arXiv:2601.07383v1 [math.NT] 12 Jan 2026

某些阿贝尔型志村簇的伊古萨堆

FABIAN SCHNELLE

Abstract. 我们为一类阿贝尔型志村簇的良约化轨迹构造伊古萨堆。这类志村簇可由 PEL 数据定义，并假设其为 (A 偶) 型或 (C) 型，且在素数 p 处非分歧。

Contents

1. 引言 2 1.1. 伊古萨堆 2 1.2. 本文目标 3 1.3. 证明策略 4 1.4. 致谢 4 2. 志村簇与混合空间 4 2.1. 志村数据与志村簇 5 2.2. 简短的线性代数插曲 6 2.3. PEL 数据 6 2.4. 混合空间 9 2.5. 阿贝尔型情形 10 3. 完美空间、钻石与 v-堆 13 3.1. 完美空间 13 3.2. pro-´etale 拓扑与 v-拓扑 15 3.3. v-堆 16 3.4. 钻石 17 4. 进入赋值世界 18 5. p-可除群 21 5.1. 定义与基本性质 21 5.2. 在 $\mathcal{O}_C$ 23上的分类 24 5.3. 下降性质 24 5.4. Dieudonné 模 25 5.5. Serre-Tate 理论 27 6. 混合特征仿射 Grassmannian 与霍奇-泰特周期映射 28 6.1. 混合特征仿射 Grassmannian 28 6.2. 显式计算 30 6.3. 霍奇-泰特周期映射 31 7. Fargues-Fontaine 曲线上的 G-丛层 32 7.1. Fargues-Fontaine 曲线与向量丛 32 7.2. G-丛层 34 7.3. 显式计算 35 8. 伊古萨堆的构造 35 8.1. 混合伊古萨堆 36 8.2. 阿贝尔型伊古萨堆 43 参考文献 45

1. Introduction

本文关注 Scholze 关于无限层 p处志村簇的纤维积猜想；该猜想最初见于 Mingjia Zhang 的博士论文 [Zha23]。粗略而言，这是一个关于如何将无限层 p 处志村簇的 p-adic 几何分解为两部分的猜想：一部分是 p部分，由志村数据的霍奇余特征的逆所标记的混合特征仿射 Grassmannian 中的舒伯特胞腔来建模；另一部分是素数异于p 的部分，由一个 v-堆来建模，该 v-堆应当能够在 Igusa 簇之间进行插值。因此，Zhang 将这些堆称为“伊古萨堆”。

1.1. 伊古萨堆。为陈述该猜想，考虑如下设定。设 (G, X) 是一个志村数据，其关联的 $G(\mathbb{C})$-共轭类由微小余特征 $[\mu^{-1}]$ 表示，定义域为 E_0。固定一个素数 p 和一个同构$\mathbb{C} \cong \mathbb{Q}_p$，并相对于由映射 $E_0 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{Q}_p$ 诱导的 p 上方的素理想，完备化 E_0 。我们将所得局部域记为 E，其剩余域记为 $\mathbb{F}_q$。考虑一个紧开子群 $K = K_p K^p \subseteq G(\mathbb{A}_f)$，以及特征为 p 的完美空间范畴 Perf，并赋予其 v-拓扑。用 $\mathcal{S}_K$ 表示附属于该志村簇在层级 K 处的 adic 解析化、定义在 $\operatorname{Spd} E$ 上的菱形空间；用 $\mathcal{S}_{K^p} = \varprojlim_{K^p} \mathcal{S}_{K_p K^p}$ 表示在 p 处具有无限层级的志村簇。我们还令 $\mathcal{S}$ 表示处处具有无限层级的志村簇，同样将其视为菱形空间。此外，令 Gr_G 表示附属于 $G_{\mathbb{Q}_p}$、定义在 $\operatorname{Spd} E$ 上的 B^+ dR 仿射 Grassmannian。我们还将在 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 的一个 Borel 子群中固定一个极大环面，并固定一个支配余特征 $\mu \in X_*^+(T)$，以表示 $[\mu]$的 $G(\mathbb{Q}_p)$-共轭类。记 $\mathrm{Gr}_{G,\overline{\mu}}$ 为由 μ 标记的舒伯特胞腔。此外，令 Bun_G 表示 Perf 上的小 v-叠，它参数化 Fargues-Fontaine 曲线上的 $G_{\mathbb{Q}_p}$-丛。回顾 Beauville-Laszlo 均匀化映射 $BL : \mathrm{Gr}_G \to \mathrm{Bun}_G$ 以及霍奇-泰特周期映射 π_{HT}: $\mathcal{S}_{K^p} \to \mathrm{Gr}_G$，其像包含于 $\mathrm{Gr}_{G,\mu}$ 中。

有了这样的设置，我们现在可以陈述纤维积猜想的（有理部分）：

猜想 1.1 (Scholze，参见 [Zha23])。存在一种构造，可得到小 v-叠系统 $\{\mathrm{Igs}_{K^p}\}_{K^p}$（定义在 Perf 上），并配备映射 $\mathrm{red} : \mathcal{S}_{K^p} / \operatorname{Spd} E \to \mathrm{Igs}_{K^p}$和 $\pi_{HT} : \mathrm{Igs}_{K^p} \to \mathrm{Bun}_G$，使得

(i) 对每个 K^p，以下图表是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{K^p} & \xrightarrow{\pi_{HT}} & \mathrm{Gr}_{G,\mu} \\ {\scriptstyle \mathrm{red}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle BL} \\ \mathrm{Igs}_{K^p} & \xrightarrow[\overline{\pi}_{HT}]{} & \mathrm{Bun}_G \end{array}$$

(ii) 系统 $\{$伊古萨$_{K^p}\}_{K^p}$ 堆上存在一个 $G(\mathbb{A}_f)$ 作用（其中$G(\mathbb{Q}_p)$ 的作用是平凡的），该作用将 $\{\mathcal{S}_{K^p}\}_{K^p}$ 上的黑克作用下降下来。

从历史角度来看，Zhang 在她的博士论文 [Zha23], 中证明了 Kottwitz 分类中的 A 型和 C 型 PEL 型志村数据满足该猜想，假设约化群 G 在 p 处非分歧；不过，她定义的伊古萨堆是定义在 $\operatorname{Spd} \mathbb{F}_q$ 上，而非 $\operatorname{Spd} \mathbb{F}_p$ 上，这一点并不完善。后来，Patrick Daniels、Pol van Hoften、Dongryul Kim 和 Mingjia Zhang 将结果推广到任意霍奇型志村数据，并将底空间降至 $\operatorname{Spd} \mathbb{F}_p$，见 [DHKZ24]。在这两种情况下，他们都只在相关志村簇的良约化轨迹上证明了该结果（若志村簇是紧的，则良约化轨迹就是整个志村簇）。

通常，在远离 p 的部分也取无限层后，陈述猜想 1.1 会更方便。这是可行的，因为霍奇-泰特周期映射 π_{HT}（以及构造完成后的 π_{HT}）在改变远离 p 的层时保持不变。至少在霍奇型框架下，使用无限层的伊古萨堆的一个好处是，它最终被证明是一个 v-层（见 [DHKZ24, 5.2.6]）。

在最近的预印本 [Kim25], Dongryul Kim 中，Dongryul Kim 公理化了伊古萨堆的概念，如下所示。

定义 1.2 ([Kim25], 5.5)。一个**伊古萨堆** 是一个 v-叠 Igs$(G,\ X)$，配备了一个 $G(\mathbb{A}_f^p)$-作用以及一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\pi_{HT}} & \mathrm{Gr}_{G,\mu} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle BL} \\ \mathrm{Igs} & \xrightarrow{\overline{\pi}_{HT}} & \mathrm{Bun}_{G,\mu} \end{array}$$

满足以下两条公理

- Igs $\times_{\mathrm{Bun}_{G,\ \mu}} \mathrm{Gr}_{G,\ \mu}$ 上的 $G(\mathbb{A}_f^p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ 作用还原了 $\mathcal{S}$ 上的 $G(\mathbb{A}_f)$ 黑克作用。
- 对于 ϕ 绝对弗罗贝尼乌斯，$\phi \times \mathrm{id}$ 在 Igs $\times_{\mathrm{Bun}_{G,\ \mu}} \mathrm{Gr}_{G,\ \mu}$ 上平凡作用

有了这种公理化，Kim 证明，伊古萨堆的构造（无论是在整个志村簇上，还是在其良约化轨迹上）只要存在，就会自动关于志村数据具有函子性（见 [Kim25，定理 B], ）；此外，伊古萨堆在唯一同构意义下唯一，同样以其存在为前提（见[Kim25，定理 A]）。唯一性和函子性都可以仅由第一条公理证明，见 [Kim25，注 5.7] ——只有当我们实际想要比较伊古萨堆的上同调与志村簇的上同调时，才会用到第二条公理。

1.2. **本文目标**。本文为某些自然源自 PEL 数据的阿贝尔型志村簇的良约化轨迹构造伊古萨堆（见附录 [Nek18，A3]）。由于它们属于阿贝尔型，因此不在 [DHKZ24] 的结果涵盖范围内。这类志村簇的例子包括希尔伯特模簇和全不定四元数西穆拉簇；原则上，任何在 p 处非分歧的 (A 偶) 型或 (C) 型 PEL 数据，都会给出这样的阿贝尔型志村簇。

严格阿贝尔型志村簇难以处理，原因在于它们无法用带附加结构的阿贝尔簇来作精细模空间描述，也无法嵌入西格尔模簇。因此乍看之下，[Zha23] 或 [DHKZ24]中构造伊古萨堆的所有方法都失效了。

我们所考虑的阿贝尔型志村簇源自一个 PEL 数据，这一事实使得它们容易处理得多。事实上，它们通过两步过程由附属于同一个 PEL 数据的 PEL 型志村簇构造而来。

第一步是在模问题中允许更一般的层结构，从而扩展 PEL 型志村簇；我们将其称为**混合层结构**。由此再次得到精细模空间，我们将其称为**混合空间**。这些空间的性质仍然很好，基本上由 PEL 型志村簇的多个副本组成（见定义 2.13）。第二步是对这些混合空间取某种极化作用的商空间，由此便得到所需的阿贝尔型志村簇。

我们的主要结果如下。

定理 1.3（推论 8.15）。存在一个伊古萨堆 Igs，对应于上述描述的阿贝尔型志村数据（G, X），并满足定义 *1.2* 的公理。

Igs 的具体构造请参见第 8 章。

我们指出，Patrick Daniels、Pol van Hoften、Dongryul Kim 和 Mingjia Zhang 已宣布了相关结果，将为所有阿贝尔型志村簇构造伊古萨堆。他们的方法将大量依赖 [Kim25]，开发的方法，因此可以预期其具体性较低。另一方面，通过将注意力限制在这一特殊类别的阿贝尔型志村簇上，我们能够以相当具体的方式构造伊古萨堆，这与 [Zha23] 的思路颇为相似。

1.3. **证明策略**。我们将充分利用这样一个事实：我们的阿贝尔型志村簇是通过上述两步过程从 PEL 型志村簇得到的。

具体而言，我们首先处理各处均为无穷层混合空间的情形。在这一步中，采用与 [Zha23] 和 [DHKZ24] 类似的方法，构造一个满足类似笛卡尔图的混合伊古萨堆，是相当直接的。

其次，我们注意到，混合伊古萨堆（结果证明它仍是一个 v-层）带有与混合空间类似的极化作用。一个自然的想法是直接对这一极化作用取堆商，但这种做法很快就会遇到问题。这是因为有限层混合空间上的极化作用几乎从来都不是自由的（特别是对于主层-N 结构，即使 N 足够大也是如此）。然而，经过仔细分析，我们找到了一个层子群余终系统，使得这些层上的极化作用确实是自由的。因此，在这些层上对极化作用取商，便得到有限 ´étale 扭子。处处转到无限层后，这表明，分别对无限层的混合空间和无限层的混合伊古萨堆上的极化作用取商，会得到相对于同一个仿紧群的 pro-´étale 扭子。

因此，在无限层对混合伊古萨堆取朴素的堆商后，阿贝尔型志村簇的纤维积图便是混合空间的纤维积图的直接推论。

1.4. **致谢**。这项工作源于作者在波恩大学完成的硕士论文，其中只考虑了希尔伯特模簇这一特殊情形。首先，我们衷心感谢 Siyan Daniel Li-Huerta 提出构造希尔伯特模簇的伊古萨堆这一问题，并在整个项目期间给予极其密切而细致的指导。此外，我们感谢 Peter Scholze 同意指导这篇论文；特别是，他建议我们在取商之前，先处处取无限层。

在推广论文中的结果期间，作者得到了德国卓越战略 EXC 2044–390685587 “数学 M¨unster：动力学–几何–结构”、德国研究联合会（DFG）的 CRC 1442 “几何：变形与刚性”以及 Eva Viehmann 的莱布尼茨奖的支持。

2. Shimura varieties and hybrid spaces

本节首先为方便读者，回顾志村数据和志村簇的定义。随后，我们讨论产生本文重点研究的阿贝尔型志村簇的 PEL 数据。在此过程中，我们还将讨论前文提到的混合空间、它们的模空间描述及整模型。

2.1. **志村数据与志村簇**。设 $\mathbb{S} := \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\,\mathbb{G}_m$ 为德利涅环面。

定义 2.1 ([Del79, 2.1.1])。一个**志村数据**是一个由约化群 G（定义在 $\mathbb{Q}$ 上）和 G 的一个 $(\mathbb{R})$-共轭类 X 的同态 h 组成的二元组 (G, X)：它满足以下三条公理：

(SV1) 对所有 $h \in X$，在 $h_{\mathbb{C}}$ 对 G 的复化李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的伴随表示中，只能出现权 $(1,-1)$、$(0,0)$ 和 $(-1,1)$。(SV2) 对所有 $h \in X$， $h(i)$ 在 $G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$ 上的伴随作用都是嘉当对合。(SV3) G^{ad} 不存在满足以下条件的因子 H：它定义在 $\mathbb{Q}$ 上，且 h 到 H 的投影是平凡的。

如 [Del79], 中所述，公理 (SV2) 确保集合 X 自然具有复流形的结构，且每个 $h \in X$ 的稳定子模中心都是紧的。公理 (SV3) 保证导出子群 G^{der} 的单连通覆盖满足强逼近。

定义 2.2. 志村数据**之间的态射**(G, X) 与 (G', X') 是代数群 $G \to G'$ 上的一个同态 $\mathbb{Q}$，它将 X 映射到 X'。

给定志村数据 (G, X) 和紧开子群 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$，考虑双陪集空间

$$X_K := G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f))/K,$$

其中 $G(\mathbb{Q})$ 通过左作用对角地作用于两个因子上（使用显然的嵌入 $G(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{R})$ 和 $G(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{A}_f)$），而 K 通过右乘作用于 $G(\mathbb{A}_f)$。若 K 足够小，则 X_K 是一个复流形（[Mil17, 3.1, 5.13]）。由贝利-博雷尔和伯orel 子群的定理，存在唯一一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的拟射影簇 $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$，其复解析化为 X_K。

定义 2.3. $G(\mathbb{A}_f)$ 在逆系统 $\{\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}\}_K$ 上通过同构给出的**黑克作用** 为

$$\gamma_g : \mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Sh}_{g^{-1}Kg}(G, X)_{\mathbb{C}}$$

其中，γ_g 将双陪集 $[h, g_1]$ 映射到 $[h, g_1 g]$。

对于一个志村数据 (G, X) 和 $h \in X$，我们关联以下**霍奇余特征**$\nu_h : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$:

$$\nu_h(z) := h_{\mathbb{C}}(z, 1).$$

记 $[\nu_h]$ 为其 $G(\mathbb{C})$-共轭类，它不依赖于$h \in X$的选取。在引言中，这个共轭类记作 $[\mu^{-1}]$。自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ 作用于余特征$\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$的 $G(\mathbb{C})$-共轭类集合。根据 Mil17, 12.1]， ν_h 有一个已经定义在 $\mathbb{Q}$上的共轭，因此我们也可以将 $[\nu_h]$视为一个 $G(\mathbb{Q})$-共轭类。 —

定义 2.4. 设 (G, X) 是一个志村数据。其对应的**反射域**或**定义域** $E(G, X)$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ 中稳定子 $[\nu_h]$ 的不动域。

定理 2.5 (Deligne, Milne, Borovoi)。设(G, X) 是一个志村数据。系统 $\{\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}\}_K$，配备由 $G(\mathbb{A}_f)$ 给出的黑克作用，在满足以下要求的条件下，具有唯一的模型 $\{\mathrm{Sh}_K(G, X)\}_K$，定义于 $E(G, X)$ 之上。

- 黑克作用定义于 $E(G, X)$ 上。
- 所有特殊点（即满足 h 经由一个 $\mathbb{Q}$-子环面因子分解的点 $[h, g] \in X_K$）都是代数的。
- 特殊点上的伽罗瓦作用按 [Del79,2.2.9] 中的约定进行归一化。

定义 2.6。设 (G,X) 为一个志村数据。对于充分小的紧开子群 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$，称 $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ 为级别K的**志村簇**。逆极限 $\lim_{\leftarrow K} \mathrm{Sh}_K(G,X)$ 是 $E(G,X)$ 上的一个概形，称为附属于志村数据 (G,X) 的（**典范模型**）**志村簇**，记作 $\mathrm{Sh}(G,X)$。

对于紧开子群 $K' \subset K$，态射 $\mathrm{Sh}_K(G,X) \to \mathrm{Sh}_{K'}(G,X)$ 是有限 ´étale 的。因此，逆极限

$$\mathrm{Sh}(G,X) := \varprojlim_K \mathrm{Sh}_K(G,X)$$

作为一个正则且局部 (!) 有限型的概形存在。这个概形简称为附属于志村数据 (G,X) 的**志村簇**。

2.2. **简短的线性代数插曲**。以下基本引理讨论如何沿有限 ´étale 环映射转换非退化双线性配对，在下文中将会派上用场。

引理 2.7。设 $R \to A$ 是有限 *´étale* 映射，且 W 是有限局部自由的 A-模。那么，给定一个满足条件 $(aw,w') = (w,aw')$（对所有 w、$w' \in W$ 和 $a \in A$）的非退化 R-双线性形式 $(\cdot,\cdot): W \times W \to R$，可以将此配对唯一提升为一个非退化的 A-双线性配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle: W \times W \to A$，使其满足

$$\mathrm{Tr}_{A/R} \circ \langle\cdot,\cdot\rangle = (\cdot,\cdot)$$

证明。由于 $R \to A$ 是有限 ´étale，迹配对是完美的，因此要定义$\langle w,w'\rangle \in A$，对于任意 $w,w' \in W$，只需规定对所有 $a \in A$

$$\mathrm{Tr}_{A/R}(a\langle w,w'\rangle) = (aw,w').$$

可以立即验证，如此定义的双线性形式确实是非退化且 A-线性的。

假设我们有两个提升 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$，那么对所有 $a \in A$

$$\mathrm{Tr}_{A/R}(a\langle w,w'\rangle) = (aw,w') = \mathrm{Tr}_{A/R}(a\langle w,w'\rangle'),$$

由迹配对的完美性可知 $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle'$。 □

约定 2.8。本文余下部分将遵循以下约定：在引理 2.7 的情形下，角括号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 A上的配对，而与迹复合则用圆括号 $(\cdot,\cdot) := \mathrm{Tr}_{A/R} \circ \langle\cdot,\cdot\rangle$表示。

与辛相似变换的相互关系如下。假设 $f: W \to W'$ 是有限局部自由 A-模之间的一个 A-线性态射，这些模配备了非退化的 R-双线性配对 $(\cdot,\cdot)_W$分别为 $(\cdot,\cdot)_{W'}$，并满足上述引理的假设。那么以下条件等价：

(1) f 是关于提升的配对的 A-辛相似变换，即存在某个 $a \in A^\times$，使得对所有 w, $w' \in W$

$$\langle f(w), f(w')\rangle_{W'} = a\langle w,w'\rangle_W.$$

(2) 存在一个 $a \in A^\times$，使得对所有 $w,w' \in W$

$$(w,w')_W = \mathrm{Tr}_{A/R}(a\langle f(w), f(w')\rangle_{W'}).$$

(3) 存在一个 $a \in A^\times$，使得

$$(f(w), f(w'))_{W'} = (aw,w')_W = (w,aw')_W$$

2.3. **PEL 数据**。从现在起，我们固定以下 PEL 数据，如 [Nek18, A3] 中所述。

2.3.1. 整体方面。我们固定一个有限维单 $\mathbb{Q}$-代数 B，并赋予其一个 $\mathbb{Q}$-线性正对合 $(-)^*$。此时， $F := Z(B)^{*=\mathrm{id}}$ 是一个次数为 $g = [F : \mathbb{Q}]$ 的全实数域。我们令 V 为一个非零有限型左 B-模，并赋予其一个非退化交错 F-双线性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ 满足 $\langle bv, v' \rangle_F = \langle v, b^* v' \rangle_F$ 对所有 $v, v' \in V$ 以及 $b \in B$ 均成立。将其与迹 $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}$ 复合，得到非退化交错 $\mathbb{Q}$-双线性配对

$$(\cdot, \cdot)_F := \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} \circ \langle \cdot, \cdot \rangle_F$$

满足与 $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ 相同的厄米性质。

中心 $F_c := Z(B)$ 要么等于全实域 F，要么是一个 CM 域，其极大全实子域为 F，对合为 $(-)^*$。那么， $C = \mathrm{End}_B(V)$ 是一个以 F_c 为中心的单 $\mathbb{Q}$-代数，并带有一个 F-线性对合 $(-)^\#$，它由关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ 的伴随给出。

令 $H := \mathrm{GSp}_B(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为定义在 F 上的代数群，其在任意F-代数 S 中的点由下式给出

$$H(S) = \{h \in \mathrm{GL}_B(V \otimes_F S) : \exists \nu(h) \in S^\times \ \forall v, v' \in V \ \langle hv, hv' \rangle_F = \nu(h) \langle v, v' \rangle_F\}.$$

标量 $\nu(h) \in S^\times$ 合起来构成代数群态射 $\nu : H \to \mathbb{G}_{m,F}$。通过韦伊限制，我们得到代数群

$$G := \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(H),$$

以及一个态射 $G \to \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$，我们仍将其记为 ν。令G^* 为由拉回图定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数群

$$\begin{array}{ccc} G^* & \hookrightarrow & G \\ \downarrow{\scriptstyle \nu} & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ \mathbb{G}_m & \hookrightarrow & \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m) \end{array}$$

或者，我们可以将 H 定义为点函子

$$H(S) = \{h \in (C \otimes_F S)^\times : hh^\# = \nu(h) \in S^\times\}$$

对任意 F-代数 S，在这种情况下，我们可推得对任意 $\mathbb{Q}$-代数 R，有

$$G^*(R) = \{g \in (C \otimes R)^\times : gg^\# = \nu(g) \in R^\times\}.$$

我们简要回顾 [Kot92, §1] 中对数对 $(B, *)$ 的分类。若数对 $(B \otimes_F F, * \otimes \mathrm{id})$ 同构于 $\mathrm{End}(W) \times \mathrm{End}(W)^{\mathrm{op}}$，且 $(a, b)^* = (b, a)$，则称其为 A 型；若 $(B \otimes_F F, * \otimes \mathrm{id})$ 同构于 $\mathrm{End}(W)$，且 $(-)^*$ 是关于 W 上某个对称双线性形式的伴随映射，则称其为 (C) 型。若 $(-)^*$ 是关于 W 上某个交替双线性形式的伴随映射，则属于 B 型或 D 型。

若属于 (C) 型，则

$$G_{\mathbb{R}} = \prod_{v|\infty} \mathrm{GSp}(2n)_{\mathbb{R}}$$

对于某个 $n \geq 1$，并且如果我们处于 A 型，那么

$$G_{\mathbb{R}} = \prod_{v|\infty} GU(a_v, b_v)$$

其中 $a_v + b_v = n$ 对于某个 $n \geq 1$。如果 n 是偶数，我们称其为 (A 偶) 型；如果 n 是奇数，则称其为（A 奇数）型。

假设 2.9。从现在起，我们始终假设所固定的数据属于 (A 偶) 型（这意味着 $F_c \neq F$）或 (C) 型（这意味着$F_c = F$。

在此假设下，代数群 H、 G和 G^* 是连通约化群；此外， H的导出子群（因而 G的导出子群）是单连通的（参见 [Mil17, 8.7]）。

存在一个 $\mathbb{R}$-代数态射 $h\colon \mathbb{C} \to C \otimes \mathbb{R}$，使得 $h(z) = h(z)^{\#}$，并且对称的 $\mathbb{R}$-双线性型 $\langle v,\ h(i)v' \rangle\colon V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ 是正定的。除以满足 $cc^{\#} = 1$ 的元素 $c \in (C \otimes \mathbb{R})^{\times}$ 进行共轭外，此态射是唯一的（见 [Kot92，4.3] 和 [Mil17，8.12]）。

因此， h 定义了一个志村数据（$G^*,\ X^*$）（分别为（$G,\ X$））， 其中 X^*（分别为 X）表示 $G^*(\mathbb{R})$-共轭类（分别为 $G(\mathbb{R})$-共轭类） $h\colon \mathbb{S} \to G^*(\mathbb{R}) \to G(\mathbb{R})$。志村数据（$G^*,\ X^*$）是 PEL 型的，而志村数据（$G,\ X$）严格属于阿贝尔型。

$h(i)$的作用定义了 $V_{\mathbb{R}}$ 上的复结构，从而给出权为 -1 的霍奇分解 $V_{\mathbb{C}} = V^{-1,\ 0} \oplus V^{0,\ -1}$，其中 $h(z)$ 在$V^{-1,\ 0}$ 上作用为 z（分别在 $V^{0,\ -1}$上作用为 z）。附属于 h 的霍奇余特征 $\nu_h\colon \mathbb{G}_{m,\ \mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ 在 $V^{-1,\ 0}$ 上作用为 z（分别在 $V^{0,\ -1}$ 上作用为恒等映射）。

志村数据 $(G^*,\ X^*)$ 和 $(G,\ X)$ 具有共同的反射域 $E_0/\mathbb{Q}$，该域是由特征多项式的系数在 $\mathbb{Q}$ 上生成的

$$\det(X_1\alpha_1 + \cdots + X_t\alpha_t | V^{-1,0})$$

对于 B 的任意 $\mathbb{Q}$-基 $\{\alpha_j\}$。

2.3.2. 局部侧。 固定一个素数 p 和一个嵌入 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$。

假设 2.10。 我们假设迄今为止固定的 PEL 数据在 p 处非分歧，即分解中的每一项

$$B_{\mathbb{Q}_p} = \prod_{\mathfrak{P}|p} B \otimes_F F_{\mathfrak{P}}$$

是 $\mathbb{Q}_p$ 的非分歧扩张上的矩阵代数（其中 $\mathfrak{P}$ 遍历 F 中位于 p 之上的所有素理想，我们将 F 关于 $\mathfrak{P}$ 的完备化记为 $F_{\mathfrak{P}}$）。

特别是，这一假设意味着 p 在 F_c 中非分歧，并且约化群 G 在 p 处非分歧（这又意味着超特殊子群存在）。

我们假设给定以下局部数据：

- 一个 $*$-稳定的 $\mathcal{O}_{F,\ (p)}$-阶 $\mathcal{O}_B \subset B$（其中 $\mathcal{O}_{F,\ (p)} := \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$），使得 $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ 是 $B_{\mathbb{Q}_p}$ 中的极大阶，并且
- 一个 $\mathcal{O}_p$-格 $\Lambda \subset V_{\mathbb{Q}_p}$，它关于 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle_F$ 是自对偶的（相差 $F_p^{\times}$ 中的一个标量），

（这里使用了记号 $\mathcal{O}_p := \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ 和 $F_p := F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$）。

例 2.11（希尔伯特模簇）。 若 $B = F$ 是一个全实数域 F，带有平凡对合 $* = \mathrm{id}$，并令 $V = F^2$ 配备标准交错形式 $\langle v,\ w \rangle_F = v_1w_2 - v_2w_1$，则 $G = \mathrm{Res}^{F/\mathbb{Q}}(\mathrm{GL}_{2,\ F})$ 及其对应的志村簇便是（阿贝尔型）希尔伯特模簇（属于 (C) 型）。经典地，它们的 $\mathbb{C}$-值点来自西格尔上、下半平面的 g 个副本，再沿着 g 个不同的嵌入 $F \hookrightarrow \mathbb{R}$，对同余子群的扭曲对角态射 M¨obius 变换作用取商。

例 2.12（全不定四元数代数，参见 [Nek18, A6.2]）。 设F 是次数为 g 的全实数域，且设 D/F 是 F 上的全不定四元数代数，即 $D \otimes_F \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})^g$。将 D 视为半单$\mathbb{Q}$-代数。通过定义 $d^* = udu^{-1}$，我们可以在其上赋予正对合 $*$，其中 $(-)$ 表示D上的主对合，且 $u \in D^{\times}$ 满足 $u = -u$ 并

$\mathrm{Nrd}(u) = -u^2 \in F_+^\times$。设 $V = D$带有通过 $d\cdot x := xd^*$给出的 D左作用。V 还带有斜对称的 F-双线性型

$$\langle x, y\rangle_F := \mathrm{Nrd}(xu\overline{y}).$$

最终，我们得到 (C) 型四元数 Shimura 簇，它们符合我们的 PEL 框架，其中 $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(D^\times)$。如果四元数代数 D 并非全定不定，则相应的四元数 Shimura 簇不符合我们的 PEL 框架。不过，我们仍可将它们与一个 (Aeven) 型辅助 PEL 数据联系起来，参见 [Nek18, A6.5-6.9]。

2.4. **混合空间**。我们沿用前文的记号和假设。本小节将介绍前面提到的混合空间。

我们使用 $\mathcal{O}_p$-格 $\Lambda \subset V_{\mathbb{Q}_p}$ 来定义 p 处的超特殊水平子群

$$K_{hs} := \{g \in G(\mathbb{Q}_p) : g\Lambda = \Lambda\}.$$

此外，令 $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ 为一个温和层子群，并令 $K = K_{hs}K^p$。

由此，我们得到一族依赖于参数 $\alpha \in \mathbb{A}_{F,f}^{p,\times}$ 的混合空间，如下所示。

定义 2.13。考虑如下**混合模空间问题**。固定参数 $\alpha \in \mathbb{A}_{F,f}^{p,\times}$。令 $\mathcal{M}_{\alpha,K}$ 为概形在 $\mathcal{O}_{E_0} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$上的大 étale site 上的群胚预层，其在概形 S 上的取值（S 位于 $\mathcal{O}_{E_0} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 之上）是带有 G-结构和混合 K^p-层结构的阿贝尔概形所构成的群胚，即

(i) A 是一个相对维数为 g、定义在 S 上的阿贝尔概形；(ii) $\lambda : A \to A^\vee$ 是一个次数与 p互素的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-极化；(iii) $\iota : \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}_S(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ 是一个态射，保持 $\mathcal{O}_B$ 上的对合 $(-)^*$与由极化 λ导出的 $\mathrm{End}_S(A) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 上的 Rosati 对合相容；(iv) η 是混合 K^p-层结构，其含义如下。考虑该 pro-étale 层

$$\underline{\mathrm{Isom}}_G(\underline{H_1}(A, \mathbb{A}_f^p), \underline{V_{\mathbb{A}_f^p}}),$$

其截面是 $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p$-线性同构 η，它们相对于提升的 Weil 配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$（定义在 $H_1(A, \mathbb{A}_f^p)$ 上）以及 $V_{\mathbb{A}_f^p}$ 上的配对 $\alpha\langle\cdot,\cdot\rangle_F$，是 $\widehat{\mathcal{O}}_F^{(p)}$-辛相似变换。这是一个 pro-étale $G(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p)})$-扭子。选取一个 $\widetilde{S} \to S$ 平凡化覆盖 $\widetilde{S}, \eta$，即取截面 η 在 $\widetilde{S}$ 上的一个 $K^p(\widetilde{S})$-轨道，使得 η 在 $\widetilde{S} \to S$ 的覆盖作用下保持不变。

在 S 上，对象 $(A, \iota, \lambda, \eta)$ 与 $(A', \iota', \lambda', \eta')$ 之间的同构是一个从素数到 p 的准同源 $f : A \to A'$，它与 $\mathcal{O}_B$-作用及层结构相容，并且满足

$$f^\vee \circ \lambda' \circ f = c\lambda$$

对于某个 $c \in \mathbb{Z}_{(p)}^\times(S)$。

根据引理 2.7，η 是辛相似这一条件可等价地表述为以下几种方式：

(1) 存在 $c \in \widehat{\mathcal{O}}_{,F}^{(p),\times}(S)$ 使得

$$(x, y)_\lambda = \mathrm{Tr}(c\alpha\langle\eta(x), \eta(y)\rangle_F).$$

(2) 存在 $c \in \widehat{\mathcal{O}}_{,F}^{(p),\times}(S)$，使得

$$\alpha(\eta(x), \eta(y))_F = (cx, y)_\lambda$$

将上述混合模空间问题与通常的 PEL 型模空间问题进行比较（例如参见 [Zha23, 5.2.2]），可以发现关键区别在于层结构的概念。事实上，混合层结构允许更一般的辛相似变换。

$\mathcal{M}_{\alpha,K}$ 是一个 Deligne-Mumford 叠；当 K^p 足够小时（下文均假定如此），它可由$\mathcal{O}_{E_0}\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$上的一个光滑拟射影概形表示，我们也将此概形记作 $\mathcal{M}_{\alpha,K}$。注意，对于任意 $c\in\widehat{\mathcal{O}}^{(p),\times}_F$，堆 $\mathcal{M}_{\alpha,K}$ 与 $\mathcal{M}_{c\alpha,K}$ 之间存在典范同构。

虽然这样一来它仅定义在 E_0 上，但我们可以通过固定第二参数 $\beta\in F_p^\times$，并考虑以下层，在 p 处添加 level 结构到混合模空间问题中：

$$\underline{\mathrm{Isom}}_G(\underline{H_1}(A,\mathbb{Q}_p),\underline{V_{\mathbb{Q}_p}})$$

$B_{\mathbb{Q}_p}$-线性同构的层，其中这些同构相对于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ 和 $\beta\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ 是 $\mathcal{O}_p$-辛相似变换。若 $\alpha\in\overline{\mathbb{A}^{p,\times}_F,f}$ 且 $\beta\in F_p^\times$，则将带有远离 p 处且在 p 处 level $K=K_pK^p$ 结构的组合模空间记为 $\mathcal{M}_{\alpha\beta,K}$。

对于 p 处的有限层，额外的参数 β 是一项重要信息。然而，一旦我们转到 p 处的无限层（我们很快就会这样做），参数 β 便不再重要。具体而言，对于不同的参数 β，在 p 处具有无限层的混合空间可通过 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的黑克作用相互识别。因此，以下我们主要考虑 $\beta=1$ 的情形。

定义 2.14。对于任意充分小的层子群 $K\subset G(\mathbb{A}_f)$，$\mathcal{M}_{\alpha,K}$ 称为参数 α 和层 K 处的**混合空间**。

我们有如下关于混合空间 $\mathcal{M}_{\alpha\beta,K}$ 上黑克作用的概念（对于$\alpha\in\mathbb{A}^{p,\times}_{F,f}$和 $\beta\in F_p^\times$）。

定义 2.15。设 $g\in G(\mathbb{A}_f)$，并令 K，K' 为满足 $g^{-1}K'g\subseteq K$ 的任意层，则由 g 给出的黑克作用是有限 étale 映射

$$[g]:\mathcal{M}_{\alpha\beta,K'}\to\mathcal{M}_{\det(g)\alpha\beta,K}$$

将 $(A,\iota,\lambda,\eta)\in\mathcal{M}_{\alpha\overline{\beta},K}(S)$ 映射到 $(A,\iota,\lambda,g\circ\eta)$。

如果 $g\in G(\mathbb{A}_f^p)$，那么 $\nu(g)\alpha$ 仍与 p 互素。此外，如果 $g\in\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathcal{O}}_F)$，那么$[g]$规范地映射到 $\mathcal{M}_{\alpha\beta,K}$，不过这再次通过 $\nu(g)$ 改变了层结构定义中的相似因子。如果 $g^{-1}K'g=K$，那么 $[g]$ 显然是一个同构。

由于塔 $\{\mathcal{M}_{\alpha,K}\}_{K\subset G(\mathbb{A}_f)}$ 中的过渡映射是有限 étale 的，我们可以在概形范畴中取逆极限，并令

$$\mathcal{M}_\alpha:=\varprojlim_K\mathcal{M}_{\alpha,K},$$

这是一个局部有限型、局部诺特且正则的概形。

2.5. **阿贝尔型情形**。现在我们已经为任意充分小的层子群 $K\subset G(\mathbb{A}_f)$ 引入了混合空间 $\mathcal{M}_{\alpha,K}$，可以作出如下定义。

定义 2.16。$\mathcal{O}_F^\times$ **的极化作用**$_+$ 于 $\mathcal{M}_{\alpha,K}$ 定义为

$$\epsilon\cdot(A,\iota,\lambda,\overline{\eta}):=(A,\iota,\overline{\epsilon\lambda},\overline{\eta})$$

对于$\epsilon\in\mathcal{O}_{F,+}^\times(S)$和$(A,\iota,\overline{\lambda},\eta)\in\mathcal{M}_K(S)$。

提醒读者，为了定义极化作用，我们确实需要转到混合空间。事实上，$\epsilon\in\mathcal{O}_{F,+}^\times$ 的极化作用会使混合层结构定义中的相似因子改变一个 ϵ

因子（这是由于 Weil 配对发生了变化）。如果考虑通常的 PEL 型层结构，那么这可能会使有理相似因子变成非有理因子。

如果我们处于 (C) 型，则此极化作用经由有限商群分解

$$\Delta(K) := \mathcal{O}_{F,+}^{\times}/(\mathcal{O}_F^{\times} \cap K)^2$$

因为对于 $\epsilon = \epsilon'^2$，当 $\epsilon' \in \mathcal{O}_F^{\times} \cap K$ 时，乘以 $\iota(\epsilon')$ 定义了一个同构

$$[\iota(\epsilon')] : (A, \iota, \lambda, \overline{\eta}) \xrightarrow{\sim} (A, \iota, \epsilon^{-1}\lambda, \overline{\eta}).$$

如果我们处于 (A 偶) 型，则类似地，极化经由有限商群分解

$$\Delta(K) := \mathcal{O}_{F,+}^{\times}/N_{F_c/F}(\mathcal{O}_{F_c}^{\times} \cap K).$$

$\Delta(K)$ 的作用置换了 $\mathcal{M}_{\alpha,\ K}$ 的连通分支，而每个连通分支的稳定子群为

$$(\nu(K) \cap \mathcal{O}_{F,+}^{\times})/(K \cap \mathcal{O}_F^{\times})^2$$

在 (C) 型中，分别为

$$(\nu(K) \cap \mathcal{O}_{F,+}^{\times})/N_{F_c/F}(K \cap \mathcal{O}_{F_c}^{\times})$$

(A 偶) 型（见 [Nek18]）。

因此，当且仅当上述商空间均为平凡空间时，$\Delta(K)$ 的极化作用才是自由的。这一现象在何种情况下发生，是一个微妙的问题。为了给出答案，我们先回顾下面这个最初归功于 Chevalley 的引理。

引理 2.17（[Tay03], 2.1）。设 L 为一个数域，S 为 L 的有限素位集合。记 $L_S^{\times}$ 为 $L^{\times}$ 的子群，该子群由满足以下条件的元素组成：在所有有限素位 $v \notin S$ 处均为单位，并且在所有实素位 $v \notin S$ 处均为正。于是，对于任意正整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，存在一个开子群 $U \subset \prod_{v \notin S\ finite} \mathcal{O}_{L,\ v}^{\times}$ 使得 $L_S^{\times} \cap U \subset \left(L_S^{\times}\right)^n$。

推论 2.18。设 L 为一个数域。$\mathcal{O}_L^{\times}$ 的每个有限指数子群都包含一个形如 $U \cap \mathcal{O}_L^{\times}$ 的子群，其中 $U \subseteq \widehat{\mathcal{O}}_L^{\times}$ 是一个紧开子群，并且对于所有位于 p 之上的 $\mathfrak{P}$，均有 $U_{\mathfrak{P}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^{\times}$。

证明。令 $A \subset \mathcal{O}_L^{\times}$ 为一个有限指数子群。令 S 为所有无限素位以及所有整除 p 的有限素位的并集，并令 $n \gg 0$ 使得对任意 $x \in \mathcal{O}_L^{\times}$，$x^n \in A$。

按照 Chevalley 引理选取 U，并对任意位于 p 之上的素数 $\mathfrak{P}$，用 $U_{\mathfrak{P}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^{\times}$ 将其补全。于是

$$\mathcal{O}_L^{\times} \cap U = \mathcal{O}_L^{\times} \cap L_S^{\times} \cap U \subset \mathcal{O}_L^{\times} \cap (L_S^{\times})^n \subset (\mathcal{O}_L^{\times})^n \subset A. \qquad \square$$

有了这个推论，我们可以给出第一个反例，说明极化作用一般不会是自由的，即使我们愿意在远离 p 的地方取足够深的层。

例 2.19。考虑希尔伯特模簇的情形，即我们处于 (C) 型情形，$G = \mathrm{Res}^{F/\mathbb{Q}}(\mathrm{GL}_{2,\ F})$。假设我们在 p处给定了超特殊层，以及主层-N-子群 $K(N)$，其中 N 与 p互素。那么，当且仅当商空间 $(\det K(N) \cap \mathcal{O}_{F,\ +}^{\times})/(K(N) \cap \mathcal{O}_F^{\times})^2$ 是平凡的时，极化作用是自由的。注意，$K(N) \cap \mathcal{O}_F^{\times} = (1 + N\mathcal{O}_F)^{\times}$ 且 $\det K(N) \cap \mathcal{O}_{F,\ +}^{\times} = (1 + N\mathcal{O}_F)_+^{\times}$。因此我们需要分析该商空间

$$(1 + N\mathcal{O}_F)_+^{\times}/(1 + N\mathcal{O}_F)^{\times 2}.$$

我们声称，当 N充分大时，有 $(1+N\mathcal{O}_F)^\times_+ = (1+N\mathcal{O}_F)^\times$，由狄利克雷单位定理，这将意味着该商空间同构于 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{g-1}$。

为证明这一断言，我们将上述推论应用于有限指数子群$\mathcal{O}_{F,+}^\times \subset \mathcal{O}_F^\times$。因此，存在一个紧开子群 $U \subseteq \widehat{\mathcal{O}}_F^\times$，使得对于所有位于 p 上方的 $\mathfrak{P}$，都有 $U_\mathfrak{P} = \mathcal{O}_\mathfrak{P}^\times$，且 $U \cap \mathcal{O}_F^\times \subseteq \mathcal{O}_{F,+}^\times$。特别地，对于任意与 p 互素且满足 $K(N) \subset U$ 的 $N \gg 0$，我们有

$$(1+N\mathcal{O}_F)^\times \subset \mathcal{O}_{F,+}^\times,$$

即 $(1+N\mathcal{O}_F)^\times_+ = (1+N\mathcal{O}_F)^\times$，从而证明了这一断言。

不过，事情并非毫无希望。Chevalley 引理的同一推论可用于找出某些层子群，使得极化作用恰好是自由的。

引理 2.20。设 $K = K_pK^p \subset G(\mathbb{A}_f)$ 是任意紧开子群。若我们处于 *(C)* 型，则存在一个有限指数的开紧正规子群 $K'^p \subseteq K^p$，使得对于任何包含 K_p 的野层 K'_p，

$$\nu(K'_pK'^p) \cap \mathcal{O}_{F,+}^\times = (K'_pK'^p \cap \mathcal{O}_F^\times)^2.$$

类似地，如果我们处于 *(A 偶)* 型，则该公式同样成立

$$\nu(K'_pK'^p) \cap \mathcal{O}_{F,+}^\times = N_{F_c/F}(K'_pK'^p \cap \mathcal{O}_{F_c}^\times).$$

证明。我们只考虑 (C) 型的情形，(A 偶) 型的情形可以类似处理。

首先注意，对于任意紧开子群 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$，包含关系 $(K \cap \mathcal{O}_F^\times)^2 \subset \nu(K) \cap \mathcal{O}_{F,+}^\times$ 始终成立，因此我们只需处理反向包含关系。

我们将 Chevalley 引理的推论应用于有限指数子群 $(K_pK^p \cap \mathcal{O}_F^\times)^2 \subset \mathcal{O}_F^\times$。于是我们得到一个紧开子群 $U \subseteq \widehat{\mathcal{O}}_F^\times$，使得对于所有 $\mathfrak{P}$ 位于 p之上的 $\mathfrak{P}$，均有 $U_\mathfrak{P} = \mathcal{O}_\mathfrak{P}^\times$，且 $U \cap \mathcal{O}_F^\times \subseteq (K_pK^p \cap \mathcal{O}_F^\times)^2$。这意味着，对于任意包含 K_p的 K'_p

$$U \cap \nu(K'_pK^p) \cap \mathcal{O}_{F,+}^\times \subset U \cap \mathcal{O}_F^\times \subset U \cap (K'_pK^p \cap \mathcal{O}_F^\times)^2.$$

现在令 $K'^p = \nu^{-1}(U^p) \subset K^p$。于是 $U \cap (K'_pK^p \cap \mathcal{O}_F^\times)^2 \subset (K'_pK'^p \cap \mathcal{O}_F^\times)^2$, 且$\nu(K'_pK'^p) \subset U \cap \nu(K'_pK^p)$。□

虽然反例表明，如果我们只愿意把层加深到足够程度，就不能指望极化作用最终总是自由的，但引理 2.20 清楚地表明，至少我们可以找到一个紧开子群的余终系统，使得极化作用实际上是自由的。从现在起，我们将这样的层子群称为**良好**层子群。

引理 2.20 甚至还要稍强一些。虽然对于任意温和层 K^p，很可能并非总能找到一个有限指数子群 $K'^p \subset K^p$，使得$K_pK'^p$ 对任意 K^p都一致地良好，但我们至少知道，一旦预先给定一个野层子群 $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$，就能找到一个一致层子群 $K'^p \subset K^p$，使得 $K'_pK'^p$ 对任意野层子群$K'_p \supset K_p$ 都良好（尤其是对包含 K_p 的超特殊层子群）。

定义 2.21。层子群 $K_pK^p \subset G(\mathbb{A}_f)$ 称为**一致良好**，如果对于任意野层子群 $K'_p \supset K_p$，层子群 K'_pK^p 都是良好的。

注意，一致良好的性质在共轭下保持不变。这是因为条件 $\nu(K) \cap \mathcal{O}_{F,+}^\times = (K \cap \mathcal{O}_F^\times)^2$ 显然

在共轭下不变（(A 偶) 型的情形也类似）。因此，黑克作用将保持一致良好的层结构构成的集合。

总而言之，我们发现，一致良好的层子群构成了所有层子群系统中的一个余终系统。选取这样一个一致良好的层子群 K，商概形 $\mathcal{M}_{\alpha,\ K}/\Delta(K)$存在，且是拟射影且光滑的，底域为 E_0 或 $\mathcal{O}_{E_0}\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ （取决于我们是否在 p 处选取了超特殊层）。

因此，我们可以作出如下定义。

定义 2.22。 对于任意充分小的一致良好的层子群 $K\subset G(\mathbb{A}_f)$，我们令 $\mathcal{M}_{G,\ \alpha,\ K}:=\mathcal{M}_{\alpha,\ K}/\Delta(K)$。

利用这些商空间，我们可以得到所关注的整个阿贝尔型志村簇的一个模型。具体而言，固定有限双陪集空间的一组代表元 Ψ：

$$\mathcal{O}_{F,(p),+}^{\times}\backslash\mathbb{A}_{F,f}^{p,\times}/\widehat{\mathcal{O}}_F^{(p),\times}.$$

固定一个一致良好的层结构 K，其在 p处具有超特殊层。那么，不交并

$$\coprod_{\alpha\in\Psi}\mathcal{M}_{G,\alpha,K}=\coprod_{\alpha\in\Psi}\mathcal{M}_{\alpha,K}/\Delta(K)$$

构成了定义在 $\mathcal{O}_{E_0}\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ 上、级别为 K 的阿贝尔型志村簇的光滑拟射影整模型。如果在此情形中加入 p 处的级别结构，也可以类似地进行。

因此，只需分别为每个参数 $\alpha\in\mathbb{A}^{p,\ \times}_{F,\ f}$构造一个混合伊古萨堆，然后相应地取它们的不交并。

约定 2.23. 从现在起，如果参数 $\alpha\in\mathbb{A}^{p,\ \times}_{F,\ f}$ 可由上下文理解，或在讨论中无关紧要，我们将在记号中省略它。

3. Perfectoid spaces, diamonds and v-stacks

在本小节中，我们将简要回顾完美空间、菱形空间和 v-拓扑理论，以明确所采用的记号。

3.1. **完美空间**。

定义 3.1。若拓扑环 R 存在一个开子环 R_0，且该开子环关于有限生成理想 I是 adic 的，则称 R 为 **Huber 环**。若 Huber 环包含一个**伪一致化元** $\varpi\in R$，即一个拓扑幂零单位，则称其为**Tate** 环。

定义 3.2。若 Tate 环 R 完备且一致（即幂有界元素子环 $R^\circ\subset R$ 有界），并且存在伪一致化元 $\varpi\in R$ 使得 ϖ^p 整除 p，且 Frobenius 映射

$$\Phi:R^\circ/\varpi\to R^\circ/\varpi^p$$

是同构。

定义 3.3。设 R 是一个完美化 Tate 环。 R 的**倾斜**是拓扑环

$$R^\flat=\varprojlim_{x\mapsto x^p}R$$

稍作展开说明。 $R^\flat$ 的拓扑是逆极限拓扑。环结构定义如下：首先，我们有乘法双射

$$\varprojlim_{\Phi} R^\circ \longrightarrow \varprojlim_{\Phi} R^\circ/p \longrightarrow \varprojlim_{\Phi} R^\circ/\varpi$$

它们赋予左侧环结构。逆映射通过将 $x = (x_0, x_1, \ldots\ldots)$ 映射为 $(x^\sharp, (x^{1/p})^\sharp, (x^{1/p^2})^\sharp, \ldots\ldots) \in \varprojlim_{\Phi} R^\circ$ 来定义，其中 $x^\sharp = \lim_{i\to\infty} \tilde{x}_i^{q^i}$，$\tilde{x}_i$ 是 x_i 到 R° 的提升。

现在取任意一个在映射下的 $\varpi^\flat$ ϖ 的原像

$$\varprojlim_{\Phi} R^\circ \cong \varprojlim_{\Phi} R^\circ/\varpi^p \to R^\circ/\varpi^p$$

由此可见，$R^\flat$ 是完备的 Tate 环，甚至是完美化 $\mathbb{F}_p$-代数，其幂有界元素环为 $R^{\flat\circ} \cong \varprojlim_{\Phi} R^\circ$，伪一致化元为 $\varpi^\flat$，因此特别有 $R^\flat = R^{\flat\circ}[1/\varpi^\flat]$。

到第一分量的投影映射 $R^\flat \to R$，$x \mapsto x^\sharp$（这与上述 $(-)^\sharp$ 的概念一致）诱导出一个环同构 $R^{\flat\circ}/\varpi^\flat \cong R^\circ/\varpi$。此外，我们还有以下

引理 3.4。开、有界且整闭的子环集合 $R^+ \subset R^\circ$ 与整子环集合 $R^{\flat+} \subset R^{\flat\circ}$ 之间存在一一对应，通过 $R^+ \mapsto R^{\flat+} := \varprojlim_{x\mapsto x^p} R^+$。此外 $R^{\flat+}/\varpi^\flat \cong R^+/\varpi$。

定义 3.5。**仿射（完美）Tate-Huber 对** 是一个二元组 (R, R^+)，其中 R 是一个（完美）Tate 环，$R^+ \subset R^\circ$ 是一个开、有界的整闭子环。仿射 Tate-Huber 对 (R, R^+) 到 (R', R'^+) 的态射，是一个将 R^+ 映入 R'^+ 的拓扑环态射。仿射完美 Tate-Huber 对 (R, R^+) 的倾斜是仿射完美 Tate-Huber 对 $(R^\flat, R^{\flat+})$。

定义 3.6。**完美空间** X 是一个 adic 空间，它存在由仿射开集构成的覆盖，且这些开集同构于形如 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 的仿射 adic 空间，其中 (R, R^+) 是一个仿射完美 Tate-Huber 对。

对于完美空间 X，我们可以通过倾斜其有理开子集并将其粘合起来，函子性地关联到它的倾斜 $X^\flat$。存在一个保持有理开子集的同胚 $|X| \cong |X^\flat|$。

例 3.7。给定一个非阿基米德完备代数闭域 C，其整数环为 $\mathcal{O}_C$，整子环为 $C^+ \subset \mathcal{O}_C$，则 $\mathrm{Spa}(C, C^+)$ 是完美空间。类比于概形论语境，我们将其称为**几何点**。如果 $C^+ = \mathcal{O}_C$，则称其为**秩 1 几何点**。

定义 3.8。设 X 是特征为 p 的完美空间。X 的**去倾斜**是一个二元组 $(X^\sharp, \iota)$，由一个完美空间 $X^\sharp$（任意特征）以及一个固定同构 $\iota\colon (X^\sharp)^\flat \cong X$ 组成。

为简化记号，我们通常省略显式同构 ι，而将 $X^\sharp$ 直接记作 X 的一个去倾斜。

注记 3.9. 假设 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是特征为 p 的仿射完美空间，且具有伪一致化元 $\varpi \in R^+$；另给定两个反倾斜 $\mathrm{Spa}(R^{\sharp_1}, R^{\sharp_1+})$ 和 $\mathrm{Spa}(R^{\sharp_2}, R^{\sharp_2+})$。那么对于 $i \in \{1, 2\}$，存在 Fontaine 的 theta 映射 $\theta\colon W(R^+) \to R^{\sharp_i+}$，其核由一个元素 ξ 生成。我们可以将 ϖ 替换为它的某个 p^n 次根，从而使得对于某个 $a \in W(R^+)$，有 $\xi = p + [\varpi]a$。对 $(p, [\varpi])$ 取商后，得到一个映射

$$R^{\sharp_i+} = W(R^+)/(p + [\varpi]a) \twoheadrightarrow R^+/\varpi$$

选取足够小的 ϖ ，因此我们可以同时得到两个商映射

$$R^{\sharp_i +} \twoheadrightarrow R^+/\varpi$$

对于 $i = 1$，2。稍后定义混合伊古萨堆时，这一观察将非常重要。

3.2. **pro-´étale 与 v-拓扑**。 回顾完美空间之间以下几类态射。

定义 3.10。 设 $f\colon X \to Y$ 是完美空间的一个态射。

(i) f 是有限 ´étale 的，若对任意仿射完美开集 $V = \mathrm{Spa}(R, R^+) \subset Y$，其原像 $f^{-1}(V) = \mathrm{Spa}(S, S^+)$ 仍是仿射完美空间，且诱导的环映射 $R \to S$ 是有限 ´étale。(ii) f 是 ´étale 的，若对任意 $x \in X$ ，存在其开邻域 $V \subset X$ ，以及仿射完美开集 $U = \mathrm{Spa}(R, R^+) \subset Y$，使得 $f(V) \subset U$，并且 $f|_V$ 可分解为先开浸入、后有限 ´étale 态射的复合。(iii) f 是 pro-´étale 的，若对任意 $x \in X$ ，存在 x的仿射完美开集 $V \subset X$，以及仿射完美开集 $U = \mathrm{Spa}(R, R^+) \subset Y$，使得 $f(V) \subset U$，且 f 可表示为关于某个小的余滤指标范畴 I 取极限，其中各映射均为 $V_i \to U$ étale，且对所有 $i \in I$， V_i 都是仿射完美空间。

记 Perfd 为完美空间范畴，记 Perf 为特征 p 下完美空间的满子范畴。

定义 3.11。 回顾 Perf（或 Perfd）上的以下格罗滕迪克拓扑：

（i）Perf 上的 **v-拓扑** 是这样一种格罗滕迪克拓扑：其覆盖是联合满射映射 $\{f_i\colon X_i \to Y\}_{i\in I}$ ，满足对于每个拟紧开集 $U \subset Y$，存在一个有限子集 $J \subset I$ 和拟紧开集 $V_j \subset X_j$，使得对所有 $j \in J$ 都有 $\bigcup_{j\in J} f(V_j) = U$。（ii）Perf 上的 **pro-´étale 拓扑** 是这样一种格罗滕迪克拓扑：其覆盖为 v-覆盖 $\{f_i\colon X_i \to Y\}_{i\in I}$ ，满足所有 f_i 都是 pro-´étale。

我们将赋予 pro-´étale 拓扑或 v-拓扑的 Perf（或 Perfd）分别称为**大 pro-´étale** 网站或**v-网站**。这里会出现一些集合论问题，可以通过使用截断基数来避免。在此，我们将直接忽略这些问题。

根据 [Sch22，第 8.6 节和第 8.7] 节，Perf 和 Perfd 上的 v-拓扑与 pro-´étale 拓扑都是次典范的。因此，我们将始终混淆完美空间与其所表示的 v-层。

我们也可以考虑完美空间 X 的小 pro-´étale 网站 $X_{\text{pro-ét}}$ 。其对象是对 X pro-´étale 的完美空间 Y ，其覆盖则是联合满射的态射，并满足大 pro-´étale 网站定义中相同的拟紧性条件。

在 v-拓扑中，我们基本上可以将完美空间彻底拆解为点。更准确地说，严格全不连通完美空间这一子类构成了 v-拓扑的一个基。回想一下，如果一个完美空间是 X **全**（分别是 **严格全**）**不连通**的，就称它为全（分别是严格全）不连通的，当且仅当它是拟紧、拟分离的，并且它的每个开覆盖（分别是 ´etale 覆盖）都能分裂。

命题 3.12 ([Sch22], 1.15)。 完美空间 X 是（严格）全不连通的，当且仅当它是仿射刚性空间，且 X 的每个连通分支都具有如下形式：$\mathrm{Spa}(K, K^+)$ 其中 K 是一个（代数闭）完美域， K^+ 是一个开有界赋值子环。

3.3. **v-堆**。伊古萨堆被设定为大 v-位点 Perf 上的一个堆，因此为方便起见，我们简要回顾相关概念。

定义 3.13. A **v-叠** 是一个反变 2-函子 F : Perf $\to$Grpd，其取值于群胚的 2-范畴 Grpd，并且满足关于 v-覆盖的下降条件。

具体而言，满足下降条件意味着如下内容。设 $X \to Y$ 是完美空间的任意一个 v- 覆盖。记 p_1, p_2: $X \times_Y X \to X$ 和 p_{12}, p_{23}, p_{13}: $X \times_Y X \times_Y X \to X \times_Y X$ 为投影。将下降数据的范畴记为 $F(X/Y)$。其对象是元组 (s, α)，其中 $s \in F(X)$，且 α: $p_1^* s \xrightarrow{\sim} p_2^* s$ 是一个满足余循环条件的同构

$$p_{23}^* \alpha \circ p_{12}^* \alpha = p_{13}^* \alpha.$$

那么，反变 2-函子 F: Perf $\to$Grpd 满足关于 v-覆盖的下降条件，当且仅当对于完美空间的任意 v-覆盖 $X \to Y$，自然函子 $F(Y) \to F(X/Y)$ 是范畴等价。

本文中将遇到的所有 v-堆 X 都是**小的**，这意味着它们存在一个表示

$$R = Y \times_X Y \rightrightarrows Y \to X,$$

其中 Y是一个完美空间，而 $Y \times_X Y$是一个小 v-层，即存在从某个完美空间到它的 v-层满射。

表示 $R \rightrightarrows Y \to X$ 使我们能够定义小 v-堆的底层拓扑˜空间。具体而言，设 $R \to R$ 是来自某个完美˜空间的满射，则 $|X| := |Y|/|R|$。这与所作的任何选择无关（见 [Sch22, 12.7,12.8]）。

我们阿贝尔型志村簇的伊古萨堆将由以下一般过程构造。

例 3.14. 对于任意拓扑空间 T，我们可以定义 v-层 $T : S \mapsto$Hom$(|S|, T)$，其定义在 Perf 上。假设给定一个定义在 Perf 上并带有拓扑群 G作用的 v-层 X，则可以考虑堆商 $[X/G]$，它是投影映射与作用映射的 v-层论余等化子

$$X \times \underline{G} \rightrightarrows X$$

这是一个 v-叠。若 G 是局部概形且 X 是完美空间，则 $X \times G$可由完美空间表示。此外，投影映射和作用映射都是 pro-´etale。若 X 是小 v-层，则 $[X/G]$ 是小 v-叠。

定义 3.15。给定一个由小 v-叠构成的图表 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$，其**纤维积** $X \times_Z Y$ 是一个群胚预层，它将 $S \in$ Perf 映到由三元组 $(x,\ y,\ \varphi$: $f(x) \xrightarrow{\sim} g(y))$ 构成的群胚，其中 $x \in X(S)$、$y \in Y(S)$（此类三元组之间的态射 $(x,\ y,\ \varphi) \to (x',\ y',\ \varphi')$ 是满足$\varphi' \circ f(\alpha) = g(\beta) \circ \varphi$的映射对 $(\alpha$: $x \to x',\ \beta$: $y \to y')$）。

根据 [Sch22, 12.10], $X \times_Z Y$ 仍然是一个小 v-叠。

定义 3.16. 若存在一个 v-堆满射$Y \twoheadrightarrow X$，其 Y源是一个仿射完美空间，则称 v-叠 X 为**拟紧**。

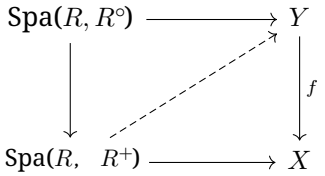
特别地，若 X 是拟紧的，则 X 是一个小 v-叠，且其底层拓扑空间 $|X|$是拟紧的。

定义 3.17 ([Sch22, 10.7]). 设 $f : Y \to X$ 是 v-叠的一个态射。我们称该态射为

(i) **0-截断**：如果对于所有 $S \in$ Perf，群胚态射 $f(S)$: $Y(S) \to X(S)$ 都是忠实的。等价地，如果对角映射 Δ_f: $Y \to Y \times_X Y$ 是一个单射。

(ii) **拟紧**： 如果对于任意带有态射 $S \to X$ 的仿射完美空间 S，纤维积 $Y \times_X S$ 是拟紧的。(iii) **拟分离**： 如果对角态射 Δ_f（它是 0-截断的）是拟紧拟分离的。(iv) 一个**开** （分别为**闭**）浸入，如果对于每个带有态射 $T \to X$ 的（完全不连通）完美空间 T，拉回 $Y \times_X T \to T$ 可由一个开（分别为闭）浸入表示。
(v) 若对角态射 Δ_f 是闭浸入（因而自动为 0-截断），则称其为**分离**。

(vi) 若其为分离的，且对每个图表**部分固有**，则称其为



其中 R 是任意完美化 Tate 环，其具有一个开、有界且整闭的子环 $R^+ \subset R$；存在唯一的虚线箭头使图表交换。

3.4. **钻石空间**。

定义 3.18. 菱形空间 是 Perf 上的一个 pro-étale 层 $\mathcal{D}$，可写为 X/R，其中 X 和 R 是完美空间，而 $R \subset X \times X$ 是一个 pro-étale 等价关系。

根据 [Sch22, 11.9], ，钻石是小 v-层，因此在讨论钻石及其之间的态射时，我们采用上一节中提出的相同术语。

钻石空间最重要的例子之一如下。

例 3.19. 考虑完美域 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}} := \widehat{\mathbb{Q}_p\ \mu_{p^\infty}}$()。我们定义

$$\operatorname{Spd}\mathbb{Q}_p := \operatorname{coeq}(\operatorname{Spa}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}})^\flat \times \underline{\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q}_p)} \rightrightarrows \operatorname{Spa}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}})^\flat)$$

这是一个底层拓扑空间为一点的钻石空间。

定理 3.20 ([SW20], 8.4.2)。 在 $\operatorname{Spa}\mathbb{Q}_p$ 上的完美空间范畴，与特征 p中的完美空间范畴 X 等价；后者配备一个结构态射 $X \to \operatorname{Spd}\mathbb{Q}_p$，并视为 Perf上的层。

为了将我们的混合空间和阿贝尔型志村簇转化为 p-adic 几何中的对象，我们需要说明如何为各种（形式）概形附加菱形空间或 v-层。

首先，假设 X 是 $\operatorname{Spa}\mathbb{Z}_p$ 上的解析 adic 空间（即它局部为 Tate 空间，参见 [SW20, 4.3.1]）。那么我们可以在 Perf 上定义预层 $X^\diamond$：

$$T \mapsto X^\diamond(T) := \{(T^\sharp, T^\sharp \to X)\}/\cong$$

其中，$T^\sharp$是 T的去倾斜，而 $T^\sharp \to X$是赋值空间的映射。根据 [SW20, 10.1.5] ，预层 $X^\diamond$ 是一个菱形空间。事实上，如果 X 是完美空间，那么 $X^\diamond = X^\flat$；更一般地，如果 X 是解析的，则可以在 pro-étale 拓扑中用完美等价关系下的完美空间覆盖它，然后对二者都进行倾斜。如果$X = \operatorname{Spa}(R, R^+)$，我们将记作 $X^\diamond = \operatorname{Spd}(R, R^+)$；如果 $R^+ = R^\circ$，我们也会在记号中省略 R^+。

对于预赋值空间 X over $\operatorname{Spa}\mathbb{Z}_p$，仍可考虑上述预层（将赋值空间的映射替换为预赋值空间的映射），但它不一定会产生菱形空间，不过根据 [SW20, 18.1.1] ，它总会产生一个

v-层。特别地，这适用于形式概形 $\mathfrak{X}$。如果 $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\, A$ 是形式仿射的，那么 $\mathfrak{X}^\diamond = \mathrm{Spd}(A, A)$，其中 $\mathrm{Spa}(A, A)$ 是与 $\mathrm{Spf}\, A$关联的预赋值空间。这一构造可整体化，并定义了从形式概形到 v-层的一个函子。

对于 $\mathbb{Z}_p$上的概形，将其转化为菱形空间（或 v-层）有两种可能的方式，而一般而言它们并不一致。首先假设 $X = \mathrm{Spec}\, A$ 是仿射的。

(i) 附属于 X 的**小钻石** $X^\diamond$ 是 Perf 上的 v-层

$$S \mapsto \{(S^\sharp, f : A \to \mathcal{O}^+_{S^\sharp}(S^\sharp)\}$$

其中 $S^\sharp$ 是 S 的去倾斜，且 f 是环同态。

(ii) 附属于 X 的**大钻石** $X^\diamondsuit$ 是 Perf 上的 v-层

$$S \mapsto \{(S^\sharp, f : A \to \mathcal{O}_{S^\sharp}(S^\sharp)\}$$

其中 $S^\sharp$ 是 S 的去倾斜，且 f 是环同态。

如 [AGLR22, 2.2], 中所述，这些构造可以粘合起来，得到从 $\mathbb{Z}_p$ 上的概形范畴到 v-层的函子；然而，对于非仿射概形，一般无法像上文那样得到良好的模空间描述。

对于一个在 $\mathbb{Z}_p$上局部有限型的概形 X，这两个菱形函子可以通过 p-adic 完备化和 adic 解析化来描述:

(i) $X^\diamond$ 的构造是先对 X作 p-adic 完备化，得到一个在 $\mathbb{Z}_p$上的形式概形，然后对形式概形应用菱形函子。(ii) $X^\diamondsuit$ 的构造是对 X作 adic 解析化，得到一个在 $\mathrm{Spa}\,\mathbb{Z}_p$上的 adic 空间，然后取其对应的菱形空间。

从这两个菱形函子的第一种描述可以清楚地看出，我们有一个自然映射 $X^\diamond \to X^\diamondsuit$。若 X 分离，则它是一个开浸入；若 X 为真，则它是一个同构。

4. Passage to the adic world

本节将把第 2 节中介绍的混合空间和阿贝尔型志村簇的多种实现形式作为 p-adic 几何中的对象加以介绍。我们始终假设 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ 是一个层子群；有时还额外假设它在 p 处超特殊；在讨论阿贝尔型志村簇时，则始终假设它一致良好。回顾一下，除非必要，我们会从记号中省略参数 $\alpha \in \mathbb{A}^{p,\times}_F, f$。

回顾引言，为了陈述猜想 1.1，我们需要固定一个同构 $\mathbb{C} \cong \mathbb{Q}_p$。令 v 为反射域 E_0 中由复合映射 $E_0 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{Q}_p$ 诱导的、位于 p之上的素数。我们关于 v 完备化 E_0，得到局部域 E，它是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张。通过基变换，我们得到混合空间 $\mathcal{M}_K$ 和定义在E 上的阿贝尔型志村簇$\mathcal{M}_{G,K}$（若 K 在 p 处超特殊，则分别得到它们定义在 $\mathcal{O}_E$ 上的整模型）。我们仍分别将这些空间记为 $\mathcal{M}_K$ 和 $\mathcal{M}_{G,K}$。

定义 4.1. 设 K 在 p处为超特殊层。我们用 $\mathfrak{X}_K$ 表示由 $\mathcal{M}_K$经 p-adic 完备化得到的、定义在 $\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_E$ 上的形式概形，并称之为**形式混合空间**。类似地，我们将$\mathfrak{X}_{G,K}$ 称为**形式阿贝尔型志村簇**。

无穷层形式混合空间是形式概形范畴中的逆极限 $\mathfrak{X} = \varprojlim_K \mathfrak{X}_K$，其中 K 遍历所有超特殊层子群。我们类似地定义**无穷层形式阿贝尔型志村簇**。

形式混合空间 $\mathfrak{X}_K$ 仍可通过带有 G-结构和混合 K^p-层结构的形式阿贝尔概形来描述其模空间。我们还可以对 $\mathcal{M}_K$ 上的万有阿贝尔簇进行 p-进完备化，从而得到带有 G-结构和混合 K^p-层结构的万有形式阿贝尔概形。

定义 4.2. 菱形混合空间是 Spd E 上的菱形空间 $\mathcal{X}_K = \mathcal{M}_K^\Diamond$ 。类似地，**菱形阿贝尔型志村簇** 是 Spd E 上的菱形空间$\mathcal{X}_{G,K} = \mathcal{M}_{G,K}^\Diamond$ 。

我们还可以将菱形函子应用于万有阿贝尔簇 $\mathcal{A}_K/\mathcal{M}_K$，从而得到一个钻石之间的适当映射

$$\pi : \mathcal{A}_K^\Diamond \to \mathcal{X}_K.$$

定义 4.3。 万有阿贝尔簇 $\mathcal{A}_K$ 的（p-adic）**Tate 模**是 $\mathcal{X}_K$ 上的 $\mathbb{Z}_p$-模层

$$T_p(\mathcal{A}_K) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbb{Z}_p}}(R^1\pi_*\underline{\mathbb{Z}_p}, \underline{\mathbb{Z}_p}).$$

通过 $\mathcal{A}_K$ 上的 $\mathcal{O}_B$-作用，Tate 模还自然地带有 $\mathcal{O}_B$-模结构。

定义 4.4。无穷层 p **上的**无穷层混合空间是菱形空间（这里K 在 p处是超特殊）

$$\mathcal{X}_{K^p} := \underline{\mathrm{Isom}}_G(T_p(\mathcal{A}_K), \underline{\Lambda}) \to \mathcal{X}_K,$$

其中，同构层由 Tate 模的 $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$-线性平凡化构成，这些平凡化相对于 Tate 模上的提升 Weil 配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ 以及 Λ 上的 $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ 均为 $\mathcal{O}_p$-辛相似变换。

或者，我们可以将 p 处的无穷层混合空间写作

$$\mathcal{X}_{K^p} = \varprojlim_{K_p} \mathcal{X}_{K_pK^p}$$

在菱形空间范畴中。

定义 4.5。无穷层**混合空间**是菱形空间

$$\mathcal{X} = \varprojlim_{K^p} \mathcal{X}_{K^p} = \varprojlim_{K} \mathcal{X}_K.$$

我们在无穷层混合空间的定义中所作的不对称选择，可以由我们的主要目标加以解释：我们希望通过霍奇-泰特周期映射和伊古萨堆的构造，将其 p-adic 几何拆解开来。因此，特别关注 p处的无限层是有意义的。

在转向阿贝尔型志村簇时，我们将完全舍弃这种不对称性。这是由于围绕一致良好的层结构存在一些微妙之处。

定义 4.6。无穷层的**阿贝尔型志村簇**是逆极限

$$\mathcal{X}_G := \varprojlim_{K} \mathcal{X}_{G,K},$$

在菱形空间范畴中，逆极限遍历所有一致良好的层子群 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$（其 p 部分包含 K_{hs}）。

最后但同样重要的是，我们引入良约化轨迹。首先假设层子群 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ 在 p 处是超特殊的，然后定义

$$\mathcal{X}_K^\circ = (\mathfrak{X}_K)_\eta^\Diamond = \mathfrak{X}_K^\Diamond \times_{\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_E} \mathrm{Spd}\,E,$$

其中，我们用 $(-)_\eta$ 表示取形式概形的 adic 泛纤维。或者，$\mathcal{X}_K^\circ = \mathcal{M}_K^\Diamond$ 用小菱形函子来表述。对于 $\mathcal{X}_K$ 上的任意菱形空间 D，我们通过拉回来定义其良约化轨迹

$$D^\circ = D \times_{\mathcal{X}_K} \mathcal{X}_K^\circ,$$

其中尤其包括菱形空间 $\mathcal{X}_{K_pK^p}$、 $\mathcal{X}_{K^p}$ 和 $\mathcal{X}$。为后续使用，我们指出 $\mathcal{X}^\circ_{K^p} = \lim_{\longleftarrow K_p} \mathcal{X}^\circ_{K_pK^p}$ 且 $\mathcal{X}^\circ = \lim_{\longleftarrow K_pK^p} \mathcal{X}^\circ_{K_pK^p}$。对于后一项，我们利用了这样一个事实：对于 $K' \subset K$，在 p 处两者均为超特殊时， $\mathcal{X}^\circ_K$ 拉回为 $\mathcal{X}^\circ_{K'}$。

在阿贝尔型情形下，对于在 p 处为超特殊的一致良好的层子群 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$，我们可以类似地定义 $\mathcal{X}^\circ_{G,\,K}$。对于任意一致良好的层子群 K_pK^p，我们定义

$$\mathcal{X}^\circ_{G,K_pK^p} = \mathcal{X}_{G,K_pK^p} \times_{\mathcal{X}_{G,K_{hs}K^p}} \mathcal{X}^\circ_{G,K_{hs}K^p},$$

在无限层处，我们得到

$$\mathcal{X}^\circ_G = \varprojlim_K \mathcal{X}^\circ_{G,K},$$

其中 K 遍历所有一致良好的层子群。

为后续之用，我们希望证明 $\mathcal{X}^\circ$ 仍保有模空间描述，也就是说，它是一个预层的解析层化，而该预层由模空间描述给出。

引理 4.7. 设 K 在 p 处为超特殊。良约化轨迹 $\mathcal{X}^\circ_K$ 是预层 $\mathcal{X}^{\circ,\,\mathrm{pre}}$ 在 Perf 上的解析层化

$$S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \mapsto \{(S^\sharp, \mathrm{Spf}\, R^{\sharp +} \to \mathfrak{X}_K)\},$$

其中 $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp +})$ 是 S 在 $\mathrm{Spa}\, E$ 上的一个去倾斜。

类似地， $\mathcal{X}^\circ_{K_{hs}} = \lim_{\longleftarrow K^p} \mathcal{X}^\circ_{K_{hs}K^p}$ 是 Perf 上预层的解析层化

$$S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \mapsto \{(S^\sharp, \mathrm{Spf}\, R^{\sharp +} \to \mathfrak{X})\}.$$

证明。 第一部分见 [DHKZ24, 2.1.4]。第二部分也可由同上文推出，只需注意菱形函子 $(-)^\diamondsuit$ 与形式概形上的逆极限相交换。□

对于足够小的远离 p 的级别 K^p，我们有如下识别

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_{K^p} \times_{\mathcal{X}_{K_{hs}K^p}} \mathcal{X}_{K_{hs}} = \underline{\mathrm{Isom}}_G(T_p(\mathcal{A}_K), \underline{\Lambda}) \times_{\mathcal{X}_{K_{hs}K^p}} \mathcal{X}_{K_{hs}},$$

将其限制到良约化轨迹后，我们得到

$$\mathcal{X}^\circ = \mathcal{X}^\circ_{K^p} \times_{\mathcal{X}^\circ_{K_{hs}K^p}} \mathcal{X}^\circ_{K_{hs}}.$$

现在我们可以利用解析层化与纤维积相交换这一点，得到如下推论。

推论 4.8。 $\mathcal{X}^\circ$ 是Perf上的预层的解析层化

$$S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \mapsto \{(S^\sharp, y, \beta)\}$$

其中 $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp +})$ 是 S 在 $\mathrm{Spa}\, E$, $y : \mathrm{Spf}\, R^{\sharp +} \to \mathfrak{X}$ 上的一个去倾斜，是一个形式概形的映射，对应于一个带有G-结构和无限远离p 层结构的形式阿贝尔概形 $\mathfrak{A}/R^{\sharp +}$，并且

$$\beta : T_p(\mathcal{A}_S) \xrightarrow{\sim} \underline{\Lambda}_S$$

是 $T_p(\mathcal{A}_S)$的一个平凡化，其中 $\pi_S : \mathcal{A}^\diamondsuit_S \to S$ 是$\mathfrak{A}^\diamondsuit/\mathrm{Spa}(R^+, R^+)$ 的 ***adic*** 泛纤维，并且 $T_p(\mathcal{A}_S)$ 表示 ***Tate*** 模

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbb{Z}}_p}(R^1\pi_{S*}\underline{\mathbb{Z}_p}, \underline{\mathbb{Z}_p}).$$

为了稍后从混合空间过渡到阿贝尔型志村簇，我们还需要以下引理。

引理 4.9。 自然映射 $\mathcal{X}^\circ \to \mathcal{X}^\circ_G$ 是关于仿紧群 $\Delta := \text{逆极限}_{\longleftarrow K} \Delta(K)$的 ***pro-étale*** 托***orsor***。

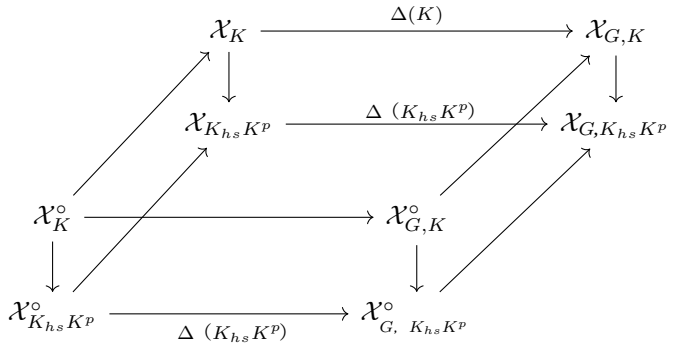
证明。 由于 $(\mathcal{X}^\circ \to \mathcal{X}^\circ_G) = $逆极限$\underset{K}{\longleftarrow}(\mathcal{X}^\circ_K \to \mathcal{X}^\circ_{G,\ K})$，其中逆极限遍历所有一致良好的层结构 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$，因此只需验证：对于这样的层子群，$\mathcal{X}^\circ_K \to \mathcal{X}^\circ_{G,\ K}$是关于有限群 $\Delta(K)$的有限 ´étale 托orsor。

首先，$\mathcal{M}_{K_{hs}K^p} \to \mathcal{M}_{G,\ K_{hs}K^p}$ 是一个有限的 ´étale $\Delta(K_{hs}K^p)$-托orsor，因为 K 是一致良好的 。事实上，这是一致性条件确实必不可少的关键所在。由于 p-adic 完备化、取 adic 泛点以及取菱形空间与有限的 ´étale 托orsor相交换（关于后一个结论，参见例如 [Sch22, 15.6]），我们得到

$$\mathcal{X}^\circ_{K_{hs}K^p} \to \mathcal{X}^\circ_{G,K_{hs}K^p}$$

是关于 $\Delta(K_{hs}K^p)$的有限 ´étale 托orsor。

类似地，$\mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_{G,\ K}$ 是一个有限 ´étale $\Delta(K)$-托orsor，取 adic 泛点并取菱形空间后，$\mathcal{X}_K \to \mathcal{X}_{G,\ K}$ 是一个有限 ´étale $\Delta(K)$-托orsor。最后，考虑以下交换立方体。



立方体的左右两个竖直面按定义是笛卡尔的。立方体的底面也是笛卡尔的，因为它由两个相反的映射组成，且这两个映射都是相对于同一个群的有限 ´étale 扭子。这形式上意味着立方体的顶面也是笛卡尔的，因此所需的 $\mathcal{X}^\circ_K \to \mathcal{X}^\circ_{G,\ K}$是相对于 $\Delta(K)$ 的有限 ´étale 扭子。□

5. p-DIVISIBLE GROUPS

本节回顾 p-可除群理论、通过 Dieudonn´e 理论对其在各种基环上的分类，以及它们通过 Serre-Tate 理论与阿贝尔簇变形之间的联系。这对我们至关重要；正如在 [Zha23]，中，混合空间的纤维积图最终将成为对 Dieudonn´e 理论和 Serre-Tate 理论的一种几何重述。

5.1. **定义与首要性质**。设 S 为任意概形。

定义 5.1. 在 S 上的 p-**可除群**是一个阿贝尔群的 fpqc 层，可以写成一个归纳系统

$$\mathcal{G} = \varinjlim G_n$$

以 $n \in \mathbb{N}$ 为指标，其中所有 G_n 都是 S 上的有限局部自由群概形，并且存在一个自然数 h，使得

(i) 对每个 n，G_n 在 S 上的次数为 p^{hn} 。(ii) 对每个 n，我们有一个正合列

$$0 \to G_n \xrightarrow{i_n} G_{n+1} \xrightarrow{p^n} G_n \to 0$$

自然数 h 称为 p-可除群 $\mathcal{G}$的**高度**。

注意，存在典范同构 $\mathcal{G}[p^n] \simeq G_n$。由定义可知， p-可除群 $\mathcal{G}$ 是 p^∞-挠的，并且乘法 p 是满射。

给定一个 p-可除群 $\mathcal{G}$，其**对偶 p-可除群** $\mathcal{G}^\vee$ 是 fpqc 层

$$T \mapsto \varinjlim \mathcal{G}[p^n]^\vee(T),$$

其中 $\mathcal{G}[p^n]^\vee$ 是 $\mathcal{G}[p^n]$的 Cartier 对偶，过渡映射由乘以 p的乘法映射的对偶给出。显然，$\mathcal{G}^\vee$ 仍是一个 p-可除群。

定义 5.2。 p-可除群在 S 上的**同源** $\lambda\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ 是 fpqc 层的一个满射，其核可由有限局部自由群概形表示。我们用 $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ 表示 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{G}'$之间同源的 fpqc 层。

一个**准同源**是层 $\overline{\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')} \otimes \mathbb{Q}$的一个整体截面 ρ，使得在 S上 Zariski 局部地，某个整数 n使 $p^n\rho$ 是一个同源。

定义 5.3。设 $\mathcal{G}$ 是一个 p-可除群。 $\mathcal{G}$ 的一个**极化**是一个准同源 $\lambda\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}^\vee$，使得 Cartier 对偶 $\lambda^\vee : \mathcal{G} \cong \mathcal{G}^{\vee\vee} \to \mathcal{G}^\vee$ 等于 $-\lambda$。如果 λ 是一个同构，则称其为**主极化**。

例 5.4. (i) 层 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_{p_S}$ 是一个高度为 1 的 p-可除群。其对偶是 p-可除群

$$\mu_{p^\infty} := \varinjlim \mu_{p^n},$$

其高度同样为 1。

(ii) 若 A 是相对维数为 d的 S 上的阿贝尔概形，则

$$A[p^\infty] := \varinjlim_n A[p^n]$$

是一个高度为 $2d$ 的 p-可除群。其对偶是 p-可除群 $A^\vee[p^\infty]$。

$A[p^\infty]$与 $A^\vee[p^\infty]$之间的配对（更确切地说，是它们的 p^n-扭子群之间的配对）正是 Weil 配对。当 A 具有主极化时， $A[p^\infty]$ 通过这一主极化是自对偶的。一般而言， A上的极化 λ 会在其 p-可除群 $A[p^\infty]$上诱导出一个极化。

定义 5.5. p-可除群 $\mathcal{G}/S$ 的（整）**Tate 模**是 fpqc 层 $T_p\mathcal{G} := \varprojlim_n \mathcal{G}[p^n]$，其中过渡映射由乘以 p 给出。它是一个 $\mathbb{Z}_p$-模层，并可识别为 S_{fpqc} 上阿贝尔群层范畴中的 Hom 层

$$T_p\mathcal{G} \simeq \mathcal{H}om(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathcal{G}).$$

由于 $T_p\mathcal{G}$ 是概形的逆极限，且这些概形均在 S上仿射，因此它可由一个在 S 上仿射的概形表示；此外，由于所有 $\mathcal{G}[p^n]$ 在S上都平坦，它在 S上也平坦。

我们主要关注定义在 p- adically 完备 $\mathbb{Z}_p$-代数 R上的 p-可除群 $\mathcal{G}$ 。在这种情况下，我们可以将 $\mathcal{G}$ 理解为 $\mathrm{Nilp}_R^{\mathrm{op}}$ 上的 fpqc 层；$\mathrm{Nilp}_R^{\mathrm{op}}$ 是满足 p 幂零条件的 R-代数范畴的对范畴，具体如下：

$$\mathrm{Nilp}_R^{\mathrm{op}} \ni A \mapsto \varprojlim_i \varinjlim_n \mathcal{G}[p^n](A/p^i).$$

ˆ定义 5.6。 形式完备化 $\mathcal{G}$ 一个 p-可除群 $\mathcal{G}$ 在 p-adic 完备 $\mathbb{Z}_p$-代数 R 上的 fpqc 层，其定义于 $\mathrm{Nilp}_R^{\mathrm{op}}$

$$A \mapsto \varinjlim_k \{x \in \mathcal{G}(A) : x = e_{\mathcal{G}} \text{ in } \mathcal{G}(A/I), \text{ for an ideal } I \subset A \text{ such that } I^{k+1} = 0\}$$

命题 5.7 ([SW13], 3.1.2)。 $\hat{}$ $\mathcal{G}$ 是一个形式李（群）簇，因此由 R上的仿射形式概形表示，并且在 R 的扎里斯基局部上同构于

$$\operatorname{Spf} R[[X_1, \ldots X_d]]$$

对于某个整数 $d \geq 0$，称为 $\mathcal{G}$ 相对于 R 的维数。

定义 5.8. $\mathcal{G}$ 的**李代数**是 R-模的 fpqc 层 $Lie(\mathcal{G}) := \hat{} Lie(\mathcal{G})$，定义为秩为 d 的（扎里斯基）局部自由 R-模的对偶

$$\omega_{\mathcal{G}} := e_{\hat{\mathcal{G}}}^* \Omega^1_{\hat{\mathcal{G}}/R}.$$

我们用 $\operatorname{Lie}\mathcal{G}$ 表示其整体截面，它是一个有限局部自由 R-模。

我们将遇到的许多 p-可除群都带有额外结构，这些结构来自具有 G-结构的阿贝尔簇。

定义 5.9. 设 S 是一个 $\mathcal{O}_E$-概形，则称三元组 $(\mathcal{G}, \iota, \lambda)$ 是 S 上的带有 G-**结构**的 p-**可除群**，如果

- $\mathcal{G}$ 是定义在 S上的 p-可除群，
- $\iota : \mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p \to \operatorname{End}(\mathcal{G})$是一个 $\mathbb{Z}_p$-线性映射，对任意 $a \in \mathcal{O}_B$都满足 Kottwitz 行列式条件，并且
$$\det_{\mathcal{O}_S}(\iota(a) | \operatorname{Lie}(\mathcal{G})) = \det(a | V_{1,\mathbb{Q}_p})$$
- $\lambda : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^\vee$ 是一个 $\mathcal{O}_p$-线性极化。

一个 $\mathbb{Z}_p$-**同构**（分别为 $\mathcal{O}_p$-**同构**）是一个 $\mathcal{O}_B$-线性同构 $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，它将极化保持到相差一个 $\mathbb{Z}_p^\times(S)$（分别为 $\mathcal{O}_p^\times(S)$）中的截面为止。一个 $\mathbb{Q}_p$- **准同源**（分别为 F_p-**准同源**）是一个 $\mathcal{O}_B$-线性准同源 $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，它将极化保持到相差一个 $\overline{\mathbb{Q}_p^\times}(S)$（分别为 $\overline{F_p^\times}(S)$）中的截面为止。

注意，若 $\mathcal{G}$ 是定义在 S 上的带有 G-结构的 p-可除群，则 $\overline{T_p\mathcal{G}}$ 自然是一个 $\mathcal{O}_B$-模。

5.2. **在 $\mathcal{O}_C$ 上的分类**。 设 C 是一个完备非阿基米德代数闭域，其整数环为 $\mathcal{O}_C$。这里我们回顾 Scholze-Weinstein 对定义在 $\mathcal{O}_C$ 上的 p-可除群的分类，该分类以线性代数数据为依据，其思路与黎曼分类类似：后者以格和黎曼型为依据对复阿贝尔簇进行分类。

定理 5.10 ([SW20], 12.1.1)。 设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{O}_C$ 上的一个 p-可除群。存在一个自然的短正合列

$$0 \to \operatorname{Lie}\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_C} C(1) \xrightarrow{\alpha_{G^*}^*(1)} T_p\mathcal{G}(\mathcal{O}_C) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \xrightarrow{\alpha_G} (\operatorname{Lie}\mathcal{G}^\vee)^* \otimes_{\mathcal{O}_C} C \to 0,$$

称为霍奇-泰特滤过。

我们回顾一下映射 α_G的构造。给定 $T_p\mathcal{G}$ 的一个截面 f，我们可以将其视为一个同态 $f : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathcal{G}$，并对其对偶 $f^\vee : \mathcal{G}^\vee \to \mu_{p^\infty}$ 应用李代数函子，从而得到映射 $\operatorname{Lie}(f^\vee) : \operatorname{Lie}(\mathcal{G}^\vee) \to \operatorname{Lie}(\mu_{p^\infty})$。选取 $\mathbb{G}_m$ 的一个坐标 t 后，$\mathcal{O}_C$- 线性对偶 $\operatorname{Lie}(\mu_{p^\infty})^*$ 自然地平凡化并同构于 $\mathcal{O}_C \frac{dt}{t}$，于是我们可以通过以下赋值来定义 α_G

$$f \mapsto (\operatorname{Lie} f^\vee)^*(\frac{dt}{t}).$$

接下来，令 $\{(T, W)\}$ 为对子范畴，其对象由有限自由的 $\mathbb{Z}_p$-模T 和一个 C-子向量空间 $W \subset T \otimes_{\mathbb{Z}_p} C(-1)$组成，态射的定义显而易见。我们将对 (T, W) 的对偶定义为对子 $(T^*(1), W^\perp)$，其中正交补是相对于 $T \otimes_{\mathbb{Z}_p} C(-1)$ 与 $T^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} C$ 之间的自然配对而言的。于是，主要分类结果如下。

定理 5.11（[SW13, 定理 B, 5.2.1）。 p-可除群在 $\mathcal{O}_C$ 上的范畴与上述范畴 $\{(T, W)\}$ 等价，等价函子为

$$\Psi : \mathcal{G} \mapsto (T_p\mathcal{G}(\mathcal{O}_C), \operatorname{Lie}\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_C} C),$$

其中 李代数 $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_C} C$ 被视为 $T_p\mathcal{G}(\mathcal{O}_C) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C(-1)$ 的一个 C-子向量空间，此处通过霍奇-泰特滤过来理解。这一等价与对偶相容。

证明。 为方便起见，我们回顾 C 球形完备（即每个递减球列的交集非空）且范数映射 $C \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是满射时逆函子的构造。

在此情形下，给定一个元组 (T, W)，我们定义如下 p-可除群

$$\mathcal{G}' := T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mu_{p^\infty}$$

并得到如下图表

$$\begin{array}{ccc} & & W \otimes_C \mathbb{G}_a \\ & & \big\downarrow \\ \mathcal{G}'^{\mathrm{ad}}_\eta & \longrightarrow & T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{G}_a, \end{array}$$

其中 $\mathbb{G}_a$ 是函子 $(A, A^+) \mapsto A^+$ 在完备仿射刚性空间 $(C, \mathcal{O}_C)$-代数上的层化。垂直箭头由给定的包含映射 $W \hookrightarrow T \otimes_{\mathbb{Z}_p} C(-1)$ 诱导，而水平箭头是 $\mathcal{G}'^{\mathrm{ad}}_\eta$上的对数映射。注意，对数映射通常具有 $\mathcal{G}'^{\mathrm{ad}}_\eta \to$李代数 $\mathcal{G}' \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathbb{G}_a$的形式；但由于 Lie $\mu_{p^\infty} \cong \mathcal{O}_C$，Lie $\mathcal{G}'$ 自然地被识别为 T中的 $T(-1) \otimes_{\mathcal{O}_C} C$。

将上述图的层论纤维积记为 $\mathcal{G}^{\mathrm{ad}}_\eta$。利用 [Far19], 的结果，并结合我们对 C 的附加假设，可以证明形式概形

$$\mathcal{G} := \coprod_Y \operatorname{Spf} H^0(Y, \mathcal{O}_Y^+)$$

是 p 上的可除群，其中 Y 遍历 $\mathcal{G}^{\mathrm{ad}}_\eta$ 的所有连通分支。这定义了逆函子 $(T,\ W) \mapsto \mathcal{G}$。
□

5.3. **下降性质**。与 [Zha23], 中的方法类似，为了得到混合空间的纤维积图，我们需要关于 p-可除群的某些下降性质。我们从 [Zha23 第 3 节3]中汇总必要的结果。

引理 5.12（[Zha23], 引理 3.14）。给定一个所谓的 *Milnor* 方形，即环的一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R_2 \\ \big\downarrow & \ulcorner & \big\downarrow \\ R_1 & \twoheadrightarrow & R_3 \end{array}$$

若 $R_1 \twoheadrightarrow R_3$ 是满射，则这些环上的有限局部自由模范畴所构成的相应图是 2-笛卡尔的。具体而言，有限局部自由 R-模的范畴等价于粘合数据范畴

$$\{M_1/R_1, M_2/R_2, \alpha : M_1 \otimes_{R_1} R_3 \cong M_2 \otimes_{R_2} R_3\},$$

其中，M_i 是 R_i上的有限局部自由模，α 是一个同构。

证明。 给定一个有限局部自由的 R-模，我们可以将其基变换到 R_1 和 R_2，并令 α 为恒等映射。反过来，给定一个粘合三元组 $(M_1,\ M_2,\ \alpha)$，我们得到一个 R-模 M，其构造如下：

$$M := \ker(M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\alpha - \mathrm{id}} M_2 \otimes_{R_2} R_3). \qquad \square$$

命题 5.13 ([Zha23], 3.16)。 给定一个如引理 *5.12* 中所述的 *Milnor* 方形，相应的、由这些环上的 p-可除群构成的范畴图是2-笛卡尔的。

证明。 给定两个 p-可除群 $\mathcal{G}$，$\mathcal{G}$ 在 R 上，我们有

$$\mathrm{Hom}_R(\mathcal{G},\mathcal{G}') = \varprojlim_n \mathrm{Hom}_R(\mathcal{G}[p^n],\mathcal{G}'[p^n]).$$

对于每个 n，$\mathrm{Hom}_R(\mathcal{G}[p^n]$，$\mathcal{G}'[p^n])$ 由保持附加霍普夫代数结构的 R-模 $\mathcal{O}(\mathcal{G}'[p^n]) \to \mathcal{O}(\mathcal{G}[p^n])$ 的映射给出。由于所有霍普夫代数结构都是用 R-模的态射给出的，引理 5.12 表明，给出 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{G}[p^n]$，$\mathcal{G}'[p^n])$ 中的一个映射，等价于给出基变换到 R_1 和 R_2 后的态射，并且这些态射在 R_3上相容。取逆极限后，这表明具有全忠实性。

对于本质满射性，我们论证如下。给定一个 p-可除群的粘合三元组 $(\mathcal{G}_1$，$\mathcal{G}_2$，$\alpha)$，我们首先可以对每个 n 限制到 p^n-挠点，从而根据引理 5.12 得到正则函数环 $\mathcal{O}(\mathcal{G}[p^n])$，并赋予其霍普夫代数结构。全忠实性表明，存在过渡映射，使 $\varprojlim_n \mathcal{G}[p^n]$ 成为一个 p-可除群，并且其限制分别为 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$。□

引理 5.14 ([Zha23], 3.17)。 设 $R = \prod_{i\in I} V_i$ 为赋值环的乘积，且 n 为一个整数。则秩为 n的射影 R-模的范畴等价于秩为 n 的射影 V_i-模的范畴的集合。

证明。 任意秩为 n 的射影 R-模都通过基变换给出一组秩为 n 的射影V_i-模。反过来，给定一组 $\{M_i\}_{i\in I}$ 秩为 n的射影（也自动是自由的） V_i-模，我们可以令 $M \coloneqq \prod_{i\in I} M_i$，所得模同样是自由的。这两个函子显然互为逆函子。□

推论 5.15 ([Zha23], 3.18)。 在引理 *5.14* 的情形下，固定高度的 p-可除群在 R 上的范畴等价于在每个 V_i上的具有相同高度的 p-可除群的集合。

5.4. Dieudonn´e 模在本小节中，我们回顾 Dieudonn´e 理论所需的背景知识。我们将重点介绍 [AB23]，所发展的棱柱 Dieudonn´e 理论，因为我们实际需要的所有分类结果都包含在这一理论中。

我们所关注的基环是所谓的<style id='1'>拟合成环。这些环是 p-完备环，具有有界的 p^∞-扭元，并且其余切复形 $L_{R/\mathbb{Z}_p}$具有 p-完备的 Tor 振幅，位于 $[-1,0]$ 中；也就是说，该复形

$$M = L_{R/\mathbb{Z}_p} \otimes^{\mathbb{L}}_R R/p \in D(R/p)$$

满足：对于任意 R/p-模 N，都有 $M \otimes^{\mathbb{L}}_R N \in D^{[-1,0]}(R/p)$（见 [AB23, 3.3.1]）。

在 [AB23], Ansch¨utz 和 Le Bras 将一个拟合成环 R 上的 p-可除群 $\mathcal{G}$ 赋予其棱柱 Dieudonn´e 晶体，使其成为 R的小拟合成 site 上的层；该 site 的覆盖为拟合成环之间的 p-完备忠实平坦映射。对于以下拟合成环的特殊情形，情况大为简化。

定义 5.16 ([AB23], 3.3.5)。若拟合成环 R 存在一个从整完美拟环S 出发的满射 $S \twoheadrightarrow R$ （见下文定义 6.1），则称其为**拟正则半完美拟环**。

例 5.17 ([AB23], 3.3.6). 任何整完美拟环 R 以及任何由有限正则序列取商所得的 p-完备商空间 R，只要其 p^∞-扭挠有界，都是拟正则半完美拟环。这包括我们将应用棱柱 Dieudonné 模理论的两个主要情形。

也就是说，若 (R, R^+) 是一个带伪一致化元 $\varpi \in R^+$的完美化 Tate-Huber 对，则 R^+ 和 R^+/ϖ 都是拟正则半完美拟环（见下文引理 6.2）。

若 R 是拟正则半完美拟环，则由 [BS22, 7.2]，棱柱位点 $(R)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的初始棱柱 $(\mathbb{\Delta}_R, I)$ 存在；并且由 [AB23, 4.1.13], ，给出一个 p-可除群在 R 上的棱柱 Dieudonn´e 晶体，等价于在初始棱柱 $(R)_{\mathbb{\Delta}}$ 上计算其在棱柱位点 $(R)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的相关层。$(\mathbb{\Delta}_R, I)$。这一过程得到所谓的**逆变棱柱 Dieudonn´e 模**，这是一个有限局部自由的 $\mathbb{\Delta}_R$-模 M，并配备了一个自同态 $\varphi_M\colon \varphi^*M \to M$（其中 φ 是 $\mathbb{\Delta}_R$上的 Frobenius）。

上述构造对 $\mathcal{G}$是逆变的。我们将改用**协变**版本，也就是说，应用 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{\Delta}_R}(-, \mathbb{\Delta}_R)$，得到**协变棱柱 Dieudonn´e 模** $M_{\mathbb{\Delta}}(\mathcal{G})$。主要的分类结果如下。

定理 5.18 ([AB23], 4.1.12, 4.6.10,)。 设 R 是一个准正则半完美拟环。那么，棱柱 *Dieudonn´e* 函子将 p- 可除群 $\mathcal{G}$ 上的 R 映射为其（协变）棱柱 *Dieudonn´e* 模 $M_{\mathbb{\Delta}}(G)$，并给出 p- 可除群范畴与 R 上的可容许 *Dieudonn´e* 模 R 之间的等价。

如 [Zha23], 所示，以下两个例子将是棱柱 Dieudonn´e 理论的关键应用。

例 5.19 ([AB23], 4.3.6)。 若 R 是一个整完美拟环，则与之关联的棱柱为

$$(\mathbb{\Delta}_R, I) = (W(R^\flat), \ker(\theta \circ \varphi^{-1})),$$

其中 $\theta\colon W(R^\flat) \to R$ 是 Fontaine 的 theta 映射。在此情形下，可容许的棱柱 Dieudonn´e 模等同于一个**带一条腿位于 (ker()) 的极小 Breuil-Kisin-Fargues 模**。也就是说，它是一个有限投射的 $W(R^\flat)$-模 M，并附带一个 φ-线性同构

$$\varphi_M : M[\frac{1}{\xi}] \xrightarrow{\sim} M[\frac{1}{\varphi(\xi)}],$$

其中 ξ是$\theta \circ \varphi_R^{-1}$的核的选定生成元，使得 $M \subset \varphi_M(M) \subset \frac{1}{\varphi(\xi)} M$。 ——

例 5.20 ([AB23], 4.3.3). 设 R 是拟正则半完美拟的，且$pR = 0$，例如 $R = R^+/\varpi$，其中 R^+ 是整完美拟环，且 ϖ 是伪一致化元。那么其对应的棱柱为

$$(\mathbb{\Delta}_R, I) = (A_{\mathrm{cris}}(R), (p)),$$

在此情形下，可容许的棱柱 Dieudonn´e 模与 Berthelot、Breen 和 Messing 的逆变晶体 Dieudonn´e 模的朴素对偶相同构。

对于任意特征为 p 的整完美拟环 R^+，存在自然映射$W(R^+) \to A_{\mathrm{cris}}(R^+/\varpi)$；并且对于 $R^{\sharp +}$ 上的任意 p-可除群 $\mathcal{G}$，存在一个比较同构

$$M_{\mathbb{\Delta}}(\mathcal{G}) \otimes_{W(R^+)} A_{\mathrm{cris}}(R^+/\varpi) \xrightarrow{\sim} M_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G} \times_{R^{\sharp +}} R^+/\varpi), \tag{5.1}$$

参见 [SW20, 17.5.2]。稍后，这个比较同构将成为我们想要证明的图表是笛卡尔且 2-交换的原因。

5.5. **Serre-Tate 理论**。一般而言，Serre-Tate 理论回答了这样一个问题：阿贝尔簇的变形在多大程度上由其相应的 p-可除群控制。我们列出两个稍后会用到的此类结果，特别是为了证明我们所定义的混合伊古萨堆是良定义的。

定理 5.21 ([CS24], 2.4.1)。设 $S' \twoheadrightarrow S$ 是一个环的满射，其中 p 是幂零的，且其核 $I \subset S'$ 是幂零的。

(1) 函子 $\mathcal{G}_{S'} \mapsto \mathcal{G}_{S'} \times_{S'} S$ 从 S' 上 p-可除群在同源意义下构成的范畴到 S 上 p-可除群在同源意义下构成的范畴，是一个等价。*(2)* 函子 $A_{S'} \mapsto A_{S'} \times_{S'} S$ 从 S' 上阿贝尔概形在 p-幂次同源意义下构成的范畴到 S 上阿贝尔概形在 p-幂次同源意义下构成的范畴，是一个等价。

定理 5.22 ([CS24], 2.4.2)。设 $S' \twoheadrightarrow S$ 是一个环的满射，其中 p 是幂零的，且其核 $I \subset S'$ 是幂零的。于是函子

$$A_{S'} \mapsto (A_S, A_{S'}[p^\infty], \mathrm{id})$$

是 S' 上的阿贝尔概形范畴与由以下对象组成的三元组范畴之间的等价：S上的阿贝尔概形 A_S 、S' 上的 p-可除群 $\mathcal{G}_{S'}$ ，以及一个同构 ρ ： $A_S[p^\infty] \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{S'} \times_{S'} S$。

证明。令 i : 谱(S) $\hookrightarrow$ 谱(S')表示包含映射，并固定满足(p, I)$^N = 0$ 均属于 S'的 $N \gg 0$ 。

首先，我们证明全忠实性。设给定 S上的两个阿贝尔概形A_0， B_0及其在 S' 上的提升 A， B。我们将这些阿贝尔概形都视为各自底概形上的 fpqc 层。记 K_B 为约化映射 $B \to i_* B_0$的核。应用 Hom$_{S'}$(A, –)，得到正合列

$$\mathrm{Hom}_{S'}(A, K_B) \to \mathrm{Hom}_{S'}(A, B) \xrightarrow{res} \mathrm{Hom}_S(A_0, B_0) \to \mathrm{Ext}^1_{S'}(A, K_B).$$

为了证明全忠实性，我们分析 Hom$_{S'}$(A, K_B) 和 Ext$^1_{S'}$(A, K_B)。为此，我们考虑乘以p^N 的短正合列

$$0 \to A[p^N] \to A \xrightarrow{p^N} A \to 0$$

对上述正合列应用 Hom$_{S'}$(–, K_B)，得到长正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{S'}(A, K_B) \xrightarrow{p^N} \mathrm{Hom}_{S'}(A, K_B) \to \mathrm{Hom}_{S'}(A[p^N], K_B)$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_{S'}(A, K_B) \xrightarrow{p^N} \mathrm{Ext}^1_{S'}(A, K_B)$$

由于 K_B 被 p^N湮灭，标记为 p^N 的两个箭头均为零。首先，这意味着 Hom$_{S'}$(A, K_B) $= 0$ ，因此该函子是忠实的。其次，我们看到 Hom$_{S'}$($A[p^N]$, K_B) $\xrightarrow{\sim}$ Ext$^1_{S'}$(A, K_B)，这意味着对于任意映射$f_0 \in$Hom$_S$(A_0, B_0)， $p^N f_0$总可以提升为某个 f': $A \to B$。对乘以 p^N 的正合列应用 Hom$_{S'}$(–, B) 时，可以看出，若 f'湮灭 $A[p^N]$，则 f_0 本身可以提升。为完成满性的证明，注意到我们还给定了一个映射 $f[p^\infty]$: $A[p^\infty] \to B[p^\infty]$ ，它提升了 $f_0[p^\infty]$。因此，根据定理 5.21 的第 (1) 部分，必有 f' 诱导出 $p^N f[p^\infty]$: $A[p^\infty] \to B[p^\infty]$。特别地， f'按所需湮灭 $A[p^N]$。

接下来，我们证明本质满射性。假设给定一个阿贝尔概形 A_0over S ，以及一个 p-可除群 $\mathcal{G}$ over S' 和一个同构 $A_0[p^\infty] \cong \mathcal{G} \times_{S'} S$。根据定理 5.21，我们可以任意选取 A_0over S 的一个提升 A' （它在 p-次同源意义下是唯一的）。不妨假设映射 $A'_S \to A_0$ 是一个实际同源（而不仅仅是拟同源）。根据定理 5.21，诱导同源 $A'_S[p^\infty] \to A_0[p^\infty]$ 可提升为一个

同源 φ： $A'[p^\infty] \to \mathcal{G}$ over S'。我们定义 $A := A'/\ker\varphi$，于是 $A[p^\infty] \cong \mathcal{G}$and A 仍然提升 A_0。□

6. Mixed-characteristic affine Grassmannian and Hodge-Tate periodmap

本章将介绍 B^+_{dR}-仿射 Grassmannian，并将霍奇-泰特周期映射的构造从 Hodge 型 Shimura 簇推广到我们的混合空间以及阿贝尔型志村簇。

6.1. 混合特征仿射 Grassmannian。

由于本小节的内容在更一般的情形下仍然成立，因此暂且采用一个更一般的框架。具体而言，我们固定一个有限扩张 $E/\mathbb{Q}_p$，其整数环为 $\mathcal{O}_E$、一致化元为 π，剩余域为 $\mathbb{F}_q$。此外，我们固定一个定义在 E 上的连通约化群G。在下一小节中，我们将恢复通常使用的记号。

考虑分歧 Witt 向量的函子

$$W_{\mathcal{O}_E}(-) : \{\text{Perfect } \mathbb{F}_q\text{-algebras}\} \longrightarrow \{\pi\text{-torsionfree } \pi\text{-complete } \mathcal{O}_E\text{-algebras}\},$$

它通过 p-典型 Witt 向量 $W(-)$ 表示为 $W_{\mathcal{O}_E}(R) = W(R)\widehat{\otimes}_{W(\mathbb{F}_q)}\mathcal{O}_E$。对于带有 q-Frobenius φ 的完美 $\mathbb{F}_q$-代数 R，我们将 $\varphi_R := W_{\mathcal{O}_E}(\varphi)$ 记作 φ 到 $W_{\mathcal{O}_E}(R)$ 的唯一提升，并称其为 $W_{\mathcal{O}_E}(R)$ 上的 Frobenius 自同态。

$W_{\mathcal{O}_E}(-)$ 是**倾斜函子**的左伴随

$$(-)^\flat : A \mapsto \varprojlim_{x \mapsto x^q} A/p.$$

伴随余单位 θ： $W_{\mathcal{O}_E}(A^\flat) \to A$ 称为**Fontaine 的 theta 映射**。

定义 6.1 ([SW20] 17.5.1)**.** 若一个 $\mathcal{O}_E$-代数 A 具有如下形式，则称其为**整完美拟**的：$W_{\mathcal{O}_E}(R)/I$，其中 R 是一个完美 $\mathbb{F}_q$-代数，且I是一个主理想，并且 $W(R)$是 I-adic 完备的，且 I 由一个**特征元素** d生成，即一个满足以下条件的元素

$$\frac{\varphi_R(d) - d^p}{p} \in W_{\mathcal{O}_E}(R)^\times$$

给定一个整完美拟 O_E-代数 $A = W_{\mathcal{O}_E}(R)/I$，我们有一个典范同构 $R \simeq A^\flat$，它将 I 与 $\ker(\theta)$ 等同。此外，I 的任意生成元都是特征的。我们将这样的生成元选择记为 ξ。

整完美拟代数的概念与完美化 Tate-Huber 对的概念之间的关系（见定义 3.5）如下。

引理 6.2 ([BMS18], 3.21, 3.22)。 若(R, R^+) 是一个完美拟 *Tate-Huber* 对，则R^+ 是一个整完美拟 $\mathbb{Z}_p$- 代数。反之，若 A 是一个整完美拟 $\mathbb{Z}_p$- 代数，并且对某个非零因子 ϖ 而言是 ϖ- 完备的，且 ϖ^p 整除 p，那么$(A[1/\varpi], A)$ 是一个完美拟 *Tate-Huber* 对（赋予 ϖ-*adic* 拓扑）。

定义 6.3。 设 R 是一个完美 $\mathbb{F}_q$-代数。 R 在 $\mathcal{O}_E$ 上的一个**去倾斜** 是一个对 (A, ι)，其中 A 是一个整完美拟 $\mathcal{O}_E$-代数，而 ι： $A^\flat \xrightarrow{\sim} R$ 是一个固定的同构。

通常我们在记号中省略同构 ι。

定义 6.4。 给定一个带有倾斜 R^+的整完美拟 $\mathcal{O}_E$-代数 $R^{\sharp +}$，设 ξ是 $\ker(\theta)$ 的一个生成元，并假设 $R^\sharp := R^{\sharp +}[1/\pi] \neq 0$，则定义如下**德拉姆周期环**：记 $B^+_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$ 为 $W_{\mathcal{O}_E}(R^+)[1/\pi]$ 的 ξ-adic 完备化，并定义 $B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp) := B^+_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)[1/\xi]$。

正如记号所示，这些定义只依赖于 perfectoid Tate 环 $R^\sharp$，而不依赖于整子环 $R^{\sharp +}$。

注 6.5。若 C 是 E 的代数闭完备非阿基米德域扩张，那么根据科恩结构定理，我们有一个同构

$$B_{\mathrm{dR}}^{+}(C) \cong C[\![\xi]\!],$$

但这并非典范的（特别是，它不是伽罗瓦等变的）。

定义 6.6 ([SW20], 19.1)。 B^{+}_{dR}**-仿射格拉斯曼量** Gr_G 是与 G 相关联的 v-层，它定义在 Perf $/\operatorname{Spd} E$ 上，将带有固定去倾斜 $S^{\sharp} = \operatorname{Spa}(R^{\sharp}, R^{\sharp+})/\operatorname{Spa} E$ 的 $S = \operatorname{Spa}(R, R^{+})$ 送到元组 $(\mathcal{F}, \alpha)$ 的同构类，其中 $\mathcal{F}$ 是 $\operatorname{Spec} B^{+}_{\mathrm{dR}}(R^{\sharp})$ 上的 G-主丛，而 α 是 $\mathcal{F}$ 在 $\operatorname{Spec} B_{\mathrm{dR}}(R^{\sharp})$ 上的平凡化。

等价地，这也是该预层的 ´étale 层化

$$S/\operatorname{Spd} E \longmapsto G(B_{\mathrm{dR}}(R^{\sharp}))/G(B^{+}_{\mathrm{dR}}(R^{\sharp})),$$

参见 [SW20, 19.1.2]。

正如我们稍后在引入相对 Fargues-Fontaine 曲线 X_S（以 $S \in$Perf 为参数）时将看到的，v-层 Gr_G 可以通过 Fargues-Fontaine 曲线上的 G-主丛的修改来理解。具体而言，Gr_G 的一个 S-点对应于 Fargues-Fontaine 曲线 X_S 上、在与 S 的去倾斜 $S^{\sharp}$ 相关联的 Cartier 除子处对平凡 G-主丛所作的一次修改。

B^{+}_{dR}仿射 Grassmannian 具有非常好的几何性质，其中一些性质列举如下。

命题 6.7 ([SW20], 19.1.4,19.2.4)。 B^{+}_{dR}仿射 *Grassmannian* Gr_G 是部分固有的，并且是空间钻石的并。

命题 6.8 ([SW20], 19.1.5)。给定 $H \hookrightarrow G$ 上约化群之间的一个闭嵌入，该嵌入诱导的映射$\mathrm{Gr}_H \hookrightarrow \mathrm{Gr}_G$ 也是一个闭嵌入。

固定一个完备代数闭非阿基米德扩张 C/E，并固定一个分裂环面和伯orel 子群 $T \subset B \subset G_C$，我们得到由 T 的支配余特征 $X_*^{+}(T)$索引的**嘉当分解**（即那些与所有由 B的选择所确定的正根均配对非负的余特征 $\mu \in X_*(T)$）：

$$G(B_{\mathrm{dR}}(C)) = \coprod_{\mu \in X_*^{+}(T)} G(B^{+}_{\mathrm{dR}}(C)) \cdot \xi^{\mu} \cdot G(B^{+}_{\mathrm{dR}}(C)),$$

其中 ξ^{μ} 是 $\mu(\xi) \in G(B_{\mathrm{dR}}(C))$的像。例如，通过选取一个（非典范的）同构$B_{\mathrm{dR}}(C) \cong C((\xi))$，这可由经典的嘉当分解推出。

回顾 $X_*^{+}(T)$上的**布鲁哈特序**：给定 λ，$\mu \in X_*^{+}(T)$，当且仅当 $\mu - \lambda$ 是单根余根的非负整数线性组合时，我们称 $\lambda \leq \mu$。利用布鲁哈特序，嘉当分解在 $\mathrm{Gr}_{G,C}$上给出了**布鲁哈特分层**，其中$_C$是 Gr_G 到 $\operatorname{Spd} C$的基变换，具体定义如下两个子函子：

定义 6.9。设 $\mu \in X_*^{+}(T)$为主导的。我们令 $\mathrm{Gr}_{G,C,\mu}$ 为 $\mathrm{Gr}_{G,C}$的子函子，它将 $S/\operatorname{Spd} C$映射到映射的集合 $S \to \mathrm{Gr}_{G,C}$，使得对于 S的每个几何点 $x = \operatorname{Spa}(\tilde{C}, \tilde{C}^{+})$，相应的 $\mathrm{Gr}_{G,C}$的 $\operatorname{Spa}(\tilde{C}, \tilde{C}^{+})$-点均属于陪集

$$G(B^{+}_{\mathrm{dR}}(\tilde{C})) \cdot \xi^{\mu} \cdot G(B^{+}_{\mathrm{dR}}(\tilde{C}))$$

嘉当分解的。

我们以相同方式定义子函子 $\mathrm{Gr}_{G,C,\leq\mu}$ of $\mathrm{Gr}_{G,C}$，但允许相应的 $\operatorname{Spa}(\tilde{C}, \tilde{C}^{+})$ 点位于

$$\coprod_{\lambda \leq \mu} G(B^{+}_{\mathrm{dR}}(\tilde{C})) \cdot \xi^{\lambda} \cdot G(B^{+}_{\mathrm{dR}}(\tilde{C})),$$

其中 $\leq$ 表示 $X_*^+(T)$ 上的布鲁哈特序。

注意，如果 $G(C)$ 的 μ 共轭类已经定义在 E 上，那么 $\mathrm{Gr}_{G,\mu}$ 也定义在 E 上。回忆一下，给定余特征 $\mu \in X_*(T)$，与之关联的 G 的极大抛物子群 P_μ 是由满足极限 $\lim_{t\to 0} \mu(t)^{-1} g \mu(t)$ 存在的元素 $g \in G$ 构成的子群。

命题 6.10 ([SW20], 19.4.2)。对于任意支配余特征 $\mu \in X_*^+(T)$，存在一个自然的 *Bialynicki-Birula* 映射

$$\pi_\mu : \mathrm{Gr}_{G,\mu} \to \mathcal{F}l^\diamond_{G,\mu},$$

其中 $\mathcal{F}l_{G,\mu}$ 是解析化的部分旗簇 G/P_μ，其中 P_μ 是与 μ 相关联的极大抛物子群。

如果 μ 是极小的，那么 *Bialynicki-Birula* 映射是一个同构。

6.2. **显式计算**。现在让我们回到这样的设定： G 是来自我们的 PEL 数据、定义在 $\mathbb{Q}$ 上（或经基变换到 $\mathbb{Q}_p$ 上）的约化群，而 E 是固定点 v 处、位于 p 之上的反射域 E_0 的局部化。为简化记号，下文将写作 $\mathrm{Gr}_G = \mathrm{Gr}^{G_{\mathbb{Q}_p}}$。

令 μ 表示与我们的志村数据相关联的霍奇余特征的逆；按设计，它是极小的。为进一步简化记号，我们将以 μ 标记的舒伯特胞腔简记为 $\mathrm{Gr} := \mathrm{Gr}_{G,\mu}$。

令 C 为 E的一个代数闭非阿基米德完备扩张。我们需要用 p-可除群来描述 Gr 的 $\mathrm{Spd}\, C$-值点。由于 Gr 是部分固有的，这等价于描述 Gr 更一般的 $\mathrm{Spd}(C, C^+)$-值点。Bialynicki-Birula 同构 $\mathrm{Gr} \simeq \mathcal{F}l^\diamond_{G,\mu}$促使我们转而描述解析化部分旗簇的 $\mathrm{Spd}\, C$-值点。

引理 6.11. $\mathrm{Spd}\, C$-值点与如下对象一一对应：带有 G-结构的 $\mathcal{G}$ 上的 p-可除群（见定义 *5.9*），以及一个平凡化 $\alpha : T_p\mathcal{G} \cong \Lambda$；该平凡化是 $\mathcal{O}_B$-线性的，并且相对于 $T_p\mathcal{G}$ 上的（提升后的）*Weil* 配对以及 Λ上的配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$，是一个 $\mathcal{O}_p$-辛相似。

证明。利用 Bialynicki-Birula 同构，我们需要描述 $\mathcal{F}l^\diamond_{G,\mu}$ 的 $\mathrm{Spd}\, C$-点。给出这样一个点，等价于给出一个 $\mathcal{O}_B$-不变子空间

$$W \subset V \otimes_{\mathbb{Q}} C$$

该子空间相对于配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ 是极大各向同性的。

根据定理 5.11， $\mathbb{Z}_p$-格 Λ （相对于辛配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ 是自对偶的）和子空间

$$W \subset \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} C(-1) = V \otimes_{\mathbb{Q}} C(-1)$$

确定了一个 p-可除群 $\mathcal{G}/\mathcal{O}_C$，其 Tate 模 $T_p\mathcal{G} \cong \Lambda$ 已平凡化。我们将默认为 $V \otimes_{\mathbb{Q}} C(-1)$ 与 $V \otimes_{\mathbb{Q}} C$ 相同。以这种方式得到的 p-可除群带有以下额外结构：

- 元组 (Λ, W) 上的 $\mathcal{O}_B$-模结构转化为 $\mathcal{G}$ 上的 $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$-模结构。特别地，$T_p\mathcal{G}$ 也自然地是一个 $\mathcal{O}_B$-模，而不只是一个 $\mathbb{Z}_p$-模，并且同构 $T_p\mathcal{G} \cong \Lambda$ 是 $\mathcal{O}_B$-线性的。注意，Kottwitz 行列式条件也成立。
- 根据关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ 的自对偶性， Λ 可与其对偶 Λ^* 视为同构的 $\mathcal{O}_B$-模。这由此诱导出一个 $\mathcal{O}_B$-线性极化 λ: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^\vee$，其定义为
$$(\Lambda, W) \to (\Lambda^*(1), W^\perp), (t, w) \mapsto (\langle \cdot, t \rangle_F, \langle \cdot, w \rangle_F).$$
- 无限层结构 $T_p\mathcal{G} \cong \Lambda$ 关于 $T_p\mathcal{G}$ 上的（提升的）Weil 配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$和 Λ 上的 $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$.自动是一个 $\mathcal{O}_p$-辛相似。□

6.3. 霍奇-泰特周期映射。 在本小节中，我们将 [CS17] 的霍奇-泰特周期映射扩展到混合空间及阿贝尔型志村簇的良约化轨迹。我们沿用上一小节的记号。特别地，设 $[\nu_h]$ 为志村数据的霍奇余特征的 $G(\mathbb{C})$-共轭类。我们固定一个同构 $\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{C}$ 以及 $G_{\mathbb{Q}_p}$的一个博雷尔对（T， B）。 — _ — 我们用 μ 表示一个支配余特征，它代表 $G(\mathbb{Q}_p)$-共轭类 ν_h^{-1} 。

命题 6.12。 对于任意充分小的温和层子群 $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$，存在一个定义在 $\operatorname{Spd} E$ 上的钻石的霍奇 - 泰特周期映射

$$\pi_{HT} : \mathcal{X}^{\circ}_{\alpha, K^p} \to \mathrm{Gr}_G$$

其像包含于Gr中。该映射关于 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的黑克作用是等变的，并且在系统 $\{\mathcal{X}^{\circ}_{\alpha,K^p}\}_{\alpha,K^p}$ 上是 $G(\mathbb{A}_f^p)$-不变的。

证明。 我们遵循 [Zha23, 6.14] 中的论证。注意，只需在 $\mathcal{X}^{\circ}{}_{,\mathrm{pre}\,\alpha,K^p}$ 上构造霍奇-泰特周期映射即可；根据推论 4.8，该空间的模空间描述涉及带有 G-结构的形式阿贝尔概形，以及 p-adic Tate 模的一个平凡化。

设 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$，并令 $(S^\sharp, \mathfrak{A}, \beta)$ 为 $\mathcal{X}^\circ$ 的一个 S-点，$\mathrm{pre}_{\alpha,K^p}$，即 $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+})$ 是 S 在 Spa E 上的去倾斜， $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{X}_{\alpha,K^p}$ 上的一个 Spf $R^{\sharp+}$-点，并且 $\beta \in \mathrm{Isom}_G(T_p\mathcal{A}, \Lambda)(S)$ 是 $\mathfrak{A}^\circ$ 的一般纤维$\mathcal{A}$的 Tate 模的平凡化。令 $(M := M(\mathfrak{A}[p^\infty])\ \varphi)$ 为棱柱 Dieudonné 模，它是一个有限局部自由的 $W(R^+)$-模，带有 $\mathcal{O}_B$-模结构和一个辛配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$。

考虑 X 上的 ´étale 层：=谱$(B^+_{\mathrm{dR}}(R^\sharp))$

$$\mathcal{F} := \underline{\mathrm{Isom}}_G(M \otimes_{W(R^+)} \mathcal{O}_X, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_X)$$

由 $\mathcal{O}_B$-线性同构组成，且相对于配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$，它们是 F_p-辛相似变换。由于我们可以将 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 识别为 Λ 的自同构群，其中这些自同构相对于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ 是 F_p-辛相似变换，因此这是一个 $G_{\mathbb{Q}_p}$-扭子。

为了看出 $\mathcal{F}$ 在 $B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$ 上是平凡化的，先写出 $T = T_p\mathcal{A}(S)$，它是环 $C^0(\mathrm{Spec}\, R^+, \mathbb{Z}_p)$ 上的有限射影模。存在一个 ´étale-晶体比较同构，其沿 $B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$ 的基变换给出

$$T \otimes_{C^0(\mathrm{Spec}\, R^+, \mathbb{Z}_p)} B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp) \simeq M_{\mathrm{crys}}(\mathfrak{A}[p^\infty] \times_{R^{\sharp+}} R^{\sharp+}/p) \otimes_{A_{\mathrm{crys}}(R^+)} B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$$

根据 [SW20, 17.5.2], ，我们还有相容性同构

$$M \otimes_{W(R^+)} A_{\mathrm{crys}}(R^+) \simeq M_{\mathrm{crys}}(\mathfrak{A}[p^\infty] \times_{R^{\sharp+}} R^{\sharp+}/p).$$

结合这两个同构，得到一个自然同构

$$c : T \otimes_{C^0(\mathrm{Spec}\, R^+, \mathbb{Z}_p)} B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp) \xrightarrow{\sim} M \otimes_{W(R^+)} B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$$

它是 $\mathcal{O}_B$-线性的，且是一个 $\mathbb{Q}_p$-辛相似，因此相对于提升的配对，它也是一个 F_p-辛相似。因此， $\alpha := (\beta \otimes \mathrm{id}) \circ c^{-1}$ 是 $\mathcal{F}$ 在 Spec $B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$ 上的一个平凡化截面。

$G(\mathbb{A}_f^p)$ 对系统 $\{\mathcal{X}^{\circ}_{\alpha,K^p}\}_{\alpha,\ K^p}$ 上的 π_{HT} 的不变性可由构造直接得出。

与证明 [Zha23, 6.14] 中完全相同的论证也适用于说明，如此构造的霍奇-泰特周期映射 $\pi_{HT} : \mathcal{X}^{\circ}_{\alpha,\ K^p} \to \mathrm{Gr}_G$ 实际上映入舒伯特胞腔 Gr $= \mathrm{Gr}_{G,\ \mu}$。

在 p 处的 Hecke 等变性证明也与 [Zha23]中的证明相同：由于$\mathcal{X}^{\circ}_{\alpha,K^p}$ 和 Gr 都是拟紧拟分离的，且后者还是真的，只需检验等变性

在秩为 1 的几何点 $s = \mathrm{Spa}(C, \mathcal{O}_C)$ 上。对于 $g \in G(\mathbb{Q}_p)$，存在某个 $N \gg 0$使得 $p^N\Lambda \subset g\Lambda \subset p^{-N}\Lambda$。将 $g\Lambda$ 在商空间中的像记为 K

$$\overline{\beta} : p^{-N}\Lambda/p^N\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_s[p^N],$$

其中 $\mathcal{A}_s$ 表示一般纤维。于是，g 的黑克作用将 $(\mathcal{A}_s,\ \beta : T_p\mathcal{A}_s \cong \Lambda)$ 映至 $(\mathcal{A}'_s := \mathcal{A}_s/K,\ T_p\mathcal{A}'_s \cong g\Lambda)$，这与 $G(\mathbb{Q}_p)$ 在 Gr 上的作用一致，后者将元组 $(\Lambda,\ W)$ 映至 $(g\Lambda,\ W)$。□

根据构造，霍奇-泰特周期映射在改变温和层时保持不变，因此我们可以立即得到一个霍奇-泰特周期映射

$$\pi_{HT} : \mathcal{X}^\circ \to \mathrm{Gr}$$

处处定义在无限层上。

推论 6.13。 我们有一个分解

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^\circ & \xrightarrow{\pi_{HT}} & \mathrm{Gr} \\ & {\scriptstyle\Delta}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\pi_{HT}} & \\ & \mathcal{X}^\circ_G & \end{array}$$

特别地，存在一个霍奇-泰特周期映射 π_{HT} : $\mathcal{X}^\circ_G \to \mathrm{Gr}$ ，具有与之前相同的性质。

证明。 根据引理 4.9，映射 $\mathcal{X}^\circ \to \mathcal{X}^\circ_G$ 是相对于仿紧群 Δ的 pro-´etale 扭子，因此只需证明霍奇-泰特周期映射 π_{HT}: $\mathcal{X}^\circ \to$Gr 在 Δ的作用下不变。这是因为任意 $\epsilon \in \mathcal{O}_F^{\times}{}_{,+}$ 的极化作用都会将极化 λ 变为 $\epsilon\lambda$，因此也会将 M 上的提升配对 $\langle\cdot, \cdot\rangle_M$ 乘以因子 ϵ。然而，这不会影响同构层

$$\underline{\mathrm{Isom}}_G(M \otimes_{W(R^+)} \mathcal{O}_X, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_X),$$

这里我们使用了与命题 6.12 证明中相同的记号。这证明了第一个断言。

第二个断言直接由以下事实得出：$\mathcal{X}^\circ_G$上的黑克作用是由 $\mathcal{X}^\circ$上的黑克作用诱导的。□

7. Stack of G-bundles on the Fargues-Fontaine curve

本节回顾相对 Fargues-Fontaine 曲线，以及 Fargues-Fontaine 曲线上 G-挠子的分类层。本文将遵循 [CS17] 和 [FS21]的论述。许多内容在更一般的情形下仍然成立，因此暂且假设 G 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的任意连通约化群（显然也可以推广到 $\mathbb{Q}_p$ 的任意有限扩张，参见[FS21]）。

7.1. Fargues-Fontaine 曲线与向量丛。

定义 7.1. 对于任意仿射完美空间 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}$，其伪一致化元为 $\varpi \in R^+$，回顾一下，**其上的相对 Fargues-Fontaine 曲线** S 有三种不同的实现：

(i) 令 $Y_S := \mathrm{Spa}(W(R^+))\backslash V(p[\varpi])$，则 **adic Fargues-丰泰纳曲线**是商空间 $X_S := Y_S/\varphi^{\mathbb{Z}}$。(ii) 与 X_S 关联的**菱形 Fargues-丰泰纳曲线**的公式为 $X_S^\diamond \cong (S^\diamond \times \mathrm{Spd}\,\mathbb{Q}_p)/(\varphi^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{id})$。

(iii) **代数 Fargues-Fontaine** 曲线定义为 $X_S^{\mathrm{alg}} := \mathrm{Proj}\ P$，其中

$$P := \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(n))$$

且 $\mathcal{O}_{X_S}(1)$ 是从 $\mathcal{O}_{Y_S}$下降到 X_S 上的丰沛线丛。

上述构造可以粘合，因此在任意完美空间 $S \in \mathrm{Perf}$ 上分别得到 adic 曲线、菱形空间曲线和代数 Fargues-Fontaine 曲线。

设 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}$，且设 $B^+_{\mathrm{cris}}(S) := A_{\mathrm{cris}}(R^+)[\frac{1}{p}]$，那么我们也可以写作

$$P = \bigoplus_{d\geq 0} (B^+_{\mathrm{cris},S})^{\varphi = p^d}.$$

这一观察稍后将派上用场，因为它使我们能够从附属于一个 p-可除群的有理晶体 Dieudonné 模构造 Fargues-Fontaine 曲线上的向量丛。

从现在起，我们使用以下记号：对于完美空间 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}$，我们记

$$\mathcal{Y}(S) := \mathrm{Spa}(W(R^+), W(R^+)) \backslash \{[\varpi] = 0\}.$$

对于任意满足 $a, b \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 的区间 $I = [a, b] \subset [0, \infty]$，我们定义开子空间

$$\mathcal{Y}_I(S) := \{|p|^b \leq |[\varpi]| \leq |p|^a\} \subset \mathcal{Y}(S),$$

开区间 (a, b) 的情形也类似。注意，在此记号下 $Y_S = \mathcal{Y}_{(0,\infty)}(S)$。

根据 [SW20, 11.2.1] $\mathcal{Y}_S$ 是一个解析 adic 空间。它被以 $n \in \mathbb{N}$ 为指标的有理仿射 sousperfectoid 子空间覆盖，这些子空间的形式为

$$\mathrm{Spa}(R_n, R_n^+) = \{|p| \leq |[\varpi]|^{\frac{1}{p^n}}\},$$

其中 R_n^+ 是环 $W(R^+)[p/[\varpi^{\frac{1}{p^n}}]]$ 的 $[\varpi]$-adic 完备化，并且 $R_n = R_n^+[1/[\varpi]]$。R_n 中的每个元素都可以写成

$$\sum_{i\geq 0} [r_i] \left(\frac{p}{[\varpi]^{\frac{1}{p^n}}}\right)^i$$

其中 $R \ni r_i \to 0$，显然不依赖于 R^+。因此，$\mathrm{Spa}(R_n, R_n^+)$ 上向量丛的范畴不依赖于 R^+ 的选取。根据 [KL15, 2.7.7]，同样的结论对 $\mathcal{Y}(S)$ 也成立，尤其对 Y_S 和 X_S 也成立。

下面的 GAGA 型定理将 X_S 上的向量丛与 X_S^{alg} 上的向量丛联系起来。

定理 7.2 ([FS21], II.2.7)。沿局部环化空间的自然态射 $X_S \to X_S^{\mathrm{alg}}$ 拉回，会在 X_S 上的向量丛范畴与 X_S^{alg} 上的向量丛范畴之间诱导出范畴等价。

重要的是，X_S 上的卡蒂埃除子按如下方式分类 S 的去倾斜的 Frobenius 轨道。假设 $S^\sharp/\mathbb{Q}_p$ 是 S 的一个去倾斜，且局部具有 $\mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+})$ 的形式。那么，由 Fontaine 的 theta 映射诱导的满射的每个核

$$W(R^+) \cong W(R^{\sharp\flat +}) \xrightarrow{\theta} R^{\sharp +}$$

都是由某个形如 $p - a[\varpi]$ 的元素生成的主理想，其中 $a \in W(R^+)$。诱导的映射 $\mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+}) \to Y_{\mathrm{Spa}(R,R^+)}$ 彼此粘合，并定义一个闭卡蒂埃除子 $S^\sharp \hookrightarrow Y_S$，它诱导出一个闭卡蒂埃除子 $S^\sharp \hookrightarrow X_S$。该除子由 $\mathcal{O}_{X_S}(1)$ 的一个整体截面切出；根据 GAGA，该截面对应于 X_S^{alg} 上的线丛 $\mathcal{O}(1)$ 的一个整体截面，而后者又切出一个闭卡蒂埃除子 $S^{\sharp,\mathrm{alg}} \hookrightarrow X_S^{\mathrm{alg}}$。

如果 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是仿射刚性空间，那么代数 Fargues-Fontaine 曲线 X_S^{alg} 可由任意两个主开集 $D(f_1)$ 和 $D(f_2)$ 覆盖，其中 $f_1, f_2 \in H^0(X_S^{\mathrm{alg}}, \mathcal{O}(1))$

线性无关。特别地，如果去倾斜 $S^\sharp$ 由 $\xi \in H^0(X_S^{\mathrm{alg}}, \mathcal{O}(1))$ 切出，那么任取线性无关的 $t \in H^0(X_S^{\mathrm{alg}}, \mathcal{O}(1))$。Cartier 除子 $S^{\sharp,\mathrm{alg}} \hookrightarrow X_S^{\mathrm{alg}}$ 由下式定义

$$(P[1/t])_0 \twoheadrightarrow R^\sharp$$

其核为（ξ）。与此同时，如 [FF18], 所示，$P[1/t]_0$ 的 ξ-adic 完备化恰好是德拉姆周期环 $B^+_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$。

德拉姆周期环的出现，使我们能够用在 X_S 上的平凡秩为 n的向量丛的修改来诠释B^+_{dR}-仿射 Grassmannian $\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n}$。作为最后一个准备工作，我们需要 Beauville-Laszlo 引理:

引理 7.3 (Beauville-Laszlo)。设 R 为交换环，$f \in R$ 为非-零因子，且 $R:=\varprojlim R/f^n$ 为 R的 f-*adic* 完备化。那么，R-模中 f为非零因子的对象所成的范畴等价于由以下三元组构成的范畴

$$(M_1, M_2, \alpha : M_1[1/f] \xrightarrow{\sim} M_2 \otimes_R \hat{R}),$$

其中，M_1 是一个 f 为非零因子的R-模，而 M_2 是一个 $R[1/f]$-模。

对于任意 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{Q}_p}$，$\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n}$ 的一个 S-点对应于一个去倾斜 $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+})$、$\mathrm{Spec}(B^+_{\mathrm{dR}}(R^\sharp))$ 上的秩为 n 的向量丛 $\mathcal{F}$，以及 $\mathcal{F}$ 在 $B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$ 上的一个平凡化。根据 Beauville-Laszlo，我们可以将 $X_S^{\mathrm{alg}} \backslash S^{\sharp,\mathrm{alg}}$ 上的平凡秩为 n 的向量丛与 $B^+_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$ 上的向量丛 $\mathcal{F}$ 粘合，从而得到一个新的 X_S^{alg} 上的秩为 n 的向量丛；根据 GAGA，它对应于 X_S 上的一个秩为 n 的向量丛。这是在点（对应于）$S^\sharp$ 处对 X_S 上平凡的秩为 n 的向量丛进行的一次修改。

7.2. **上的 G-丛**。在本小节中，我们用 X 表示 $\mathbb{Q}_p$ 上的一个概形，或 Spa $\mathbb{Q}_p$ 上的一个次完美类空间。我们用 Rep(G)（分别用 Bun(X)）表示 G 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的有限维代数表示（分别表示 X 上的向量丛）所构成的正合对称幺半范畴。

我们称定义在 X 上的 G-丛，是指一个 X 上的 ´étale 层，连同一个 G 作用，并且在 X 上étale 局部同构于平凡的 G-主丛，且该同构是 G-等变的。从坦纳克观点来看（见 [SW20, 19.5.1, 19.5.2]），这等价于给出一个正合张量函子

$$\mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Bun}(X)$$

根据 [SW20, 11.2.1], 的证明，对于任意完美空间 $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{Q}_p}$，其相对 Fargues-Fontaine 曲线 X_S 都是次完美化的。因此，我们可以用正合张量函子来描述 X_S 上的 G-主丛。由于我们还有正合张量等价 Bun(X_S) ≅Bun(X_S^{alg})，所以 X_S 和 X_S^{alg} 上的 G-主丛范畴是等价的。

命题 7.4 ([FS21], II.2.1, III.1.2, III.1.3)。将完美空间 $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{Q}_p}$ 映到 X_S 上的 G-主丛群胚的预叠 $\mathrm{Perf}_{\mathbb{Q}_p}$ 是一个小 v-叠。

这个 v-叠记作 Bun_G，称为 Fargues-Fontaine 曲线上的 G-**丛叠**。

将 $\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n}$ 解释为 Fargues-Fontaine 曲线上平凡秩 n向量丛的修改分类空间，这一解释可以推广到 G-扭子；我们接下来将对此作出说明。

设 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{Q}_p}$ 是一个完美空间，其在 $\mathbb{Q}_p$ 上的去倾斜为 $S^\sharp$，我们将其视为 X_S 上的 Cartier 除子。根据 Beauville-Laszlo，存在一个正合对称幺半等价

$$\mathrm{Bun}(X_S) \cong \mathrm{Bun}(X_S^{\mathrm{alg}}) \cong \mathrm{Bun}(X_S^{\mathrm{alg}} \backslash S^{\sharp,\mathrm{alg}}) \times_{\mathrm{Bun}(\mathrm{Spec}(B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)))} \mathrm{Bun}(\mathrm{Spf}(B^+_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)))$$

因此，存在从 Rep(G) 到左侧以及到右侧的正合张量函子范畴之间的等价。

现在假设给定一个 Gr_G的 S-值点（$\mathcal{F}$，α），其中 $\mathcal{F}$ 是 $B^+_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$上的一个 G-挠子，而 α 是 $\mathcal{F}$ 在 $B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)$上的一个平凡化。根据上述正合对称幺半等价，我们可以沿着平凡化 α 将 $\mathcal{F}$ 与平凡的 G-挠子粘合起来，从而在 X_S^{alg} 上得到一个新的 G-挠子，或者等价地说，在 X_S上得到一个新的 G-挠子。

这一构造给出了**Beauville-Laszlo一致化态射**

$$BL : \mathrm{Gr}_G \to \mathrm{Bun}_G .$$

命题7.5 （[FS21],III.3.1）。 BL 作为 *pro-étale* 堆之间的映射是满射。

7.3. 显式计算。 现在我们回到最初的 PEL设定，并考察 v-堆 Bun_{G^*} 和 Bun_G （与之前一样，我们滥用了记号：本应说 $G_{\mathbb{Q}_p}$-挠子时却说成了 G-挠子，对于 G^*也同样如此）。我们可以利用将 G^* 和 G 解释为某些辛相似变换群的方式，再结合Tannakian形式体系，以向量丛的形式描述关于 G^* 和 G 的 Fargues-Fontaine 曲线上的挠子。

也就是说，给定 X_S 上的一个 G^*-主丛，我们可以将其解释为 X_S 上的一个向量丛 $\mathscr{E}$，它带有 $\mathcal{O}_B$-模结构和一个辛配对 $(\cdot,\ \cdot)_{\mathscr{E}}$，该配对是 $\mathbb{Q}_p$-双线性的、取值于 $\mathbb{Q}_p$，并且满足

$$(ax, y)_{\mathscr{E}} = (x, ay)_{\mathscr{E}}$$

对任意局部截面 $x,\ y \in \mathscr{E}$ 和 $a \in F_p$，即根据引理 2.7，它可沿迹 $\mathrm{Tr}^{F_p/\mathbb{Q}_p}$ 提升为一个 F_p-双线性、取值于 F_p 的辛配对 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathscr{E}}$。 G^*-主丛之间的态射于是为向量丛的态射，且与 $\mathcal{O}_B$-模结构相容，并且是 $\mathbb{Q}_p$-辛相似变换。

类似地，给定 X_S 上的一个 G-主丛，我们可以将其解释为 X_S 上的一个向量丛 $\mathscr{E}$，它带有 $\mathcal{O}_B$-模结构和一个辛配对 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathscr{E}}$，该配对是 F_p-双线性的，且取值于 F_p。 G-主丛之间的态射于是为向量丛之间的态射，且与 $\mathcal{O}_B$-模结构相容，并且是 F_p-辛相似变换。

在这两种情况下，我们都通过沿典范忠实表示 $G^* \hookrightarrow G \hookrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{Q}}(V)$ 推前，将向量丛从伴随挠子中得到。要从向量丛恢复挠子，可以考虑同构层 $\underline{\mathrm{Isom}}_{G^*}(-,\ \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X_S})$，分别还有 $\underline{\mathrm{Isom}}_{G}(-,\ \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X_S})$。

我们可以沿嵌入 $G^* \hookrightarrow G$ 将 G^*-挠子在 X_S 上推前，从而得到 G-挠子。就向量丛而言，这恰好对应于沿迹 $\mathrm{Tr}^{F_p/\mathbb{Q}_p}$ 提升配对 $(\cdot,\ \cdot)_{\mathscr{E}}$，得到配对 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathscr{E}}$。具体来说，给定一个 G^*-挠子 $\underline{\mathrm{Isom}}_{G^*}(\mathscr{E},\ \Lambda \otimes \mathcal{O}_{X_S})$，不难看出

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{G}(\mathscr{E}, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X_S}) = \underline{\mathrm{Isom}}_{G^*}(\mathscr{E}, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X_S}) \times^{G^*} G.$$

提醒一句：牢记引理 2.7，似乎很自然也可以反向操作，将 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathscr{E}}$ 与迹 $\mathrm{Tr}^{F_p/\mathbb{Q}_p}$ 复合，从而重新得到一个 G^*-挠子。然而，这当然不会定义一个映射 $\mathrm{Bun}_G \to \mathrm{Bun}_{G^*}$，因为相对于提升的配对的 F_p-辛相似变换，在与 $\mathrm{Tr}^{F_p/\mathbb{Q}_p}$复合后并不会诱导出 $\mathbb{Q}_p$-辛相似变换。

8. Construction of the Igusa stack

在讨论完所有必要的背景之后，我们现在可以证明关于阿贝尔型志村簇良约化轨迹的纤维积猜想。

8.1. 混合伊古萨堆。在本小节中，我们定义参数 $\alpha \in \mathbb{A}^p$、$F^\times$、f 变化时的混合伊古萨堆，并说明它能给出一个类似于我们希望为阿贝尔型志村簇构造的纤维积图。

在定义混合 Igusa 堆栈时，我们借鉴了 [DHKZ24] 中霍奇型伊古萨堆的定义，也参考了希尔伯特模簇背景下对 Igusa 簇的描述，参见 [CT23, 4.2.2]。

我们需要作出以下辅助选择：对于 $\mathcal{O}_F$ 上方的任意素数 $\mathfrak{P}$，固定一个元素 $x_{\mathfrak{P}} \in \mathcal{O}_{F,+}$ 使得 $v_{\mathfrak{P}}(x_{\mathfrak{P}}) = 1$，并且对于上方的任意 $\mathfrak{P}' \neq \mathfrak{P}$ p，都有 $v_{\mathfrak{P}'}(x_{\mathfrak{P}}) = 0$，即 $x_{\mathfrak{P}}$ 是 $\mathfrak{P}$ 的一个全正一致化子，且相对于位于 $\mathfrak{P}$ 上方的其他任意素数 $\mathfrak{P}'$ 都是单位。

我们不会在记号中体现这一选择，尽管混合伊古萨堆的构造似乎依赖于它。不过，由于 [Kim25]的主要结果，我们将由混合伊古萨堆构造的阿贝尔型伊古萨堆并不依赖于这一选择（在唯一同构的意义下）。

定义 8.1. 固定 $\alpha \in \mathbb{A}^p$, $F^\times$, f。我们通过为任意仿射完美空间 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}$ 定义群胚 $\mathrm{Igs}_\alpha^{\mathrm{pre}}(S)$，来定义一个群胚预层 $\mathrm{Igs}_\alpha^{\mathrm{pre}}\colon \mathrm{Perf} \to \mathrm{Grpd}$，如下所示。

其对象是有序对 $(S^\sharp, x)$，其中 $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+})$ 是 S 在 $\mathcal{O}_E$ 上的去倾斜，而 $x : \mathrm{Spf}\, R^{\sharp+} \to \mathfrak{X}_\alpha$ 是形式概形在 $\mathcal{O}_E$ 上的映射，对应于 $\mathrm{Spf}\, R^{\sharp+}$ 上带有 G-结构和远离 p 的无限层结构的阿贝尔概形 $\mathfrak{A}_x$。

态射 $f\colon (S^\sharp_1, x) \to (S^\sharp_2, y)$ 是一个准同源 $\mathfrak{A}_x \times_{R^{\sharp+}_1} R^+/\varpi \to \mathfrak{A}_y \times_{R^{\sharp+}_2} R^+/\varpi$，它与远离 p 的无限层结构相容，保持$\mathcal{O}_B$-结构，并保持极化至多相差一个标量，该标量属于局部常值层 $\mathbb{Z}^\times_{(p)} \prod_{\mathfrak{P}|p} x_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}}$ 的 $\mathrm{Spec}\, R^+/\varpi$ 点。

为确认我们对态射的定义是良定义的，请参见注记 3.9。具体而言，我们可以选取足够小的伪一致化元 ϖ，使得 $R^{\sharp_i+}$ 在 R^+/ϖ 上的映射为满射，其中 $i = 1, 2$。根据 Serre-Tate 提升，这与伪一致化元 ϖ的选择无关。

和之前一样，如果上下文已明确或参数 α 无关紧要，我们会在记号中省略它。

下面的结果与霍奇型情形中的结果完全相同。

引理 8.2 ([DHKZ24], 5.2.6)。$\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}$ 是一个0-截断的群胚预层，即，对于任意$S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}$，群胚$\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}(S)$中的对象均没有非平凡自同构

证明。为方便起见，我们回顾一下证明。只需证明，对于任意 $\mathbb{Z}_p$-代数 R 以及任意阿贝尔概形 $\pi\colon A \to \mathrm{谱}\, R$，自然映射

$$\mathrm{End}_R(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathrm{End}_R(V^p A)$$

是单射，其中 $V^p A$ 表示 A 的远离 p 的阿代尔 Tate 模。实际上，只需证明自然映射

$$\mathrm{End}_R(A) \to \mathrm{End}_R(T^p A)$$

是单射，其中 $T^p A$ 表示 A 在 R 上的远离 p 的 Tate 模。设 $f \in \mathrm{End}_R(A)$ 属于该映射的核。

将 $R = \varinjlim R_i$ 写成有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数 $\{R_i\}_{i\in I}$（以某个指标集 I 为指标）的滤过余极限。由扩张，存在某个指标 $i \in I$、一个阿贝尔概形 $\pi_i\colon A_i \to \mathrm{Spec}\, R_i$ 以及一个自同态 $f_i \in \mathrm{End}_{R_i}(A_i)$，使得将 (A_i, f_i) 作基变换到 R 后，得到 (A, R)。由于 $|\mathrm{Spec}\ R| = \varprojlim |\mathrm{Spec}\ R_i|$，不妨进一步假设，$\mathrm{Spec}\, R \to \mathrm{Spec}\, R_i$ 的像与 $\mathrm{Spec}\, R_i$ 的所有有限多个连通分支均相交。我们需要证明 $f_i = 0$。

该结果在代数闭域上广为人知，因此对于每个几何点 $s : \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} R$，我们都有 $f_s = 0$。根据我们对映射 $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} R_i$ 的假设，对于 $\operatorname{Spec} R_i$ 的任意连通分支，我们都能找到一个几何点 $s : \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} R_i$，使得 $f_{i,s} = 0$。由阿贝尔概形的刚性，这已经推出 $f_i = 0$。□

定义 8.3. 无限层的混合伊古萨堆 Igs 定义为如下预层的 v-层化：该预层将 S 映射到群胚 $\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}(S)$ 的同构类集合。

引理 8.4. 存在一个 v-层映射 $q : \mathcal{X}^{\circ} \to \mathrm{Igs}$。

证明。 只需构造一个预层映射 $\mathcal{X}^{\circ,\mathrm{pre}} \to \mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}$，然后进行层化。回顾推论 4.8，$\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 中的点与三元组 $(S^\sharp, y, \beta)$ 对应，其中 $S^\sharp$ 是 S的一个去倾斜，$y : \mathrm{Spf}\ R^{\sharp +} \to \mathfrak{X}$ 是形式概形之间的映射，而 β 是 Tate 模的一个平凡化。遗忘 β 即可得到到 $\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}$的显然映射。□

映射 π_{HT}: Igs $\to$Bun$_G$ 可类似于 [Zha23] 中的构造方式构造。

存在一个映射 $\pi_{HT} : \mathrm{Igs} \to \mathrm{Bun}_G$。

证明。 由于 Bun$_G$ 是一个 v-叠，只需定义一个预叠的映射 $\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}} \to \mathrm{Bun}_G$，然后进行层化。设 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$，那么我们希望定义一个群胚之间的函子映射 $\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}(S) \to \mathrm{Bun}_G(S)$。

给定一个去倾斜 $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp +})$ 和一个形式阿贝尔概形 $\mathfrak{A}$，其定义在 $\mathrm{Spf}\ R^{\sharp +}$ 上，带有 G-结构以及远离-p 的无限层结构，选取一个充分小的伪一致化元 $\varpi \in R^+$，使得我们有一个商映射 $R^{\sharp +} \twoheadrightarrow R^+/\varpi$。考虑约化 $A := \mathfrak{A} \times_{R^{\sharp +}} R^+/\varpi$，它仍带有 G-结构，其 p-可除群 $A[p^\infty]$ 也如此。我们可以为其附加有理晶体 Dieudonn´e 模 $M[p^{-1}] := M_{crys}(A[p^\infty])[p^{-1}]$，这是一个有限局部自由的$B^+{}_{\mathrm{cris}}(R^+/\varpi)$-模，在唯一同构意义下是良定义的。

由晶体 Dieudonn´e 模函子具有全忠实性，该模$M[p^{-1}]$ 自带一个 $\mathcal{O}_B$-模结构以及一个辛 F_p-双线性配对。利用 Fargues-Fontaine 曲线 X_S上的 GAGA，分次模

$$\bigoplus_{d \geq 0} M[p^{-1}]^{\varphi = p^{d+1}}$$

定义了 X_S上的向量丛 $\mathscr{E}(A)$，它同样自带一个 $\mathcal{O}_B$-模结构以及一个取值于 F_p的辛配对。考虑 Fargues-Fontaine 曲线上的同构层

$$\underline{\mathrm{Isom}}_G(\mathscr{E}(A), \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_P} \mathcal{O}_{X_S})$$

由 $\mathcal{O}_B$-线性平凡化 $\mathscr{E}(A)$ 构成，这些平凡化相对于 $\mathscr{E}(A)$ 上的辛配对以及 Λ上的 $(\cdot,\cdot)_F$，是 F_p-辛相似变换。我们声称该层是一个 G-托orsor，因此给出 Bun$_G(S)$ 中的一个对象

为证明这一点，注意到根据 [Zha23, 8.6]，向量丛 $\mathscr{E}(A)$ 位于短正合列中

$$0 \to T_p\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}_{X_S} \to \mathscr{E}(A) \to i_* \operatorname{Lie}(\mathcal{A}) \to 0$$

其中，$\mathcal{A}$表示 $\mathfrak{A}$的 adic 泛纤维，$T_p\mathcal{A}$ 表示其 Tate 模，而i：$S^\sharp \to X_S$ 是 X_S中 Cartier 除子 $S^\sharp$ 的闭浸入。$T_p\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}_{X_S}$在 ´étale 局部同构于 $\Lambda \otimes \mathcal{O}_{X_S}$，而 $\mathscr{E}(A)$ 在 $S^\sharp$ 处的完备化在 ´étale 局部同构于$\Lambda \otimes \mathcal{O}_{X_S}$ 在 $S^\sharp$处的完备化；二者都是带有辛配对的$\mathcal{O}_B \otimes \mathcal{O}_{X_S}$ 模。这表明上述同构层在´étale 局部平凡化。

最后，$\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}(S)$中的任意态射都会导出一个准同源 $A_1[p^\infty] \to A_2[p^\infty]$，进而导出一个带有 $\mathcal{O}_B$-结构和辛配对的有理晶体 Dieudonn´e 模的同构 $M_1[p^{-1}] \cong M_2[p^{-1}]$。这给出了相应 G-挠子的一个同构，并且一切关于 S都是函子的。□

我们有如下由 $G(\mathbb{A}_f^p)$ 在混合伊古萨堆系统 $\{\mathrm{Igs}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}^{p,\times}_F,f}$ 上给出的温和 Hecke 作用。具体而言，对于 $g \in G(\mathbb{A}_f^p)$，我们有同构

$$[g] : \mathrm{Igs}_\alpha^{\mathrm{pre}} \to \mathrm{Igs}_{\nu(g)\alpha}^{\mathrm{pre}},$$

它通过在模空间描述中的无限远离-p 层结构上作用给出。我们可以将其层化，从而得到一个同构

$$[g] : \mathrm{Igs}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathrm{Igs}_{\nu(g)\alpha}.$$

我们令 $G(\mathbb{Q}_p)$ 在 Igs_α 上平凡作用，以此扩展该作用，从而得到由 $G(\mathbb{A}_f)$ 在 $\{\mathrm{Igs}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}^{p,\times}_F,f}$ 上给出的完整 Hecke 作用.

根据构造，映射 $\pi_{HT} : \mathrm{Igs}_\alpha \to \mathrm{Bun}_G$ 是 Hecke 不变的，并且下图严格交换;

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\alpha^\circ & \xrightarrow{[g]} & \mathcal{X}_{\nu(g)\alpha}^\circ \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathrm{Igs}_\alpha & \xrightarrow[[g]]{} & \mathrm{Igs}_{\nu(g)\alpha} \end{array}$$

混合空间所需的纤维积的证明将紧密遵循 [Zha23 第 8 节2]中的论证。为此，我们需要以下两个预备引理。

引理 8.6 ([Zha23], 8.10)**.** 设 V 是一个分式域为 K 的赋值环，设A 是定义在 V 上的一個阿贝尔概形，其一般纤维为 A_K。假设 $j : G_K \hookrightarrow A_K$ 是一个有限子群概形。则存在 A 的一个有限子群概形 G，它在 V 上平坦，且其一般纤维与 G_K 一致。

证明。 我们回顾一下证明。由于映射 j 是拟紧的，我们可以令 $Z \subset A$ 为由拟凝聚理想 $\mathcal{I} := \ker(\mathcal{O}_A \to j_*\mathcal{O}_{G_K})$ 定义的闭子概形。记 $\mathcal{O}_Z$ 为商空间 $\mathcal{O}_A/\mathcal{I}$，并将其视为一个 $\mathcal{O}_A$-模。于是有

$$\mathcal{O}_A \twoheadrightarrow \mathcal{O}_Z \hookrightarrow j_*\mathcal{O}_{G_K}.$$

由于 $j_*\mathcal{O}_{G_K}$ 无挠， $\mathcal{O}_Z$ 在赋值环 V 上也无挠，因此是平坦的。

现在只需赋予 Z 一个与 A 上的群概形结构相容的群概形结构。记 $m : A \times_{\mathrm{Spec}\, V} A \to A$ 为 A 上的乘法。为了在 Z上定义乘法，注意到 $\mathcal{O}_Z(Z)$ 是赋值环 V 上有限生成的，因此它是一个有限投射 V-模，这意味着满射$\mathcal{O}_A \twoheadrightarrow \mathcal{O}_Z$ 可分裂为 V-模之间的映射。现在可以将乘法映射 m_Z^* 定义为以下映射的复合

$$\mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_A \xrightarrow{m_A^*} m_*\mathcal{O}_{A\times A} \to m_*\mathcal{O}_{Z\times Z}.$$

先验地，这只是一个 V-模的态射，但事实上它是一个 V-代数的同态。这是因为与单射 $\mathcal{O}_{Z\times Z} \hookrightarrow (j\times j)_*\mathcal{O}_{G_K\times G_K}$ 后合成后，映射 m_Z^* 与映射一致

$$\mathcal{O}_Z \hookrightarrow j_*\mathcal{O}_{G_K} \xrightarrow{m^*} (j\times j)_*\mathcal{O}_{G_K\times G_K},$$

这是一个 V-代数同态。它在 Z 上定义了乘法，并且显然也是 A 上乘法到 Z 的限制。

由于 A 上的逆映射保持 G_K，它也保持其概形像 Z；将其限制到 Z 上，即得到 Z 上的逆映射。

最后，由于 Z 在 V 上是适当的，恒等截面 $\operatorname{Spec} K \to G_K$ 延拓为截面 $\operatorname{Spec} V \to Z$，而根据唯一性，该截面必与 A 上的恒等截面相同。□

第二个引理是对 [Zha23, 引理 8.11] 的改编。

引理 8.7。设 S 是一个 $\mathcal{O}_E$-概形，且 $\mathcal{A} = (A, \iota_A, \lambda_A, \eta) \in \mathcal{M}(S)$。设 $\mathcal{H} = (\mathcal{H}/S, \iota_H, \lambda_H)$ 是 S 上带有 G-结构的 p-可除群。假设

$$\rho : \mathcal{A}[p^\infty] \to \mathcal{H}$$

是一个 $\mathcal{O}_B$-线性同源，将极化保持到 $F_p^\times(S)$ 中的一个标量倍。于是$A' := A$/核 ρ 可唯一提升为一个对象 $(A', \iota'_A, \lambda'_A, \eta') \in \mathcal{M}(S)$（即在 $\mathcal{M}(S)$ 的模空间描述中，在同构意义下唯一），使得诱导映射

$$\rho' : A'[p^\infty] \to \mathcal{H}$$

是带有 G-结构的 p-可除群的 $\mathcal{O}_p$-同构，并且商映射 $\pi : A \to A'$ 是 $\mathcal{O}_B$-线性的，保持无穷远处的 p -层结构，并且将极化保持到 $\mathbb{Z}^\times{}_{(p)} \prod_{\mathfrak{P}|p} x_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}}$（$S$）中的一个标量倍。

证明。由于 A' 是 p处对 A 的修改，A' 显然继承了来自 A的无穷远处的p -层结构。具体而言，商映射 $\pi : A \to A'$上的条件迫使 η' 为 η，同时也迫使我们定义 $\iota'_A := \pi\iota_A\pi^{-1}$。注意，按此定义的 ι'_A 确实取值于素数到p 的拟同源，因为在 p-可除群上，$\iota'_A(b)[p^\infty] = \iota_H(b)$是一个同构。

至于极化，根据 π 上的条件，我们必须对某个 $d \in \mathbb{Z}^\times{}_{(p)} \prod_{\mathfrak{P}|p} x_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}}(S)$定义 $\lambda'_A = (\pi^\vee)^{-1}(d\lambda_A)\pi$。假设$c \in F_p^\times(S)$是一个标量，使得

$$c\lambda_A[p^\infty] = \rho^\vee \lambda_H \rho,$$

那么 ρ' 在模去 $cd^{-1} \in F_p^\times(S)$ 的意义下保持极化。由于我们希望 ρ' 成为带有 G-结构的 p-可除群之间的一个$\mathcal{O}_p$-同构，因此需要要求 $cd^{-1} \in \mathcal{O}_p^\times(S)$；也就是说，对手所有位于 p 上方的素理想 $\mathfrak{P}$，都需要要求 $v_{\mathfrak{P}}(c) = v_{\mathfrak{P}}(d)$。这便唯一确定了 $d \in \mathbb{Z}^\times{}_{(p)} \prod_{\mathfrak{P}|p} x_{\mathfrak{P}}^{v_{\mathfrak{P}}(c)}(S)$，但在 $\mathbb{Z}^\times{}_{(p)}(S)$ 中相差一个标量，这正是所需的。□

注记 8.8。如果上述引理中的 ρ 只是一个准同源，那么我们可以假设对于某个足够大的 N，$p^N\rho$ 是一个实际等基。于是

$$\mathcal{A}' := (A/\ker(p^N\rho), \pi\iota_A\pi^{-1}, \pi^\vee d\lambda_A\pi, \overline{\eta}')$$

是 $\mathcal{M}_K(S)$ 的典范对象。

设 $F := \mathrm{Igs} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Gr}$。由于 v-层化与纤维积相容，因此不妨转而考虑群胚预层

$$F^{\mathrm{pre}} := \mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Gr}\,.$$

根据引理 8.2，F^{pre} 是 0-截断的。

引理 8.9。该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^{\circ,\mathrm{pre}} & \xrightarrow{\pi_{HT}} & \mathrm{Gr} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle BL} \\ \mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}} & \xrightarrow[\overline{\pi}_{HT}]{} & \mathrm{Bun}_G \end{array}$$

是 2-交换的。

证明。给定 $\mathcal{X}^{\circ,\mathrm{pre}}$ 的一个点 $(S^\sharp, \mathfrak{A}, \beta)$，令 $A = \mathfrak{A} \times_{R^{\sharp+}} R^+/\varpi$ 为 $\mathfrak{A}$ 模 ϖ 的约化。令 $\mathcal{G} = \mathfrak{A}[p^\infty]$。则 $\mathcal{G} \times_{R^{\sharp+}} R^+/\varpi = A[p^\infty]$。

沿图中的右上路径追踪，得到与以下对象相关联的 G-丛：

$$M_{\mathbb{\Delta}}(\mathcal{G}) \otimes_{W(R^+)} A_{\mathrm{cris}}(R^+/\varpi)$$

沿图中的左下路径追踪，得到与以下对象相关联的 G-丛：

$$M_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G} \times_{R^{\sharp+}} R^+/\varpi)$$

因此，借助棱柱（更具体地说，本例中的 Breuil-Kisin-Fargues 模）与晶体 Dieudonn´e 模之间的比较同构，便建立了 2-交换性，参见 [SW20, 17.5.2]。□

因此我们得到一个自然映射 $\mathcal{X}^{\circ,\ \mathrm{pre}} \to \mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Gr}$，我们希望证明它经过 v-层化后是一个等价。只需验证该映射在严格全不连通完美空间上的取值是双射，因为后者构成 Perf 上 v-拓扑的一个基。

假设 $S = \mathrm{Spa}(R,\ R^+)$ 是点的乘积，即 $R^+ = \prod_{i\in I} C_i^+$，其中每个$C_i^+$ 都是完备非阿基米德代数闭域C_i 的赋值子环（满足 $C_i^+ \subset \mathcal{O}_{C_i}$），其伪一致化元为 $\varpi_i \in C_i^+$。令 $\varpi = (\varpi_i)$，则$R = R^+[1/\varpi]$。我们用 k_i 表示 C_i的剩余域，并将 C_i^+ 在 k中的像记为 C_i^+。每当我们给 S上的态射添加下标时，都表示其沿 $\mathrm{Spa}(C_i,\ C_i^+) \to S$的限制。

命题 8.10。对于上述任意 S，自然映射

$$\mathcal{X}^{\circ,\mathrm{pre}}(S) \to F^{\mathrm{pre}}(S)$$

是一个双射，并且关于 S 是自然的。

证明。作为热身，我们先考虑单个几何点 $S = \mathrm{Spa}(C,\ C^+)$的情形，其中 $C^+ \subset \mathcal{O}_C$ 是一个有界赋值子环。设 k 为 C 的剩余域，并令 C^+ 表示 C^+ 在 k 中的像。

让我们展开说明 $(\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Gr})(C,\ C^+)$ 中的一个点是什么样的。Gr 的一个 $\mathrm{Spa}(C,\ C^+)$ 点等价于以下数据：在 E 上的 $(C^{\sharp_2},\ C^{\sharp_2+})$ 的一个去倾斜 $(C^{\sharp_2},\ C^{\sharp_2+})$，其中 $(C,\ C^+)$ 是其相应对象；以及 $\mathcal{O}_{C^{\sharp_2}}$ 上带有 G-层结构的一个 p-可除群 $\mathcal{H}$，并且配备了其 Tate 模的一个平凡化 α。其次，$\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}$ 的一个 $\mathrm{Spa}(C,\ C^+)$ 点由 $\mathcal{O}_E$ 上的 $(C,\ C^+)$ 的另一个去倾斜 $(C^{\sharp_1},\ C^{\sharp_1+})$，以及一个映射 $\mathrm{Spf}\ C^{\sharp_1+} \to \mathfrak{X}$ 给出。后一个数据等价于给出一个 $\mathfrak{A}$ 上的形式阿贝尔概形，带有G-层结构和无限素对-p 层结构。

固定一个足够小的伪一致化元 $\varpi \in C^+$，使得我们得到映射$C^{\sharp_1+} \twoheadrightarrow C^+/\varpi$ 和 $C^{\sharp_2+} \twoheadrightarrow C^+/\varpi$，并令 $\mathcal{A} = \mathfrak{A} \times_{C^{\sharp_1+}} C^+/\varpi$为一个带有 G-结构、在 C^+/ϖ上具有无限远离p 素数的级结构的阿贝尔概形。于是，Bun_G 上的相容性由一个 F_p-准同源的数据给出

$$\rho : \mathcal{A}[p^\infty] \times_{C^+/\varpi} \mathcal{O}_C/\varpi \to \mathcal{H} \times_{\mathcal{O}_{C^{\sharp_2}}} \mathcal{O}_C/\varpi,$$

这是由 $\mathscr{E}(\cdot)$在 $\mathcal{O}_C/\varpi$上的 p-可除群上全忠实性所致。现在我们固定这样一组数据。

从这里开始，论证与 [Zha23], 中的完全相同；不过，为了方便读者，我们将结合相应的调整（尤其是引理 8.7 的调整）重述一遍。

我们可以假设，对于某个整数 n，$p^n\rho$ 是实际同源（但仍只在 $F_p^\times$ 中将极化保持到一个标量倍数）。对赋值环 $C^+ \subset k$（其分式域为 k）、阿贝尔概形 $\mathcal{B} := \mathcal{A} \times_{C^+/\varpi} C^+$ 以及有限群概形 $\ker(p^n\rho_k)$ 应用引理 8.6，其中 ρ_k 是 ρ 到 k 的基变换。它

表明，$\ker(p^n\rho_k)$ 在 $\mathcal{B}$ 中的闭包是一个有限平坦群概形。我们可以对其取商空间，从而得到一个新的阿贝尔概形 $\mathcal{B}'$；根据引理 8.7，可以唯一地（在 $\mathcal{M}(C^+)$ 中）赋予它一个 G-结构和无限的远离-p层结构。注意，我们并不完全处于引理 8.7 的设定中，因为 ρ_k 只在 k 上定义，而不在 C^+ 上定义；但由于 $k = \mathrm{Frac}(C^+)$，这足以确定极化构造中的常数。此外，引理 8.7 给出了一个 $\mathcal{O}_p$-同构 $\mathcal{B}'[p^\infty]_k \cong \mathcal{H}_k$，而商映射 $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ 将极化保持到 $\mathbb{Z}^\times_{(p)} \prod_{\mathfrak{P}\mid p} x_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}}$ 中的一个因子倍数。

接下来，我们可以利用 Milnor 方形

$$\begin{array}{ccc} C^{\sharp_2+} & \longrightarrow & \overline{C^+} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{C^{\sharp_2}} & \twoheadrightarrow & k \end{array}$$

以及命题 5.13，将 $\mathcal{B}'[p^\infty]$ 和 $\mathcal{H}$ 粘合起来，得到一个带有 G-结构的 p-可除群 $\mathcal{G}$，其定义在 $C^{\sharp_2+}$上，并带有一个平凡化 $\psi : T_p\mathcal{G} \cong T_p\mathcal{H} \cong \Lambda$。此外，利用 Milnor 方形

$$\begin{array}{ccc} C^+/\varpi \cdot \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \overline{C^+} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_C/\varpi & \twoheadrightarrow & k \end{array}$$

并应用命题 5.13 的全忠实性于这些同源

$$p^n\rho : \mathcal{A}[p^\infty] \times_{C^+/\varpi} \mathcal{O}_C/\varpi \to \mathcal{H} \times_{\mathcal{O}_{C^{\sharp_2}}} \mathcal{O}_C/\varpi$$

and

$$\mathcal{B}[p^\infty] = \mathcal{A}[p^\infty] \times_{C^+/\varpi} \overline{C^+} \to \mathcal{B}'[p^\infty],$$

我们得到一个同源

$$\mathcal{A}[p^\infty] \times_{C^+/\varpi} (C^+/\varpi \cdot \mathcal{O}_C) \to \mathcal{G} \times_{C^{\sharp_2+}} (C^+/\varpi \cdot \mathcal{O}_C).$$

它保持极化，差一个 $F_p^\times$ 中的因子。根据 Serre-Tate 提升（见定理 5.22），这可提升为一个同源

$$\mathcal{A}[p^\infty] \to \mathcal{G} \times_{C^{\sharp_2+}} C^+/\varpi,$$

再次保持极化在 $F_p^\times$ 中相差一个因子。将该同源与 p^{-n} 相乘，可得到一个不依赖于 n 选择的 F_p-准同源。

此时，我们回到一般情形，其中 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是点 $s_i = \mathrm{Spa}(C_i, C_i^+)$ 的乘积（指标集 $i \in I$ 任意）。给定一个 $\mathrm{Igs} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Gr}$ 的 S-点

$$((R^{\sharp_1}, R^{\sharp_1+}), \mathfrak{A}, (R^{\sharp_2}, R^{\sharp_2+}), y, \phi : \mathscr{E}(\mathcal{A}) \cong \mathscr{E}(y)),$$

如前所述，取一个足够小的一致化元 $\varpi \in R^+$，并令 $\mathcal{A} = \mathfrak{A} \times_{R^{\sharp_1+}} R^+/\varpi$。对于每个 $i \in I$，我们都可以将这个 S-点拉回到一个 s_i-点，并像单个几何点的情形那样继续进行。

这样，对于每个 $i \in I$，我们得到一个带有 G-结构、定义在 $C_i^{\sharp_2+}$ 上的 p-可除群 $\mathcal{G}_i$，一个平凡化 $\psi_i : T_p\mathcal{G}_i \cong \Lambda$，以及一个 F_p-准同源

$$\rho_i : \mathcal{A}[p^\infty] \times_{R^+/\varpi} C_i^+/\varpi_i \longrightarrow \mathcal{G}_i \times_{C_i^{\sharp_2+}} C_i^+/\varpi_i,$$

使得对于所有 $i \in I$、p^{n_i}，当某个整数 n_i 存在时，p^{n_i} 是实际等基。

取乘积 $\mathcal{G} := \prod_{i\in I} \mathcal{G}_i$。根据推论 5.15，它是一个带有 G-结构、定义在 $R^{\sharp_2+}$ 上的 p- 可除群。此外，还存在唯一的平凡化 $\psi : T_p\mathcal{G} \cong \Lambda$，使其

限制到 ψ_i；由 $[*/K_{hs}] \to *$ 的对角态射的适当性可知，参见 [Zha23, 2.18]。令 $\mathcal{G}_0 := \mathcal{G} \times_{R^{\sharp_2+}} R^+/\varpi$。

接下来，我们回顾 [Zha23, 8.14] 中如何证明整数 n_i 可以由一个充分大的整数 $N \gg 0$ 作为上界。这相当于证明存在一个统一的上界 $N \gg 0$，使得 $p^N\phi_i$ 都是实际的同源。首先，通过将其棱柱 Dieudonn´e 模$M_{\mathbb{\Delta}}(\mathcal{G})$ 张量到 $B^+_{\mathrm{dR}}(R^{\sharp_2})$ 上，并将其与

$$T_p\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_p} B^+_{\mathrm{dR}}(R^{\sharp_2}) \overset{\psi\otimes\mathrm{id}}{\simeq} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} B^+_{\mathrm{dR}}(R^{\sharp_2}),$$

由此得到 Spec$(B^+_{\mathrm{dR}}(R^{\sharp_2}))$ 上的一个 G-挠子，它在 $B_{\mathrm{dR}}(R^{\sharp_2})$ 上由晶体—德拉姆比较平凡化。这个 S-点限制到每个 s_i 上时，都与我们的原始点$y \in$Gr(S) 一致。因此，由于 Gr 的适当性，这两个 S-点整体上一致。特别地， G-丛 $\mathscr{E}(\mathcal{G}) := \mathscr{E}(\mathcal{G}_0)$ 和 $\mathscr{E}(y)$ 同构，因此同构 $\phi\colon \mathscr{E}(\mathcal{A}[p^\infty]) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}(y)$ 也可视为同构 $\phi\colon \mathscr{E}(\mathcal{A}[p^\infty]) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}(\mathcal{G})$。令 (M, φ_M) 和 $(M', \varphi_{M'})$ 分别表示 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{G}$ 的晶体 Dieudonn´e 模，则有如下图表

$$\begin{array}{ccc}
(M^\vee \otimes M')^{\varphi\otimes\varphi'=1} & \hookrightarrow & (M^\vee \otimes M'[\frac{1}{p}])^{\varphi\otimes\varphi'=1} \\
\downarrow\sim & & \downarrow\sim \\
\mathrm{Hom}(\mathcal{A}[p^\infty], \mathcal{G}_0) & \xrightarrow{\mathscr{E}(\cdot)} & \mathrm{Hom}(\mathscr{E}(\mathcal{A}[p^\infty]), \mathscr{E}(\mathcal{G})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\prod_i \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_i[p^\infty], \mathcal{G}_{0,i})[\frac{1}{p}] & \xrightarrow{\mathscr{E}(\cdot)\sim} & \prod_i \mathrm{Hom}(\mathscr{E}(\mathcal{A}_i[p^\infty]), \mathscr{E}(\mathcal{G}_i))
\end{array}$$

这清楚地表明，对于足够大的 $N \gg 0$, $p^N\phi \in$ Hom$(\mathscr{E}(\mathcal{A}[p^\infty]), \mathscr{E}(\mathcal{G}))$ 属于 $\mathscr{E}(\cdot)$ 的像。因此， $p^N(\phi_i)_{i\in I}$ 也属于 $\mathscr{E}(\cdot)$ 的像。 N由此给出了所需的上界。

取积后，我们得到一个 F_p-准同源

$$\rho = p^{-N} \prod_i p^N \rho_i : \mathcal{A}[p^\infty] \longrightarrow \mathcal{G}_0$$

使得 $\mathscr{E}(\rho)$ 与 ϕ 相对应。

利用引理 8.7（更确切地说，是其后的注记），我们可以通过 ρ 修改 $\mathcal{A}$： 它给出一个四元组 $\mathcal{A}' = (A', \iota', \lambda', \eta')$（在 $\mathcal{M}(R^+/\varpi)$ 中在同构意义下唯一），使得诱导映射 $\rho' : \mathcal{A}'_0[p^\infty] \to \mathcal{G}_0$ 是一个 $\mathcal{O}_p$-同构。此外，一旦证明 $\mathcal{A}'$ 可以提升为定义在 $R^{\sharp_2+}$ 上的形式阿贝尔概形，商映射 $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 就会定义一个 Igs 中的同构。

为了进行提升，将 $\mathcal{G}$ 的极化乘以 $\mathcal{O}_p^\times(S)$ 中的一个标量进行修改，使得 ρ'严格保持这些极化。因此，由 Serre-Tate 定理 5.22，三元组 $(\mathcal{A}', \mathcal{G}, \rho')$ 导出一个形式阿贝尔概形 $\mathfrak{A}'$，定义在 Spf $R^{\sharp_2+}$ 上，并带有 G-结构以及远离 p 的无限层（因为我们只在 p 处修改了 $\mathcal{A}$）。此外，其 p-可除群 $\mathfrak{A}'[p^\infty]$ 与 $\mathcal{G}$ 一致，因此 $\psi\colon T_p\mathfrak{A}'_\eta = T_p\mathcal{G} \cong \Lambda$ 给出 p 处的无限层。□

推论 8.11. 该图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{X}^\circ & \xrightarrow{\pi_{HT}} & \mathrm{Gr} \\
{\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle BL} \\
\mathrm{Igs} & \xrightarrow[\overline{\pi}_{HT}]{} & \mathrm{Bun}_G
\end{array}$$

是笛卡尔的。

8.2. **阿贝尔型伊古萨堆**。 现在我们想为我们的阿贝尔型志村簇构造伊古萨堆。

首先，我们注意到，在预层上存在一个定义良好的极化作用

$$S \mapsto \mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}(S)/\cong$$

在 Perf 上。具体而言，给定 $\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}(S)$ 中的一个点 $(S^\sharp, \mathfrak{A})$，我们可以将 $\mathfrak{A}$ 实现为一列形式阿贝尔概形的逆极限，它们带有 G-结构和不断提高的温和层结构。在层级 $K_{hs}K^p$，阿贝尔概形上的极化作用通过有限群 $\Delta(K_{hs}K^p)$ 分解。因此，在极限中，我们得到仿紧群的一个极化作用

$$\Delta_{hs} := \varprojlim_{K^p} \Delta(K_{hs}K^p),$$

经过 v-层化后，我们便得到同一个仿紧群在 v-层 Igs 上的作用。沿着显然的商映射 $\Delta \twoheadrightarrow \Delta_{hs}$ 拉回后，我们还得到完整仿紧群 Δ在 Igs 上的作用。

这些考量引导我们如下定义我们所研究的阿贝尔型志村簇的（无限层）伊古萨堆。

定义 8.12. 阿贝尔型伊古萨堆 是 v-堆范畴中的商堆

$$\mathrm{Igs}_G := [\mathrm{Igs}\,/\underline{\Delta}]$$

接下来的两个简单引理给出了从 Igs_G 出发和到达 Igs_G 所需的映射。

引理 8.13. 先前构造的映射 $\pi_{HT}\colon \mathrm{Igs} \to \mathrm{Bun}_G$ 可经由由 Δ 给出的极化作用分解。

证明。 只需检验 $\pi_{HT}\colon \mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}} \to \mathrm{Bun}_G$ 关于 Δ_{hs} 的作用是不变的。根据 π_{HT} 的构造可以立即看出，用全正单位改变极化，会使向量丛 $\mathscr{E}(A)$ 的辛配对乘以同一个全正单位，但这不会改变相应 G-丛的同构类。□

引理 8.14. 映射 $q\colon \mathcal{X}^\circ \to \mathrm{Igs}$ 诱导出映射 $q\colon \mathcal{X}^\circ_G \to \mathrm{Igs}_G$。

证明。 只需证明 $q\colon \mathcal{X}^{\circ,\mathrm{pre}} \to \mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}$ 关于 Δ 的作用是等变的，而这是显然的。□

既然艰苦的工作已经完成，我们现在可以为我们的阿贝尔型志村簇证明有理纤维积猜想。

推论 8.15. 该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^\circ_G & \xrightarrow{\pi_{HT}} & \mathrm{Gr} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle BL} \\ \mathrm{Igs}_G & \xrightarrow[\overline{\pi}_{HT}]{} & \mathrm{Bun}_G \end{array}$$

是笛卡尔的。

证明。 考虑以下 2-交换图的复合

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}^\circ & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{X}^\circ_G & \xrightarrow{\pi_{HT}} & \mathrm{Gr} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle BL} \\ \mathrm{Igs} & \xrightarrow[\Delta]{} & \mathrm{Igs}_G & \xrightarrow[\overline{\pi}_{HT}]{} & \mathrm{Bun}_G \end{array}$$

根据推论 8.11，整个图表是笛卡尔的，且左侧方框由两个关于同一有限群 Δ 的 v-扭子映射组成（对于映射

$\mathcal{X}^\circ \to \mathcal{X}^\circ_G$，这就是引理 4.9）。因此，右侧方框也必定是笛卡尔的。□

由于 $G(\mathbb{A}_f)$ 在 $\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}}$ 上的黑克作用显然与 Δ 的极化作用相交换，我们得到 Igs_G 上诱导的海克作用。此外，$G(\mathbb{A}_f^p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ 在 $\mathrm{Igs}^{\mathrm{pre}} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Gr}$ 上的黑克作用显然恢复了 $\mathcal{X}^{\circ,\,\mathrm{pre}}$ 上的黑克作用，因此在将同构层化后

$$\mathcal{X}^\circ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Igs} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Gr}$$

是海克等变的。这也表明同构

$$\mathcal{X}^\circ_G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Igs}_G \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Gr}$$

是海克等变的。

因此，定义 1.2 的第一条公理得以满足。根据 [Kim25]的工作，我们立即得到伊古萨堆 Igs_G的唯一性。特别是，这表明我们先前为 F中每个位于 p 之上的素理想 $\mathfrak{P}$ 所选取的全正一致化子 $x_{\mathfrak{P}}$ 实际上只是辅助选择；事后看来，我们构造的 Igs_G 并不依赖于这一选择。我们指出，Igs 以及 Igs_G 也满足定义 1.2 中的第二条公理，证明方法与 [DHKZ24, 5.2.15]完全相同。

References

[AGLR22] J. Ansch¨utz, I. Gleason, J. Lourenco, T. Richartz. 关于局部模型的 p 进理论。预印本, *arXiv:2201.01234* , 2022。[AB23] J. Ansch¨utz, A.-C. Le Bras. 棱柱 Dieudonn´e 理论。 *Forum of Mathematics, Pi3*, *11 E2* 2023 , , 。[BMS18] B. Bhatt, M. Morrow, P. Scholze. 整数 p-adic 霍奇理论。 *Publ. Math. de l'IHÉS*, *128:219-397* 2018 , 。[BS22] B. Bhatt, P. Scholze. 棱柱与棱柱上同调。 *Ann. of Math. 196(3): 1135-1275* 2022 , 。[CS17] A. Caraiani, P. Scholze. 紧酉志村簇上同调的一般部分。 *Ann. of Math.*, *186(3):649–766*, 2017。[CS24] A. Caraiani, P. Scholze. 非紧酉志村簇上同调的一般部分。 *Ann. of Math. 199(2):483–590*, 2024。[CT23] A. Caraiani, M. Tamiozzo. 带挠系数的希尔伯特模簇的 ´etale 上同调。 *Comp. Math. 159(11):2279-2325*, 2023。[Del71] P. Deligne. 《志村的工作》。 *Séminaire N. Bourbaki, exp.n 389:123–165*, 1971。[Del79] P. Deligne. 志村簇：模解释与典范模型的构造技术，载于：《自守形式、表示与 L-函数》。*Proc. Sympos. Pure Math, 247–289*, 1979。[DHKZ24] P. Daniels, P. van Hoften, D. Kim, M. Zhang. 伊古萨堆与志村簇的上同调。预印本, *arXiv:2408.01348*, 2024。[Far19] L. Fargues. 刚性解析可除群。 *Math. Ann. 374(3):723-791*, 2019。[FF18] L. Fargues, J.-M. Fontaine, 霍奇 p-adic 理论中的曲线与向量丛。*Astérisque 406:1-382*, 2018。[FS21] L. Fargues, P. Scholze. 局部朗兰兹对应的几何化。预印本, *http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Geometrization.pdf*, 2021。[Ked19] K. Kedlaya. 层、堆与施塔卡。*2017 Arizona Winter School* 2019 , 。[Kim25] D. Kim. 伊古萨堆的唯一性与函子性。预印本, *arXiv:2504.15542*, 2025[KL15] K. Kedlaya, R. Liu. 相对 p-adic 霍奇理论：基础。 *Astérisque*, *371:1–239* 2015 , 。[Kot92] R. E. Kottwitz. 有限域上某些志村簇的点。 *Journal of the AMS 5(2):373–444* 1992 , 。[Mil17] J.S. Milne. 志村簇导论。 *Online Notes available at https://www.jmilne.org/math/xnotes/svi.pdf* 2017 , , 。[Nek18] J. Nekov´aˇr. 艾希勒-志村关系与四元数 Shimura 簇 étale 上同调的半单性。 *Ann. scient. de l'école normale supérieure, Serie 4*, *51(5):1179-1252* 2018 , 。[Sch22] P. Scholze. 钻石空间的 étale 上同调。预印本, *https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/EtCohDiamonds.pdf* 2022 , 即将发表于《Astérisque》, 。[SW13] P. Scholze, J. Weinstein. p-可除群的模空间。 *Camb. J. Math.*, *1(2):145–237*, 2013。[SW20] P. Scholze, J. Weinstein. 伯克利 p -adic 几何讲义。 *Princeton University Press* 2020 , 。[Sta25]《Stacks Project》作者。《Stacks Project》。 *https://stacks.math.columbia.edu/*, 2025。[Tay03] R. Taylor. 关于二十面体阿廷表示 II, 《美国数学杂志》125 566, 2003 3 549( ): – 。[Zha23] M. Zhang. 一个 PEL 型伊古萨堆与志村簇的 p-adic 几何。博士论文, *arXiv:2309.05152*, 2023。