i_* 保持那些经过 pro-étale 层化后变为等价的映射。

对此，通常的论证适用。更准确地说，断言可按 [Ayo07a, 引理 4.5.33] 得出：若对任意 $T \in$ 概形$_X$ 以及基变换 T_Z of T to Z 所得的底空间上的任意 pro-étale 覆盖 U $=\{U_i \to T_Z\}$，都存在一个覆盖 V $=\{V_j \to T\}$，使得 V 到 Z 的拉回细化 U。为此，我们可以假设 T 是仿射的，且所有 U_i 都是 T_Z 上的 pro-étale 仿射概形，依据 [BS15, 定理 2.3.4]。那么，只需取覆盖 $\{U_i \to T, T_{X\setminus Z} \to T\}$，其中我们采用 1.1.1 中的记号。 □

命题 *2.2.4* 的证明命题 *2.2.4*。第一条陈述是上述引理的形式推论，参见 [Kha16，§ 7。2]。第二条陈述现在也是形式上的，参见 [Hoy17，命题 5。1] 详情请参见。

□

我们还需要以下引理。

引理 2.2.7. 设 $i\colon Z \to X$ 是一个闭浸入。那么，

$$i^*\colon \mathrm{SH}_{\text{proét}}(X) \to \mathrm{SH}_{\text{proét}}(Z)$$

生成 $\mathrm{SH}^{\text{proét}}(Z)$ 在余极限下的范畴。对于 $\mathrm{H}^{\text{proét}}$ 和 $\mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}$，也有类似的断言。

证明。 我们可以假设 X 是仿射的。由 引理 2.1.7以及 i^* 与 $\mathbb{P}^1$-移位可交换这一事实，只需证明 $\mathbb{S}[Y]$ 属于其像，其中 $f\colon Y \to Z$ 可分解为

$$Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^n_Z \to Z$$

其中 g 是 pro-étale 的，Y是仿射的。但沿闭浸入 $\mathbb{A}^n_Z \to \mathbb{A}^n_X$ 对 g 作亨泽尔化后，将其限制到 Z 上得到 Y，因此断言成立。$\mathrm{H}^{\text{proét}}$ 和 $\mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}$ 的证明相同。 □

2.3 局部化

设 X 是一个拟紧拟分离概形。本小节的目标是在我们的设定下证明以下定理：

定理 2.3.1（局部化）。 设 $i\colon Z \to X$ 为闭浸入，$j\colon U \to X$ 为其补开浸入。假设 U 是拟紧且拟分离的。对于任意 $F \in \mathrm{H}^{\text{proét}}(X)$，典范方块

$$\begin{array}{ccc} j_\sharp j^*F & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & i_*i^*F \end{array}$$

是余笛卡尔的。

我们的证明最终表明，小 pro-étale 位点的局部化定理使我们能够将问题归结为 Morel 和 Voevodsky 的原始证明 [MV99，§3 定理 2。21]。

注 2.3.2。 由于我们假设概形 X 是拟紧拟分离的，根据 [Aut18，引理 01PH 和 引理 01TV]，开子集 U 是拟紧拟分离的，当且仅当存在一个闭子概形 Z' 属于 X，其底层拓扑子集与 Z相同，且 $Z' \to X$ 是有限表示的。

注 2.3.3。 开集 U 拟紧这一假设对于 定理 2.3.1 成立是必要的。事实上，对于非拟紧开集，局部化定理在小 pro-étale 位点上的层范畴层面就已经失效，见下文注 2.3.5 。

我们先给出一个关于小 pro-étale 位点的类似陈述。

命题 2.3.4. 函子 $i^*\colon \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}}) \to \mathrm{Sh}(Z_{\mathrm{proét}})$ 和 $j^*\colon \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}}) \to \mathrm{Sh}(U_{\mathrm{proét}})$联合保守。

证明。 利用引理 1.1.4 和引理 1.1.6，可将问题归约到如下情形： X 既约、零维、仿射，且其所有局部环都是可分闭域。在这种情形下， i^* 和 j^* 可分别与拉回函子 $\mathbf{Cond(Ani)}_{/\pi_0(X)} \to \mathbf{Cond(Ani)}_{/\pi_0(Z)}$ 和 $\mathbf{Cond(Ani)}_{/\pi_0(X)} \to \mathbf{Cond(Ani)}_{/\pi_0(U)}$相识。由于 profinite 集上的拟紧开集既开又闭，我们有 profinite 集的同构 $\pi_0(X) \simeq \pi_0(Z) \amalg \pi_0(U)$。因此，上述两个函子显然联合保守，证毕。 □

备注 2.3.5。 如果开子集 U 不是拟紧的，那么命题 2.3.4 的结论不成立。事实上，考虑 profinite 集 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 以及开闭分解$\mathbb{N}$，$\to \mathbb{N}\cup\{\infty\} \hookleftarrow \{\infty\}$。那么在 $\mathrm{Cond(Ani)}_{/\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ 中，我们有一个典范映射

$$\mathbb{N} \amalg \{\infty\} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

这个映射显然不是同构（其定义域等价于配备离散拓扑的 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$）。然而，将其限制到$\mathbb{N}$以及$\{\infty\}$后，它显然也会成为同构。

2.3.6. 注意，该图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{PSh}_{\emptyset}(X^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{proét}}) & \xrightarrow{i^*} & \mathrm{PSh}_{\emptyset}(Z^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{proét}}) & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{PSh}_{\emptyset}(X^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{proét}}) \\
\downarrow{\scriptstyle L_{\mathrm{proét}}} & & \downarrow{\scriptstyle L_{\mathrm{proét}}} & & \downarrow{\scriptstyle L_{\mathrm{proét}}} \\
\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}}) & \xrightarrow{i^*} & \mathrm{Sh}(Z_{\mathrm{proét}}) & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{proét}})
\end{array}$$

可交换：左侧方块根据定义可交换；在右侧方块中，所有函子都与弱可缩余极限交换，并且 $\mathrm{PSh}\emptyset(Z^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{proét}})$ 由可表对象在弱可缩余极限下生成；由于可表对象的情形可由 pro-étale 拓扑是次典范的这一事实推出 [Aut18，标签 098Z]，因此右侧方块确实可交换。

现在我们使用1.1.1中引入的记号。我们有一个左伴随 $(-)^{\sim}$ 到拉回$X^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{proét}} \to Z^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{proét}}$，因此在预层层面上，$i^*$ 由下式给出

$$P \mapsto (U \mapsto P(\widetilde{U})).$$

˜由于 $\emptyset = \emptyset$，这会保留将 $\emptyset$ 映到 $*$的预层。设$\mathcal{F}$ 属于 $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}})$；利用上述交换图，层 $i_* i^* \mathcal{F}$ 因此由该断言的层化给出

$$V \mapsto \mathcal{F}(\widetilde{V|_Z}).$$

有了这些，我们现在便可以大致按照普通动机空间的局部化定理的证明来进行。若 $Y \in \mathrm{Sch}_X$ 是一个 X-概形，我们也用 Y 表示它在 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X)$ 中的像。

定义 2.3.7. 对于任意一个 X 上的概形 Y 以及任意一个截面 $t\colon Z \to Y_Z = Y \times_X Z$，我们在 X 上概形的范畴中定义一个集合预层 $\Phi_X(Y,t)$，令

$$\Phi_X(Y,t)(Y') = \begin{cases} \mathrm{Hom}_X(Y',Y) \times_{\mathrm{Hom}_Z(Y'_Z,Y_Z)} * & \text{if } Y_Z \neq \emptyset \\ * & \text{else} \end{cases}$$

其中 t 映射 $* \to \mathrm{Hom}_Z(Y'_Z, Y_Z)$ 由映射 $Y'_Z \to Z \xrightarrow{t} Y_Z$ 给出。换言之 ，

$$\Phi_X(Y,t) = (Y \bigsqcup_{Y_U} U) \times_{i_* Y_Z} X$$

其中映射 $X \to i_* Y_Z$ 由 t 和伴随给出。

引理 2.3.8. 设 $f\colon V \to Y$ 是仿射概形之间的 *pro-étale* 态射，并设 $t'\colon Z \to V_Z$ 和 $t\colon Z \to Y_Z$ 是 Z 上的截面，满足 $f_Z \circ t' = t$。则诱导映射

$$\psi\colon \Phi_X(V,t') \to \Phi_X(Y,t)$$

经层化函子作用后变为同构

$$L_{\mathrm{pro\acute{e}t}}\colon \mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X) \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X).$$

证明。设 T 是 X上的一个仿射概形。由于根据 [CM21，命题 7.1], ，原 étale 层化与限制到小位点相交换，因此只需证明 $L_{\mathrm{pro\acute{e}t}}\psi_{|T^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}}$ 是一个等价。根据命题 2.3.4，只需证明 $L_{\mathrm{pro\acute{e}t}}\psi_{|(T_U)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}}$ 和 $L_{\mathrm{pro\acute{e}t}}\psi_{|(T_Z)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}}$是等价。由于对任意 $Y \in (T_U)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}$，我们都有 $Y_Z = \emptyset$，显然 $\psi_{|(T_U)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}}$是一个等价。我们注意到，若 $i_T\colon T_Z \to T$ 是将i 拉回到 T所得的闭浸入，则函子 $(i_T)_*$是保守的，因为它是全忠实的：其左伴随 i_T^*还有一个由亨泽尔化给出的左伴随（见 1.1.1），且后者是全忠实的。因此，只需证明

$$(i_T)_* L_{\mathrm{pro\acute{e}t}}\psi_{|(T_Z)_{\mathrm{pro\acute{e}t}}} = (i_T)_*(i_T)^*\psi_{|T_{\mathrm{pro\acute{e}t}}}$$

是一个等价。根据 2.3.6，我们得到层的映射 $(i_T)_*(i_T)^*\psi_{|T_{\mathrm{pro\acute{e}t}}}$ 是以下内容的层化所得

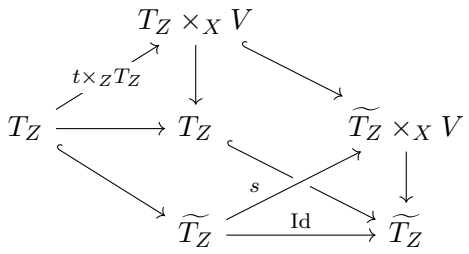
$$W \in T^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{pro\acute{e}t}} \mapsto \psi(\widetilde{W_{|T_Z}})$$

因此，特别是，只需证明（将 T 替换为在 $\sim T$ 上的仿射 pro-étale 概形后） $\psi(T_Z)$ 是一个等价。

~ ~为此，我们检查 $\psi(T_Z)$ 在任意态射 $q\colon T_Z \to Y$ 在 X 上的纤维；该态射 ~ 会在 $\Phi_X(Y,t)(T_Z)$ 中给出一个元素，而这个纤维是一个点。后一个纤维同构于

$$\Phi_{\widetilde{T_Z}}(V \times_Y \widetilde{T_Z}, t \times_Z T_Z)(\widetilde{T_Z})$$

因此，只需证明这个集合是一个点。其中的一个元素由一个~ ~概形映射 $s\colon T_Z \to T_Z \times_X V$ 给出，它使图表



交换。由亨泽尔化的泛性质可知，这样的映射 s 唯一存在。由此断言得证。

□

现在我们可以证明 pro-étale 情形下的局部化定理:

证明。 (关于 定理 2.3.1) 我们可以将问题约化到 X 为仿射的情形。由于所讨论的所有函子都与筛余极限交换，我们可以将问题约化到$\mathcal{F}$ 由$L_{\mathrm{mot}}(Y)$ 给出的情形，其中 Y 是某个 $\mathbb{A}^n_X$ 上的仿射 pro-étale 概形， n 根据 引理 2.1.7 和[BS15，定理 2.3。4]。此外，所讨论的所有函子都保持动机等价（唯一非平凡的情形是 i_* ，但这正是引理 2.2.6）。这意味着只需证明诱导映射

$$Y \amalg_{Y_U} U \to i_* Y_Z$$

是 PSh(Sch$_X$) 中的动机等价。为此，只需证明对于任意仿射 X-概形$f\colon T \to X$ 以及对应于态射 $t_0\colon T_Z \to Y_Z$ 的态射 $T \to i_* Y_Z$，所诱导的态射

$$(Y \amalg_{Y_U} U \to i_* Y_Z) \times_{i_* Y_Z} T$$

是动机等价。

但利用 $\mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_T)$ 中的投影公式（参见 [Lur09，命题 6.3.5。11]），此映射由将函子 $f_\sharp\colon \mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_T) \to \mathrm{PSh}(\mathrm{Sch}_X)$ 作用于态射

$$\Phi_T(Y_T, t) \to * = T.$$

其中 $t\colon T_Z \to Y_T \times_T T_Z = Y_Z \times_X T$ 由 t_0 在第一个因子上诱导，而包含映射 $T_Z \to T$ 在第二个因子上诱导。因此，我们已将问题归结为证明预层 $\Phi_T(Y_T,\ t)$ 是动机可缩的。回想一下，由于 Y 是 $\mathbb{A}^n_X$ 上的仿射原 étale 概形，因此结构映射 $Y_T \to T$ 可分解为

$$Y_T \xrightarrow{f_T} \mathbb{A}^n_T \to T$$

其中所有概形都是仿射的，且 f_T 是 pro-étale。根据引理 2.3.8，我们可以归结为证明 $\Phi_T(\mathbb{A}^n_T,\ (f_T \times_T T_Z) \circ t)$ 在 PSh(概形$_T$)中在动机意义下可缩；这一点众所周知，因为现在 $\mathbb{A}^n_T \to T$ 是光滑的（参见 [Hoy17，定理 4 的证明18]）。 □

这也意味着 $\mathrm{SH}^{\text{proét}}(X)$ 的局部化定理：

推论 2.3.9 (带基点局部化)。 设 $i\colon Z \to X$ 是一个闭浸入，且 $j\colon U \to X$ 是开补集。假设 j 是一个拟紧拟分离浸入。对于每个 $M \in \mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(X)$ 谱序列

$$j_\sharp j^* M \to M \to i_* i^* M$$

是一个余纤维序列。特别地， i^* 和 j^* 是联合保守的，而 i_* 是全忠实的。

证明。 第一个断言是 定理 2.3.1 的形式推论，参见 [Hoy17，命题 5。2]。 i^* 和 j^* 是联合保守的，这是显然的推论。将 $i_*(-)$ 代入上述余纤维序列，并利用 $j^* i_* \simeq *$，我们看到 $i_* \to i_* i^* i_*$ 是一个等价。因此，由于 i_* 根据 引理 2.2.7 是保守的，断言得证。 □

推论 2.3.10 (闭投影公式)。 设 $i\colon Z \to X$ 是一个闭浸入。假设其补集是一个 *qcqs* 开浸入。设 $M \in \mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(X)$ 并设 $N \in \mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(Z)$。典范映射

$$M \otimes i_* N \to i_*(i^* M \otimes N)$$

是一个等价。

证明。 这由 推论 2.3.9 立即得出，因为 $j^* i_* \simeq *$。 □

2.3.11. 设 $i\colon Z \to X$ 是一个闭浸入。则典范函子

$$\mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(X) \otimes_{\mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(Z)} \mathrm{SH}_{\text{proét}}(Z) \to \mathrm{SH}_{\text{proét}}(X)$$

由 [AI22，引理 1.3。11]，是一个等价。

推论 2.3.12。 设 $i\colon Z \to X$ 是一个闭浸入。假设其补集是一个 *qcqs* 开浸入。则函子

$$i_*\colon \mathrm{SH}_{\text{proét}}(Z) \to \mathrm{SH}_{\text{proét}}(X)$$

与余极限相容，并且闭投影公式在 层范畴^{proét} 中成立。

证明。$\mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}$ 的闭投影公式（推论 2.3.10）结合命题 2.2.4 表明，函子 $i_*\colon \mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(Z) \to \mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(X)$ 是 Pr^{L} 中 $\mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(X)$-模的映射（参见 [Lur22，注记 7.3.2。9]）。利用 [HSS17，第 4 节4]，，由于伴随 (i^*, i_*) 是内部于由 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}(\mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(X))$ 表示的 $(\infty, 2)$-范畴中的，其中其对象是可呈示的 $\mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(X)$-模，故其在 $(\infty, 2)$-函子下的像

$$- \otimes_{\mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(Z)} \mathrm{SH}_{\text{proét}}(Z)\colon \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}(\mathrm{H}_{\text{proét},\bullet}(X)) \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}(\mathrm{SH}_{\text{proét}}(X))$$

仍然是一个内部伴随。特别地， $i^*\colon \mathrm{SH}^{\text{proét}}(X) \to \mathrm{SH}^{\text{proét}}(Z)$的右伴随 i_* 保持余极限，且投影公式成立。 □

推论 2.3.13. 设 $i\colon Z \to X$ 是一个闭浸入， $j\colon U \to X$ 是其开补集。假设 j 是一个拟紧拟分离浸入。对于每个 $M \in \mathrm{SH}^{\text{proét}}(X)$ ， 谱序列

$$j_\sharp j^* M \to M \to i_* i^* M$$

是一个余纤维序列。特别地，配对 (i^*, j^*) 是保守的。

证明。 根据 推论 2.3.12 所有相关函子都与余极限和 $\mathbb{P}^1$-稳定化交换。由于 $\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}$ 与余极限交换，且其像生成$\mathrm{SH}^{\mathrm{proét}}(X)$ 在余极限和 $\mathbb{P}^1$-移位下，断言由带基点局部化推出（推论 2.3.9）。 □

推论 2.3.14. 设 $i\colon Z \to X$ 是一个闭浸入。假设其补集是一个 *qcqs* 开浸入。则函子

$$i_*\colon \mathrm{SH}_{\mathrm{proét}}(Z) \to \mathrm{SH}_{\mathrm{proét}}(X)$$

是全忠实的。对$\mathrm{H}^{\mathrm{proét}}(Z)$ 和$\mathrm{H}^{\mathrm{proét}}(X)$也同样成立。

证明。 证明与推论 2.3.9中的证明相同。 □

2.4 双向性

在本节中，我们验证：对于拟紧拟分离概形之间的光滑射影有限表示态射，其互反性证明中的每一步都不需要使用带有非 qcqs 开浸入的局部化三角。我们沿用 [Hoy17，第 5]节。

定义 2.4.1. 设$\mathcal{C}\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\bullet})$是一个取值于带基点的对称幺半可呈示 ∞-范畴的函子。对于 f 概形的一个映射，我们将函子$\mathcal{C}(f)$记为 f^* ，并将其右伴随记为 f_* 。若$\mathcal{C}$ 满足以下条件，则称其为一个不稳定 *qcqs* 动机系数系统：

1. 对每个光滑映射 f，函子 f^* 都有一个左伴随 $f_\sharp$ ，并满足光滑基变换和光滑投影公式。2. $\mathbb{A}^1$-不变性：函子 π^* 是全忠实的，如果 $\pi\colon \mathbb{A}^1_X \to X$ 是典范投影，且 X 是任意拟紧拟分离概形。3. *Nisnevich* 下降：函子$\mathcal{C}$ 是一个 Nisnevich 层。4. 拟紧拟分离局部化：命题 推论 2.3.9 的类似结论在C中成立。

定理 2.4.2 (Drew-Gallauer)。 设 $\mathrm{H}_\bullet(-)$ 表示由 *Morel* 和 *Voevodsky* 构造的不稳定 *qcqs* 动机系数系统（这是 *Nisnevich* 版本，参见 *[MV99]*）。存在一个自然变换

$$\rho_{\mathcal{C}}\colon \mathrm{H}_\bullet(-) \to \mathcal{C}(-)$$

它还与光滑态射 f的 $f_\sharp$ 相交换。

证明。 事实上，这是直接应用 [DG22的命题 6.8 和定理 7。3] (参见同上的注 7.11）。 □

引理 2.4.3. 设 $i\colon Z \to X$ 是一个闭浸入，其开补集为拟紧拟分离，且 X拟紧拟分离。那么自然变换

$$\rho_{\mathcal{C}} \circ i_* \to i_* \circ \rho_{\mathcal{C}}$$

是一个等价。

证明。 由局部化可直接得出，这是由于 $\rho_{\mathcal{C}}$ 与 $j_\sharp$ 与 j的交换性： $U \to X$ 开补集。

□

2.4.4. 设 S 是一个拟紧拟分离概形，且$\mathcal{M}$ 是一个局部自由的$\mathcal{O}_S$-模。我们将关联的向量丛记为$p\colon \mathbb{V}(\mathcal{M}) \to S$，其零截面记为 $s\colon S \to \mathbb{V}(\mathcal{M})$。回忆一下，通常将

$$\Sigma^{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}(S) \to \mathcal{C}(S)$$

函子 $p_\sharp s_*$记为$\mathrm{S}^{\mathcal{M}} := \Sigma^{\mathcal{M}} \mathbb{1}_S \in \mathcal{C}(S)$。注意，态射$\mathbb{V}(\mathcal{M}) \to S$ 是仿射的，因此$(\mathcal{M})$ 是拟紧拟分离的；又由于零截面由一个有限型理想给出（即$\mathbf{M}^\vee$），开浸入 $\mathbb{V}(\mathcal{M})\setminus S \to \mathbb{V}(\mathcal{M})$ 是一个拟紧拟分离开浸入。由闭投影公式（它是推论 2.3.10 的类似结果，可由 qcqs 局部化和光滑投影公式形式上直接推出），我们于是得到

$$\Sigma^{\mathcal{M}} \simeq \mathrm{S}^{\mathcal{M}} \otimes (-). \tag{3}$$

此外，由引理 2.4.3 可知 $\rho_{\mathcal{C}} \circ \Sigma^{\mathcal{M}} \simeq \Sigma^{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{C}}$。若 $f\colon S \to T$ 是光滑的，则我们将其记为

$$\mathrm{Th}_S(\mathcal{M}) \coloneqq f_\sharp(\mathrm{S}^{\mathcal{M}}) \in \mathcal{C}(T)$$

托姆空间$\mathcal{M}$。再次根据引理 2.4.3，我们有 $\rho_{\mathcal{C}}(\mathrm{Th}_S(\mathcal{M})) \simeq \mathrm{Th}_S(\mathcal{M})$。

定理 2.4.5（纯性）。设

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow^{q} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & & S \end{array}$$

是拟紧拟分离概形的一个交换图，其中 p 和 q 光滑，且 s 是有限表示闭浸入。令 $\mathcal{N}_s$ 为 s的法丛。那么存在一个典范同构

$$p_\sharp s_* \simeq q_\sharp \Sigma^{\mathcal{N}_s}$$

函子 $\mathcal{C}(Z) \to$ 函子 $\mathcal{C}(S)$。

证明。该态射由法锥形变给出的一个跨度构造而成：存在一个光滑态射 $\hat{}p\colon D_Z X \to \mathbb{A}^1_S$，其中 $D_Z X$ 是形变空间；还有一个有限表示闭浸入 $\hat{}s\colon \mathbb{A}^1_Z \to D_Z X$，它是沿结构映射 $D_Z X \to X$ 拉回有限表示闭浸入 $Z \to X$ 得到的，因此在 1 处的纤维是定理中的三角形，而在 0 处的纤维是三角形

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle p_0} \\ & & S \end{array}$$

与 s_0 法　　丛的零截面及 p_0 典范映射。这诱导出一个跨度

$$p_\sharp s_* \to r_\sharp \hat{p}_\sharp \hat{s}_* r^* \leftarrow q_\sharp \Sigma^{\mathcal{N}_s}$$

的函子 $\mathcal{C}(Z) \to \mathcal{C}(S)$，其中 r 投影 $\mathbb{A}^1_{(-)} \to (-)$ (参见上文的讨论 [Hoy17，命题 5。7]有关更多细节）。利用闭投影公式（推论 2.3.10

如前所述，它对 $\mathcal{C}$ 成立），若 $M \in \mathcal{C}(S)$，则上述跨度在 s^*M 处的取值可写为

$$p_\sharp s_*(\mathbb{1}_Z) \otimes M \to r_\sharp \hat{p}_\sharp \hat{s}_* r^*(\mathbb{1}_Z) \otimes M \leftarrow q_\sharp \Sigma^{\mathcal{N}_s}(\mathbb{1}_Z) \otimes M.$$

由于 s_* 根据 推论 2.3.14是全忠实的，事实上，$\mathcal{C}(Z)$ 中的所有对象都具有 s^*M的形式，因此只需证明这两个态射在 $\mathbb{1}_Z$处取值时都是等价。利用 引理 2.4.3，只需在 $\mathrm{H}_\bullet(S)$中证明这一点；这里由 [Hoy17，命题 5。7]可得。 □

构造 2.4.6。 在 [Hoy17，第 5 节。3], Hoyois 构造了互反性定理的单位和余单位。我们需要如下结果。设 $f\colon X \to S$ 是拟紧拟分离概形之间的有限呈现射影光滑态射。那么存在一个映射（称为 Pontryagin–Thom 塌缩） X （其构造取决于将 S嵌入到某个

$$\eta\colon \mathrm{S}^{\mathcal{M}} \to \mathrm{Th}_X(\mathcal{N})$$

在 $\mathrm{H}_\bullet(S)$中；这里 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$是定义在 S 和 X 上的向量丛，它们满足 $\mathrm{S}^{\Omega_f} \otimes \mathrm{S}^{\mathcal{N}} \simeq \mathrm{S}^{f^*(\mathcal{M})}$，其中 Ωf 是 Kähler 微分构成的局部自由层。根据 (3) 以及光滑投影公式，这定义了一个自然变换

$$\eta\colon \Sigma^{\mathcal{M}} \simeq \mathrm{S}^{\mathcal{M}} \otimes (-) \xrightarrow{\rho_{\mathcal{C}}(\eta)\otimes(-)} \mathrm{Th}_X(\mathcal{N}) \otimes (-) \simeq f_\sharp \Sigma^{\mathcal{N}} f^*$$

函子 $\mathcal{C}(S) \to \mathcal{C}(S)$。

他还定义了一个映射（[Hoy17，(5.20)]） $\varepsilon\colon f^* f_\sharp \to \Sigma^{\Omega_f}$在 $\mathrm{H}_\bullet(X)$ 中，我们可以照搬他的定义，得到一个位于$\mathcal{C}(X)$ 中的映射，如下：

$$\varepsilon\colon f^* f_\sharp \simeq (p_2)_\sharp p_1^* \to (p_2)_\sharp \delta_* \delta^* p_1^* \simeq (p_2)_\sharp \delta_* \overset{2.4.5}{\simeq} \Sigma^{\mathcal{N}_\delta} \overset{\nu}{\simeq} \Sigma^{\Omega_f},$$

其中 p_1，$p_2\colon X \times_S X \to X$是投影，$\delta\colon X \to X \times_S X$是对角态射，$\nu\colon$ 自然数集$_\delta \to \Omega f$ 是将 $x \otimes 1 - 1 \otimes x$ 映至 dx的同构，而倒数第二个同构是纯性定理 2.4.5。我们可以应用该定理，因为态射 $X \to S$ 是有限型的，因此对角态射 δ 由 [Aut18，Tag 0818] 可知是有限表示的。

定理 2.4.7 （互反性）。设 $f\colon X \to S$ 是拟紧拟分离概形之间的有限呈现射影光滑态射。则以下复合

$$f^*\Sigma^{\mathcal{M}} \xrightarrow{\eta} f^* f_\sharp \Sigma^{\mathcal{N}} f^* \xrightarrow{\varepsilon} \Sigma^{\Omega_f}\Sigma^{\mathcal{N}} f^* \simeq \Sigma^{f^*(\mathcal{M})} f^* \simeq f^*\Sigma^{\mathcal{M}}$$

and

$$\Sigma^{\mathcal{M}} f_\sharp \xrightarrow{\eta} f_\sharp \Sigma^{\mathcal{N}} f^* f_\sharp \xrightarrow{\varepsilon} f_\sharp \Sigma^{\mathcal{N}} \Sigma^{\Omega_f} \simeq f_\sharp \Sigma^{f^*(\mathcal{M})} \simeq \Sigma^{\mathcal{M}} f_\sharp$$

是 $\mathcal{C}$ 中的恒等映射。

特别地，如果对于任意向量丛 V，$\Sigma^{\mathcal{V}}$ 是 $\mathcal{C}(S)$ 中的一个等价，那么映射ε 会诱导出映射 $f^* f_\sharp \Sigma^{-\Omega_f} \to \mathrm{Id}$，它表明 f^* 是 $f_\sharp \Sigma^{-\Omega_f}$ 的左伴随，并给出一个自然等价 $f_\sharp \Sigma^{-\Omega_f} \xrightarrow{\sim} f_*$。

证明。与 [Hoy17, 定理 5.20], 一样，ι 若第一个映射在单位处取值，则这两个映射分别为 $\iota \otimes f^*(-)$ 和 $f_\sharp(\iota \otimes (-))$，因此只需证明 ι是恒等映射。根据构造，我们有 $\iota = \rho_{\mathcal{C}}(\iota)$；由 [Hoy17, 定理 5.20]， ι 是 $\mathrm{H}_\bullet(S)$ 中的恒等映射。因此证明完毕，因为第二点是直接推论（见 [Hoy17, 定理 6.9]）。 □

定义 2.4.8。 设 $\mathcal{C}$ 是不稳定 qcqs 动机系数系统定义 2.4.1。我们称$\mathcal{C}$ 是一个拟紧拟分离动机系数系统 当且仅当

1. 它取值于稳定、可呈示的对称幺半 ∞-范畴。
2. 它是*Tate*-稳定 的，这意味着 Tate 动机 $T_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} :=\mathbb{S}^{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}}$ 是 $\otimes$-可逆的。

注记 2.4.9。 设 $\mathcal{C}$ 是一个拟紧拟分离动机系数系统。利用 Tate 稳定性，可以很容易地改写[DG22，定理 7。14] 的证明，从而证明存在一个映射

$$\mathrm{SH} \to \mathcal{C}$$

其中 SH 是 Nisnevich动机谱的系数系统。现在设$\mathcal{M}$ 是一个局部自由的$\mathcal{O}_X$-模；由于在 SH 中，球$\mathbb{S}^{\mathcal{M}}$ 由 $\otimes$-可逆，根据 [Ayo07a，定理 1.5。7], 其在 $\mathcal{C}$ 中的像也可逆，而这正是我们也记作$\mathbb{S}^{\mathcal{M}}$的对象。因此，映射 $\Sigma^{\mathcal{M}}$ 是一个等价。

推论 2.4.10 (互反性)。 在一个拟紧拟分离动机系数系统上工作，设$f\colon\ X \to S$ 是拟紧拟分离概形之间有限表示的射影光滑态射。存在一个自然等价 $f_\sharp\Sigma^{-\Omega_f} \xrightarrow{\sim} f_*$。

2.5 pro-étale 动机的六函子

由于局部化性质仅对闭浸入及 qcqs 开浸入成立，因此我们无法获得像 SH 那样完善的六函子形式主义。固定一个拟紧拟分离动机系数系统$\mathcal{C}$。

命题 2.5.1. 设 $p\colon\ Y \to X$ 是有限表示真映射。

1. 设

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{p'} & X' \\ {\scriptstyle j'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

$be\ a$ 是由拟紧拟分离概形构成的笛卡尔方块，其中 j 是光滑映射。则交换映 p

$$j_\sharp p'_* \to p_* j'_\sharp$$

是可逆的。

2. 函子 p_* 与余极限交换。

3. 设

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & Y \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

是拟紧拟分离概形构成的笛卡尔方块。那么自然变换

$$f^* p_* \to p'_* (f')^*$$

是一个等价。

4. 对任意 $M \in \mathcal{C}(X)$ 以及任意 $N \in \mathcal{C}(Y)$，自然映射

$$(p_* M) \otimes N \to p_*(M \otimes p^* N)$$

是一个同构。

证明。 证明沿用了 [AGV22、命题 4.1.1、命题 4.1 的证明。2]我们首先假设 p 是射影的。由于所有断言在 X 上都是局部的，我们可以假设 $p = \pi \circ i$ 其中$\pi\colon \mathbb{P}^n_X \to X$为投影，而 $i\colon Y \to X$ 为有限表示闭浸入。我们可以分别处理 i 和 π。关于 i_* 的陈述由局部化（以及推论 2.3.10）推出。利用互反性，我们有 $\pi_* \simeq \pi_\sharp \Sigma^{-\Omega}$，因此关于 π_* 的四个陈述可由 $\pi_\sharp$的相应结论推出，而后者显然成立。

现在我们将问题归约到射影情形。首先注意到，由 Zariski 下降，只需证明对于每个 qcqs 开浸入 $\nu\colon V \to Y$，其沿 ν' 到 Y'的基变换，映射 $j_\sharp p'_* \circ \nu'^\sharp \to p_* j'_\sharp \circ \nu'^\sharp$是一个等价（1.），函子 $p_* \circ \nu_\sharp$保余极限（2.），$f^* p_* \circ \nu_\sharp \to p'_*(f')^* \circ \nu_\sharp$是一个等价（3.），以及（$p_* \circ \nu_\sharp M$）$\otimes N \to$（$p_* \circ \nu_\sharp$）（$M \otimes \nu^* p^* N$）是一个等价（4.；此处我们现在有 $M \in \mathsf{C}(V)$）。我们固定这样的一个 $\nu\colon V \to Y$。根据精细 Chow 引理 [Con07，推论 2.6]，我们可以找到一个爆破 $e\colon Z \to Y$，其中心与 V不相交，使得 $q = p \circ e$ 是一个射影态射。令 $w\colon V \to Z$ 为一个开浸入，使得 $\nu = e \circ w$（这是存在的，因为 e 在 V之上是一个同构）。我们定义$Z' = Z \times_Y Y'$和 $e'\colon Z' \to Y'$、$q'\colon Z' \to X'$以及 $w'\colon V' \to Z'$为 e、q和 w 沿 f的基变换。

我们断言 $\nu_\sharp \simeq e_* \circ w_\sharp$ 和 $\nu'_\sharp \simeq e'_* \circ w'_\sharp$。这两种情形下的证明相同，因此我们只处理第一种情形。首先注意，存在一个比较映射 α，它由伴随从 $\mathrm{Id} \to \nu^* e_* w_\sharp \simeq w^* w_\sharp$得到。令 $i\colon (Y \setminus V)_{\mathrm{red}} \to Y$为约化闭浸入。根据局部化，$(i^*, \nu^*)$ 这一对是保守的。由光滑基变换，我们有 $\nu^*(\alpha) = \mathrm{Id}^{\nu^* \nu_\sharp}$。由射影基变换（我们已在第一段中证明），我们有 $i^*(\alpha) = \mathrm{Id}_0$。这就证明了该断言。

利用该断言，我们得到：

1. $(j_\sharp p'_* \circ \nu'^\sharp \to p_* j'_\sharp \circ \nu'^\sharp) = (j_\sharp (p' \circ e')_* \circ w'^\sharp \to (p \circ e) \circ w_\sharp \circ j''_\sharp)$，其中 j'' 是将 j' 基变换到 U所得。
2. $p_* \circ \nu_\sharp \simeq (p \circ e)_* \circ w_\sharp$.
3. $(f^* p_* \circ \nu_\sharp \to p'_* (f')^* \circ \nu'^\sharp) \simeq (f^* (p \circ e)_* \circ w_\sharp \to (p' \circ e')_* \circ w'^\sharp \circ (f'')^*)$，其中 f'' f' 到 V 的基变换。
4. $$\begin{aligned} & [(p_* \circ \nu_\sharp M) \otimes N \to (p_* \circ \nu_\sharp)(M \otimes \nu^* p^* N)] \\ \simeq\ & [((p \circ e)_* \circ w_\sharp M) \otimes N \to ((p \circ e)_* \circ w_\sharp)(M \otimes w^* (p \circ e)^* N)] \\ \simeq\ & [(p \circ e)_* (w_\sharp M) \otimes N \to (p \circ e)_* ((w_\sharp M) \otimes (p \circ e)^* N)] \end{aligned}$$

对 w使用光滑投影公式。

特别地，我们可以将 p 和 p' 替换为 q 和 q'，从而归结为 p 是有限表示射影映射的情形。

□

2.5.2. 设 $f\colon X \to S$ 是拟紧拟分离概形之间的分离有限表示态射。则存在 f 的有限表示紧化，即一个有限表示固有态射 $f\colon X \to S$ 以及一个 qcqs 开浸入 $j\colon X \to X$，使得 $f = f \circ j$。为此，我们可根据 [Aut18, Tag 01ZJ]，将 $S = \lim S_i$ 写成一个以诺特概形为对象、具有仿射过渡映射的系统的余滤极限。根据 [Aut18, Tag 01ZM]，我们可以选取一个指标 i 和一个有限表示态射 $X_i \to S_i$，使其到 S 的基变换为 $X \to S$。增大 i 后，我们可以假设 $X_i \to S_i$ 是分离的，依据是 [Aut18, Tag 01ZQ]。然而，根据 [Aut18, Tag 0F41]，我们可以找到 X_i 在 S_i 上的一个紧化；它是有限表示的，并且其到 S 的基变换是 X的一个紧化。

在上述情形下，我们可以设 $f_! := f_* \overline{j}_\sharp$。注意，这个函子保持余极限：对于 $j_\sharp$，这显然成立；对于 推论 2.4.10 中的 f_*，则由该推论得出。接下来，我们可以仿照 [AGV22，§4。3] 将 $f \mapsto f_!$ 提升为一个函子 $\mathcal{C}_!\colon$ 概形$^{\mathrm{fp}}_{\mathrm{qcqs}} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$，其定义域为拟紧拟分离概形范畴，态射为有限表示的（不一定分离）态射。事实上，我们还能做得更好（见 定理 2.5.4）。

以下对 定理 2.4.5 和 定理 2.4.7 的推广是经典的：

推论 2.5.3。 *1.* 设 $f\colon Y \to X$ 是拟紧拟分离概形之间的光滑映射。那么存在一个典范同构 $f^! \simeq f^*\Sigma^{\Omega_f}$，其中 Ω_f 是 f的微分层。

2. 设 $f\colon Y \to X$ 是有限表示的光滑真映射。则存在自然等价 $f_\sharp \Sigma^{-\Omega_f} \xrightarrow{\sim} f_*$。

证明。 第二点可直接由第一点推出，利用 $f_! \simeq f_*$ 对于真映射。第一点的证明是经典的，参见例如 [Kha21，定理 2。44]（同样可以像之前那样检查，证明不使用非拟紧拟分离开浸入）。 □

定理 2.5.4。 设 $\mathcal{C}$: 概形 $\to$ 交换代数对象$(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$ 是一个拟紧拟分离动机系数系统。那么它配备了六函子。更准确地说，这意味着：

1. 存在一个松对称幺半函子

$$\mathcal{C}_!^*\colon \mathrm{Corr}(\mathrm{Sch}, \mathrm{fp})^{\otimes} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L},\otimes}$$

扩张 $\mathcal{C}$，其中 $\mathrm{Corr}(\mathrm{Sch,fp})$ 是 *[HM24]*定义 *2.2* 中定义的对应范畴。*10]*(见 备注 *2.5.5)*，其中反向映射是任意映射，正向映射是拟紧拟分离概形之间的有限表示态射。粗略地说，这意味着我们拥有以下内容的所有高阶相容性：

- 对于每个拟紧拟分离概形之间的有限表示态射 f，我们都有一个函子 $f_!$，它与拉回的构造相容。
- 我们有一个自然同构

$$(f_! M) \otimes N \to f_!(M \otimes f^* N).$$

- 如果 f 是有限表示的真态射，那么 $f_!$ 是 f^*的右伴随；如果 f 是 *qcqs* 开浸入，那么 $f_!$ 是 f^*的左伴随。

2. 对于任意拟紧拟分离概形之间的 $f\colon X \to S$ 有限表示光滑态射，都存在自然等价 $f_! \simeq \Sigma^{\Omega_f} \circ f^*$。

3. 对于任意闭浸入 $i\colon\ Z \to X$，其开补为拟紧拟分离 $j\colon\ X\setminus Z \to X$，我们有自然变换的正合三角

$$j_!j^! \to \mathrm{Id} \to i_*i^*$$
$$i_!i^! \to \mathrm{Id} \to j_*j^*$$

由相应伴随的单位和余单位给出。

4. 存在一个自然变换 $f_! \to f_*$，当 f 是有限表示真映射时，它是一个等价。

证明。 令 $\mathrm{Corr}(\mathrm{Sch},\mathrm{fp}^{\mathrm{sep}})$ 为一个对应范畴，其对象为拟紧拟分离概形，反向态射为任意态射，正向态射为有限表示分离态射（见 [HM24，定义 2.2。10]）。其幺半结构由概形上的笛卡尔结构诱导。我们首先应用 [CLL25，定理 4。35]，利用 命题 2.5.1、命题 2.5.1 和 2.5.2。这给出了一个松对称幺半2-函子

$$\mathcal{C}_!^*\colon \mathrm{SPAN}_2(\mathrm{Sch},\mathrm{fp}^{\mathrm{sep}})^{\otimes}_{\mathrm{prop},\mathrm{open}} \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{L},\otimes},$$

其中 $\mathrm{SPAN}_2(\mathrm{Sch},\mathrm{fp}^{\mathrm{sep}})^{\otimes}_{\mathrm{prop},\mathrm{open}}$ 是 [CLL25，构造 4.1] 中定义的一个对应的 (2, 2)-范畴（沿用该文献的记号，取 C 拟紧拟分离概形范畴、 E有限表示分离态射类、 I 拟紧拟分离开浸入类以及 P有限表示真态射类），Pr^{L} 是配备 Lurie 张量积的可呈示∞-范畴的 (∞, 2)-范畴。这个 (2, 2)-范畴的底层 (2, 1)-范畴是对应范畴 $\mathrm{Corr}(\mathrm{Sch},\mathrm{fp}^{\mathrm{sep}})$，见 [CLL25，引理 4.13]。特别地，通过与典范的松幺半嵌入复合

$$\mathrm{Corr}(\mathrm{Sch},\mathrm{fp}^{\mathrm{sep}})^{\otimes} \to \mathrm{SPAN}_2(\mathrm{Sch},\mathrm{fp}^{\mathrm{sep}})^{\otimes}_{\mathrm{prop},\mathrm{open}}$$

并遗忘 2-态射后，我们得到一个松对称幺半的 ∞-函子

$$\mathcal{C}_!^*\colon \mathrm{Corr}(\mathrm{Sch},\mathrm{fp}^{\mathrm{sep}})^{\otimes} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L},\otimes}$$

这几乎就是我们所需的一切。断言要求所有可用于 ! 的映射都是有限表示的，而不仅仅是分离的，因此我们必须进行一些 Zariski 下降。注意，对于任意有限表示映射 $f\colon\ Y \to X$，存在一个关于 Zariski 拓扑的超覆盖 $Y_\bullet \to Y$，使得每个复合 $Y_n \to Y \to X$ 都是分离的（例如，我们可以取 Y_n 为仿射的）。现在我们采用 [HM24, 定义 4.5.1] 中引入的术语。根据定义，对于任意 Zariski 覆盖 $j\colon\ U \to S$，我们有 $j^* \simeq j^!$，其中 $j^!$ 是 $j_!$ 的右伴随。因此，根据 [HM24, 引理 4.5.4], , 映射 f 是 C-光滑的。此外，由 Zariski 下降，函子 j^* 是保守的，因此根据 [HM24, 引理 4.7.1], , 映射 j 是一个普适的 $\mathrm{C}^!$-覆盖。综合上述所有结果，我们可以应用 [HM24, 命题 3.4.8 (ii)]，得出函子 $\mathrm{C}_!^*$ 唯一地扩张为 $\mathrm{Corr}(\mathrm{Sch},\mathrm{fp})$ 上的六函子形式体系；$\mathrm{Corr}(\mathrm{Sch},\mathrm{fp})$ 是对应范畴，其中现在所有有限表示映射都是正向映射：这就给出了一个松对称幺半函子

$$\mathcal{C}_!^*\colon \mathrm{Corr}(\mathrm{Sch},\mathrm{fp})^{\otimes} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L},\otimes}$$

如前所述。

第二点是推论 2.4.10，第三点是关于$\mathcal{C}$ 的假设，第四点则由第三点推出：给定一个分解 $f = p\circ j$，将局部化三角应用于 j_* 并进一步应用 p_*，即可得到自然变换。

□

备注 2.5.5。 范畴 Corr(Sch,fp) 的对象包含所有拟紧拟分离概形。若 X 和 Y 是拟紧拟分离概形，则范畴或对应中的态射 $X \to Y$ 是

$$\alpha\colon X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$$

其中 f 是任意态射，而 g 是有限表示态射。复合由显然的拉回图表给出。我们得到的函子 $\mathcal{C}_!^*$ 还具有以下性质：$\mathcal{C}_!^*(\alpha) \simeq g_! f^*$。若 g 进一步是分离的，则对于任意紧化 $g = p \circ j$，其中 p是有限表示真态射，且 j 是 qcqs 开浸入，我们有 $g_! \simeq p_* j_!$。若 g 不再是分离的，则可以选取一个由仿射概形构成的 Zariski 超覆盖 $Z_\bullet \to Z$；根据定义，若将 g与态射 j_n: $Z_n \to Z$复合所得的复合 $Z_n \to Z \to Y$记为 $g^n\colon Z_n \to Y$，则有：

$$g_! \simeq \mathrm{colim}_{n\in\Delta}\, g_!^n j_n^*.$$

推论 2.5.6. 我们在 $\mathrm{SH}^{\mathrm{proét}}$ 上具有六函子，其意义如定理 *2.5.4*所述。

2.6 来自 étale 动机的嵌入定理

若 Λ 是一个凝聚环谱，则利用位点的典范映射，可以将其视为 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{proét}}(\mathrm{WSm}_X, \mathrm{Sp})$ 的一个对象

$$*_{\mathrm{proét}} \to X_{\mathrm{proét}} \to (\mathrm{WSm}_X)_{\mathrm{proét}}.$$

我们令

$$\mathrm{SH}_{\mathrm{proét}}(X,\Lambda) \coloneqq \mathrm{Mod}_\Lambda(\mathrm{SH}_{\mathrm{proét}}(X)).$$

若凝聚环谱 Λ 是 $H\mathbb{Z}$-线性的，我们用 $\mathrm{DM}^{\mathrm{proét}}(X, \Lambda)$ 表示 ∞-范畴 $\mathrm{SH}^{\mathrm{proét}}(X, \Lambda)$，并称其为带 Λ-系数的 ***pro-étale*** 动机范畴；在这种情况下，我们也用 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)$ 表示范畴 $\mathrm{Mod}_\Lambda(\mathrm{SH}^{S^1}{}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X))$。

定义 2.6.1. 设 X 为一个拟紧拟分离概形。

1. 若 X 的 Krull 维数有限，且满足以下条件，则称其为 étale 有界：

$$\sup_{x\in X, p \text{ prime}} \mathrm{cd}_p(k(x)) < +\infty$$

   其中 $\mathrm{cd}_p(k)$ 是域 k 的模 p Galois 上同调维数。

2。我们称 X 为局部 étale 有界的，如果它 étale 局部是 étale 有界的。

定理 2.6.2. 设 X 是局部 ***étale*** 有界的拟紧拟分离概形。那么对于任意赋予离散拓扑的环谱Λ，典范函子

$$\mathrm{SH}_{\text{ét}}(S,\Lambda) \to \mathrm{SH}_{\mathrm{proét}}(S,\Lambda)$$

是全忠实的。

证明。 由于 Λ-线性版本可通过在两侧取 Λ-模得到，我们只讨论谱系数的情形。由于 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}$ 和 $\mathrm{SH}^{\text{proét}}$ 都满足 étale 下降，我们可以归结为 étale有界概形。

我们首先证明函子

$$\nu^*\colon \mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_X) \to \mathrm{Sh}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_X)$$

是全忠实的，也就是说，我们要证明典范映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_X)}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_X)}(\nu^*\mathcal{F},\nu^*\mathcal{G})$$

是一个等价。我们可以假设 $\mathcal{F} = T$ 对应一个光滑的 X-概形 T。那么该映射可以改写为

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_T)}(\mathbb{1}, f^*\mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_T)}(\mathbb{1}, f^*\nu^*\mathcal{G})$$

由于单位属于来自小 étale 位点的包含函子的本质像，我们可以再次将其识别为

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(T_{\text{ét}})}(\mathbb{1}, \theta f^*\mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(T_{\text{proét}})}(\mathbb{1}, \theta'\nu^* f^*\mathcal{G})$$

其中函子 θ 和 θ' 是小 étale 位点包含映射的右伴随。此外，我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}(T_{\text{ét}}) & \xrightarrow{\nu^*} & \mathrm{Sh}(T_{\text{proét}}) \\ {\scriptstyle\theta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\theta'} \\ \mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_T) & \xrightarrow{\nu^*} & \mathrm{Sh}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_T) \end{array}$$

（所有函子都保余极限，因为 [CM21，命题 7。1] 而且在可表对象上的情形显然成立）。因此，我们可以归约到 ν^* 在小位点上是全忠实的；这由两边的 Postnikov 完备性（这是 [BS15，命题 3.2。3] 在 pro-étale 位点上的结果，以及我们对 étale 位点有限上同调维数的假设所推出的，见 [Mat25，引理 2。23]）和截断情形推出，而后者见 [HHL+25，命题 2。38]。

ν^* 的稳定类比因此也全忠实。现在我们断言，它限制为一个全忠实函子

$$\mathrm{SH}^{S^1}_{\text{ét}}(X) \to \mathrm{SH}^{S^1}_{\text{proét}}(X).$$

换言之，我们必须证明，若 $\mathcal{F}$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-不变的谱层，定义在 Sm_X上，那么$\nu^*\mathcal{F}$ 也是 $\mathbb{A}^1$-不变的。我们首先断言， ν^* 对标准t-结构是t-正合的：由于限制到小位点是t-正合的，且与 ν^*交换，我们只需证明$\nu^*\colon \mathrm{Sh}(T_{\text{ét}},\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Sh}(T_{\text{proét}},\mathrm{Sp})$ 对任意光滑 X-概形 T都是t-正合的。由 [Lura，注1.3.2可得结论。8]。

因此，设 $U = \lim_i U_i$ 是仿射的，且 pro-étale 于某个光滑的 X-概形 T。我们要证明

$$(\nu^*\mathcal{F})(U) \to (\nu^*\mathcal{F})(U \times \mathbb{A}^1)$$

是一个等价。由于 $\nu^*\mathcal{F} \simeq \lim_n \tau_{\le n}\nu^*\mathcal{F}$ 根据 $\mathrm{Sh}^{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_X)$ 的 Postnikov 完备性 [BS15 命题 3.2.3]（这同样是 的一个推论）并且因为 ν^* 与截断可交换，我们可以假设 $\mathcal{F} = \tau_{\le n}\mathcal{F}$。但此时，上述映射可改写为

$$\mathrm{colim}_i(\nu^*\mathcal{F})(U_i) \to \mathrm{colim}_i(\nu^*\mathcal{F})(U_i \times_X \mathbb{A}^1_X);$$

事实上，左侧的公式可通过限制到$\mathrm{Sh}(T_{\text{proét}})$ 来验证，而右侧的公式可通过限制到 $\mathrm{Sh}((\mathbb{A}^1_T)_{\text{proét}})$ 来验证；在这两种情况下，论证都与 [BS15 推论 5.1.6]中相同，该情形对应于阿贝尔群层的导出范畴。因此，我们的映射是一个等价。

现在，只要我们能证明这个方 re

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SH}^{S^1}_{\text{ét}}(X) & \xrightarrow{\nu^*} & \mathrm{SH}^{S^1}_{\text{proét}}(X) \\ {\scriptstyle \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{S}[\mathbb{G}_m],-)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{S}[\mathbb{G}_m],-)} \\ \mathrm{SH}^{S^1}_{\text{ét}}(X) & \xrightarrow[\nu^*]{} & \mathrm{SH}^{S^1}_{\text{proét}}(X) \end{array}$$

以显然的方式交换，定理的断言便形式上成立。也就是说，我们必须证明典范映射

$$\nu^*\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{S}[\mathbb{G}_m],\mathcal{F}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{S}[\mathbb{G}_m],\nu^*\mathcal{F})$$

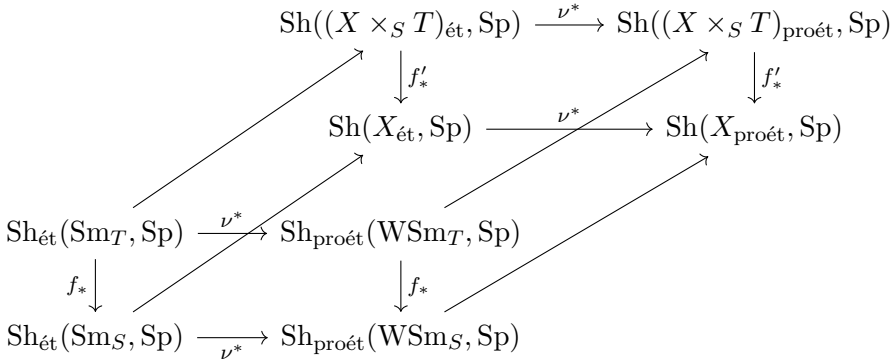
对于任意 F $\in$ SH^{S^1} et (X) 都是等价。请注意，此处的内部 Hom 起初分别取自 SH^{S^1} et (X) 和 SH^{S^1} pro´et(X)，但后者实际上分别与 $\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_X, \mathrm{Sp})$ 和 $\mathrm{Sh}^{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_X, \mathrm{Sp})$ 中的内部 Hom 一致。因此，我们可以在层范畴中论证，而不必在有效动机范畴中论证。于是，由下文的命题 2.6.3 和引理 2.6.4 可得该断言（确实请注意，对于 $f\colon Y \to X$ 光滑映射，$\mathrm{Hom}(\mathbb{S}[Y], -)$ 由伴随和光滑投影公式可知与~~f_*f^*~~ 同构）。 □

命题 2.6.3. 设 S 是一个 *étale* 有界 *qcqs* 概形。设 $f\colon T \to S$ 是概形的一个映射，使得对任意基变换 $f'\colon X \times_S T \to X$ 到光滑 S-概形 X，函子 $f_*\colon \mathrm{Sh}((X \times_S T)_{\text{ét}}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z})$ 具有有限上同调维数。那么该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_T, \mathrm{Sp}) & \xrightarrow{\nu^*} & \mathrm{Sh}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_T, \mathrm{Sp}) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_S, \mathrm{Sp}) & \xrightarrow[\nu^*]{} & \mathrm{Sh}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_S, \mathrm{Sp}) \end{array}$$

交换。

证明。 对于任意光滑映射 $g\colon X \to S$，我们考虑该立方体



其中，对角函子由基变换后再作限制给出。注意，立方体的左侧方块和右侧方块显然可交换。顶面和底面

在空间层的层次上已经可交换，正如我们在定理的证明中所见。由于所有形如 $\mathrm{Sh}^{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_S,\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\mathrm{Sp})$ 的函子（对所有光滑 $g\colon X \to S$）构成的族是保守的，我们只需证明后方方块可交换。我们注意到，对于有界上谱层，通过调整 [BS15 引理 5.4 的证明即可轻松得出这一点。3]。

要推广到所有谱层，请注意，有限性假设意味着水平函子是全忠实的。因此，只需证明 $f_!(\nu^*\mathcal{F})$ 属于 ν^* 的像：事实上，此时 $f_!(\nu^*\mathcal{F}) = \nu^*\nu_*(f_!(\nu^*\mathcal{F}))$，

$$\nu_*(f'_*(\nu^*\mathcal{F}))(U) = f'_*(\nu^*\mathcal{F})(U) = \nu^*\mathcal{F}(f'^{-1}(U)) = \mathcal{F}(f'^{-1}(U)) = f'_*(\mathcal{F})(U)$$

对任意 U étale over X。现在请注意，我们可以将 $\mathrm{Sh}^{\text{proét}}(X,\mathrm{Sp})$ 中由 ν^* 的像所张成的全子范畴，识别为由这类 proétale 层所张成的全子范畴：它们的同伦层根据 [BH21，引理 3.5] 是经典的。因此，尚需证明 $\pi_k(f_!(\nu^*\mathcal{F})) \in \mathrm{Sh}(X_{\text{proét}},\mathrm{Sp})^{\heartsuit}$ 是经典的。由 Postnikov 完备性可知，

$$f'_*(\nu^*\mathcal{F}) = \lim_n f'_*(\nu^*\tau_{\le n}\mathcal{F}).$$

由此可知，逆系统 $(\pi_k f_!(\nu^*\tau_{\le n}\mathcal{F}))_k$ 最终会稳定，因为

$$\nu^* f'_*(\pi_n\mathcal{F}) = f'_*(\nu^*\pi_n\mathcal{F}) = \mathrm{fib}(f'_*(\nu^*\tau_{\le n}\mathcal{F}) \to f'_*(\nu^*\tau_{\le n-1}\mathcal{F}))$$

按照我们的上同调有限性假设，其纤维的连通性会随着 n 增大而趋于无穷。因此，对于 $n \gg 0$，我们有 $\pi_k f_!(\nu^*\mathcal{F}) = \pi_k f_!(\nu^*\tau_{\le n}\mathcal{F})$；后者是经典的，因为 $\tau_{\le n}\mathcal{F}$有上界。 □

引理 2.6.4. 设 S 是一个 *étale* 有界 *qcqs* 概形。则任意有限表示态射 $f\colon X \to S$ 都满足 命题 *2.6.3*的假设。

证明。首先注意，若 $T \to S$ 是任意有限表示映射，则由 [Mat25, 引理 2.24]可知，T 也是 étale 有界的（该结论针对光滑态射，但证明对任意有限表示态射均适用）。特别地，只需证明函子 Rf_* 具有有限上同调维数。此外，由 [CM21, 推论 3.29], 可知，任何有限维 étale 有界 qcqs 概形都具有有限 étale 上同调维数；更进一步，对于任意 $U \to X$ étale，我们有 $\mathrm{DimCoh}(U) \leqslant \sup_{x\in X}\sup_{p\in\mathbb{P}}\mathrm{cd}_p(\kappa(x)) + \dim(X) =: N$。最后，由 [Aut18, 引理 072W], 可知，若 $A \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z})$，则层 $R^i f_* A$是如下预层的层化：该预层将 étale 概形 $V \to S$映至 $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(f^{-1}(V)\ A)$。特别地，对于 $i > N$，我们有 $R^i f_* A = 0$，证明完毕。 □

Remark 2.6.5. 定理 2.6.2 同样适用于 X 是有限维的，且 étale 局部 ，

$$\sup_{x\in X, p\in\mathcal{P}} \mathrm{cd}_p(k(x)) < +\infty$$

其中 $\mathcal{P}$ 是 Λ中不可逆素数的集合。证明过程相同，只需将谱层替换为$\mathcal{P}$-局部谱。事实上，类似的引理 2.6.4 仍可由 [CM21, 推论 329] 以及$\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}},\mathrm{Sp}^{(\mathcal{P})})$ 中对象的 Postnikov 完备性推出；这一性质在定理 2.6.2 和命题 2.6.3 的证明中用到，它可由 [CM21, 定理 428]推出。

推论 2.6.6。 在局部 *étale* 有界的拟紧拟分离概形上，*étale* 动机满足非有效 *pro-étale* 超下降。也就是说，若 $U_\bullet \to X$ 是一个 *pro-étale* 超覆盖，且 X ，并且每个 U_n都是局部 *étale* 有界的；若 $M, N \in \mathrm{SH}_{\text{ét}}(X)$，则映射

$$\mathrm{map}_{\mathrm{SH}_{\text{ét}}(X)}(M, N) \to \lim_{[n]\in\Delta} \mathrm{map}_{\mathrm{SH}_{\text{ét}}(U_n)}(M_{|U_n}, N_{|U_n})$$

是谱的一个等价。对于 $M = \mathbb{S}$ 单位和 $N = H\mathbb{Z}_{\text{ét}}(i)$ 带有 $i \in \mathbb{Z}$ 的扭曲 *étale* 局部动机 *Eilenberg-Mac Lane* 谱，这意味着 *étale* 动机上同调满足 *pro-étale* 下降。

证明。这 在$\mathrm{SH}^{\text{proét}}$ 中，由于 pro-étale 下降，这一结论成立，因此 定理 2.6.2 推出了这一结果 lt. □

3 刚性定理。

本节的主要目标是在我们的语境中证明一个版本的刚性定理，见 定理 3.3.7。在 第 3.1 节中，我们通过将第 *1.4* 节中抽象的 solid 化过程应用于 pro-étale 动机范畴，定义了第 1.4 节的 solid 动机范畴。我们在第 3.2 节中证明 solid pro-étale 层全忠实地嵌入这些范畴，并证明了一个挠系数刚性定理命题 3.2.7。最后，在 第 3.3 节中，$\widehat{\ }$我们证明了一个带 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$系数的刚性定理版本。为此，我们需要对第 3.1 节中引入的范畴进一步局部化，见 定义 3.3.3。作为刚性定理定理 3.3.7的推论，可知在第 1 节中引入的 solid pro-étale 层范畴具有六种运算。

在本节中，我们固定一个是solid $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$代数，X，其中 $\mathcal{P}$ 是一个由素数组成的集合，并且有一个拟紧拟分离概形 X。

3.1 Solid 动机。

定义 3.1.1。 我们将凝聚 presentably monoidal ∞-范畴定义为

$$\underline{\mathrm{D}}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)\colon S \mapsto \mathrm{D}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_{X\times S}, \Lambda)$$

$$\underline{\mathrm{D}}^{\mathbb{A}^1}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)\colon S \mapsto \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_{X\times S}, \Lambda)$$

$$\underline{\mathrm{DM}}_{\text{proét}}(X, \Lambda)\colon S \mapsto \mathrm{DM}_{\text{proét}}(X \times S, \Lambda)$$

X 上的 ∞类*solid* $\mathbb{A}^1$-不变层 定义为

$$\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare} := \underline{\mathrm{D}}^{\mathbb{A}^1}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare}(*).$$

我们还定义一个 Tate 稳定版本，即

$$\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare} := \underline{\mathrm{DM}}_{\text{proét}}(X, \Lambda)^{\blacksquare}(*).$$

最后，我们设

$$\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare} := \underline{\mathrm{D}}_{\text{proét}}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare}(*).$$

备注 3.1.2。 以上所有范畴都与相应范畴中以 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$为系数的 Λ-模一致$\widehat{\ }$。

定理 3.1.3。 函子 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_{(-)}, \Lambda)^{\blacksquare}$: 概形$^{\mathrm{op}} \to$ 交换代数对象$(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$ 是不稳定 *qcqs* 动机系数系统。更明确地说，我们有以下性质

1. 对于每个弱光滑映射 $f\colon\ X \to Y$，函子 f^* 有一个与基变换相容的 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_Y, \Lambda)^{\blacksquare}$-线性左伴随。

2. 对于任意概形 X，函子 $\mathrm{pr}_1^*\colon \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_{X\times\mathbb{A}^1}, \Lambda)^{\blacksquare}$ 是全忠实的。

3. 对于任意闭浸入 $i\colon\ Z \to X$，若其开补集 $j\colon\ U \to X$是 *qcqs* 的，则典范方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_U, \Lambda)^{\blacksquare} & \xrightarrow{j_\sharp} & \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i^*} \\ * & \longrightarrow & \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_Z, \Lambda)^{\blacksquare} \end{array}$$

在Pr^{L} 中是余笛卡尔的。

对于 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_{(-)}, \Lambda)^{\blacksquare}$，同样成立。

证明。 我们先来证明 1。将定义 3.1.1 中的记号推广到任意凝聚 $\mathbb{E}_\infty$-代数，我们看到，对于弱光滑映射 $f\colon\ X \to S$，我们有一个凝聚伴随

$$f_\sharp\colon \underline{\mathrm{D}}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \mathrm{Sp}) \leftrightarrows \underline{\mathrm{D}}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_S, \mathrm{Sp})\colon f^*$$

在 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$ 中，左伴随 $f_\sharp$ 与基变换相容。利用引理 1.4.12，可知函子 $f^*\colon \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_S, \Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare}$ 的左伴随由 $f_\sharp^{\blacksquare} = (f_\sharp \otimes^{\mathrm{cond}} \text{固体}_\Lambda)(*)$ 给出。因此，与基变换的相容性立即由 $- \otimes -$ 的双函子性推出。为证明 $f_\sharp^{\blacksquare}$ 满足投影公式，注意到根据 [HHLN23，命题 A]，存在一个典范比较映射

$$f_\sharp^{\blacksquare}(F \otimes f^*G) \to f_\sharp^{\blacksquare}(F) \otimes G$$

现在只需证明它是一个等价。为此，注意到这里涉及的所有函子都通过先应用其非固体版本、再进行固化而得到，因此该断言由 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \mathrm{Sp})$ 的投影公式推出。

现在证明 2。与之前类似，伴随 $p_\sharp \dashv p^*$ 提升为 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$ 中的一个伴随，其中右伴随是全忠实的。因此，利用$- \otimes^{\mathrm{cond}} \mathrm{Solid}_\Lambda$ 并应用注 1.4.11，应用

最后，对于 3.，我们注意到，在应用 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$ 之前，我们有一个类似的余笛卡尔方块 $-\otimes^{\mathrm{cond}}\mathrm{Solid}_\Lambda$，根据 定理 2.3.1。由于后一个函子是左伴随，它保留余笛卡尔方块，因此利用引理 1.4.7即可得到断言。 □

3.2 将固化层嵌入固化动机

现在我们证明，固化层全忠实地嵌入到我们所考虑的 solid 动机范畴中。

引理 3.2.1. 考虑凝聚范畴的全忠实函子

$$\rho_\sharp \colon \underline{\mathrm{Sh}}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) \to \underline{\mathrm{Sh}}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_X).$$

那么，该函子是凝聚右伴随。

证明。根据命题 1.4.5，我们需要证明：对于任意 profinite 集 K，函子

$$\rho_\sharp \colon \mathrm{Sh}((X \times K)_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_{X\times K})$$

保持所有极限，并且对于任意映射 $\alpha\colon\ K \to K'$ 副有限集的，交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}((X \times K')_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) & \xrightarrow{\rho_\sharp} & \mathrm{Sh}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_{X\times K'}) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & {\scriptstyle \alpha^*}\downarrow \\ \mathrm{Sh}((X \times K)_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) & \xrightarrow[\rho_\sharp]{} & \mathrm{Sh}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_{X\times K}) \end{array}$$

在水平方向上是左伴随可交换的，或者等价地，在垂直方向上是右伴随可交换的。

为此，我们考虑到任意小 proétale 位点 $\mathrm{Sh}(Y_{\mathrm{pro\acute{e}t}})$ 的限制函子，其中$f\colon\ Y \to X \times K$ 弱光滑，并考虑复合方块

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sh}((X \times K')_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) & \xrightarrow{\rho_\sharp} & \mathrm{Sh}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_{X\times K'}) & \xrightarrow{\mathrm{res}_{Y'}} & \mathrm{Sh}((Y')_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & {\scriptstyle \alpha_Y^*}\downarrow \\ \mathrm{Sh}((X \times K)_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) & \xrightarrow[\rho_\sharp]{} & \mathrm{Sh}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_{X\times K}) & \xrightarrow[\mathrm{res}_Y]{} & \mathrm{Sh}(Y_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) \end{array}$$

其中我们记 $Y' = Y \times_{(X\times K')} (X \times K)$。注意，对于所有 Y，函子族 res_Y 是联合保守的。由于 res_Y 与所有极限交换，且有 $\mathrm{res}_Y \circ \ \rho_\sharp \simeq f^*$，根据引理 1.1.7，可知 $\rho_\sharp$ 逐点与极限交换。类似地，在对所有 Y 应用 res_Y 后，我们可以检验上方左方形的垂直右伴随可交换性。现在注意到，右方形显然水平左伴随可交换，因此垂直右伴随可交换。因此，只需证明复合方形的垂直右伴随可交换性。通过恒等式 $\mathrm{res}_Y \circ \ \rho_\sharp \simeq f^*$，这由整基变换 [HHL+25、命题 6.18]，得出，正如引理 1.4.15 的证明中所述。

□

推论 3.2.2。 对于任意 $\mathcal{C}\ \in \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$，函子

$$\underline{\mathrm{Sh}}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) \otimes^{\mathrm{cond}} \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Sh}}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{WSm}_X) \otimes^{\mathrm{cond}} \mathcal{C}$$

是一个全忠实的凝聚右伴随。

证明。 由 引理 3.2.1，函子$\rho_\sharp$ 具有一个凝聚左伴随。该引理随后由引理 1.4.14得证。

□

3.2.3. 作为上述推论的一个特例，我们得到一个全忠实且保持极限的函子

$$\rho_\sharp^{\blacksquare} \colon \mathrm{D}(X, \Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare}$$

通过令 $\mathcal{C}\ =$固体$_\Lambda$ 并在 $*$处求值。

注记 3.2.4. 注意，典范方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}(\mathrm{WSm}_{X\times\mathbb{A}^1},\Lambda)^{\blacksquare} & \longrightarrow & \mathrm{D}(\mathrm{WSm}_{X\times\mathbb{A}^1},\Lambda) \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1^*} \\ \mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare} & \longrightarrow & \mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda) \end{array}$$

其中水平映射是由引理 1.4.14给出的包含映射，且图表交换。事实上，取左伴随后得到的方形图交换，因为$(\mathrm{pr}_1)_\sharp$ 与固化相容。因此， $F\in\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$属于 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$当且仅当典范映射$F(Y)\to F(Y\times\mathbb{A}^1)$ 对任意弱光滑的 Y在 X之上都是等价。

推论 3.2.5。 假设 P 中的所有素数在 X 上均可逆。那么，全忠实函子 $\rho_\sharp^{\blacksquare}$:$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}\to \mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$ 可经由全子范畴 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$分解。

证明。 我们不妨假设 $\Lambda=\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$。注意这个方形图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} & \xrightarrow{\rho_\sharp^{\blacksquare}} & \mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{D}(X_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow[\rho_\sharp]{} & \mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}) \end{array}$$

交换，因为它是将$\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$ 中的一个伴随与 $\mathrm{Solid}^{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}}$ 张量化得到的（参见命题 1.4.17的证明）。因此，我们需要验证，对于 $F\in\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 典范映射

$$\rho_\sharp(F)(Y)\to\rho_\sharp(F)(Y\times\mathbb{A}^1)$$

对任意 $f\colon Y\to X\in\mathrm{WSm}_X$，这是一个等价。此映射与典范映射 $f^*F(Y)\to\mathrm{pr}_1^*f^*F(Y\times\mathbb{A}^1)$ 相同；由于根据命题 1.2.11， f^*F 是固体的，我们可以假设 $Y=X$。由于 pr_1^* 根据命题 1.2.11 与极限交换，我们可以利用 Postnikov 完备性，假设 F 有下界；然后通过谱序列论证，可进一步归约到 F 属于心。接着，根据定理 1.2.8，可将问题归约到 F 属于 $\mathrm{Pro}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{cons}}_{\mathcal{P}}(X_{\acute{e}t}))$，再进一步归约到属于 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{cons}}_{\mathcal{P}}(X_{\acute{e}t})$；此时结论由 [sga72, 第十五专题, 推论 2.2] 得出。 □

定理 3.2.6. 假设 P 中的所有素数在 X 上均可逆。那么，函子

$$\rho_\sharp^{\blacksquare}\colon\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}\to\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$$

的 推论 *3.2.5* 是全忠实的，与所有小余极限和极限、所有拉回以及 $f_\sharp$ 与 f 弱 *étale* 的交换性成立。

证明。 与余极限的交换性是形式上的（我们取的是 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{cond}}$ 中一个映射的整体截面），与极限的交换性由 3.2.3 得出。与拉回以及$f_\sharp$ 对于 f 弱 étale 的交换性，在固化并取整体截面之前的凝聚层面上成立，因此固化后仍然成立。 □

由此，我们可以推出挠系数的凝实刚性定理。

命题 3.2.7。 设 $n \in \mathbb{N}$ 在 X上可逆。假设 Λ 是一个 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-代数。那么，函子

$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$$

都是等价。

证明。 只需处理 $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的情形。利用来自有效 étale 动机的函子可知，在 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\blacksquare}$ 中，Tate 扭曲已经可逆，因此该函子

$$\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\blacksquare} \to \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\blacksquare}$$

是等价 。因此，利用 定理 3.2.6，剩下唯一需要证明的是该函子

$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$$

在已知其全忠实的情况下是本质满射。因此，我们只需证明，在余极限下生成目标范畴的对象族都属于其像。对于 f 弱光滑， $f_\sharp(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 生成 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\blacksquare}$。在源上 Zariski 局部地，这样的 f 可以写成如下复合

$$U \xrightarrow{g} \mathbb{A}^n_X \xrightarrow{j} \mathbb{P}^n_X \xrightarrow{p} X$$

其中 g 弱 étale， j 为典范开浸入，而 p 为典范投影（此处只需使用引理 2.1.7 并将典范投影 $\mathbb{A}^n_X \to X$分解）；由于 $j \circ g$ 仍为弱 étale，我们看到 f 在源上 Zariski 局部地具有如下形式

$$U \xrightarrow{h} \mathbb{P}^n_X \xrightarrow{p} X$$

且 h弱 étale。因此，上述 p 和 h 的 $p_\sharp h_\sharp(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 生成 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\blacksquare}$。但互反性（推论 2.4.10）保证了$p_\sharp \simeq p_*(n)[2n]$，因此 $p_* h_\sharp(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 生成 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\blacksquare}$。

注意，现在两边对有限表示态射都有真基变换，这由 命题 1.3.6 和 命题 2.5.1可知。这形式上意味着 p_* 与 $\rho_\sharp^{\blacksquare}$交换：事实上，我们有一个交换态射 $\rho_\sharp^{\blacksquare} p_* \to p_* \rho_\sharp^{\blacksquare}$，如 [CD16, 4.4 节2] 所示；我们可以通过取 $\mathrm{Hom}(g_\sharp(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\ -)$ 来检验它是否为同构，其中 g 在 X上弱 étale；证明与 [CD16，命题 4.43] 中的证明相同。既然我们已经知道 $h_\sharp$ 与 $\rho_\sharp^{\blacksquare}$ 交换，就可以得到生成元，从而完成证明。 □

3.3 刚性定理

现在我们的目标是证明刚性定理。正如我们所见，$\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_{(-)}, \Lambda)^{\blacksquare}$和 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_{(-)}\ \Lambda)^{\blacksquare}$ 都是不稳定 qcqs 动机系数系统。刚性将推出 Tate 稳定性。为了实现这一点，我们进一步将 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_{(-)}, \Lambda)^{\blacksquare}$对某个映射集进行局部化。为了确认这一过程仍能得到不稳定 qcqs 动机系数系统，我们首先需要了解一些一般理论。

设 $\mathcal{C}$: Sch $\to$ CAlg(Pr^{L}) 是一个不稳定 qcqs 动机系数系统。固定 T in $\mathcal{C}$(Spec($\mathbb{Z}$)) 中的一小族态射。于是我们可以定义一个诱导函子 $\mathcal{C}_T$: Sch $\to$CAlg(Pr^{L})，如下所示：

$$f\colon Y \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \mapsto \mathcal{C}_T(Y) \coloneqq \mathcal{C}(Y)[\{f^*\lambda \otimes M \mid \lambda \in T; M \in \mathcal{C}(Y)\}^{-1}].$$

注记 3.3.1。 注意，存在一个函子自然等价

$$\mathcal{C}_T \simeq \mathcal{C}(-) \otimes_{\mathcal{C}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}))} \mathcal{C}_T(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})).$$

命题 3.3.2。 在上述设定中，$\mathcal{C}_T$ 也是一个不稳定拟紧拟分离动机系数系统。

证明。 一旦认识到，作为不稳定拟紧拟分离动机系数系统的所有性质都是 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathcal{C}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}))}$内部的性质，这一点便显而易见。由于函子 $- \otimes_{\mathcal{C}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}))} \mathcal{C}_T(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}))$ 是一个 $(\infty, 2)$-函子（[HSS17，第 4 节4]），断言得证。 □

回顾一下， $\Pi\mathcal{P}$ 是仅能被$\mathcal{P}$中的素数整除的整数集合。

定义 3.3.3。 在 X 上的有效凝固动机 的 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(X, \Lambda)^{\blacksquare}$范畴，是将 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare}$这个 ∞ 范畴对以下映射进行局部化所得：

$$\Lambda[\mathbb{G}_{mX}] \otimes_{\Lambda} \Lambda[Y] \simeq \Lambda[\mathbb{G}_{mY}] \to (\lim_{n \in \Pi\mathcal{P}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\mathbb{G}_{mX}]) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}} \Lambda[Y]$$

其中 Y 在 X 上弱光滑。

注记 3.3.4。 1. 注意，由命题 3.2.7可知，对象 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\mathbb{G}_{mX}]$ 实际上属于函子 $\rho_\sharp^{\blacksquare}$的像。此外，由于 $\rho_\sharp^{\blacksquare}$ 依照 3.2.3与极限可交换，我们看到 $\lim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\mathbb{G}_{mX}]$ 仍属于 $\rho_\sharp^{\blacksquare}$的像。利用在小 pro-étale 位点上拉回与所有极限可交换这一点，我们看到所取逆的映射在拉回下稳定。

2. 还需注意，事实上，若 f 是一个被我们求逆的映射，且 M 是任意对象，那么映射 $f \otimes \mathrm{Id}_M$ 也会被求逆。特别地，局部化函子是对称幺半的。

注记 3.3.5. 假设 P 中的所有素数在 X 上都可逆。由 [CD16, 命题 3.2.2] ，我们有 $\mathbb{Z}(1)[1] \simeq \mathbb{G}_m$ in $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \ \mathbb{Z})$。因此，对于 $n \in \Pi\mathrm{P}$，经典 Kummer 正合列给出 $\mathbb{Z}(1)[1]/n \simeq \mu_n[1]$ （见 [CD16, 3.2]）。特别地，对于所有 $n \in \Pi\mathrm{P}$，我们得到映射 $\mathbb{Z}(1) \to \mu_n$。由于两边在拉回下都稳定，这些映射在任意概形 X 上都存在。它们在 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare}$ 中的像取极限后给出一个映射

$$\Lambda(1) \to (\lim_{n \in \Pi\mathcal{P}} \mu_n) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}} \Lambda.$$

因此，在 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare}$ 中，映射

$$\Lambda[\mathbb{G}_{mX}] \otimes_{\Lambda} \Lambda[Y] \to (\lim_{n \in \Pi\mathcal{P}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\mathbb{G}_{mX}]) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}} \Lambda[Y]$$

我们要将其求逆的映射实际上可以写成

$$\Lambda \oplus \Lambda(1)[1] \to (\lim_{n \in \Pi\mathcal{P}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \lim_{n \in \Pi\mathcal{P}} \mu_n) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}} \Lambda[Y].$$

我们有 $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}} = \lim_{n \in \Pi\mathcal{P}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，在 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 中成立，因为这在小位点上成立，而且 $\rho_\sharp^{\blacksquare}$ 与极限交换。此外， μ_n 来自小 étale 位点，而极限 $\lim_{n \in \Pi\mathcal{P}} \mu_n$ 在小 pro-étale 位点中由 $\mu_{\infty,\mathcal{P}}$ 表示。这证明，我们的局部-化也是 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X, \Lambda)^{\blacksquare}$ 在这些映射处的局部化

$$M(1) \to M \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}} \mu_{\infty,\mathcal{P}}$$

对所有 M。

上述讨论特别表明，该函子

$$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(-,\Lambda)^{\blacksquare}\colon \mathrm{Sch}\to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$$

如命题 3.3.2中所述，对于映射 $\Lambda[\mathbb{G}_{m\mathbb{Z}}]\to(\lim_{n\in\Pi\mathcal{P}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\mathbb{G}_{m\mathbb{Z}}])\otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}}\Lambda$.

命题 3.3.6。 函子 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(-,\Lambda)^{\blacksquare}$ 是一个拟紧拟分离动机系数系统。因此，我们在 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(-,\Lambda)^{\blacksquare}$ 上拥有 定理 *2.5.4*意义下的六种运算。

证明。 唯一不能由 命题 3.3.2 推出的是 Tate 稳定性，但它确实成立，因为在 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(-,\Lambda)^{\blacksquare}$ 中，Tate 扭曲按定义等价于 $\mu_{\infty,\mathcal{P}}\otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}}\Lambda$，而后者由 引理 1.3.8可知是可逆的。 □

现在陈述我们的第一个刚性结果：

定理 3.3.7。 假设所有素数 P 在 X 上均可逆。那么，函子$\rho_\sharp^{\blacksquare}\colon \mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}\to\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$ 诱导出一个等价

$$\mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}\to\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda)^{\blacksquare}.$$

特别是， $D(-,\Lambda)^{\blacksquare}$ 按照定理 *2.5.4*所述，带有六函子 .

^证明。我们可以假设 $\Lambda=\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$。为证明完全忠实性，我们需要证明，对于任意$\mathcal{F}\in\mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$，典范映射

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}}(\lim_{n\in\Pi\mathcal{P}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\mathbb{G}_{mX}],\rho_\sharp^{\blacksquare}\mathcal{F})\to\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathbb{G}_m],\rho_\sharp^{\blacksquare}\mathcal{F})$$

是一个等价。由于 $\rho_\sharp^{\blacksquare}$ 与极限交换，我们可以将 F 替换为 $\tau_{\leq n}$F。我们断言，两边都保持关于 F 的滤过余极限。对于定义域，这立刻由对象 $\lim_{n\in\Pi\mathcal{P}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\mathbb{G}_{mX}]$ 在 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 中可对偶得出，这一点由注记 3.3.5 和 ^引理 1.3.8 可知。对于陪域，我们注意到，由于局部化函子 $\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\mathbb{Z}_{\mathcal{P}})\to\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}$ 是对称幺半的，因此我们有

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathbb{G}_m],\rho_\sharp^{\blacksquare}\mathcal{F})\simeq\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathbb{G}_m],\iota\rho_\sharp^{\blacksquare}\mathcal{F})$$

其中，我们用 $\iota\colon \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\ \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}\to\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\ \widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$ 表示包含映射。要检验其与滤过余极限的相容性，只需证明函子

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathbb{G}_m],\rho_\sharp^{\blacksquare}\tau_{\leq n}(-))\colon \mathrm{D}(X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}\to\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})$$

^与滤过余极限交换。我们可以在从 $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}[W]$ 映射出去后验证这一点，其中 w-^ 是一个可缩的弱光滑概形，因为这些对象（及其平移）紧生成 $\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\ \mathbb{Z}_{\mathcal{P}})$。记 $p\colon W\to X$ 为结构映射， $\pi\colon W\times\mathbb{G}_m\to W$ 为投影，则得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[W],\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_X,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathbb{G}_m],\rho_\sharp^{\blacksquare}\tau_{\leq n}(-)))\\ \simeq&\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_W,\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}[\mathbb{G}_m],p^*\rho_\sharp^{\blacksquare}\tau_{\leq n}(-))\\ \simeq&\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{WSm}_{\mathbb{G}_m\times W},\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}})^{\blacksquare}}(\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}},\pi^*p^*\rho_\sharp^{\blacksquare}\tau_{\leq n}(-))\end{aligned}$$

注意，现在两边都属于$\rho_\sharp^{\blacksquare}$的像，因为$\rho_\sharp^{\blacksquare}$与拉回交换。因此断言可由 [HRS23，引理 53]。

因此，我们可以归结为$\mathcal{F}$ 有界的情形；于是通过 dévissage，又可归结为 $\mathcal{F}$ 集中在一个次数的情形。再次利用 定理 1.2.8以及与滤过余极限的交换性，我们可以归结为$\mathcal{F}$ 是挠的情形，此时断言显然成立。本质满射性的证明与 命题 3.2.7中的证明完全相同。 □

最后，我们定义凝固动机范畴，并证明它与有效凝固动机范畴相同。

定义 3.3.8。 我们将*solid* 动机 $\mathrm{DM}(X,\Lambda)^{\blacksquare}$ 定义为 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$ 在以下映射处的局部化

$$M(1) \to M \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathcal{P}}} \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}\mu_{\infty,\mathcal{P}}$$

对所有 M 均成立。

命题 3.3.9。 典范函子

$$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \to \mathrm{DM}(X,\Lambda)^{\blacksquare}$$

是一个等价。

证明。 只需证明 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$ 是 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$的 $\mathbb{G}_m$-稳定化。事实上，这样一来，这两个范畴就具有相同的泛性质，都是可呈示的对称幺半 ∞-范畴，因为$\mu_{\infty,\mathcal{P}}$ 在小 pro-étale 位点中已经是 $\otimes$-可逆的。

对象 $\Lambda(1)$ 在 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$中是对称的，因为它是 $\mathbb{Z}(1)$ 中的对象 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{et}}(\mathrm{Sm}_X,\mathbb{Z})$ 的像，而根据 [Voe98，引理 4，该对象已是对称的。4]。因此，我们可以将 $\mathbb{G}_m$-稳定化计算为下列图表的余极限：

$$\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare} \xrightarrow{-\otimes_\Lambda\Lambda(1)} \mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare} \xrightarrow{-\otimes_\Lambda\Lambda(1)} \cdots .$$

另一方面，我们有一个从下列图表的余极限出发的自然映射

$$\underline{\mathrm{D}}^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{proét}}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda) \xrightarrow{-\otimes_\Lambda\Lambda(1)} \underline{\mathrm{D}}^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{proét}}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda) \xrightarrow{-\otimes_\Lambda\Lambda(1)} \cdots$$

到 $\underline{\mathrm{DM}}^{\mathrm{proét}}(X,\Lambda)$。这个映射是一个等价，因为对任意 profinite 集 S 取截面与余极限相容（参见 [MW24，命题 2.6.3.2] 在凝聚 S-范畴上的证明），而在 S 上，根据定义这也成立。由于凝聚张量积在每个变量上都与小余极限相交换，且整体截面函子与余极限相交换，这意味着 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$确实是 $\mathrm{D}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{WSm}_X,\Lambda)^{\blacksquare}$的 $\mathbb{G}_m$-稳定化，证明完毕。 □

定理 3.3.10。 所得的实现函子

$$\rho_{\blacksquare}\colon \mathrm{DM}_{\mathrm{proét}}(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{DM}(X,\Lambda)^{\blacksquare} \simeq \mathrm{D}(X,\Lambda)^{\blacksquare}$$

是拟紧拟分离 6-函子形式体系在 *qcqs* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/P])$-概形上的一个态射。也就是说，对于 g 一个拟紧拟分离概形的有限表示态射，它与 f^*、$\otimes$ 和 $g_!$ 交换。

证明。根据构造，函子 $\rho_{\blacksquare}$ 是拟紧拟分离动机系数系统的一个态射。特别地，对于概形的每个映射 f，它与函子 f^* 交换；它还与 $\otimes$ 交换；并且当f 是概形的光滑映射时，它与 $f_\sharp$ 交换（事实上，很明显，对于 j 一个弱 étale 映射，它也与 $j_\sharp$ 交换）。利用局部化三角，我们看到，对于拟紧拟分离概形的 i 一个有限表示闭浸入，它也与 i_* 交换。利用互反性，便可得出，对于拟紧拟分离概形之间任意有限表示射影态射，它与 p_* 交换。利用精细 Chow 引理（[Aut18，引理 2020]），这意味着，对于拟紧拟分离概形之间 p任意有限表示的适当映射，它与 p_* 交换。因此，对于拟紧拟分离概形的任意有限表示态射，函子 $\rho_{\blacksquare}$ 与 $f_!$ 交换。为了得到六函子形式体系的一个态射，可以利用这样一个事实： [CLL25，定理 4.35] 是范畴等价，特别是它具有函子性，因此 $\rho_{\blacksquare}$ 可提升为对应范畴上函子之间的一个自然变换。 □

命题 3.3.11. 设 X 是一个其上 ℓ 可逆的拟紧拟分离概形。则复合

$$\rho_{\blacksquare}\colon \mathrm{DM}_{\text{ét,gm}}(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{DM}_{\text{proét}}(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}(X,\mathbb{Z}_\ell)^{\blacksquare}$$

落在范畴 $\mathrm{D}^b_c(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}_\ell)$ 中，并且与 ℓ-进实现函子一致，该函子定义于*[CD16]*。

证明。由 [RT24a，推论 3.7], 可知，对任意对象 $M \in \mathrm{DM}_{\text{ét,gm}}(X,\mathbb{Z})$，存在一个分层，使得 M 可对偶。我们断言，这意味着 $\rho_{\blacksquare}(M)$ 是 ℓ-完备的。事实上，$\mathrm{D}(X,\mathbb{Z}_\ell)^{\blacksquare}$ 中的任意可对偶对象都是 ℓ-完备的，因为单位是完备的；再结合引理 1.1.6 以及拉回函子保持极限这一事实，即可得出结论。因此，要证明 $\rho_{\blacksquare}(M)$ 是 $\mathrm{D}^b_c(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}_\ell)$ 中的一个对象，只需验证对所有 $n \in \mathbb{N}^*$，对象 $\rho_{\blacksquare}(M)/\ell^n = \rho_{\blacksquare}(M/\ell^n)$ 都是一个由挠构造 étale 层组成的有界复形。这意味着，我们已将问题归结为证明该函子的像

$$\mathrm{DM}_{\text{ét,gm}}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{-/\ell^n} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}}(\mathrm{DM}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z})) \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}}(\mathrm{D}(X,\mathbb{Z}_\ell)^{\blacksquare})$$

lands in $\mathrm{D}^b_c(X_{\text{ét}},\ \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$。但利用 étale 动机的刚性（[BH21]），函子 r

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}}(\mathrm{DM}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z})) \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}}(\mathrm{D}(X,\mathbb{Z}_\ell)^{\blacksquare})$$

可以识别为函子

$$\mathrm{D}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}(X,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^{\blacksquare}.$$

根据 命题 1.3.9，上述函子经过左完备化后是全忠实的，特别是，它在有界对象上是全忠实的。由于 M 的像于是成为$\mathrm{D}(X_{\text{ét}},\ \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$中的可对偶对象，我们得出它是一个由可构造 étale 层组成的有界复形。

现在我们证明 $\rho_{\blacksquare}$ 与函子 ρ_ℓ （来自 [CD16]）相同。回想一下，后者是将 ℓ完备化函子限制到可构造动机上所得的函子

$$\mathrm{DM}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{DM}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z})^\wedge_\ell \simeq \mathrm{D}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z})^\wedge_\ell.$$

此外，由于

$$\mathrm{D}^b_c(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}_\ell) \simeq \lim_n \mathrm{D}^b_c(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

根据 [HRS23</style}，定理 7.只需证明，对于每个，函子 $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}_c^b(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ 彼此等价，且这种等价与 n 相容。这一点已在上一段证明：我们已证明，对于 $M \in \mathrm{DM}_{\text{ét},\mathrm{gm}}(X,\mathbb{Z})$，对象 $\rho_{\blacksquare}(M)/\ell^n$ 不过就是 $M/\ell^n \in \mathrm{D}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$。 □

推论 3.3.12. 我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DM}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho_{\blacksquare}} & \mathrm{D}(X,\mathbb{Z}_\ell)^{\blacksquare} \\ \downarrow{\scriptstyle \otimes\mathbb{Q}} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes\mathbb{Q}} \\ \mathrm{DM}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow[\rho_{\blacksquare}]{} & \mathrm{D}(X,\mathbb{Q}_\ell)^{\blacksquare} \end{array}$$

由对称幺半左伴随函子组成，并限制为经典交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DM}_{\text{ét},\mathrm{gm}}(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho_\ell} & \mathrm{D}_c^b(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}_\ell) \\ \downarrow{\scriptstyle \otimes\mathbb{Q}} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes\mathbb{Q}} \\ \mathrm{DM}_{\text{ét},\mathrm{gm}}(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow[\rho_{\mathbb{Q}_\ell}]{} & \mathrm{D}_c^b(X_{\text{ét}},\mathbb{Q}_\ell) \end{array},$$

其中 ρ_ℓ 是 ℓ-进实现函子，对应于 *[CD16]*；而 $\rho_{\mathbb{Q}_\ell}$ 是 $\mathbb{Q}_\ell$-进实现函子，对应于 *[RS20, 2.1。2]*。

证明。 第一个交换方块形式上存在。它限制为第二个交换方块这一点可由以下方式看出。我们已经看到，将 $\rho_{\blacksquare}$ 限制到 $\mathrm{DM}_{\text{ét},\mathrm{gm}}(X,\mathbb{Z})$ 所得的函子是 ρ_ℓ。关于垂直函子的断言是形式上的。对于较低的水平函子，这由定义（作为 ρ_ℓ的有理化）以及 [HS23, 推论 24]。 □

注 3.3.13。 对于特征零概形，上述推论 3.3.12 也成立^，其中采用 $\mathbb{Z}$ 和有限阿代尔环 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}$ 代替 $\mathbb{Z}_\ell$ 和 $\mathbb{Q}_\ell$。通过使用右伴随并做一些工作，可以由此得到代数 $\mathscr{N} \in \mathrm{DM}^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})\ \mathbb{Z})$ 的另一种定义，使得其上的模就是 Nori 动机，如 [RT24b] 所研究的那样。在后续工作中，我们计划研究本文构造的谱类比，从而导出谱 Nori 动机的定义。

参考文献

[AE17] Benjamin Antieau 和 Elden Elmanto。不稳定动机同伦论入门。载于代数几何最新进展综述。*2015* 年夏季代数几何研究所训练营，犹他大学，美国犹他州盐湖城，*2015* 年 *7* 月 *6* 日至 *10* 日，第 305–370 页。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会（AMS），2017 年。[AGV22] Joseph Ayoub、Martin Gallauer 和 Alberto Vezzani。刚性解析动机的六函子形式体系。《数学论坛 *Sigma*》，10：论文编号 e61，共 182 页，2022 年。[AI 22] Toni Annala 和 Ryomei Iwasa。动机谱与 K-理论的普适性。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2204.03434，2022 年。

[Aut18] Stacks Project 作者。Stacks 项目，2018 年。https://stacks.math.columbia.edu/.[Ayo07a] Joseph Ayoub。动机世界中的 Grothendieck 六种运算与消失循环形式体系。I。Astérisque，314:x+466，2007 年。[Ayo07b] Joseph Ayoub。动机世界中的 Grothendieck 六种运算与消失循环形式体系。II。Astérisque，315:x+370，2007 年。[Ayo14] Joseph Ayoub。étale 实现与 Grothendieck 运算。Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)，47(1):1–145，2014 年。[BBD82] A. A. Beilinson、J. Bernstein 和 P. Deligne。周 pervers 层。载于《奇异空间上的分析与拓扑 I》（Luminy，1981），Astérisque 第 100 卷，第 5–171 页。法国数学会，巴黎，1982 年。[BH21] Tom Bachmann 和 Marc Hoyois。关于 étale 动机稳定同伦理论的评论。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2104.06002，2021 年。[BS15] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze。概形的 pro-étale 拓扑。载于《从代数几何到自守形式（I）：纪念 Gérard Laumon 六十华诞论文集》，第 99–201 页。巴黎：法国数学会（SMF），2015 年。[CD16] Denis-Charles Cisinski 和 Frédéric Déglise。Étale 动机。Compos. Math.，152(3):556–666，2016 年。[CD19] Denis-Charles Cisinski 和 Frédéric Déglise。混合动机的三角范畴。数学 Springer 专著。Springer，Cham，2019 年。[Cis25] Denis-Charles Cisinski。动机层的完备化。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2503.24033，2025 年。[CLL25] Bastiaan Cnossen、Tobias Lenz 和 Sil Linskens。span 2-范畴的普适性与六函子形式体系的构造，2025 年。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2505.19192。[CM21] Dustin Clausen 和 Akhil Mathew。超下降与 étale K-理论。Invent. Math.，225(3):981–1076，2021 年。[Cno23] Bastiaan Cnossen。等变同伦理论中的扭曲的左右对称性。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2303.00736，2023 年。[Con07] Brian Conrad。Deligne 关于 Nagata 紧化的笔记。J. Ramanujan Math. Soc.，22(3):205–257，2007 年。[CS21] Dustin Clausen 和 Peter Scholze。凝聚数学讲义，2021 年。见 https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf。

[DG22] Brad Drew 和 Martin Gallauer。《万有六函子形式体系》。《Ann. K- Theory》，7(4):599–649，2022。[Eke90] Torsten Ekedahl。《关于 adic 形式体系》。《格罗滕迪克纪念文集：纪念 A. Grothendieck 六十寿辰的论文集》，第 II 卷，《数学进展》87，197–218，1990。[FS24] Laurent Fargues 和 Peter Scholze。《局部 Langlands 对应的几何化》。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2102.13459，2024。[HHL+25] Peter J. Haine、Tim Holzschuh、Marcin Lara、Catrin Mair、Louis Martini 和 Sebastian Wolf。《概形的凝聚同伦型》。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2510.07443，2025。附录由 Bogdan Zavyalov 撰写。[HHLN23] Rune Haugseng、Fabian Hebestreit、Sil Linskens 和 Joost Nuiten。《松幺半群伴随、双变量纤维化与伴随态射演算》。《伦敦数学会会刊》(3)，127(4):889–957，2023。[HM24] Claudius Heyer 和 Lucas Mann。《六函子形式体系与光滑表示》，2024。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2410.13038。[Hoy17] Marc Hoyois。《等变动机同伦论中的六种运算》。《数学进展》，305:197–279，2017。[HRS23] Tamir Hemo、Timo Richarz 和 Jakob Scholbach。《概形上的可构造层》。《数学进展》，429:论文编号 109179，共 46 页，2023。[HS23] David Hansen 和 Peter Scholze。《相对偏 perversity》。《美国数学会通讯》，3:631–668，2023。[HSS17] Marc Hoyois、Sarah Scherotzke 和 Nicolò Sibilla。《高阶迹、非交换动机与范畴化陈特征》。《数学进展》，309:97–154，2017。[Kha16] Adeel Khan。《导出代数几何中的动机同伦论》。博士论文，杜伊斯堡-埃森大学，2016。[Kha21] Adeel A. Khan。《可构造系数范畴的 Voevodsky 判据》。见 https://www.preschema.com/papers/six.pdf，2021。[Kha24] Adeel A. Khan。《cdh-局部动机同伦范畴》。《纯粹与应用代数杂志》，228(5):6，2024。文章编号 107562。[KS06] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira。《范畴与层》，《数学科学基础丛书》第 332 卷。施普林格出版社，柏林，2006。[Lura] Jacob Lurie。《谱代数几何》。见 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。

[Lurb] Jacob Lurie。《超范畴》。预印本，见 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/Conceptual.pdf。[Lur09] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》，《数学年刊研究》丛书第 170 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009。[Lur22] Jacob Lurie。《高等代数》。见 https://people.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf，2022。[Mar21] Louis Martini。《内在高阶范畴的米田引理》。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2103.17141，2021。[Mat25] Klaus Mattis。《不稳定 étale 动机》。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2507.20320，2025。[MV99] Fabien Morel 和 Vladimir Voevodsky。概形的 $\mathbb{A}^1$-同伦论。高等科学研究所数学出版物，90:45–143，1999。[MW22] Louis Martini 和 Sebastian Wolf。内在于一个 ∞-拓扑斯的可呈范畴。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2209.05103，2022。[MW24] Louis Martini 和 Sebastian Wolf。《内在高阶范畴论中的余极限与余完备化》。《高阶结构》，8(1):97–192，2024。[Ram24] Maxime Ramzi。可对偶可呈示 ∞-范畴。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2410.21537，2024。[Rob15] Marco Robalo。K-理论与从动机到非交换动机的桥梁。《数学进展》，269:399–550，2015。[RS20] Timo Richarz 和 Jakob Scholbach。《shtuka 模栈的交截动机》。《数学论坛 Sigma》，8:论文编号 e8，共 99 页，2020。[RT24a] Raphaël Ruimy 和 Swann Tubach。《几何来源的 étale 动机》。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2405.07095，2024。[RT24b] Raphaël Ruimy 和 Swann Tubach。《具有整数系数的 Nori 动机（及混合 Hodge 模）》。预印本，见 https://swann.tubach.fr/en/research/，2024。[Sch17] Stefan Schröer。《全可分闭概形上的几何》。《代数与数论》，11(3):537–582，2017。[sga72] 《拓扑斯理论与概形的 étale 上同调》。施普林格出版社，柏林 — 纽约，1972。布瓦 - 马里代数几何研讨班 1963–1964（SGA 4）。由 M. Artin、A. Grothendieck 和 J. L. Verdier 主编，N. Bourbaki、P. Deligne 和 B. Saint-Donat 协助编写。[Voe92] Vladimir Voevodsky。《概形的同调与协变动机》。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1992。博士论文——哈佛大学。

[Voe98] Vladimir Voevodsky。$\mathbf{A}^1$-同伦论。载于《国际数学家大会论文集》第一卷（柏林，*1998*），第579–604页，1998年。[Wol22] Sebastian Wolf。pro-étale 拓扑斯作为 pyknotic 预层的范畴。数学文献，27:2067–2106，2022年。