arXiv:2601.07371v1 [math.DS] 12 Jan 2026

论广义科赫雪花的几何性质

S. VAN GOLDEN、S. KOMBRINK 和 T. SAMUEL

摘要。我们研究 $\mathbb{R}^2$ 中一类分形集的几何性质，它们是著名的科赫曲线和科赫雪花的推广。经典科赫曲线通过一个迭代过程定义：将一条线段分成三段，并用等腰三角形的两腰替换中间一段，三角形位于线段的“上方”。而在这个更一般的情形中，每次迭代都可以选择将三角形放在线段的“上方”或“下方”。由此得到的分形在视觉上与自然界中的曲线颇为相似，例如海岸线和雪花。虽然可以通过随机过程生成这些分形，即每次抛硬币来决定三角形的方向，从而得出其几何性质的“几乎必然”结果，但我们以确定性方式定义并研究它们，以获得精确结果。特别是，我们利用非整数展开理论证明，这些广义科赫曲线所围成面积的所有可能取值构成一个闭区间。此外，我们证明，所有这些广义雪花的并集不含任何开集，且其二维勒贝格测度为零。作为对这些结果的补充，我们利用微积分和分形几何中的论证，特别是几何级数的性质和弗罗斯特曼引理，证明每条广义科赫曲线的长度均为无穷，并且其豪斯多夫维数与对应的经典曲线相同。此外，我们还对广义科赫曲线何时为拟圆进行了分类。

1. 引言

分形几何是数学中一个不断发展的领域，这既是因为它在理论上优美，也因为它有许多应用，例如参见 [Fal13、Edg98、Man82]。该 **p-科赫曲线**（其中 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$,）是研究最多的分形集之一。与大多数分形集一样，它由一个迭代过程生成。令 $V \subset \mathbb{R}^2$ 表示顶点为

$$P_+ = (\tfrac{1}{2}, 0)^\top, \quad P_- = (-\tfrac{1}{2}, 0)^\top, \quad Q_+ = (0, \tfrac{1}{2}\sqrt{4p-1})^\top \quad \text{and} \quad Q_- = (0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{4p-1})^\top, \tag{1.1}$$

也就是说，$V \subset \mathbb{R}^2$ 是以下各点的闭凸包：P_+、P_-、Q_+ 和 Q_-，见图1。我们定义压缩仿射映射 $\psi_i : V \to V$，对于 $i \in \{0,1,2,3\}$ 定义如下：

$$\psi_0\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p & 0\\0 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-p\\0\end{pmatrix}, \quad \psi_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-2p & -\sqrt{4p-1}\\ \sqrt{4p-1} & 1-2p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2p-1\\ \sqrt{4p-1}\end{pmatrix},$$

$$\psi_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-2p & \sqrt{4p-1}\\ -\sqrt{4p-1} & 1-2p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1-2p\\ \sqrt{4p-1}\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \psi_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p & 0\\0 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-p\\0\end{pmatrix}.$$

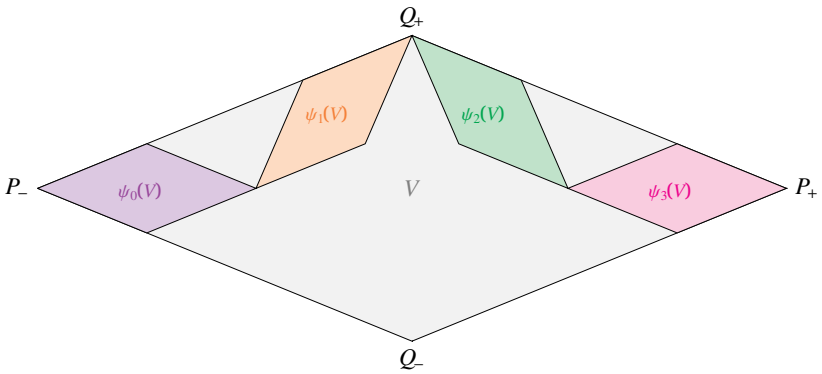


图1. 菱形 V 以及 V 在 ψ_0, ψ_1, ψ_2 和 ψ_3 作用下的像，其中 $p = \frac{7}{24}$。

(S. van Golden) 莱顿大学数学研究所，荷兰 (S.Kombrink) 不来梅大学数学系（第3系），德国 (T. Samuel) 埃克塞特大学数学与统计学系，英国

p-科赫曲线定义为集合

$$\bigcup_{(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\psi_{u_1}\circ\psi_{u_2}\circ\cdots\circ\psi_{u_k})(V), \tag{1.2}$$

几何逼近见图 2。

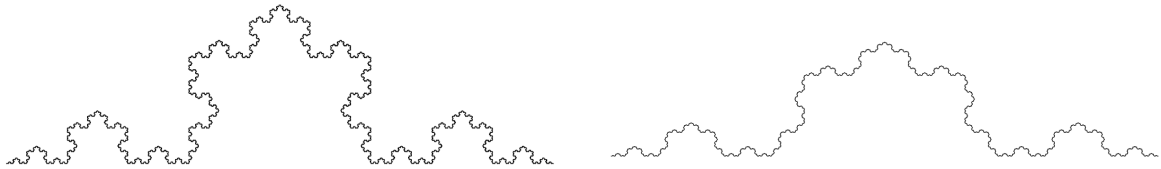


图 2。 p-科赫曲线的$p = \frac{1}{3}$（左）和$p = (2+\sqrt{2})^{-1}$（右）的逼近。

换句话说，它是**迭代函数系统** $\{\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3\}$的唯一吸引子集，关于迭代函数系统的更多内容请参见 [Fal13] 。已知p-科赫曲线是 $\mathbb{R}^2$中的一条长度无限的连续曲线。经典科赫曲线（其中$p = \frac{1}{3}$）由 [vK06] 引入，作为处处连续但处处不可微的曲线示例。

构造 p-科赫曲线的另一种（但可能更直观的）迭代过程是利用映射 ψ_0、ψ_1、ψ_2和 ψ_3，从线段 $E_0 = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times\{0\}\subset\mathbb{R}^2$开始，并对每个 $j\in\mathbb{N}$定义 $E_j = \bigcup_{i\in\{0,1,2,3\}}\psi_i(E_{j-1})\subset\mathbb{R}^2$。随着 j 增大，集合 E_j关于豪斯多夫度量收敛于 p-科赫曲线（进一步细节见[Fal13、Edg98] ）。在每次迭代中，每条线段被分成三段：两条长度比例为 p 的外侧线段，以及一条长度比例为 $1-2p$ 的中间线段；随后将中间线段替换为等腰三角形的两条边，这两条边的长度比例为 p，见图 3。

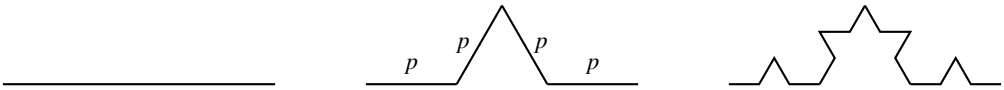


图 3. 曲线 E_0, E_1 和 E_2，其中 $p = \frac{1}{3}$。

在这种构造中，用来替换每条线段中间部分的三角形，其方向是固定的。本文研究广义 p-**科赫曲线**；在每次迭代中，对于每条线段，都可以选择三角形指向的方向。为形式化这一点，我们令 $\phi_{(i,0)} = \psi_i$，其中$i\in\{0,1,2,3\}$，并定义映射 $\phi_{(i,1)}: V\to V$，对于$i\in\{0,1,2,3\}$，定义为 $\phi_{(0,1)} = \psi_0, \phi_{(3,1)} = \psi_3$,

$$\phi_{(1,1)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-2p & \sqrt{4p-1}\\ -\sqrt{4p-1} & 1-2p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2p-1\\ -\sqrt{4p-1}\end{pmatrix} \quad \text{and}$$

$$\phi_{(2,1)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-2p & -\sqrt{4p-1}\\ \sqrt{4p-1} & 1-2p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1-2p\\ -\sqrt{4p-1}\end{pmatrix},$$

参见图 4。

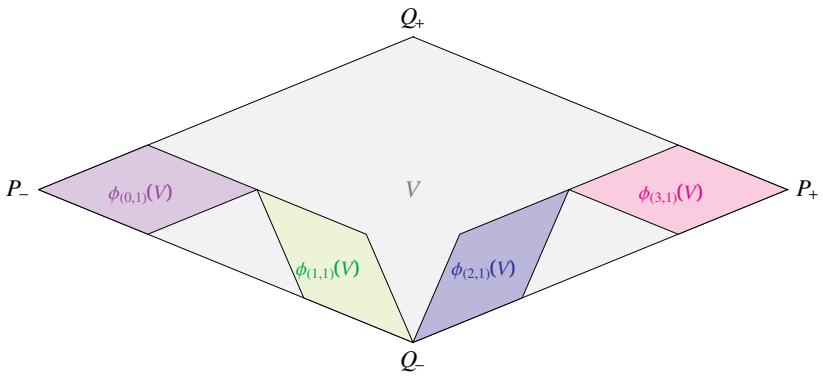


图 4。 菱形 V 以及 V 在 $\phi_{(0,1)}$、$\phi_{(1,1)}$、$\phi_{(2,1)}$ 和 $\phi_{(3,1)}$ 作用下，对于 $p = \frac{7}{24}$ 的像。

构造广义 p-科赫曲线时，沿着 $A^{\mathbb{N}}$ 中的某些序列应用映射 $\phi_{(a,b)}$，其中 $A = \{0,1,2,3\} \times \{0,1\}$，与 (1.2) 中的做法颇为相似。更准确地说，我们用一列元组 $s = ((s_k(0), s_k(1), ..., s_k(4^k - 1)))_{k=0}^{\infty}$ 属于 $S = \prod_{k=0}^{\infty} \{0,1\}^{4^k}$ 来记录那些边替换每条线段中间（$1-2p$）段的三角形的方向。对于每个这样的 s 和每个 $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$，我们定义 $\omega_1(u, s) = (u_1, s_0(0))$；对于 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，令

$$\omega_k(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = (u_k, s_{k-1}(\textstyle\sum_{j=1}^{k-1} u_j 4^{k-1-j})) \in A. \tag{1.3}$$

令 $\omega(\mathbf{u},\mathbf{s}) = (\omega_k(\mathbf{u}, \mathbf{s}))_{k\in\mathbb{N}}$，定义

$$\Sigma(\mathbf{s}) = \left\{\omega(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = (\omega_k(\mathbf{u}, \mathbf{s}))_{k\in\mathbb{N}} : \mathbf{u} \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}\right\} \subset A^{\mathbb{N}}. \tag{1.4}$$

与**s**相关联的广义*p*-科赫曲线由下列集合给出

$$C(\mathbf{s}) = \bigcup_{(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\Sigma(\mathbf{s})} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\phi_{\omega_1} \circ \phi_{\omega_2} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_k})(V).$$

我们证明 $C(\mathbf{s})$ 仍是一条连续曲线，两个广义*p*-科赫曲线的逼近示例见图 5。

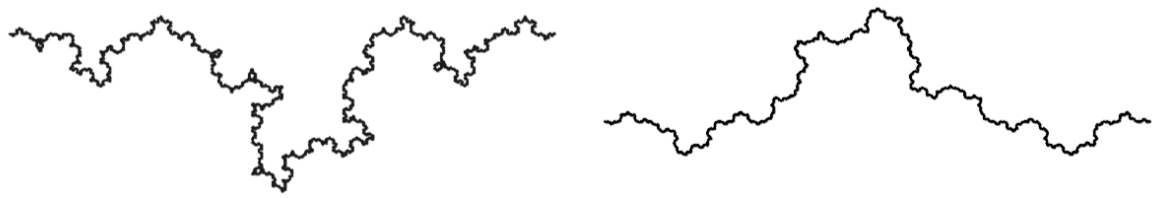


图 5. 广义*p*-科赫曲线的逼近，其中$p = \frac{1}{3}$（左）和$p = (2+\sqrt{2})^{-1}$（右）。

构造该曲线的一种几何方法是再次考察这些映射在 $E_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ 上的作用。为此，固定一个 $s \in S$，并定义 $C_0(s) = E_0$。若 s 的第一个元素为 (0)，则令 $C_1(s)$ 为线段$\phi_{(i,0)}(E_0)$ 的并，其中 $i \in \{0,1,2,3\}$；若 s 的第一个元素为 (1)，则令 $C_1(s)$ 为线段 $\phi_{(i,1)}(E_0)$ 的并，其中 $i \in \{0,1,2,3\}$。也就是说，我们将原线段替换为两条长度为 p 的外侧线段，并将长度为 $1-2p$ 的中间线段替换为等腰三角形的两条边，这两边的长度与 p 成比例；若 s 的第一个元素为 (0)，三角形朝上，若为 (1)，则朝下。接着，我们在 $C_1(s)$ 的每条线段上迭代重复这一过程，生成 $C_2(s)$，并无限继续下去；这一迭代过程的示意图见图 6。形式化地，我们从 $C_0(s) = E_0$，开始，对于 $k \in \mathbb{N}$ 且 $u = (u_1, u_2, ..., u_k) \in \{0,1,2,3\}^k$，令 $E_{\mathbf{u}}^k(s)$ 表示线段 $\phi_{(u_1,s_0(0))} \circ \phi_{(u_2,s_1(u_1))} \circ \cdots \circ \phi_{(u_k,s_{k-1}(\sum_{j=1}^{k-1} u_j 4^{k-1-j}))}(E_0)$，其长度为 p^k，并定义

$$C_k(\mathbf{s}) = \bigcup_{\mathbf{u}\in\{0,1,2,3\}^k} E_{\mathbf{u}}^k(\mathbf{s}). \tag{1.5}$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，集合 $C_k(\mathbf{s})$ 是一条连续曲线，由 4^k 条长度为 p^k 的连通线段组成。此外，可以证明，随着*k* 增大，集合 $C_k(\mathbf{s})$ 关于豪斯多夫度量收敛到 $C(\mathbf{s})$。

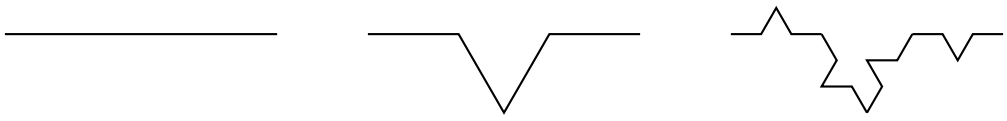


图 6. 曲　　线 $C_0(\mathbf{s})$、$C_1(\mathbf{s})$ 和 $C_2(\mathbf{s})$，其中 $s_0 = (1)$、$s_1 = (0,1,0,1$　　$)$ 对于$p = \frac{1}{3}$。

注意，若对所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $i \in \{0,1,...,4^k - 1\}$，均有 $s_k(i) = 0$，则相应的广义 p-科赫曲线就是 (1.2) 中的 p-科赫曲线；而对每个 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $i \in \{0,1,...,4^k - 1\}$ 均取 $s_k(i) = 1$，则得到关于 x 轴反射的 p-科赫曲线。

由 *p*-科赫曲线可以构造出 ***p*-科赫雪花**。该雪花由三条 *p*-科赫曲线沿等边三角形的三条边放置而成。若改用三条倒置的 *p*-科赫曲线，则得到我们所称的 ***p*-科赫反雪花**，见图 7。

本文着重探讨一类广义 ***p*-科赫雪花**的几何性质，它们是通过沿等边三角形的三条边放置三条广义*p*-科赫曲线构造而成的。由于广义*p*-科赫

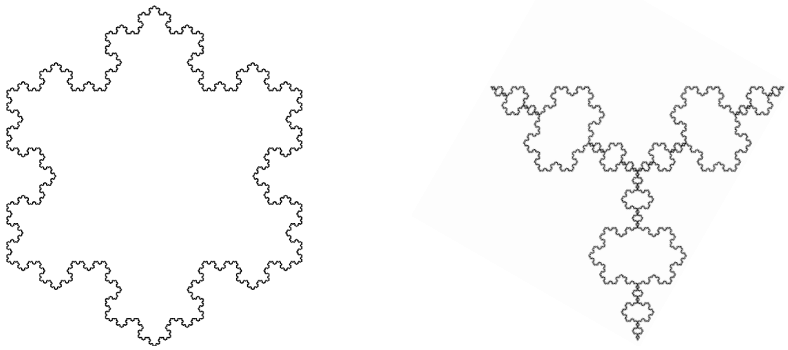


图 7. p-科赫雪花（左）和p-科赫反雪花（右）的逼近，其中$p = \frac{1}{3}$。

曲线由相应的序列$\mathbf{s} = ((s_k(0), ..., s_k(4^k - 1)))_{k=0}^{\infty}$定义，因此广义$p$-科赫雪花由三个这样的序列**s**、**t**和**r**定义。形式上，若定义两个仿射映射$f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，则

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

对应于选择序列**s**、**t**和**r** 的广义p-科赫雪花定义如下：

$$\mathcal{F}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{r}) = C(\mathbf{s}) \cup f_1(C(\mathbf{t})) \cup f_2(C(\mathbf{r})),$$

示意图见图 8，其中展示了三个此类p-科赫雪花的逼近。

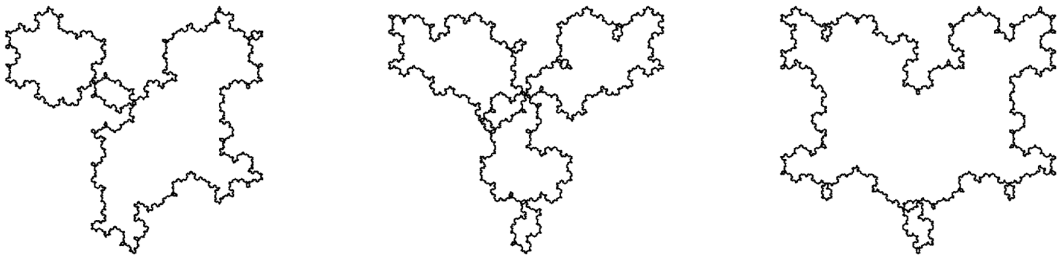


图 8. p-科赫雪花的三个广义实例的逼近，其中$p = \frac{1}{3}$。

广义p-科赫雪花的构造与 Rohde 雪花的构造有相似之处。Rohde 雪花尤为重要，因为经过双 Lipschitz 变换后，每个平面拟圆盘（即边界为圆在拟共形映射下的像的区域）都可以实现为 Rohde 雪花 [Roh01]。

我们的目标是探讨有关广义p-科赫雪花的以下四个自然问题。

（Q1）豪斯多夫维数是分形维数的一个自然例子，可用于量化分形集的复杂程度。那么，广义p-科赫曲线和雪花的豪斯多夫维数是否与经典p-科赫曲线和p-科赫雪花的豪斯多夫维数相同？（Q2）广义p-科赫雪花是若尔当曲线吗？如果是，它们是拟圆吗？（Q3）设y_p 为p-科赫雪花的围成面积，设x_p 为p-科赫反雪花的围成面积。给定$y \in [x_p, y_p]$，是否存在围成面积为y的广义p-科赫雪花？如果存在，对于给定参数y，这样的广义p-科赫雪花有多少个？（Q4）对于p-科赫雪花与p-科赫反雪花之间的每一个点，是否都存在一个包含该点的广义p-科赫雪花？

接下来，我们将逐一探讨这些问题：第 2 节讨论（Q1）；第 3 节发现，（Q2）的答案在大多数（但并非所有）情况下都是肯定的；第 4 节对（Q3）给出肯定回答；第 5 节对（Q4）给出否定回答。

在本节中，我们令 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ 为定值。我们证明，引言中给出的广义 p-科赫曲线的两种构造均定义良好，并且产生相同的分形集 $C(\mathbf{s})$。我们还证明，每条广义 p-科赫曲线的豪斯多夫维数都与经典的 p-科赫曲线相同，从而回答了（Q1）。为此，我们注意到，对于 $(a,b) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1\}$，$\phi_{(a,b)}$ 是一个压缩比为 p 的相似变换。也就是说，

$$|\phi_{(a,b)}(\mathbf{x}) - \phi_{(a,b)}(\mathbf{y})| = p|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \tag{2.1}$$

对所有的 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$，其中 $|\cdot|$ 表示欧几里得距离。与前面一样，令 $V \subset \mathbb{R}^2$ 表示 P_+、P_-、Q_+ 和 Q_- 的闭凸包，并注意到 V 是一个实心闭菱形，其顶点为 $P_\pm = (\pm\frac{1}{2}, 0)^\top$ 和 $Q_\pm = (0, \pm\frac{1}{2}\sqrt{4p-1})^\top$。从代数角度看，集合 V 可写为 $V = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : |2x| + |2y(\sqrt{4p-1})^{-1}| \le 1\}$。此外，令 $U = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : |2x| + |2y(\sqrt{4p-1})^{-1}| < 1\}$ 表示 V 的内部。

引理 2.1。对于 $(a, b) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1\}$，有 $\phi_{(a,b)}(V) \subset V$，且 $\phi_{(a,b)}(U) \subset U$。此外，对于 $b \in \{0,1\}$ 且 $a, a' \in \{0,1,2,3\}$ 且 $a \neq a'$，有 $\phi_{(a,b)}(U) \cap \phi_{(a',b)}(U) = \emptyset$。

证明。由于对于 $(a, b) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1\}$，每个映射 $\phi_{(a,b)}$ 都是非退化相似变换，因此像 $\phi_{(a,b)}(V)$ 仍是一个闭菱形，其顶点为 $\phi_{(a,b)}(P_\pm)$ 和 $\phi_{(a,b)}(Q_\pm)$，而 $\phi_{(a,b)}(U)$ 是该菱形的（非平凡）内部。因此，我们可以通过了解 V 的顶点映射到何处，来理解这些像。回想 $\phi_{(0,0)} = \phi_{(0,1)}$ 和 $\phi_{(3,0)} = \phi_{(3,1)}$，并观察以下内容。

$$\begin{aligned}
&\phi_{(0,0)}(P_-) = P_- && \phi_{(0,0)}(P_+) = \phi_{(1,0)}(P_-) = \phi_{(1,1)}(P_-) = (p - \tfrac{1}{2}, 0)^\top \\
&\phi_{(1,0)}(P_+) = \phi_{(2,0)}(P_-) = Q_+ && \phi_{(1,1)}(P_+) = \phi_{(2,1)}(P_-) = Q_- \\
&\phi_{(3,0)}(P_+) = P_+ && \phi_{(2,0)}(P_+) = \phi_{(2,1)}(P_+) = \phi_{(3,0)}(P_-) = (\tfrac{1}{2} - p, 0)^\top \\
&\phi_{(0,0)}(Q_\pm) = (\tfrac{p-1}{2}, \pm\tfrac{p}{2}\sqrt{4p-1})^\top && \phi_{(1,0)}(Q_+) = (-\tfrac{p}{2}, \tfrac{1-p}{2}\sqrt{4p-1})^\top \\
&\phi_{(1,0)}(Q_-) = (\tfrac{3p-1}{2}, \tfrac{p}{2}\sqrt{4p-1})^\top && \phi_{(1,1)}(Q_+) = (\tfrac{3p-1}{2}, -\tfrac{p}{2}\sqrt{4p-1})^\top \\
&\phi_{(1,1)}(Q_-) = (-\tfrac{p}{2}, -\tfrac{1-p}{2}\sqrt{4p-1})^\top && \phi_{(2,0)}(Q_+) = (\tfrac{p}{2}, \tfrac{1-p}{2}\sqrt{4p-1})^\top \\
&\phi_{(2,0)}(Q_-) = (\tfrac{1-3p}{2}, \tfrac{p}{2}\sqrt{4p-1})^\top && \phi_{(2,1)}(Q_+) = (\tfrac{1-3p}{2}, -\tfrac{p}{2}\sqrt{4p-1})^\top \\
&\phi_{(2,1)}(Q_-) = (\tfrac{p}{2}, -\tfrac{1-p}{2}\sqrt{4p-1})^\top && \phi_{(3,0)}(Q_\pm) = (\tfrac{1-p}{2}, \pm\tfrac{p}{2}\sqrt{4p-1})^\top
\end{aligned} \tag{2.2}$$

经初等计算可知，上述各点均满足 $|2x| + |2y(\sqrt{4p-1})^{-1}| \le 1$属于 V 的定义关系，因此 $\phi_{(a,b)}(P_\pm)$、$\phi_{(a,b)}(Q_\pm) \in V$。由此，结合映射的线性性质以及 V 的凸性，可得对于所有 $(a, b) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1\}$，$\phi_{(a,b)}(V) \subset V$ 且 $\phi_{(a,b)}(U) \subset U$。为证明集合 $\phi_{(a,b)}(U)$ 两两不交，我们注意到以下事实。

$$\begin{aligned}
&\phi_{(0,0)}(U) = \phi_{(0,1)}(U) \subset (-\tfrac{1}{2}, p - \tfrac{1}{2}) \times \mathbb{R} && \phi_{(1,0)}(U) \subset (p - \tfrac{1}{2}, 0) \times (0, \tfrac{1}{2}\sqrt{4p-1}) \\
&\phi_{(1,1)}(U) \subset (p - \tfrac{1}{2}, 0) \times (-\tfrac{1}{2}\sqrt{4p-1}, 0) && \phi_{(2,0)}(U) \subset (0, \tfrac{1}{2} - p) \times (0, \tfrac{1}{2}\sqrt{4p-1}) \\
&\phi_{(2,1)}(U) \subset (0, \tfrac{1}{2} - p) \times (-\tfrac{1}{2}\sqrt{4p-1}, 0) && \phi_{(3,0)}(U) = \phi_{(3,1)}(U) \subset (\tfrac{1}{2} - p, \tfrac{1}{2}) \times \mathbb{R}
\end{aligned}$$

由于这些集合两两不交，集合 $\phi_{(a,b)}(U)$ 也两两不交。 □

引理 2.1 的第一部分结合 (2.1) 表明，对于 $(a, b) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1\}$，映射 $\phi_{(a,b)}$ 是紧集 V 上的压缩自映射。因此，对于任意序列 $\omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$，其中 A 是字母表$\{0,1,2,3\} \times \{0,1\}$，可知 $((\phi_{\omega_1} \circ \phi_{\omega_2} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_k})(V))_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个紧集嵌套序列，其直径递减。因此，根据康托尔交定理，交集 $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(\phi_{\omega_1} \circ \phi_{\omega_2} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_k})(V)$ 恰好包含一个元素，即 $\pi(\omega) = \lim_{k\to\infty} \phi_{\omega_1} \circ \phi_{\omega_2} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_k}(x_0)$，且此极限与 $x_0 \in V$ 的选取无关。于是，若定义投影映射 $\pi : A^{\mathbb{N}} \to V$ 为 $\omega \mapsto \pi(\omega)$，则可知对于每个序列 $s = ((s_k(0), s_k(1), ..., s_k(4^k - 1)))_{k=0}^{\infty}$（其中对每个 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $i \in \{0, 1, ... 4^k - 1\}$，均有 $s_k(i) \in \{0,1\}$），$C(s) = \pi(\Sigma(s))$ 是 V 的一个定义良好且非空的子集。

在存在某个$s \in \{0,1\}$ 使得$\mathbf{s}$ 对每个$k \in \mathbb{N}_0$ 和$i \in \{0, 1, ..., 4^k - 1\}$均由$s_k(i) = s$ 给出时，我们有 $\Sigma(\mathbf{s}) = (\{0,1,2,3\} \times \{s\})^{\mathbb{N}}$。情形$s = 0$ 描述了<p>-科赫曲线，情形$s = 1$ 描述了一条倒置的科赫曲线。在这些情况下，众所周知，在V 的非空紧子集空间上，由 $\Phi_s(E) = \bigcup_{i=0}^{3} \phi_{(i,s)}(E)$给出的自映射 Φ_s 关于豪斯多夫度量是压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，存在唯一的非空紧集$C \subseteq V$，满足 $\Phi_s(C) = C$。事实上，

我们有 $C = C(\mathbf{s})$，并称 $C(\mathbf{s})$ 为迭代函数系统 $\{\phi_{(i,s)}: i \in \{0,1,2,3\}\}$，而$\Phi_s$ 是相应的 **Hutchinson 算子**，参见 [Hut81]。

根据上述类似的论证，对于任意非空子集 $E \subseteq V$ 以及任意序列 $\omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$，集合序列 $((\phi_{\omega_1} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_k})(E))_{k\in\mathbb{N}}$ 在豪斯多夫度量下收敛到单点集 $\{\pi(\omega)\}$。特别地，取 $E = E_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\} \subset V$，可知对于任意 $s \in \prod_{k=0}^{\infty}\{0,1\}^{4^k}$，式 (1.5) 中定义的曲线 $C_k(s)$ 在豪斯多夫度量下收敛到广义 p-科赫曲线 $C(s)$。此外，注意到对于 $(a, b) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1\}$，集合 $\phi_{(a,b)}(E_0)$ 是一条长度为 p、端点为 $\phi_{(a,b)}(P_\pm)$ 的线段。由于当 $b \in \{0,1\}$ 时，有 $\phi_{(0,b)}(P_-) = P_-$，$\phi_{(j+1,b)}(P_-) = \phi_{(j,b)}(P_+)$ 对每个 $j \in \{0,1,2\}$ 均成立，且 $\phi_{(3,b)}(P_+) = P_+$，因此对于 $k \in \mathbb{N}_0$，每个集合 $C_k(s)$ 都是一条以 $P_\pm$ 为端点、由 4^k 条长度为 p^k 的线段组成的连续曲线。结合这些观察与引理 2.1，可得广义 p-科赫曲线 $C(s)$ 是一条以 $P_\pm$ 为端点、长度无限的连续曲线。

引理 2.1 的第二部分表明，$\{\phi_{(i,0)}: i \in \{0,1,2,3\}\}$ 和 $\{\phi_{(i,1)}: i \in \{0,1,2,3\}\}$ 满足开集条件。也就是说，对于 $s \in \{0,1\}$，存在一个非空开集 $U \subset V$，使得 $\bigcup_{i=0}^{3} \phi_{(i,s)}(U) \subseteq U$，且当 $i \in \{0,1,2,3\}$时，各集合 $\phi_{(i,s)}(U)$ 两两不相交。$\{g_i : i \in I\}$ 由有限个相似变换组成且满足开集条件，Hut81 的定理 5.3(1)] 指出，此迭代函数系统的吸引子的豪斯多夫维数等于满足方程 $\sum_{i\in I} c_i^r = 1$ 的唯一数值 r，其中 c_i 是 g_i的压缩比。由于每个映射 $\phi_{(a,b)}$ 都是压缩比为 p 的相似变换，因此 p-科赫曲线和倒置 p-科赫曲线的豪斯多夫维数均为 $\log(4)/\log(p^{-1})$。下文将沿用证明 Fal13 定理 9.3]时的相同步骤，证明所有广义 p-科赫曲线都具有相同的豪斯多夫维数，从而对（Q1）给出肯定的回答。

命题 2.2。对于 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$以及 $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$，$C(\mathbf{s})$ 的豪斯多夫维数为

$$\dim_{\mathcal{H}}(C(\mathbf{s})) = \frac{\log(4)}{\log(p^{-1})}.$$

由于任意广义 p-科赫雪花 $\mathcal{F}(s, t, r)$ 都可表示为 $C(s) \cup f_1(C(t)) \cup f_2(C(r))$，其中 s、t、$r \in S$；又由于 f_1 和 f_2 都是双 Lipschitz，且双 Lipschitz 映射保持豪斯多夫维数不变，因此命题 2.2 蕴含 $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}(s, t, r)) = \max\{\dim_{\mathcal{H}}(C(q)): q \in \{s、t、r\}\} = \log(4)/\log(p^{-1})$。

命题 2.2 的证明。设 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ 且 $\mathbf{s} = ((s_k(0), \ldots, s_k(4^k-1)))_{k=0}^{\infty} \in S$ 已固定，并令 $d = \log(4)/\log(p^{-1})$。对于 $k \in \mathbb{N}$、$u_1, \ldots, u_k \in \{0,1,2,3\}$ 以及 $B \subseteq V$，令

$$B^{u_1,\ldots,u_k} = \phi_{(u_1,s_0(0))} \circ \phi_{(u_2,s_1(u_1))} \circ \cdots \circ \phi_{(u_k,s_{k-1}(\sum_{j=1}^{k-1} u_j 4^{k-1-j}))}(B).$$

特别地，对于 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $C(s) \subset \bigcup_{u_1,\ldots,u_k\in\{0,1,2,3\}} V^{u_1,\ldots,u_k}$。对于每个 $\omega_1, \ldots\ldots, \omega_k \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1\}$ 复合变换 $\phi_{\omega_1} \circ \ldots \circ \phi_{\omega_k}$ 都是压缩比为 p^k 的相似变换，因此每个集合 $V^{u_1,\ldots,u_k}$ 都是直径为 p^k 的闭菱形。对于 $r, \delta \in \mathbb{R}$，其中 $r \geq 0$ 且 $\delta > 0$，令 H^r 表示 r 维豪斯多夫测度，H^r_δ 表示其δ-近似值，精确定义见 [Fal13] 。对于每个 $r > d$，我们有 $4p^r < 1$，因此

$$H^r(C(\mathbf{s})) = \lim_{k\to\infty} H^r_{p^k}(C(\mathbf{s})) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{u_1,\ldots,u_k\in\{0,1,2,3\}} \operatorname{diam}(V^{u_1,\ldots,u_k})^r = \lim_{k\to\infty} 4^k \cdot p^{kr} = \lim_{k\to\infty} (4p^r)^k = 0.$$

因此，维数$_{\mathcal{H}}(C(\mathbf{s})) \leq d$。为证明反向不等式，我们在 $\mathbb{R}^2$ 上定义一个有限测度，其支撑集为 $C(\mathbf{s})$，并证明它满足**质量分布原理**的条件，参见 [Fal13，第 4 节。1], 从而可得$d \leq$ 维数$_{\mathcal{H}}(C(\mathbf{s}))$。

因此，仍需证明存在一个定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的有限测度，其支撑集为 $C(\mathbf{s})$，并满足质量分布原理的条件；也就是说，存在常数c 和一个博雷尔测度 μ，使得对于任意直径为$r < 1$的 Borel 集M，其 μ 测度有上界$c \cdot r^d$。

为此，令 $I = \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$，并且对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $u_1, \ldots, u_k \in \{0,1,2,3\}$，考虑柱集 $I_{u_1, \ldots, u_k} = \{(i_m)_{m\in\mathbb{N}} \in I: i_1 = u_1, \ldots, i_k = u_k\}$；赋予 $\{0,1,2,3\}$ 离散拓扑并赋予 I 乘积拓扑后，柱集构成 I 上该拓扑的一个基。我们通过对每个 $k \in \mathbb{N}$ 以及每个 $u_1, \ldots, u_k \in \{0,1,2,3\}$令 $\mu(I_{u_1, \ldots, u_k}) = 4^{-k}$ 来定义 I 上的一个博雷尔测度 μ。注意，根据 Carath´eodory 延拓定理，μ 是良定义的测度，且 $\mu(I) = \sum^3 i=0\, \mu(I_i) = 4 \cdot 4^{-1} = 1$。对于 $u \in I$，我们记 $x_u = \pi(\omega(u, s))$，并回顾 $C(s) = \pi(\Sigma(s)) = \{x_u : u \in I\}$，其中 $\omega(u, s)$ 的定义见（1.3）。我们通过令 $\tilde{\mu}(M) = \mu(\{u \in I: x_u \in M\})$，为 $\mathbb{R}^2$ 上的任意博雷尔集 $M \subseteq \mathbb{R}^2$定义一个测度 $\tilde{\mu}$。注意，由于按照构造，$\pi(\omega(\cdot, s))$ 是连续的，因此集合 $\{u \in I: x_u \in M\}$ 是可测的，并注意对于每个博雷尔集 $M \subseteq \mathbb{R}^2$，有 $\tilde{\mu}(M) = \tilde{\mu}(M \cap C(s))$。

即 $\tilde{\mu}(\mathbb{R}^2) = \tilde{\mu}(C(\mathbf{s})) = \mu(I) = 1$。我们将验证质量分布原理的条件，即存在常数 $c > 0$，满足 $\tilde{\mu}(M) \le c \cdot$ 直径$(M)^d$，对于每个满足直径$(M) < 1$的博雷尔集 $M \subset \mathbb{R}^2$。

设 $M \subset \mathbb{R}^2$ 为一个固定的 Borel 集，且 $\operatorname{diam}(M) < 1$。根据定义，存在一个半径为 $r = \operatorname{diam}(M) < 1$ 的球 B，使其包含 M。设 $m \in \mathbb{N}$ 为满足 $p^m \le r < p^{m-1}$的唯一整数。由引理 2.1可知，集合 $\{U^{u_1},\dots,u^m : u_1,\dots,u_m \in \{0,1,2,3\}\}$ 两两不相交，其中 U 是 V 的内部。此外，对于每个 $u_1,\dots,u_m \in \{0,1,2,3\}$，都有 $V^{u_1,\dots,u^m} = \operatorname{cl}(U)^{u_1}\dots,u^m = \operatorname{cl}(U^{u_1}\dots,u^m)$，其中 $\operatorname{cl}(\cdot)$表示关于欧几里得范数 $|\cdot|$取闭包。

注意，U 包含于一个半径为 $a_1 = \frac{1}{2}$的球中，同时它包含一个半径为 $a_2 = \frac{1}{4}\sqrt{4p-1}$的球。因此，对于每个 $u_1,\dots,u_m \in \{0,1,2,3\}$，开菱形 $U^{u_1}\dots,u^m$包含于一个半径为 $p^m a_1 \le r a_1$的球中，并且包含一个半径为 $p^m a_2 > p r a_2$的球。若定义集合 $J = \{(u_1,\dots,u_m) \in \{0,1,2,3\}^m : B \cap V^{u_1},\dots,u^m \neq \emptyset\}$，则由 [Fal13, 引理 9.2] 可知，$\#J$ 有界于 $c = (1+2a_1)^2(pa_2)^{-2} > 0$。因此

$$\widetilde{\mu}(M) \le \widetilde{\mu}(B \cap C(\mathbf{s})) \le \sum_{(u_1,\dots,u_m)\in J} \mu(I_{u_1,\dots,u_m}) = \#J \cdot 4^{-m} \le c p^{md} \le r^d c = c \cdot \operatorname{diam}(M)^d.$$

B根据质量分布原理，我们得出$d \le \dim_{\mathcal{H}}(C(\mathbf{s}))$，从而得出 $\dim_{\mathcal{H}}(C(\mathbf{s})) = d$。 □

3. 广义p-科赫雪花作为拟圆

本节研究广义p-科赫雪花成为拟圆的条件，从而回答（Q2）。**若尔当曲线**是一个与单位圆同胚的平面集 $\mathbb{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$；而**拟圆**是具有**有界转弯**性质的若尔当曲线C，这意味着存在常数$K \in [1,\infty)$，使得对每个x、$y \in C$，都存在一个紧连通子集 $\Gamma \subseteq C$（也称为**连续统**），包含x 和y，且满足 $\operatorname{diam}(\Gamma) \le K \cdot |x-y|$。

因此，我们首先证明，在大多数情况下，广义p-科赫雪花是若尔当曲线。为此，令$p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$，并为任意给定的广义$\bar{p}$-科赫雪花构造一种自然的参数化。我们先对广义$p$-科赫曲线进行参数化。固定$\mathbf{s} \in S$。对于 $t \in [0,1]$，我们选取一个序列$\mathbf{u}_t = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$，使其满足$t = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k 4^{-k}$。也就是说，$\mathbf{u}_t$ 由t的四进制数展开中的各位数字组成。接着，我们将 $\rho_{\mathbf{s}}(t)$定义为 $\pi(\omega(\mathbf{u}_t, \mathbf{s}))$。也就是说，若写作 $\omega(\mathbf{u}_t,\mathbf{s}) = (\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$，那么 $\rho_{\mathbf{s}}(t)$就是集合中的唯一元素

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \phi_{\omega_1} \circ \phi_{\omega_2} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_k}(V).$$

利用对于 $z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$这一事实，

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \phi_{(0,z_1)} \circ \phi_{(0,z_2)} \circ \cdots \circ \phi_{(0,z_k)}(V) = \{P_-\} \quad \text{and} \quad \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \phi_{(3,z_1)} \circ \phi_{(3,z_2)} \circ \cdots \circ \phi_{(3,z_k)}(V) = \{P_+\}, \tag{3.1}$$

结合（2.2），经过初等计算可知，若 $\mathbf{u} = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\mathbf{v} = (v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 都给出 t 的四进制数展开，即 $t = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k 4^{-k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k 4^{-k}$，则 $\pi(\omega(\mathbf{u}, \mathbf{s})) = \pi(\omega(\mathbf{v}, \mathbf{s}))$。这意味着映射$\rho_{\mathbf{s}}$： $[0,1] \to C(\mathbf{s})$ 定义良好，并且对于给定的任意 $t \in [0,1]$，不依赖于 $\mathbf{u}_t$ 的选择。

引理 3.1。设 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$，并固定 $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$。映射 $\rho_{\mathbf{s}}$： $[0,1] \to C(\mathbf{s})$连续且满射。此外，若 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$，则 $\rho_{\mathbf{s}}$ 是单射。 – –

证明。满射性源于以下事实： $\{0,1,2,3\}^{\mathbf{N}}$ 中的每个序列都对应于 $[0,1]$中某个数的四进制展开的各位数字。为证明连续性，固定 $t \in [0,1]$ 和 $\varepsilon > 0$。令 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $2p^m < \varepsilon$，并假设 $t' \in [0,1]$ 满足 $|t - t'| < 4^{-(m+1)}$。那么存在 $k \in \{0,\dots,4^m - 1\}$，使得 $t, t' \in [k \cdot 4^{-m}, (k+1) \cdot 4^{-m}]$，或 $\max\{t, t'\} \in [k \cdot 4^{-m}, (k+1) \cdot 4^{-m}]$ 且 $\min\{t, t'\} \in [(k-1) \cdot 4^{-m}, k \cdot 4^{-m}]$。令 $(u_1,\dots,u_m)$ 和 $(v_1,\dots,v_m)$ 为 $\{0,1,2,3\}^m$ 中满足 $k = \sum_{i=0}^{m-1} u_i \cdot 4^{m-1-i}$ 且 $(k-1) = \sum_{i=0}^{m-1} v_i \cdot 4^{m-1-i}$ 的唯一元素。设 $\omega_1 = (u_1, s_0(0))$ 和 $\nu_1 = (v_1, s_0(0))$，并对 $j \in \{2,\dots,m\}$，设 $\omega j = (u\, j, s_{j-1}(\sum_{j-1} i=1 u\, j 4 j-1-i))$ 和 $\nu j = (v\, j, s\, j-1(\sum_{j-1} i=1 v\, j 4 j-1-i))$。由构造可知，$\rho_{\mathbf{s}}(t)$ 和 $\rho_{\mathbf{s}}(t')$ 属于集合 $(\phi_{\omega_1} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_m}(V)) \cup (\phi_{\nu_1} \circ \cdots \circ \phi_{\nu_m}(V))$；再利用 (3.1)，可得 $\operatorname{diam}((\phi_{\omega_1} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_m}(V)) \cup (\phi_{\nu_1} \circ \cdots \circ \phi_{\nu_m}(V))) < 2p^m$。由此得到 $|\rho_{\mathbf{s}}(t) - \rho_{\mathbf{s}}(t')| \le 2p^m < \varepsilon$，因此 $\rho_{\mathbf{s}}$ 是连续的。

对于最后的结论，假设 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$。设 $t_1, t_2 \in [0,1]$，其中 $t_1 < t_2$，且 $\rho_{\mathbf{s}}(t_1) = \rho_{\mathbf{s}}(t_2)$。令 $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$、$v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ 满足 $t_1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k 4^{-k}$ 且 $t_2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k 4^{-k}$。若 $u = v$，或者存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $(u_1,\dots,u_{m-1}) = (v_1,\dots,v_{m-1})$，$u_m = v_m - 1$，且对所有整数 $j > m$ 均有 $u\, j = 3 = v_j + 3$，则 $t_1 = t_2$。因此，我们可以假设这两种情况均不成立。此外，注意到如果 $\eta_k = \omega_k(u, s)$ 且

$\xi_k = \omega_k(v, s)$，那么对所有自然数 $k \le m - 1$，都有 $\eta_k = \xi_k$ 和 $\eta_m \neq \xi_m$，其中 $m = \min\{k \in \mathbb{N} : u_k \neq v_k\}$。根据构造，$\rho_s(t_1) \in \phi_{\eta_1} \circ \cdots \circ \phi_{\eta_{m-1}} \circ \phi_{\eta_m}(V)$，而 $\rho_s(t_2) \in \phi_{\eta_1} \circ \cdots \circ \phi_{\eta_{m-1}} \circ \phi_{\xi_m}(V)$。然而，由于 $p \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$，交集 $\phi_{\eta_m}(V) \cap \phi_{\xi_m}(V)$ 只有在 $v_m = u_m - 1$ 或 $v_m = u_m + 1$时才非空。由于我们已假设 $t_1 < t_2$，因此属于上述两种情况中的后一种。此外，在这种情况下，我们有 $\phi_{\eta_m}(V) \cap \phi_{\xi_m}(V) = \{\phi_{\eta_m}(P_+)\} = \{\phi_{\xi_m}(P_-)\}$。因此，$\rho_s(t_1) = \rho_s(t_2)$意味着，对于任意 $x_0 \in V$，$\lim_{k\to\infty} \phi_{\eta_{m+k}}(x_0) = P_+$，这意味着对所有 $k \ge m + 1$，$u_k = 3$；而 $\lim_{k\to\infty} \phi_{\xi_{m+k}}(x_0) = P_-$，这意味着对每个 $k \ge m + 1$，$v_k = 0$。然而，在证明单射性的开头，我们假设情况并非如此。□

注意，当 $s = ((s_k(0), s_k(1), ..., s_k(4^k - 1)))_{k=0}^{\infty} \in S$ 满足 $s_k(j) = 0$ 对所有$j \in \{0, ..., 4^k - 1\}$和$k \in \mathbb{N}_0$均成立，且$p = 1/3$ 时，类似的论证将表明 ρ_s 是单射。此外，注意当t 从 0 增至 1 时，参数化 ρ_s 沿着广义p-科赫曲线 $C(s)$ 从P_- 遍历至P_+。

回顾一下，广义 p-科赫雪花定义为集合 $\mathcal{F}(s, t, r) = C(s) \cup f_1(C(t)) \cup f_2(C(r))$，其中 $s、t、r \in S$，且 f_1 和 f_2 按照 (1.6) 中的定义。因此，雪花曲线 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(s, t, r)$ 的一种自然参数化由映射 $\gamma\colon [0, 1] \to \mathcal{F}$ 给出，其定义如下：

$$\gamma(t) = \begin{cases} \rho_s(1 - 3t) & \text{if } t \in [0, \frac{1}{3}), \\ f_2(\rho_r(2 - 3t)) & \text{if } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ f_1(\rho_t(3 - 3t)) & \text{if } t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases} \tag{3.2}$$

命题 3.2。固定 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ 以及 s，r，$t \in \mathbb{S}$，并令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(s, t, r)$ 为相应的广义 p-科赫雪花曲线。若参数化 $\gamma\colon [0, 1] \to \mathcal{F}$ 在 $[0, 1)$ 上的限制是单射，则 $\mathcal{F}$ 是若尔当曲线。特别地，当 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$时，结论成立。

证明。我们有 $\gamma(\frac{1}{3}) = f_2(\rho_r(1)) = f_2(P_+) = P_- = \rho_s(0) = \rho_s(1 - 3 \cdot \frac{1}{3})$，且 $\gamma(\frac{2}{3}) = f_1(P_+) = f_2(P_-) = f_2(\rho_r(2 - 3 \cdot \frac{2}{3}))$。由于 f_1 和 f_2 连续，由引理 3.1 可知，γ 连续且为满射。此外，我们有 $\gamma(0) = P_+ = \gamma(1)$。由单位圆的紧致性可知，若 γ 在 $[0, 1)$ 上是单射，则 $\mathcal{F}$ 是若尔当曲线。

固定 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$，根据引理 3.1，$\gamma$在区间 $[0, \frac{1}{3})$、$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 和 $[\frac{2}{3}, 1)$ 上的限制均为单射。由于在这种情况下，我们还有 $V \cap f_1(V) = \{P_+\}$、$f_1(V) \cap f_2(V) = \{f_1(P_+)\} = \{f_2(P_-)\}$ 以及 $f_2(V) \cap V = \{P_-\}$，因此可知 γ 在 $[0, 1)$ 上也为单射，所以在这种情况下，$\mathcal{F}$ 是若尔当曲线。□

现在选择 γ 作为 $\mathcal{F}$ 的参数化，使得沿逆时针方向从 $t = 0$ 到 $t = 1$遍历 $\mathcal{F}$，并从 P_+出发，最终回到 P_+。注意，如果 $p = \frac{1}{3}$，则存在一些情况下 γ 是单射，因此 $\mathcal{F}$ 是若尔当曲线；也存在它不是单射的情况。前一种情况的例子是经典科赫雪花，其参数化是单射；后一种情况的例子是科赫反雪花，它满足$\gamma(\frac{1}{6}) = \gamma(\frac{1}{2}) = \gamma(\frac{5}{6}) = (0, -\frac{1}{4}\sqrt{3})^\top$。事实上，在这种情况下，反雪花的参数化有无穷多个点不满足单射性，图 7 展示了这一现象。

因此，如果一个广义 p-科赫雪花不自相交，那么它就是一条若尔当曲线。接下来需要证明在这种情况下，雪花曲线具有有界转弯性质，因此是一个拟圆，从而回答了（Q2）。

定理 3.3. 对于 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ 以及 s、t、$r \in \mathbb{S}$，如果广义 p-科赫雪花的相应参数化 γ $\mathcal{F} = \mathcal{F}(s、t、r)$ 由 (3.2) 在 $[0, 1)$上是单射，那么 $\mathcal{F}$具有有界转弯性质。

证明。设 $x、y \in \mathcal{F}$，且 $x \neq y$；事实上，若 $x = y$，我们可以考虑 $\Gamma = \{x\}$，因此 $\operatorname{diam}(\Gamma) = 0 = |x - y|$。回顾一下，$\mathcal{F}$ 是三条广义 p-科赫曲线的并集 $C(s)$、$f_1(C(r))$ 和 $f_2(C(t))$，其中 f_1 和 f_2是等距变换。我们先考虑 x 和 y 都位于同一条广义 p-科赫曲线上的情形。不失一般性，可以假设 $x、y \in C(s)$。

和之前一样，对于 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $(u_1, ..., u_k) \in \{0, 1, 2, 3\}^k$，令 $V^{u_1,...,u^k}$ 表示该菱形

$$\phi_{(u_1, s_0(0))} \circ \phi_{(u_2, s_1(u_1))} \circ \cdots \circ \phi_{(u_k, s_{k-1}(\sum_{j=1}^{k-1} u_j 4^{k-1-j}))}(V).$$

F或者对于 $k = 0$，我们有 $\{0, 1, 2, 3\}^0 = \{\varnothing\}$，其中 $\varnothing$ 表示空字，并令 $V^{\varnothing} = V$。于是我们写作

$$m = \sup\left\{k \in \mathbb{N}_0 : x, y \in V^{u_1,...,u_k} \text{ for some } (u_1, ..., u_k) \in \{0, 1, 2, 3\}^k\right\}.$$

我们总有$x, y \in V = V^{\varnothing}$，因此$m \ge 0$，因为我们取上确界所依据的集合非空。此外，该上确界总能由某个整数 $k \in \mathbb{N}_0$ 取到；否则便会存在某个 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$

使得 x 和 y 都包含在单点集 $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} V^{u_1,\dots,u_k}$ 中，这意味着 $x = y$。令 $(u_1, \dots, u_m) \in \{0,1,2,3\}^m$ 满足 $x, y \in V^{u_1,\dots,u_m}$。现在我们考虑两种不同的情况：(i) x 和 y 位于第 $m+1$ 层中两个相邻的菱形内，设 $x \in V^{u_1,\dots,u_m,i}$，且 $y \in V^{u_1,\dots,u_m,i+1}$，其中某个 $i \in \{0,1,2\}$；或者 (ii) $x \in V^{u_1,\dots,u_m,0}$ 且 $y \in V^{u_1,\dots,u_m,2} \cup V^{u_1,\dots,u_m,3}$，或者 $x \in V^{u_1,\dots,u_m,1}$ 且 $y \in V^{u_1,\dots,u_m,3}$。

我们从情况（二）开始。在这种情况下，至少有一个菱形 $V^{u_1,\dots,u_m,1}$ 和 $V^{u_1,\dots,u_m,2}$ 位于 x 与 y 之间，因此得到下界 $|x-y| \geq p^m(\frac{1}{2}-p)$，见图 9。根据构造，$C(s)$ 中存在一条端点为 x 和 y 的子弧 Γ，它完全包含在 $V^{u_1,\dots,u_m}$ 内，因此，$\operatorname{diam}(\Gamma) \leq \operatorname{diam}(V^{u_1,\dots,u_m}) = p^m$。所以，$\operatorname{diam}(\Gamma) \leq K_1|x-y|$，其中 $K_1 = 2/(1-2p)$。

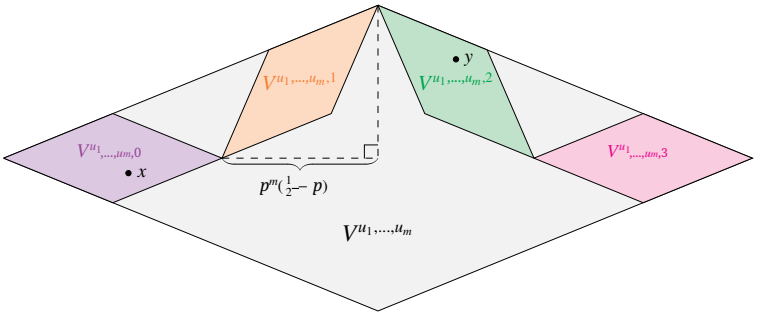


图 9. 情况（二）中的菱形 $V^{u_1,\dots,u_m}$ 示例。

现在转到情形（i），其中 $x \in V^{u_1,\dots,u_m,i}$，且 $y \in V^{u_1,\dots,u_m,i+1}$，其中 $i \in \{0,1,2\}$。在这种情况下，我们令 $n \geq m$ 为所有满足 x 和 y 位于第 n 层中交集非空的菱形内的 $k \in \mathbb{N}$ 的最大值。这样的 n 存在，否则 $x = y$。由于我们假设 ρ_s 是单射，因此存在一个包含 x 和 y 的连续统 Γ，它完全包含在这两个相邻的第 n 层菱形内；这两个菱形的直径均为 p^n，因此 $\operatorname{diam}(\Gamma) \leq 2p^n$。

距离的下界 $|x-y|$ 随后可通过考虑最坏情形来求得，即两个不相交的第 $n+1$ 层菱形之间的最小距离达到最小值时；对于两种情形，该值不同，分别对应 ff的 $p = \frac{1}{3}$ 和 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$，例如参见图 10。

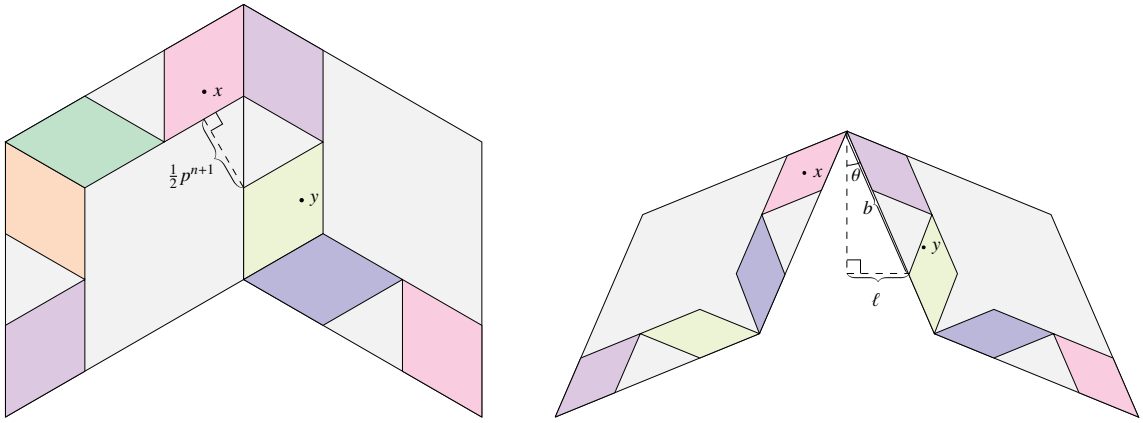


图10。 最坏情形下第n层的情形（i）：当$p = \frac{1}{3}$（左）以及当$p \in (14, 13)$（右）时。

在 $p = \frac{1}{3}$ 的情形下，该距离由一个等边三角形的高给出，其边长为 $p^{n+1}\sqrt{p}$（即第 n+1 层菱形的边长），因此得到 $|x-y| \geq p^{n+1}\sqrt{3}p/2 = p^{n+1}/2 = p\,4$ 直径(Γ)。于是，直径(Γ) $\leq K_2'|x-y|$，其中 $K_2' = {}^4p_\sigma$。在 $p \in (1\,4, 1\,3)$ 的情形下，该最小距离的下界为长度 $l = b \cdot \sin(\theta) = p^{n-1}(1-p)(1-3p)\,2$，即直角三角形中与角 $\theta = \arcsin(\frac{1-3}{p}\,2p\sqrt{p})$ 相对的边长；该直角三角形的斜边长度为 $b = p^n\sqrt{p}(1-p)$，因此 $|x-y| \geq l =$ 直径(Γ) $\frac{(1-p)(1-3p)}{4}p$，并且直径(Γ) $\leq K_2|x-y|$，其中 $K_2 = {}^4p\,(1-p)(1-3p)$。

还需考察x和y属于不同广义p-科赫曲线的情形。由对称性，不妨设$x \in C(\mathbf{s})$，而$y \in f_1(C(\mathbf{t}))$。与前面一样，令n为所有$k \in \mathbb{N}$中的最大值，使得x和y位于交集非空的第n层菱形中；不过这一次，包含x的菱形来自构造的第n层

$C(s)$，而包含<style id='y'>y的菱形来自构造的第 n 层 $f_1(C(r))$。同样，存在一个连续统 Γ，它包含<style id='x'>x和<style id='y'>y，并且完全包含在这两个第 n 层菱形内，从而得到界 $\operatorname{diam}(\Gamma) \le 2p^n$。当 $p = \frac{1}{3}$以及 $p \in (1/4, 1/3)$ 时，两个最坏情形与上面情形（i）中的情形类似，另见图10。对于 $p = \frac{1}{3}$，由于假设 γ 在 $[0,1]$上是单射，我们得到相同的界 $\operatorname{diam}(\Gamma) \le K_2'|x - y|$，其中 $K_2' = 4p$。对于 $p \in (1/4, 1/3)$，我们得到界 $|x - y| \ge p^n(1-p)\sqrt{p}\sin(\varphi)$，其中 $\varphi = \frac{\pi}{6} - \arccos(\frac{1}{2\sqrt{p}})$。因此，$\operatorname{diam}(\Gamma) \le K_3|x - y|$，其中 $K_3 = \frac{8}{1-p}(1 - \sqrt{3(4p-1)})^{-1}$。因此，令

$$K = \begin{cases} \max\{K_1, K_2'\} = 12 & \text{if } p = \frac{1}{3}, \\ \max\{K_1, K_2, K_3\} = \frac{8}{1-p}(1 - \sqrt{3(4p-1)})^{-1} & \text{if } p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}), \end{cases}$$

我们得到，对于任意x、$y \in \mathcal{F}$，存在一个连续统 Γ，它包含于 $\mathcal{F}$ 中，且包含x 和y，满足 $\operatorname{diam}(\Gamma) \le K|x - y|$，这意味着 $\mathcal{F}$ 具有有界转弯性质。□

4. p-科赫雪花所围成面积的完整谱系

本节将着手回答（Q3），即研究任意给定的广义 p-科赫雪花 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(s, t, r)$所围成的面积。然而，在此之前，我们注意到，如图 8 所示，$\mathcal{F}$将平面划分为若干个连通分支：一个无界连通分支和一个或多个有界连通分支。因此，我们需要一种系统的方法来判定这些连通分支中哪些算是由 $\mathcal{F}$ 围成的，哪些不是——这里我们指出，根据命题 3.2，只有在 $p = \frac{1}{3}$ 时，才会出现多个有界分支。粗略地说，如果沿逆时针方向遍历 $\mathcal{F}$ 时，该分支中每一点的绕数都等于 1，那么这个有界分支的面积就计入 $\mathcal{F}$ 所围成的面积。这里，沿逆时针方向遍历 $\mathcal{F}$，是指通过参数化 γ： $[0,1] \to \mathcal{F}$（见 (3.2)）从 $t = 0$到 $t = 1$遍历雪花曲线。

明确这一点后，我们来固定一些记号。对于 $j \in \{0,1,2\}$，令 $s^j = ((s\ j\ k(0), s\ j\ k(1), ..., s\ j\ k(4^k - 1)))_{k=0}^{\infty} \in S$。令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(s^0, s^1, s^2) = C(s^0) \cup f_1(C(s^1)) \cup f_2(C(s^2))$ 为相应的广义 p-科赫雪花。回顾一下，对于每个 $j \in \{0,1,2\}$，广义 p-科赫曲线 $C(s^j)$ 是曲线 $C_k(s^j)$（见 (1.5)）在豪斯多夫度量下的极限，其中 k 趋于无穷。由于 f_1 和 f_2 都是双 Lipschitz 映射，因此雪花曲线 $\mathcal{F}$ 是曲线 $\mathcal{F}_k = C_k(s^0) \cup f_1(C_k(s^1)) \cup f_2(C_k(s^2))$ 在豪斯多夫度量下的极限，其中 k 趋于无穷。

对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，令 a_k 表示如图 11 所示的由 $\mathcal{F}_k$围成的区域的面积。由于 $\mathcal{F}_0 = E_0 \cup f_1(E_0) \cup f_2(E_0)$ 是边长为 1 的等边三角形，因此有 $a_0 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$。对于任意 $k \in \mathbb{N}_0$，$\mathcal{F}_k$ 是一条由 $3 \cdot 4^k$ 条长度为 p^k的连通线段组成的闭曲线。在 $\mathcal{F}_{k+1}$的构造中，将这些线段各自的中间部分替换为等腰三角形的两条腰，其方向由 $s^j\,k(i)$ 在 $j \in \{0,1,2\}$ 和 $i \in \{0,1,..., 4^k - 1\}$时的取值决定；如果 $s^j\,k(i) = 0$，则相应的三角形相对于曲线向外凸出；如果 $s^j\,k(i) = 1$，则向内凸出。因此，对于固定的 $k \in \mathbb{N}_0$，要从 a_k得到 a_{k+1}，只需从 a_k中减去每个向内三角形的面积，并加上每个向外三角形的面积。由于这些三角形均为等腰三角形，两腰长度为 p^{k+1}，底边长度为 $p^k(1-2p)$，因此每个三角形的相应面积为 $\frac{1}{4}p^{2k}(1-2p)\sqrt{4p-1}$。该值

$$\tau_k = \sum_{j=0}^{2} \#\{i \in \{0,1,...,4^k - 1\} : s_k^j(i) = 0\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

是朝外的三角形数量，因此 $3 \cdot 4^k - \tau_k$ 是朝内的三角形数量。由此，对于 $k \in \mathbb{N}_0$，我们得到，

$$a_{k+1} = a_k + \tau_k \frac{p^{2k}(1-2p)\sqrt{4p-1}}{4} - (3 \cdot 4^k - \tau_k)\frac{p^{2k}(1-2p)\sqrt{4p-1}}{4} = a_k + (2\tau_k - 3 \cdot 4^k)\frac{p^{2k}(1-2p)\sqrt{4p-1}}{4}.$$

由于面积关于豪斯多夫度量并不连续，我们不能立即得出由雪花曲线 $\mathcal{F}$围成的面积等于 $\lim_{k\to\infty} a_k$。为证明这一点，我们利用面积关于集合包含具有单调性这一事实。回忆一下，曲线 $\mathcal{F}_k$ 由 $3 \cdot 4^k$ 条线段组成，每条长度为 p^k，且每条都具有 $f_i \circ \phi_{\omega_1} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_k}(E_0)$的形式，其中 $i \in \{0,1,2\}$；这里 f_0表示恒等映射，而 $\omega_j \in A$，对于 $j \in \{1,.....k\}$。令 V^+ 表示连接 P_- 与 Q_+ 以及连接 Q_+ 与 P_+ 的两条线段；令 V^- 表示连接 P_- 与 Q_- 以及连接 Q_-与 P_+的两条线段，其中 $P_\pm$和 $Q_\pm$如 (1.1) 中所定义。将每个 $f_i \circ \phi_{\omega_1} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_k}(E_0)$ 中的 E_0 替换为 V^+，我们得到一条曲线 $\mathcal{F}_k^+$；将 E_0 替换为 V^-，我们得到一条曲线 $\mathcal{F}^-k$。由于 V 的内部是 OSC 的一个可行开集

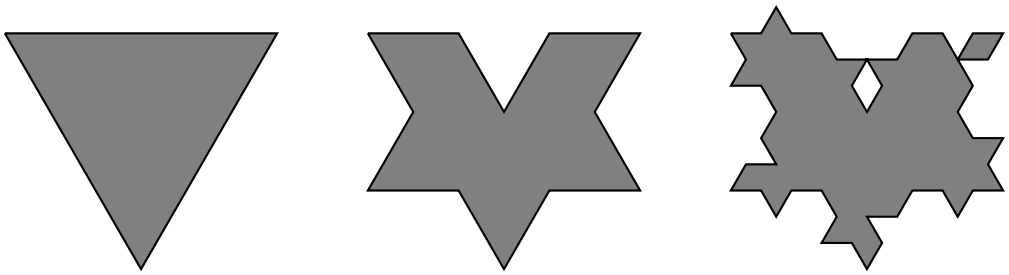


图 11. 曲线 $\mathcal{F}_0$、$\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$所围成面积的示例，其中 $p = \frac{1}{3}$、$\tau_0 = 2$ 和 $\tau_1 = 8$。

对于每条广义 p-科赫曲线，见引理 2.1，由 $\mathcal{F}$ 围成的区域包含于由 $\mathcal{F}_k^+$围成的区域中，并包含由 $\mathcal{F}_k^-$围成的区域。因此，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，有 $a_k^- \le x \le a_k^+$，其中 $a_k^\pm$分别表示由 $\mathcal{F}_k^\pm$围成的区域的面积，而 x 表示由 $\mathcal{F}$围成的区域的面积。由于 $a_k^+ - a_k^- = 3 \cdot 4^k \cdot p^{2k} \cdot \mathrm{area(V)}$ 当 k 趋于无穷时收敛于 0，且 $a_k^- \le a_k \le a_k^+$，由雪花曲线 $\mathcal{F}$围成的区域面积 x 为

$$x = \lim_{k\to\infty} a_k = a_0 + \frac{(1-2p)\sqrt{4p-1}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (2\tau_k - 3\cdot 4^k) p^{2k}. \tag{4.1}$$

特别地，由于经典的 p-科赫雪花由 $s^j{}_k(i) = 0$ 给出，对所有 $j \in \{0,1,2\}$、$k \in \mathbb{N}_0$ 和 $i \in \{0,1,\ldots\ldots,\ 4^k\}$，$\tau_k = 3\cdot 4^k$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$均成立。因此，经典的 p-科赫雪花所围成区域的面积 y_p 为

$$y_p = a_0 + \frac{(1-2p)\sqrt{4p-1}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} 3\cdot 4^k p^{2k} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{4p-1}}{1+2p}.$$

类似地，令 $s^j{}_k(i) = 1$ 对所有 $j \in \{0,1,2\}$、$k \in \mathbb{N}_0$ 和 $i \in \{0,1,\ldots\ldots,\ 4^k\}$，即可得到 p-科赫反雪花，因此 $\tau_k = 0$ 对每个 $k \in \mathbb{N}_0$均成立，故 p-科赫反雪花所围成区域的面积 x_p 为

$$x_p = a_0 - \frac{(1-2p)\sqrt{4p-1}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} 3\cdot 4^k p^{2k} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{4p-1}}{1+2p}.$$

此外，我们可以利用（4.1）证明以下结论，从而也对（Q3）给出肯定回答。

定理 4.1。 设 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ 固定。对于每个 $y \in [x_p,\ y_p]$，存在一个广义 p-科赫雪花 $\mathcal{F}$，使得其围成的区域 $\mathcal{F}$ 的面积等于 y。

证明。 我们可以将（4.1）改写为

$$x = x_p + \frac{(1-2p)\sqrt{4p-1}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k p^{2k}.$$

因此，若我们写作 $\beta = p^{-2} \in [9, 16)$，只需证明：对于任意 $z \in [0, \frac{3}{1-4p_2}]$，存在一个序列 $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$，满足 $\tau_k \in \{0,1,\ldots,3\cdot 4^k\}$，对每个满足 $z = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k \beta^{-k}$ 的 $k \in \mathbb{N}_0$ 均成立。这里注意到

$$\frac{2(y_p - x_p)}{(1-2p)\sqrt{4p-1}} = \frac{3}{1-4p^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3\cdot 4^k}{\beta^k}.$$

因此，问题从几何问题转变为关于实数 β-展开的问题。对于每个$n \in \mathbb{N}_0$，我们考虑集合

$$X_n = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\tau_k}{\beta^k} : \tau_k \in \{0,1,\ldots,3\cdot 4^k\} \text{ for all } k \ge n \right\},$$

并注意到 $X_n = \bigcup_{k=0}^{3\cdot 4^n} \{k\beta^{-n} + x : x \in X_{n+1}\} = \bigcup_{k=0}^{3\cdot 4^n} (k\beta^{-n} + X_{n+1})$ 对所有 $n \in \mathbb{N}_0$. 众所周知，例如参见[DK 02],对于任意 $\beta > 1$,

$$[0,1] \subseteq \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_m}{\beta^m} : \tau_m \in \{0,1,\ldots,\lceil\beta\rceil - 1\} \text{ for all } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

由于有 $\beta\in[9,16)$，因此对于每个 $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$，有 $\lceil\beta\rceil-1\leq 15<3\cdot 4^n$。由此可得，对于每个 $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$，$[0,\frac{1}{\beta^{n-1}}]\subseteq X_n$。换言之，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，有 $[0,\frac{1}{\beta^n}]\subseteq X_{n+1}$，因此

$$X_n=\bigcup_{k=0}^{3\cdot 4^n}\left(\frac{k}{\beta^n}+X_{n+1}\right)\supseteq\bigcup_{k=0}^{3\cdot 4^n}\left(\frac{k}{\beta^n}+\left[0,\frac{1}{\beta^n}\right]\right)=\left[0,\frac{3\cdot 4^n+1}{\beta^n}\right].$$

特别地，对于每个$n\in\mathbb{N}$，我们有 $[0,\frac{3\cdot 4^{n+1}+1}{\beta^{n+1}}]\subseteq X_{n+1}$，因此

$$X_n=\bigcup_{k=0}^{3\cdot 4^n}\left(\frac{k}{\beta^n}+X_{n+1}\right)\supseteq\bigcup_{k=0}^{3\cdot 4^n}\left(\frac{k}{\beta^n}+\left[0,\frac{3\cdot 4^{n+1}+1}{\beta^{n+1}}\right]\right)=\left[0,\frac{3\cdot 4^n}{\beta^n}+\frac{3\cdot 4^{n+1}+1}{\beta^{n+1}}\right].$$

重复上述过程可得 $[0,\sum_{k=n}^{m}\frac{3\cdot 4^k}{\beta^k}+\frac{1}{\beta^m}]\subseteq X_n$，对于$n$、$m\in\mathbb{N}$，其中$m>n$。令$m$趋于无穷大，得到

$$\left[0,\sum_{k=n}^{\infty}\frac{3\cdot 4^k}{\beta^k}\right)\subseteq\bigcup_{m=n+1}^{\infty}\left[0,\sum_{k=n}^{m}\frac{3\cdot 4^k}{\beta^k}+\frac{1}{\beta^m}\right]\subseteq X_n.$$

取 $\tau_k=3\cdot 4^k$，对每个$k\geq n$，可知 $\sum_{k=n}^{\infty}3\cdot 4^k\beta^{-k}\in X_n$ 对于$n\in\mathbb{N}$成立，因此$X_n\supseteq[0,\sum_{k=n}^{\infty}3\cdot 4^k\beta^{-k}]$ 对于每个$n\in\mathbb{N}$成立。特别地，我们有$X_1\supseteq[0,\sum_{k=1}^{\infty}3\cdot 4^k\beta^{-k}]=[0,\frac{12}{\beta-4}]$。注意到 $\beta<16$，因此 $\frac{12}{\beta-4}>1$，我们得出$X_0\supseteq\bigcup^{3}{}_{k=0}[k,\ k+\frac{12}{\beta-4}]=[0,3+\frac{12}{\beta-4}]=[0,\frac{3}{1-4p_2}]$。□

定理 4.1 之前的讨论固定 $\in(\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$,存在唯一一个广义 p-科赫雪花，其围成面积为 x_p，即 p-科赫反雪花；同时，也只存在唯一一个广义 p-科赫雪花，其围成面积为 y_p。此外，对于 $y\in(x_p,\ y_p)$，定理 4.1 证明了存在一个广义 p-科赫雪花，其围成面积为

$$y=x_p+\frac{(1-2p)\sqrt{4p-1}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k p^{2k},$$

其中，数列 $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 由雪花曲线的构造所确定，并满足 $\tau_k\in\{0,。.....,\ 3\cdot 4^k\}$。以下结果（定理 4.3，我们将用到引理 4.2）——其证明改编自 Erd¨os、Jo´o 和 Komornik [EJK90] 关于当 $\beta\in(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ 时，每个 x $\in(1,\frac{1}{\beta-1})$ 都有不可数多个 β- 展开式的优美证明 —— 说明：给定 y $\in(x_p,\ y_p)$，存在不可数多个广义 p-科赫雪花，其围成面积为 y。

引理 4.2. 若 $p\in(\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$且 $k\geq 2$ 是满足条件的整数

$$\frac{(4p^2)^k}{1-(4p^2)^k}<\frac{4p^2}{1-4p^2}-\frac{1}{3},\tag{4.2}$$

那么，对于 $m\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N},\\ j>m}}3\cdot 4^j p^{2j}\geq p^{2m}.$$

证明。 取$k\geq 2$和$m\in\mathbb{N}$。设$n\in\mathbb{N}_0$和$l\in\{1,2,\ldots,k-2\}$满足$m=nk+l$。那么，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N},\\ j>m}}3\cdot(4p^2)^j&=3\sum_{\substack{j\in\mathbb{N},\\ j>m}}(4p^2)^j-3\sum_{\substack{j\in\mathbb{N},\\ j\geq n+1}}(4p^2)^{jk}\\&=\frac{3(4p^2)^{m+1}}{1-4p^2}-\frac{3(4p^2)^{(n+1)k}}{1-(4p^2)^k}\\&=p^{2m}\cdot 3\cdot 4^{m+1}p^2\left(\frac{1}{1-4p^2}-\frac{(4p^2)^{k-l-1}}{1-(4p^2)^k}\right)\\&\geq p^{2m}4^{m+2}p^2(1-(4p^2)^{k-l-1})\geq p^{2m}4^{m+2}p^2(1-4p^2)\geq p^{2m}.\end{aligned}$$

此外，若 $k \geq 2$ 是满足（4.2）的整数，且 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $m = nk - 1$，则

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N},\\ j>m}} 3\cdot(4p^2)^j &= 3\sum_{\substack{j\in\mathbb{N},\\ j\geq m+2}}(4p^2)^j - 3\sum_{\substack{j\in\mathbb{N},\\ j\geq n+1}}(4p^2)^{jk}\\ &= \frac{3(4p^2)^{m+2}}{1-4p^2} - \frac{3(4p^2)^{(n+1)k}}{1-(4p^2)^k}\\ &= \frac{3(4p^2)^{m+2}}{1-4p^2} - \frac{3(4p^2)^{m+1+k}}{1-(4p^2)^k}\\ &= p^{2m}\cdot 3\cdot 4^{m+1}p^2\left(\frac{4p^2}{1-4p^2} - \frac{(4p^2)^k}{1-(4p^2)^k}\right) \geq p^{2m}.\end{aligned}$$

□

定理 4.3。 对于 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ 且 $y \in (0, \frac{3}{1-4p^2})$，存在不可数多个 $(v_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \in \prod_{m\in\mathbb{N}_0}\{0,1,\ldots,3\cdot 4^m\}$ 满足

$$y = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} v_m p^{2m}.$$

证明。 由于 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$，我们有 $3\sum_{m\in\mathbb{N}} 4^m p^{2m} > 1$。因此，若能证明对于 $y' \in (0, 3\,4p^2(1-4p^2))$，存在不可数多个 $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_{m\in\mathbb{N}}\{0,1,\ldots,3\cdot 4^m\}$ 满足

$$y' = \sum_{m\in\mathbb{N}} v_m p^{2m}, \tag{4.3}$$

那么，当 $y \in (0, 3\,4p^2(1-4p^2))$ 时，我们可以令 $v_0 = 0$；当 $y \in [(v_0-1)(1-4p^2)\,4p^2,\ (v_0+1)(1-4p^2)\,4p^2)$ 时，对 $j \in \{1,2,3\}$ 令 $v_0 = j$。为此，注意到，由于 $y' \in (0, 3\,4p^2(1-4p^2))$，我们可以按引理 4.2 选取 $k \in \mathbb{N}$，使其足够大，从而

$$3\sum_{m\in\mathbb{N}} 4^{mk}p^{2mk} < y' < 3\sum_{m\in\mathbb{N}} 4^m p^{2m} - 3\sum_{m\in\mathbb{N}} 4^{mk}p^{2mk} = 3\sum_{m\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N}} 4^m p^{2m}.$$

现在，对于任意选取的 $(\delta_{mk})_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_{m\in\mathbb{N}}\{0,\ldots,3\cdot 4^{mk}\}$（这样的选取有不可数多个），我们有

$$0 < \underbrace{y' - \sum_{m\in\mathbb{N}} \delta_{mk}p^{2mk}}_{z} < 3\sum_{m\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N}} 4^m p^{2m}. \tag{4.4}$$

按如下方式归纳地定义 $(v_m)_{m\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N}} \in \prod_{m\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N}}\{0,1,\ldots,3\cdot 4^m\}$：令 $v_1 = \max\{\eta \in \{0,1,\ldots,3\cdot 4\} : z < \eta p^2\}$；对于满足 $m \in \mathbb{N}\setminus k\mathbb{N}$ 的 $m \geq 2$，令

$$v_m = \max\left\{\eta \in \{0,1,\ldots,3\cdot 4^m\} : \eta p^{2m} + \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N},\\ j<m}} v_j p^{2j} < z\right\}, \tag{4.5}$$

我们断言 $z = \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N}} v_m p^{2m}$。否则，根据构造，

$$\sum_{m\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N}} v_m p^{2m} < z. \tag{4.6}$$

根据 (4.4)，集合 $Q = \{i \in \mathbb{N}\setminus k\mathbb{N} : v_i \neq 3\cdot 4^i p^{2i}\}$ 非空且有界，理由如下。若 $Q = \emptyset$，则 $v_i = 3\cdot 4^i p^{2i}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}\setminus k\mathbb{N}$都成立，这与 (4.4) 中给出的上界矛盾；若 Q 无界，则

$$0 \leq z - \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N},\\ j\leq m}} v_j p^{2j} \leq p^{2m}$$

对于无穷多个 $m \in \mathbb{N}$，这与（4.6）矛盾。令 $q = \sup Q$，我们注意到 $v_i = 3\cdot 4^i$ 对所有 $i \in \mathbb{N}\setminus k\mathbb{N}$ 满足$i > q$，因此，（4.6）结合引理4.2，可推出

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N},\\ j<q}} v_j p^{2j} + (v_q+1)p^{2q} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N},\\ j\leq q}} v_j p^{2j} + p^{2q} \leq \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N},\\ j\leq q}} v_j p^{2j} + 3\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N},\\ j>q}} 4^j p^{2j} < z.$$

这与（4.5）矛盾。因此，命题得证，故，

$$y = \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus k\mathbb{N}} v_m p^{2m} + \sum_{m\in\mathbb{N}} \delta_{mk}p^{2mk}.$$

由于 $(\delta_{mk})_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_{m\in\mathbb{N}}\{0,\ldots,3\cdot 4^{mk}\}$有不可数多个选择，我们可以构造不可数多个序列 $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_{m\in\mathbb{N}}\{0,1,\ldots,3\cdot 4^m\}$ 满足（4.3）。□

5. 双面p-科赫曲线与雪花曲线

我们已经看到，对于介于x^p 与y^p之间的每个实数y，都存在一个围成面积为y的广义p-科赫雪花。因此，不禁会问：广义p-科赫雪花是否填满了这两种雪花之间的整个空间？也就是说，所有广义p-科赫雪花的并集，是否等于经典p-科赫雪花所围区域减去p-科赫反雪花所围区域所得的整个区域?

为了回答这个问题，也就是回答（Q4），我们需要一些预备记号和辅助结果。为此，我们再次令 S 表示由满足$s_k(i) \in \{0,1\}$的元组组成的所有序列的集合$\mathbf{s} = ((s_k(0), s_k(1),..., s_k(4^k-1)))_{k=0}^{\infty}$，对每个$k \in \mathbb{N}_0$和$i \in \{0,1,...,4^k-1\}$均如此，并令 $A = \{0,1,2,3\}\times\{0,1\}$。

引理 5.1。$\bigcup_{\mathbf{s}\in\mathbb{S}}\Sigma(\mathbf{s}) = A^{\mathbb{N}}$，其中 $\Sigma(\mathbf{s})$ 如 (1.4)中所定义。

证明。根据构造，$\bigcup_{\mathbf{s}\in\mathbb{S}}\Sigma(\mathbf{s}) \subseteq A^{\mathbb{N}}$。因此，只需证明反向包含。为此，设 $\omega \in A^{\mathbb{N}}$，并写作 $\omega = ((u_k, i_k))_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $u_k \in \{0,1,2,3\}$ 且 $i_k \in \{0,1\}$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$都成立。选取 $\mathbf{s} = ((s_k(0), ..., s_k(4^k-1))_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{S}$，使得 $s_0(0) = i_1$ 且 $s_{k-1}(\sum_{j=1}^{k-1} u_j 4^{k-1-j}) = i_k$ 对 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$成立，并令 $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$，则有 $\omega = \omega(u, s) \in \Sigma(\mathbf{s})$。□

如果我们令 $\mathcal{D}$ 表示所有广义p-科赫曲线的并集，则根据构造，我们有

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\mathbf{s}\in\mathbb{S}} C(\mathbf{s}) = \bigcup_{\mathbf{s}\in\mathbb{S}} \bigcup_{(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\Sigma(\mathbf{s})} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\phi_{\omega_1}\circ\phi_{\omega_2}\circ\cdots\circ\phi_{\omega_k})(V) = \bigcup_{(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\phi_{\omega_1}\circ\phi_{\omega_2}\circ\cdots\circ\phi_{\omega_k})(V). \tag{5.1}$$

Since $\phi_{(0,0)} = \phi_{(0,1)}$ 和 $\phi_{(3,0)} = \phi_{(3,1)}$，我们可以用集合 B 替换 $A = A \setminus \{(0,1),(3,1)\}$ 中的 (5.1)，从而得到

$$\mathcal{D} = \bigcup_{(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}\in B^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\phi_{\omega_1}\circ\phi_{\omega_2}\circ\cdots\circ\phi_{\omega_k})(V).$$

与广义p-科赫曲线一样，我们也可以将 $\mathcal{D}$构造为集合 $\mathcal{D}_k = \bigcup_{\omega_1,\ ...,\ \omega_k\in B} \phi_{\omega_1}\circ\cdots\phi_{\omega_k}(E_0)$ 的极限（关于豪斯多夫度量），其中$k \in \mathbb{N}$，而E_0仍为线段$E_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\times\{0\}$。我们看到，生成 $\mathcal{D}$ 的过程与生成广义p-科赫曲线的过程类似，但我们不是将线段的中间部分替换为三角形的两条边（该三角形相对于线段的方向或向上或向下），而是将其替换为这两个三角形的两条边。因此，我们称 $\mathcal{D}$ 为**双面 p-科赫曲线**。注意，这个名称有些误导性，因为与广义p-科赫曲线不同，$\mathcal{D}$ 本身并不是一条曲线。

我们将 $\mathcal{DF} = \bigcup_{s,t,r\in\mathbb{S}} \mathcal{F}(s,t,r) = \mathcal{D}\cup f_1(\mathcal{D})\cup f_2(\mathcal{D})$ 称为由所有广义 p-科赫雪花构成的并集，即双侧 p-科赫雪花，见图 12。因此，(Q4) 等价于询问双侧 p-科赫雪花$\mathcal{DF}$ 是否覆盖了 p-科赫雪花与 p-Koch 反雪花之间的整个区域。由于该区域的面积为 $y^p - x^p$，若要 $\mathcal{DF}$ 覆盖此区域，它还必须包含一个开集。

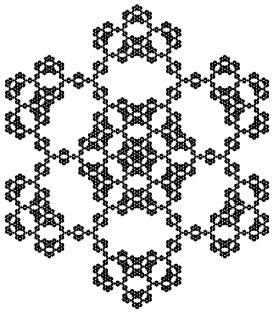


图 12. p-科赫雪花，其中 $p = \frac{1}{3}$。

与p-科赫曲线一样，但不同于广义p-科赫曲线，$\mathcal{D}$ 是迭代函数系统 $\{\phi_{(a,b)}$ 的唯一吸引子集：$(a,b) \in B\}$。由于该迭代函数系统由六个相似映射组成，每个映射都具有压缩比 p，并由引理 2.1满足开集条件，因此根据 [Hut81，定理 5.3(1)]可知，双侧科赫曲线 $\mathcal{D}$的豪斯多夫维数为

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}) = \frac{\log(6)}{\log(p^{-1})}.$$

因此，对于 $p \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$,，我们有 $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{DF}) = \dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}) < 2$。由此可知，$\mathcal{DF}$不可能包含 $\mathbb{R}^2$ 的任何开子集，因此不会覆盖任何具有正面积的区域。

致谢

这项工作始于伯明翰大学的一项本科生科研体验项目（REUs），合作人员包括 K. Chen 和 D. Wang。我们非常感谢他们分享见解并进行有益的讨论。S. van Golden 也感谢英国工程与自然科学研究委员会提供的 EP/S02297X/1 项资助，为本文的撰写提供了经费支持。

参考文献

[DK02] Karma Dajani 和 Cor Kraaikamp。《数论遍历理论》，《卡鲁斯数学专著》第 29 卷。美国数学协会，华盛顿特区，2002 年。[Edg98] Gerald A. Edgar。《积分、概率与分形测度》。施普林格出版社，纽约，1998 年。[EJK90] P´al Erd¨os、Ist v´an Jo´o’ 和 Vilmos Komornik。唯一展开 $1 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-n_i}$ 及相关问题的刻画。《*B*ull. Soc. Math. France》，118(3)：377–390，1990 年。[Fal13] Kenneth Falconer。《分形几何：数学基础与应用》。约翰·威立父子出版公司，2013 年。[Hut81] John E Hutchinson。分形与自相似性。《印第安纳大学数学杂志》，30(5)：713–747，1981 年。[Man82] 伯努瓦·B·曼德博。《自然界的分形几何》。W. H. Freeman and Co.，旧金山，加利福尼亚州，1982 年。[Roh01] Steffen Rohde。模去双利普希茨映射的拟圆。《伊比利亚美洲数学评论》，17(3)：643–659，2001 年。[vK06] 赫尔格·冯·科赫。关于平面曲线理论中某些问题研究的一种初等几何方法。《数学学报》，30(1)：145–174，1906 年。