arXiv:2601.07390v1 [math.RT] 12 Jan 2026

A 型几何 Satake 等价的相干版本

SHIYIXIN LIANG

摘要。本文证明了 [CW23, Conj. 1.7] 针对 A 型提出的几何 Satake 等价的相干版本。Cautis-Williams 在其工作 [CW23], 中研究了经典极限 Satake 范畴的一个阿贝尔版本，即伴随表示的范畴化库仑分支的 Koszul perversity 心。本文研究由一组简单对象生成的子范畴。我们赋予该子范畴中性 Tannakian 结构，并将其与朗兰兹对偶群 $\check{G}$ 的有限维表示范畴 Rep($\check{G}$) 识别。我们的方法使用了 Cautis-Williams 理论 [CW19, C W23, CW24, CW25] 中的工具，以及 [Xin25] 中关于微分层的相干 IC 延拓的霍奇模描述。

目录

1. 引言 2 1.1. 经典极限问题概述 2 1.2. Cautis-Williams 提出的阿贝尔版本 3 1.3. 主要定理 3 1.4. 证明策略 3 1.5. 后续方向 5 1.6. 论文结构 5 1.7. 记号与约定 6 1.8. 致谢 8 2. Cautis-Williams 理论中的代数几何背景 8 2.1. Ind-几何导出栈 8 2.2. 凝聚层理论 10 2.3. 其他一些函子 13 3. 范畴化库仑支 14 3.1. 仿射格拉斯曼与三元组空间 15 3.2. 卷积 17 3.3. Koszul 周 pervers t-结构 20 3.4. 重整化 r-矩阵 27 4. 全子范畴 $\mathrm{KP}_0 \subset \mathrm{KP}^{G\mathcal{O}}$相干($\mathcal{R}_{G,\ \mathfrak{g}}$) 31 4.1. KP 中对偶的计算 $_0$ 325. 在 K-群层面确定 KP_0 34 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$5.1. 环同态 $\Xi := \sigma_1^* i_{1*}\colon K^{G\mathcal{O}}(\mathcal{R}_{G,\ N}) \to K^{G\mathcal{O}}$(格拉斯曼量$_G$) 35 5.2. $\Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda},\ \mu})$ 的计算 36 $\widetilde{\ }$5.3. $\Xi[\mathcal{L}_{\check{\lambda}}] \boxtimes \Xi[\mathcal{L}_{\check{\mu}}]$ 39 的计算 5.4. 霍奇模理论提供的工具 42 5.5. 定理 5.0.1 的证明收尾 45 6. KP $_0$ 45 上的 Tannakian 结构 6.1. KP_0 45 的交换约束 6.2. 纤维函子的构造 $\mathbf{F}\colon \mathrm{KP}_0 \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ 466.3. 定理 6.0.1 的证明 52 附录 A. 霍奇模与伴随分次构造 53

日期：2026年1月13日。

A.1. 霍奇模范畴 A.2. 分次德拉姆函子 A.3. 等变霍奇模与弱等变分次德拉姆函子 53
A.4. Hodge 模 Satake 范畴 参考文献 55
58
61
61

1. 引言

1.1. 经典极限问题概述。 设 G 是定义在$\mathbb{C}$ 上的连通约化代数群，$\check{}G$ 是其定义在 $\mathbb{C}$上的朗兹兰兹对偶群；分别以 $\mathfrak{g}$ 和 $\check{}\mathfrak{g}$ 表示它们的李代数。设 $\mathcal{O} := \mathbb{C}[[t]]$,$\mathcal{K} = \mathbb{C}((t))$。分别记 $G_{\mathcal{K}}$ 和 $G_{\mathcal{O}}$ 为环群和正环群。著名的几何 Satake 等价指出，存在以下幺半阿贝尔范畴之间的等价：

$$\mathrm{Perv}(G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}},\mathbb{C}) \cong \mathrm{Rep}(\check{G}).$$

Perv($G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}},\mathbb{C}$)称为萨特克范畴，它是商栈 $[G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}]$上（以$\mathbb{C}$为系数的）可构造反常层组成的阿贝尔范畴，并配备由卷积乘积给出的幺半结构；Rep($\check{}G$)表示 $\check{}$ G的有限维表示所组成的阿贝尔范畴，并配备由张量积给出的幺半结构。

利用黎曼–希尔伯特对应，可以从余 perverse 层转到 $\mathcal{D}$-模，并将萨特克范畴视为 $[G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}]$ 上（正则）全纯 $\mathcal{D}$-模的阿贝尔范畴，记作 $\mathcal{D}_{\mathrm{hol}}$($G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}$)。量子化原理表明，研究余切栈上的（拟／归纳）相干层范畴颇有意义

$$\mathrm{T}^*[G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}],$$

并将其与萨特克范畴进行比较。

这里，$\mathrm{T}^*[G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}]$ 的定义较为微妙，这是因为环群具有无限性： $G_{\mathcal{O}}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的无限型概形，而 $G_{\mathcal{K}}$ 是无限型的归纳概形。因此，我们按照下述步骤来定义这个余切栈，遵循 [BFM05，第 7] 节；这一构造是有限斯坦伯格栈的仿射类比（例如参见 [CG10，第 3] 章）。记 $\mathcal{T}_{G,\,\mathfrak{g}} := G_{\mathcal{K}} \times^{G_{\mathcal{O}}} \mathfrak{g}_{\mathcal{O}},$ ，并将其视为仿射格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_G := G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}$ 的余切丛的定义。现在，我们针对 Gr_G 上的左 $G_{\mathcal{O}}$-作用进行哈密顿约化。定义 $\mathcal{R}_{G,\,\mathfrak{g}}$ 为下述**导出**纤维积

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}_{G,\mathfrak{g}} & \xrightarrow{[g,x]\mapsto[\mathrm{Ad}_g(x)]} & \mathfrak{g}_{\mathcal{K}}/\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}; \end{array} \tag{1.1.1}$$

更多详情请参见第 3.1.2 节。随后，我们将 $[G_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}]$ 称为 $\mathrm{T}^*[G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}]$ 的定义。

在 Cautis 和 Williams 的一系列工作 [CW23、CW24、CW25] 中，他们系统地研究了 $[G_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}]$ 的几何，并在其上发展了相干层理论；具体而言，他们定义了稳定∞-范畴 Coh($[G_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}]$)，它在特定情形 $(G,N) = (G,\mathfrak{g})$ 下充当范畴化库仑分支（按 [BFN18], 的意义）。我们将其记作 $\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\,\mathfrak{g}})$。它具有由卷积乘积给出的幺结构。其 K-群 $K^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\,\mathfrak{g}})$ 已在 [BFM05，定理 7.3] 中计算：固定一个极大环面 $T \subset G$，并令 $\check{}\,T \subset \check{}G$ 为其对偶环面，则 $K^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\,\mathfrak{g}})$ 可与 $\mathbb{C}[T \times \check{}T]^W$ 识别。因此，显然的对称性 $\mathbb{C}[T \times \check{}T]^W \cong \mathbb{C}[\check{}T \times T]^W$ 给出同构

$$K^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}) \cong K^{\check{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{\check{G},\check{\mathfrak{g}}}), \tag{1.1.2}$$

由此得到 [BFM05] 中的以下猜想：

猜想 1.1.1 ([BFM05, 猜想 7.9])**.** 同构 (1.1.2) 可提升为单幺半（稳定 *1*-）范畴之间的等价 [1]

$$\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}) \cong \mathsf{Coh}^{\check{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{\check{G},\check{\mathfrak{g}}}).$$

如同上所述，这一猜想应被视为几何朗兰兹对应的一种经典的局部体现。

1.2. **Cautis-Williams 提出的阿贝尔版本**。 接下来，我们将进一步介绍 Cautis-Williams 理论。定义

$$\widehat{G}_{\mathcal{O}} := (G_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}) \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}},$$

它作用于图（1.1.1）中涉及的空间。其中， $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$是通过旋转环变量 $t \in \mathbb{C}((t))$而作用的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ ，而 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$是通过对 $\mathfrak{g}$进行缩放而作用的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 。它们在本文中发挥着重要作用，见注 3.1.2。 [CW23] 考察了 $\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}) := \mathsf{Coh}([\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}])$，并在 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}})$ 上定义了一种有限长度 t-结构，称为 Koszul perverse t-结构。该 t-结构结合了 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量$_G$) 上的（中间）反常相干 t-结构（[AB10]）与 $\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}} \to$ 格拉斯曼量$_G$ 每个纤维上的 Koszul t-结构。我们将此 t-结构的心记为 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}\mathrm{coh}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}})$[2]。这是一个有限长度刚性幺半阿贝尔范畴。令 W 为韦尔群， P （分别为 $\check{}P$）为 T的特征（分别为余特征）格；固定一个 Borel 子群 $B \subset G$，并将 P_+ （分别为 $\check{}\ P_+$）的支配部分记为 P （分别为 $\check{}P$）。于是，$\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}\mathrm{coh}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}})$ 的简单对象（模分次平移）与 $(\check{}P \times P)/W$ 一一对应。我们将固定适当的分次平移规范化（详见第 3.3.4 节），并将由 $(\check{}\lambda, \mu)$ 标记的简单对象记为 $\mathcal{L}_{\check{\lambda},\mu}$。

[CW23] 提出了猜想 1.1.1 的一个阿贝尔版本。

猜想 1.2.1 ([CW23, 猜想 1.6])。 存在一个幺半等价 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\text{相干}}(\mathcal{R}_{G,\ \mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\text{相干}}(\mathcal{R}_{\check{G},\ \check{\mathfrak{g}}})$。两边简单对象之间所诱导的双射与它们由 $(\check{}P \times P)/W$ 给出的标记相容。

这一猜想 还特别推出了几何 Satake 等价的以下相干版本 e.

猜想 1.2.2 ([CW23, 猜想 1.7])。 存在一个幺半函子 $\mathrm{Rep}(\check{}G) \to \mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\text{相干}}(\mathcal{R}_{G,\ \mathfrak{g}})$ ，它将最高权为 $\check{}\lambda$ 的不可约 $\check{}G$-表示映到由 $(\check{}\lambda, 0)$ *2* $\check{}P \times P$ 标记的简单对象。

1.3. **主要定理**。 本文的主要定理证明了 G 为 A 型时的猜想 1.2.2。令 KP_0 为 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\ \mathfrak{g}})$ 的全子范畴，它由简单对象 $\mathcal{L}_{\check{\lambda},\ 0}$ （对所有 $\check{}\ \lambda \in \check{}P_+$ ）在直和、卷积、子商以及（右和左）对偶运算下生成（定义 4.0.1）。

定理 1.3.1 （定理 6.0.1）。 假设 G 为 *A* 型。那么范畴 KP_0 具有中性 *Tannakian* 结构（根据 [DM82] 的定义），并且作为 $\mathbb{C}$上的中性 *Tannakian* 范畴，与 $\mathrm{Rep}(\check{}G)$ 等价。

假设 G 为 A 型的原因将在第 1.4.2 节中讨论。

1.4. **证明策略**。

1.4.1. 主要定理 1.3.1 的证明大致分为两个步骤:

(1) 我们在 K-群层面证明所需的结果。

(2) 我们为 KP_0 赋予中性 Tannakian 结构。然后，我们将 Tannakian 群识别为 $\check{}G$。

第一步概括为以下定理（它与命题 4.1.1+定理 5.0.1 相同）。

定理 1.4.1。 假设 G 是 *A* 型。

[1] [BFM05] 中的原始猜想考虑了一个略有不同但具有相同 K-群的范畴。具体而言，他们考虑了 $G_{\mathcal{O}}$-等变相干层在 $\mathcal{T}_{G,\mathfrak{g}}$ 上的导出范畴的满（三角）子范畴，其中包含的对象的支撑都包含在 $\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}$ 的经典轨迹中；$\check{}G$ 一侧采用了类似的范畴。[2] 在 [CW23] 中，这个范畴记作 $\mathcal{KP}_{G,\mathfrak{g}}$

(1) $\mathcal{L}_{\check{\lambda},\,0}$ 的左对偶和右对偶都同构于 $\mathcal{L}_{-w_0(\check{}\lambda),\,0}$。

(2) 在 K-群 $K(\mathrm{KP}_0) \subset K^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\,\mathfrak{g}})$中，我们有以下恒等式：

$$[\mathcal{L}_{\check{\lambda},0}] * [\mathcal{L}_{\check{\mu},0}] = \sum_{\check{\nu}\in\check{P}_+} c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\check{\mu}} [\mathcal{L}_{\check{\nu},0}].$$

这里，$c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\,\check{\mu}}$ 是$\mathrm{Rep}(\check{}G)$中张量积的结构系数，参见 *3.0.1*。

根据KP_0，的定义，这两个结果意味着KP_0 中的简单对象恰好是那些 $\mathcal{L}_{\check{\lambda},\,0}$ 对于$\check{}\quad\check{}\lambda \in P_+$。

对于第二步，我们首先使用在 [CW23 第 7] 节中构造的重整化 r-矩阵，在 KP_0 中给出一组交换约束。然后我们按如下方式构造纤维函子。考虑态射 $i_1 : \mathcal{R}_{G,\,\mathfrak{g}} \to$ 格拉斯曼量$_G \times \mathfrak{g}_{\mathcal{O}}, [g,x] \mapsto ([g], \mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}(x))$，以及 $\sigma_1 :$ 格拉斯曼量$_G \to$ 格拉斯曼量$_G \times \mathfrak{g}_{\mathcal{O}}, [g] \mapsto ([g], 0)$。定义

$$\Xi := \sigma_1^* i_{1*} : \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}) \to \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G).$$

根据 [CW23 定理 4.1]，中 Koszul 周 pervers t-结构的构造，该函子是 Koszul 反常 t-正合的。因此它诱导出一个函子

$$\Xi : \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}) \to \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_G).$$

定理 1.4.2 (推论 6.2.1，定理 6.2.1)。 假设 G 是 *A* 型。考虑函子的复合

$$\mathrm{KP}_0 \subset \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\Xi} \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_G) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{pt}) \xrightarrow{\mathcal{H}^i} \mathrm{Rep}(\widehat{G}_{\mathcal{O}}) \xrightarrow{\mathrm{For}} \mathrm{Vect}.$$

将其记为 $\mathbf{F}^i$。

(1) 当 $i \neq 0$ 时，函子 $\mathbf{F}^i$ 是 0；*(2)* 当 $i = 0$ 时，$\mathbf{F}^i$ 可赋予纤维函子结构，从而在 KP_0 上给出中性 *Tannakian* 结构。

$\check{}$ 最后，我们利用 K-群层面的结果以及[KLV14，定理 1.2] 中的技巧，将 Tannakian 群识别为 G 。

1.4.2. 霍奇模理论。 霍奇模理论在证明中发挥着重要作用。原因如下。利用 $\mathcal{L}_{\check{\lambda},0}$ ($\check{}\lambda \in \check{}P_+$) 的刻画，我们可以推导出（见推论 5.2.2）：

$$\Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda},0}) \cong \bigoplus_{0\le k\le d_{\check{\lambda}}} \mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}})\langle k - \tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle[k].$$

这里， $\mathcal{IC}$ 是定义 3.3.4 中的相干 IC 延拓；$\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}} \subset \mathrm{Gr}_G$ 是对应于 $\check{}\lambda$的球面舒伯特胞腔，其维数为 $d_{\check{\lambda}}$，而 $\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}$ 是相对于 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$的第 k 个微分层； $\langle - \rangle$ 是由 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-等变性导致的分次平移（定义 3.1.3）， $[-]$ 则是上同调分次平移。

关键在于，我们可以利用霍奇模理论来描述 $\mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}})$。在 Saito 的霍奇模理论中，$\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$上存在一个权为 $d_{\check{\lambda}}$ 的（可极化）纯霍奇模，称为 IC 霍奇模 $\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}{}_{\check{\lambda}}$。考虑分次德拉姆复形 $\mathrm{gr}_p\,\mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}{}_{\check{\lambda}}), p \in \mathbb{Z}$，它是一个相干层复形；更多详情见附录 A.2。事实上，我们需要使用附录 A.3 中构造的分次德拉姆函子的（弱）等变版本，并得到一个对象 $\mathrm{gr}_p\,\mathrm{DR}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}{}_{\check{\lambda}}) \in \mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{\check{}\lambda})$。

—

命题 1.4 $\check{}$**.1** (推论 5.4.1)**.** 假设 G 是 *A* 型。在 $\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量$_{\check{}\lambda}$ 中存在一个同构 $\overline{\quad}$)*:*

$$\mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}) \cong \mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda}})[k - d_{\check{\lambda}}]. \tag{1.4.1}$$

该描述使用了 [Xin25] 中的以下结果。

定理 1.4.3 ([Xin25，定理 5。4])。 设 X 是一个维数为 $2n$、具有辛解消的辛奇点。则有以下不等式

$$\operatorname{codim}\operatorname{Supp}\mathcal{H}^i\left(\mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}(\mathbf{IC}_X^{\mathrm{Hg}})[k-2n]\right)\geq 2i+2\quad \textit{for any } i\geq 1.$$

对所有 $i\geq 1$。

这个不等式（连同其 Grothendieck-Serre 对偶对应的不等式）给出了相干 IC 延拓函子的刻画，见 [Xin25，命题 4.7], 参见命题 3.3.1。

（球面）仿射 Schubert 簇 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ at $t^{\check{\mu}}\in\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ 的奇点由仿射格拉斯曼量切片 $\mathcal{W}^{\check{\mu}}{}_{\check{\lambda}}$ （定义见（5.4.1））所刻画。已知根据 [Bea00], ，该切片具有其意义下的辛奇点，且当 **if** G **is of type A** 时，它存在辛解消。于是我们可以利用 Xin 的结果（定理 1.4.3），推出相干 IC 层的霍奇模理论描述（1.4.1）。

对于其他类型，利用 [KWWY14，定理 2.9]，存在没有辛解消的切片。探究相干 $\mathcal{IC}$-扩张是否可以用霍奇模刻画，或者我们是否应使用其他偏 perversity 函数来修正反常相干 t-结构，将会很有意思。解决这一问题后，本文提出的方法或许可以推广到其他类型的约化群 G。

最后，我们提及另一种研究 Satake 等价经典极限的可能方法。在 Fedorov 关于霍奇模的 Satake 等价的工作 [Fed21] 中，他们考虑了 Gr_G上（可极化）纯霍奇模的 $G_{\mathcal{O}}$-等变阿贝尔范畴:

$$\mathrm{HM}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G).$$

其中包含由**交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\check{\lambda}}$ 的 Tate 扭曲生成的幺半阿贝尔全子范畴:

$$\mathrm{Tate}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G).$$

他们为该范畴赋予了 Tannakian 结构，并将其与 Deligne 的修正的朗兰兹对偶群 $G_{\mathbb{Q}}\times^{\mu_2}\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{Q}}$的表示范畴等同起来。详情请参见同上。 。

在同上。 中，作者表示，他们希望在后续工作中构造一个伴随分次函子

$$\mathrm{gr}:\mathrm{HM}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G)\to\mathsf{Coh}(\mathrm{T}^*(G_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_G))^{\heartsuit},$$

并由此得到一个函子

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(\check{G}_{\mathbb{Q}}\times^{\mu_2}\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{Q}})\to\mathsf{Coh}(\mathrm{T}^*(G_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_G))^{\heartsuit}.$$

上面的函子 gr 似乎不易定义，因为 Gr_G 并非光滑射影概形的极限。

将这一方法与我们的方法进行比较会很有意思。

1.5. **进一步方向**。 将 $\widetilde{\mathrm{KP}}_0$ 定义为 $\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}})$ 的全子范畴，它由 $\widetilde{\mathrm{KP}}_0$ 中的对象在扩张下生成。假设 G 为 A 型。应用定理 1.4.2 中的相同方法，$\mathrm{KP}_0\widetilde{}$可赋予中性 Tannakian 结构，因此等价于某个仿射群概形 $\widetilde{G}'$ 在 $\mathbb{C}$上的表示范畴 Rep(G')。我们提出以下猜想，它将进一步推进猜想 1.2.1。

猜想 1.5.1。 这个坦纳克群概形 $\widetilde{G}'$ 同构于正环群 $\check{}\,G_{\mathcal{O}}$。换言之，$\widetilde{\mathrm{KP}}_0\cong\mathrm{Rep}(\check{}\,G_{\mathcal{O}})$ 作为 $\mathbb{C}$上的中性 *Tannakian* 范畴。

1.6. **论文结构**。在第 2 节中，我们回顾 Cautis-Williams 理论中的一些代数几何背景。

在第 3 节中，我们回顾分类化库仑分支上的基本构造，例如卷积乘积及其刚性、Koszul 周 pervers t-结构、重整化的 r-矩阵等。

在第 4 节中，我们证明 KP_0 与 $\mathrm{KP}_0\widehat{}$ 对偶。

在第 5 节中，我们在 K-群层面确定 KP_0 。

在第 6 节中，我们赋予 KP_0 一种中性 Tannakian 结构，并将其 Tannakian 群确定为 $\check{}G$。

附录 A 中，我们回顾主要上下文中使用的霍奇模理论和伴随分次构造的一些基本事实。

1.7. **记号与约定**。

(1) 除非另有说明，所有向量空间、概形和堆均定义在 $\mathbb{C}$ 上；我们也记 $\mathrm{pt} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$。与 [CW23、CW24、CW25]，中的术语不同，本文中的"范畴"指传统意义上的普通范畴。使用 [3] 时，我们会特别指出这是 ∞-范畴。同样，概形指经典概形；使用导出概形时，我们会特别指出。在第 2 节中，我们将简要回顾 Cautis-Williams 理论的一些代数几何背景。本文中，$\mathbb{C}$ 上的簇指 $\mathbb{C}$ 上的整拟射影概形。

(2) 若一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 有零对象，且每个态射都有纤维和余纤维，并且 $\mathcal{C}$ 中的三角形是纤维序列当且仅当它是余纤维序列，则称其为稳定的（参见 [Lur17，第 1.1.1] 节）。同伦范畴 $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ 是三角范畴（参见 [Lur17，第 1.1.2] 节）。$\mathcal{C}$ 上的 t-结构是其同伦范畴 $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ 上的 t-结构（参见 [Lur17，第 1.2.1] 节）。这一数据包含两个子范畴 $(\mathcal{C}^{\leq 0}, \mathcal{C}^{\geq 0})$，并配有截断函子 $\tau^{\leq n}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\leq n}$,$\tau^{\geq n}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\geq n}$。t-结构 $\mathcal{C}^{\heartsuit} := \mathcal{C}^{\leq 0} \bigcap \mathcal{C}^{\geq 0}$ 的心是一个阿贝尔范畴。记 $\mathcal{H}^n := \tau^{\geq n}\tau^{\leq n}[-n] : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\heartsuit}$ 为该 t-结构的上同调函子。我们还记 $\mathcal{C}^+ := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}^{\geq n}$（分别记 $\mathcal{C}^- := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}^{\leq n}$）为 $\mathcal{C}$ 的有界下部（分别为有界上部），以及 $\mathcal{C}^b := \mathcal{C}^+ \bigcap \mathcal{C}^-$。若 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^b$，则称该 t-结构有界。

稳定的∞-范畴 QCoh、Coh、IndCoh 都带有标准 t-结构（我们将在第 2 节介绍这些层理论），其心记为 $(-)^{\heartsuit}$；我们也将 $\mathrm{QCoh}(-)^{\heartsuit}$（分别是 $\mathrm{Coh}(-)^{\heartsuit}$）中的对象称为普通拟相干（分别为相干）层。我们还将考虑 Koszul 反常 t-结构（针对特定空间），其心分别记为 $\mathrm{KP}_{\mathrm{coh}}$ $\mathrm{KP}^{\mathrm{qcoh}}$ $\mathrm{KP}_{\mathrm{indcoh}}$。这些 Koszul 反常 t-结构的上同调函子记为 $\mathcal{H}^n_K, n \in \mathbb{Z}$。

（3）对于一个（∞-）范畴 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$ 上的分次平移函子是指 $\mathcal{C}$上的一个自等价。当 $\mathcal{C}$ 是一个稳定的 ∞-范畴时，$\mathcal{C}$ 上的上同调分次移位函子记为 $[1]$。本文中还有另外两个起重要作用的分次平移函子 $\{1\}$ 和 $\langle 1\rangle$，它们由某种 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-等变性给出。参见定义 3.1.3。

(4) 对于阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，令 $K_0(\mathcal{A})$ 表示其 K_0 群（也称为格罗滕迪克群）；本文中将 K_0 简记为 K。它是由 $\mathcal{A}$ 中对象的同构类生成的自由阿贝尔群，并模去由正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 所对应的关系 $[A]-[B]+[C] = 0$。

对于稳定的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，令 $K(\mathcal{C})$ 表示其 K_0 群。它是由 $\mathcal{C}$ 中对象的同构类生成的自由阿贝尔群，并模去由纤维—余纤维序列 $A \to B \to C$ 所对应的关系 $[A] - [B] + [C] = 0$。设 $(\mathcal{C}^{\leq 0}, \mathcal{C}^{\geq 0})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个有界 t-结构，并记 $\mathcal{C}^{\heartsuit}$ 为该 t-结构的心。则嵌入 $\mathcal{C}^{\heartsuit} \to \mathcal{C}$ 诱导出一个 K 群的同构，其逆映射由 $[C] \mapsto \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[\mathcal{H}^i(C)]$ 给出。

(5) 设 X 是一个带有经典仿射群概形 H-作用的导出概形。我们将 fpqc 商 $[H\backslash X]$ 上的拟凝聚层范畴记作 $\mathrm{QCoh}^H(X) := \mathrm{QCoh}([H\backslash X])$；$[H\backslash X]$ 上的拟凝聚层也可以描述为等变层，见例 2.2.1。相干层和归纳凝聚层也采用类似的记号。我们还将 $K^H(X) := K(\mathrm{Coh}^H(X))$ 记作。

我们常对商前后的态射使用相同的名称。在不存在混淆的情况下，我们也会对某些等变层滥用记号。例如，我们将 $\mathcal{O}_X$ 写作结构层 $\mathcal{O}_{[H\backslash X]} \in \mathrm{QCoh}^H(X)$，将 $\omega_X = \omega_{X/\mathrm{pt}}$ 写作对偶化复形$\omega_{[H\backslash X]/[H\backslash \mathrm{pt}]} := a^!\mathcal{O}_{[H\backslash \mathrm{pt}]}$，其中 $a : [H\backslash X] \to [H\backslash \mathrm{pt}]$ 是自然投影。

[3]我们还特意对 ∞-范畴使用 mathsf 字体，对普通范畴使用 mathrm 字体。

记号	描述	位置定义
$Y_{\mathcal{O}}, Y_{\mathcal{K}}$	正环空间与环空间	第 3.1 节
(G, N)	G：约化群； N： G 的有限维表示；例如 $N=\mathfrak{g}$ 伴随表示	
$\widehat{G}_{\mathcal{O}}, \widehat{G}_{\mathcal{K}}$	（正）环群再加上额外的两个 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，称为 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$和 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$	
格拉斯曼量$_{G,\mathcal{T}_{G,N},\mathcal{R}_{G,N}}$ $Y_{\mathcal{O},X^I}, Y_{\mathcal{K},X^I}$	用于定义三元组空间的空间 $\mathcal{R}_{G,\ N}$；通常简记为 $\mathrm{Gr}, \mathcal{T}, \mathcal{R}$	
格拉斯曼量$_{X^I,\mathcal{T}_{X^I},\mathcal{R}}$ X^I	对于固定代数曲线 $X=\mathbb{A}^1$，这些空间的整体版本	第3.4.2节
i_1： $\mathcal{R}$， $\to$ 格拉斯曼量 $\times N_{\mathcal{O}}$		
i_2： $\mathcal{R}$， $\to \mathcal{T}$	$\mathcal{R}$定义中的闭嵌入	第 3.1.2 节；
σ_1： 格拉斯曼量 $\to$ 格拉斯曼量 $\times N_{\mathcal{O}}$		
σ_2： 格拉斯曼量 $\to \mathcal{T}$	零截面嵌入	整体
p_1: 格拉斯曼量 $\times N_{\mathcal{O}} \to$ 格拉斯曼量		版本:
$p_2: \mathcal{T} \to$ 格拉斯曼量		第 3.4.2 节
p： $\mathcal{R} \to$ 格拉斯曼量	到格拉斯曼量的自然投影	
$\Xi := \sigma_1^* i_{1*}$	复合函子 Coh $\widehat{G}_{\mathcal{O}}(\mathcal{R}) \xrightarrow{i_{1*}} \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}(\text{格拉斯曼量} \times N_{\mathcal{O}})} \xrightarrow[\mathrm{Coh}]{\sigma^*} \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}(\text{格拉斯曼量})}$	第 5 节
$X \widetilde{\times} Y$	空间的扭曲积	第2.3.2节
$\mathcal{F} \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G}$	层的扭曲（外）积	
$\check{P}$, P	$\check{P} = X_*(T)$ 是余特征格， $P = X^*(T)$ 是特征格	第3节开头
$(\check{P} \times P)_{\mathrm{dom}}$	P 中简单对象的指标集（模平移） $\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}\text{上同调}(\text{格拉斯曼量})}, \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}\text{上同调}(\text{格拉斯曼量})}, \mathcal{R}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}\text{上同调}(}$	定理 3.3.2 之后
格拉斯曼量$_{\lambda}$, 格拉斯曼量$_{\leq\lambda}$ 格拉斯曼量$_{\lambda,\mu}$	格拉斯曼量$_{\lambda}$ $\subset$格拉斯曼量是一个（球面）舒伯特胞腔，格拉斯曼量$_{\leq\lambda}$ $\subset$ 格拉斯曼量是闭包格拉斯曼量$_{\overline{\lambda}}$ 格拉斯曼量$_{\lambda,\mu}$ $\widetilde{\times}$格拉斯曼量$_{\mu}$ 格拉斯曼量$_{\lambda}$	第 3.1.1 节 第 5 节 5.3
$\mathcal{R}_{\lambda}, \mathcal{T}_{\lambda}, \mathcal{R}_{\leq\lambda}, \mathcal{T}_{\leq\lambda}$	Gr_{λ} 和 $\mathrm{Gr}_{\leq\lambda}$ 分别到 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{T}$的基变换	式（3.1.4）
$i_{\leq\lambda}, j_{\lambda}$	$i_{\leq\lambda}: \mathrm{Gr}_{\leq\lambda}$， $\to \mathrm{Gr}$ 是闭嵌入， $j_{\lambda}: \mathrm{Gr}_{\lambda}$， $\to \mathrm{Gr}_{\leq\lambda}$ 是开嵌入	第 3.1.1 节
$j_{\lambda,p!*}$	$\mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}\text{coh}(\text{格拉斯曼量}_{\lambda})} \to \mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}\text{coh}(\text{格拉斯曼量}_{\overline{\lambda}})}$，余 perverse 层的中间延拓	式（3.3.2）
$j_{\lambda,!*}$	$\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}\text{coh}(\text{格拉斯曼量}_{\lambda})} \to \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}\text{coh}(\text{格拉斯曼量}_{\overline{\lambda}})}$，Koszul 反常层的中间延拓	式（3.3.14）
$\widetilde{\mathcal{IC}} = \widetilde{\mathcal{IC}}_X$	$\mathrm{Refl}^H(X) \to \mathrm{Coh}^H(X)$， $\widetilde{\mathcal{IC}}$-函子	等式 (3.3.8)
$\mathcal{IC} = \mathcal{IC}_{U \subset X}$	$\mathrm{VB}^H(U) \to \mathrm{Coh}^H(X)$，相干 $\mathcal{IC}$-扩张函子； $\mathcal{IC}_{U\subset X} = \widetilde{\mathcal{IC}}_X \circ \mathcal{H}^0(j_*(-))$	等式 (3.3.9)
之间的关系 上述函子	设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VB}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{\lambda})$ 的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-权为 n，则 $j_{\lambda,!*}(\mathcal{E}[n+\frac{1}{2}d_{\lambda}]) = j_{\lambda,p!*}(\mathcal{E}[\frac{1}{2}d_{\lambda}])[n] = \mathcal{IC}(\mathcal{E})[n+\frac{1}{2}d_{\lambda}]$	式 (3.3.15)
$\mathrm{IC}^{\mathbb{Q}}$, $\mathrm{IC}^{\mathbb{C}}$	分别以 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{C}$ 为系数的可构造 IC 复形	[BBD82]
$\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}$	IC 霍奇模	A.1 节
$\overline{\mathcal{L}}^{p}_{\lambda,\mu}$	$\overline{\mathcal{L}}^{p}_{\lambda,\mu} = i_{\leq\lambda *} j_{\lambda,p!*}(\mathcal{O}_{\lambda,\mu}[\frac{1}{2}d_{\lambda}])$，P 中的简单对象 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}\text{coh}(\text{格拉斯曼量})$	公式 (3.3.5)
$\overline{\mathcal{L}}_{\lambda,\mu}$	$\overline{\mathcal{L}}_{\lambda,\mu} = i_{\leq\lambda *} j_{\lambda,!*}(\mathcal{O}_{\lambda,\mu}\langle -\frac{1}{2}d_{\lambda}\rangle)$，KP 中的简单对象 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}\text{coh}(\text{格拉斯曼量})$	公式（3.3.17）
$\mathcal{L}'_{\lambda,\ \mu}$； $\mathcal{L}'_{\lambda}$	KP 中的简单对象 $\mathcal{O}_{\mathrm{coh}(\mathcal{R}_{\leq\lambda})}$； $\mathcal{L}'_{\lambda} := \mathcal{L}'_{\lambda,\ 0}$	公式（3.3.21）
$\mathcal{L}_{\lambda,\ \mu}$； $\mathcal{L}_{\lambda}$	$\mathcal{L}_{\lambda,\ \mu} = i_{\leq\lambda *}(\mathcal{L}'_{\lambda,\ \mu})$，KP 中的简单对象 $\mathcal{O}_{\text{相干}(\mathcal{R})}$； $\mathcal{L}_{\lambda} := \mathcal{L}_{\lambda,\ 0}$	公式（3.3.23）
$\mathbb{D}_X$	$\mathbb{D}_X(-) = \mathcal{H}om(-, \omega_X)$ 是 Grothendieck-Serre 对偶	公式（3.3.1）
$\mathcal{D}_X$	$\mathcal{D}_X(-) = \mathcal{H}om(-, \omega_X)[-\dim\ X]$ 是移位的 Grothendieck-Serre 对偶	公式 (3.3.7)
$\mathbf{D}_X$	霍奇模的韦尔迪耶对偶函子	公式 (A.1.3)
$[1], \langle 1\rangle, \{1\}$	[1]: 上同调分次平移； $\langle 1\rangle$ / $\{1\}$: 关于 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$/ $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变性的分次平移	定义 3.1.3
(1)	混合霍奇模的 Tate 扭曲	公式 (A.1.2)

图 1：本文中使用的记号

假设 X 是一个（经典）概形。我们将 $\Omega_X := \Omega^{X/\mathrm{pt}}$ 记为相对于 pt 的（普通）卡勒微分层。它具有自然的 H-等变结构，因此我们将 Ω_X 视为 $\mathrm{QCoh}^H(X)^{\heartsuit}$中的对象。我们还将 $\Omega_X^k := \bigwedge^k \Omega_X \in \mathrm{QCoh}^H(X)^{\heartsuit}$记为（普通的） k阶微分层；这里 $\bigwedge$ 表示普通拟凝聚层的楔积。

假设 X 是一个（经典）概形。对于 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}^H(X)^{\heartsuit}$，我们将 $\mathcal{F}$ 视为 X 上的一个 H-等变普通相干层。于是可以像往常一样定义 $\mathcal{F}$ 的支撑，记作 $\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}$。它是 X 的一个 H-不变闭子概形。一般而言，对于 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}^H(X)$，我们将 Supp $\mathcal{F}$ 记作$\bigcup_k \mathrm{Supp}\,\mathcal{H}^k(\mathcal{F})$。

我们对某些符号作如下约定。

(1) 我们将 $\mathcal{R},\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{O}},\mathcal{T}$视为 Gr 上的空间。将 $i_{\leq\vec{\lambda}}$和 $j_{\vec{\lambda}}$基变换到 $\mathcal{R},\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{O}},\mathcal{T}$后，也用相同的符号表示。(2) 对于任意局部闭子概形 $S\subset\mathrm{Gr}$ 上的 $i_1,i_2,\sigma_1,\sigma_2,p_1,p_2,p$的基变换，我们也用相同的符号表示。在这些情形下，我们也写作 $\Xi=\sigma_1^*i_{1*}$。(3) 态射 $i_1,i_2,\sigma_1,\sigma_2,p_1,p_2,p,\pi_1$都有整体版本，我们也用相同的符号表示它们的整体版本。

1.8. **致谢**。 作者衷心感谢导师单鹏教授提出这一问题，并在整个研究过程中给予耐心指导和鼓励。作者感谢郑泽欣在分次德拉姆复形方面的研究成果，这些成果是本文的一项关键工具。作者感谢 Lin Chen 教授与其讨论论文中的诸多细节，尤其是（导出）代数几何方面的内容；作者从这些讨论中受益匪浅。作者感谢李鹏辉教授就论文早期版本与其进行讨论。作者感谢一个高阶代数学生研习小组的成员对他的教益，尤其感谢王锦怡。作者感谢徐福林与其讨论反射模。

本文的主要思想源于作者准备学士论文期间。作者衷心感谢家人、老师和朋友在他本科求学期间始终如一的支持。

本研究通过作者的导师单鹏获得国家自然科学基金项目 12225108 的资助。

2. Cautis-Williams 理论中的代数几何背景

本节遵循 [CW23、CW24、CW25]，回顾 Cautis-Williams 理论中的一些代数几何概念；我们仅整理本文中用到的内容，更多详情请参见同上。 我们也请参阅 [VV25，第 5 节2] ，以便快速回顾。

2.1. **Ind-几何导出栈**。

2.1.1. *DG*代数。 令 $\mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}$ 为非正分次交换[4] DG代数构成的∞-范畴；给定 $A\in\mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}$，令 CAlg_A 为非正分次交换 DG A-代数构成的∞-范畴。若对所有 $k<-n$，都有 $H^k(B)=0$，则称 $B\in\mathrm{CAlg}_A$ 为 n-截断的 。令 $\tau_{\leq n}\mathrm{CAlg}_A$ 表示 CAlg_A 中由 n-截断的 DG 代数组成的满∞-子范畴。存在截断函子 $\tau_{\leq n}:\mathrm{CAlg}_A\to\tau_{\leq n}\mathrm{CAlg}_A$。若存在某个 n使得 $B\in\mathrm{CAlg}_A$ 为 n-截断的，则称其为截断的 。

令 $B\in\mathrm{CAlg}_A$ 为一个 DG A-代数。

- 若它是 $\tau_{\leq n}\mathrm{CAlg}_A$ 中的紧对象，即 $\mathrm{Hom}_A(B,-)$ 与任意直和可交换，则称其为有限 n表示的 。若对所有 n，其截断 $\tau_{\leq n}B$ 都是有限 n-表示的，则称其为几乎有限表示 。若它是有限 n-表示的 DG A-代数 B_α 的一个滤过余极限，且 B 在每个 B_α 上都平坦，则称其为严格温和 n表示的 。若对所有 n， $\tau_{\leq n}B$ 都是严格温和 n-表示的，则称其为严格温和表示的 。温和表示的 A-代数的一个典型例子是

$$\mathbb{C}[\mathbb{A}_A^\infty]:=A[x_i,i\in\mathbb{N}]\cong\operatorname*{colim}_n A[x_1,\dots,x_n]. \tag{2.1.1}$$

2.1.2. 导出叠。 我们首先依照 [GR17，第 2] 章，介绍导出代数几何中的一些基本概念。令 Grpd 为∞-群胚的∞-范畴，并令 Cat_∞ 为∞-范畴的∞-范畴。导出（分别地，经典）叠（默认定义在 $\mathbb{C}$ 上）是一个从 $\mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}$ （分别地，$\mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}}$）到 Grpd 的函子，且是 fpqc 拓扑下的层。令 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 和 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}}$ 分别表示导出叠与经典[5] 叠的∞-范畴。嵌入 $\mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}}\hookrightarrow\mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}$ 给出一个限制函子 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}\to\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}}$。此函子有一个全忠实左伴随 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}}\hookrightarrow\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$，因此我们可以将经典叠视为导出叠。记 $\mathrm{cl}:\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}\to\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}}\hookrightarrow\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 为复合。

Yoneda 嵌入给出一个全忠实嵌入 $\mathrm{Spec}:\mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}\to\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$，其像中的对象称为仿射导出概形。令 $\mathrm{Sch}_{\mathbb{C}}\subset\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 为导出概形的全∞-子范畴；该

[4]下文中的 DG 代数默认均为非正次数分次交换代数。[5]请注意，本文所说的经典代数栈，在许多文献中指的是 ∞-堆。

∞-子范畴在 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 中的纤维积下封闭。令 $\mathrm{Sch}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}}$ 为经典概形的（普通）范畴；我们可以将其视为 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}}$ 的全子范畴，并进一步视为 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 的全子范畴。全忠实嵌入 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}} \hookrightarrow \mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 限制为 $\mathrm{Sch}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}} \hookrightarrow \mathrm{Sch}_{\mathbb{C}}$，因此我们可以将经典概形视为导出概形；复合函子 cl 也限制为 $\mathrm{cl} : \mathrm{Sch}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Sch}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}} \hookrightarrow \mathrm{Sch}_{\mathbb{C}}$。

称导出栈 X 为收敛的，若对任意 $A \in \mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}$，$X(A) \cong \lim_n X(\tau_{\leq n} A)$。令 $\widehat{\mathrm{Stk}}_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 表示收敛导出栈构成的满∞-子范畴。

若导出栈 X 的对角态射 $X \to X \times X$ 是仿射的，且存在忠实平坦态射 $\mathrm{Spec}\, B \to X$ 属于 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$（参见 [Lur18，第 9]章），则称其为几何的。根据 [CW24，命题 3.25], ，几何导出栈是收敛的。若对任意平坦态射 $\mathrm{Spec}\, A \to X$，A 均为截断的，或者等价地，存在截断的忠实平坦态射 $\mathrm{Spec}\ A \to X$（参见 [Lur18，命题 9.1.6.1]），则称几何导出栈 X 为截断的。令 $\mathrm{GStk}_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 表示几何导出叠构成的满∞-子范畴，并令 $\mathrm{GStk}_{\mathbb{C}}^{+} \subset \mathrm{GStk}_{\mathbb{C}}$ 表示截断几何导出叠构成的满∞-子范畴。

例 2.1.1。

• 拟紧且半分离的导出概形 X 是几何的；• 此外，设 G 有一个作用于 X 的经典仿射群概形，则 fpqc 商导出栈 $[G\backslash X]$ 是几何的；• $\mathrm{GStk}_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 中对纤维积封闭。

2.1.3. 一些 关于态射的约定。设 $f\colon X \to Y$ 是导出栈之间的一个态射 .

• 若对任意 $\mathrm{Spec}\, A \to Y$，态射 $\tau_{\leq 0}(X \times_Y \mathrm{Spec}\, A) \to \tau_{\leq 0}(\mathrm{Spec}\ A)$ 都是普通仿射概形之间的闭浸入，则称其为闭浸入（或称闭嵌入）。若对任意态射 $\mathrm{Spec}\, A \to Y$，纤维积 $X \times_Y \mathrm{Spec}\ A$ 在 [Lur18，定义 5.1.2.1] 的意义下是 A 上的适当态射，则称其为适当。若对任意 n 及任意 $A \cong \mathrm{colim}\, A_\alpha$ in $\tau_{\leq n}\mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}$ 中的滤过余极限，典范映射在以下条件下是（局部地）几乎有限表示的[6]

$$\mathrm{colim}\, X(A_\alpha) \to X(A) \times_{Y(A)} \mathrm{colim}\, Y(A_\alpha)$$

是一个同构（参见 [Lur18，定义 17.4.1.1]）。例如，如果 X 和 Y 是诺特概形，且 f 在经典意义下是有限表示的，那么 f 几乎有限表示。• 如果对于任意态射 $\mathrm{Spec}\, A \to Y$，纤维积 $X \times_Y \mathrm{Spec}\, A$ 是几何的，则称其为<风格 id='8'>几何的 。

• 如果它是仿射的，并且对于任意 $\mathrm{Spec}\, A \to Y$，$X \times_Y \mathrm{Spec}\, A$ 的坐标环是严格温和呈示的，则称其为<风格 id='2'>严格温和呈示的 。如果它是几何的，并且对于任意 $\mathrm{Spec}\, A \to Y$，存在一个严格温和呈示的平坦覆盖 $\mathrm{Spec}\ B \to X \times_Y \mathrm{Spec}\ A$，使得 B 是一个严格温和呈示的 A-代数，则称其为<风格 id='7'>温和表示的 。（参见 [CW25，定义 4.6]）

这些性质 对态射而言，在 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 中关于复合和基变换是稳定的（对于温和表性质 见 [CW25，命题 4.9]）

若几何导出栈 X 的映射 $X \to \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}$ 是温和表示的，则称其为温和表示的。

例 2.1.2。

• 若 X, Y 是几何的，则 $f\colon X \to Y$ 也是几何的。• 若 f 是可表的（由谱 Deligne-Mumford 栈表示）、几何的且几乎有限表示的，则它是温和表示的（参见 [CW25，命题 4.7]）。• 设 G 是作用于温和表示的导出概形 X 上的经典仿射群概形，则 fpqc 商导出栈 $[G\backslash X]$ 是温和表示的（参见 [CW25，命题 4.11]）。

2.1.4. 归纳几何导出栈。归纳几何导出栈是一个收敛导出栈 X，它可以在收敛导出栈的 ∞-范畴 $\widehat{\mathrm{Stk}}_{\mathbb{C}}$ 中表示为沿闭浸入的截断几何导出堆栈的滤过余极限 $X \cong \mathrm{colim}_\alpha X_\alpha$。我们也将 $\mathrm{colim}_\alpha X_\alpha$ 称为该归纳几何导出栈的归纳几何表示。

例 2.1.3。

[6]如同 [CW24], 一样，默认情况下我们省略“局部地”一词，因为我们考虑的所有态射都是拟紧的，或实际上是拟紧的。

• 在归纳几何导出栈的定义中，如果所有 X_α 都是截断的拟紧且半分离的导出概形，我们称 X 为 *ind*-导出概形。ind-导出概形是归纳几何导出栈。• ind-导出概形关于经典仿射群概形 G 的 fpqc 商 $[G\backslash X]$ 也是归纳几何导出栈。事实上，假设 X_α 是 G-不变的，那么 $[G\backslash X] \cong \mathrm{colim}_\alpha [G\backslash X_\alpha]$ 给出 $[G\backslash X]$ 作为归纳几何导出栈的一个表示（参见 [CW24，第 4.2] 节）。

导出叠之间的态射 $f\colon X \to Y$ 若对某个（或等价地，任意一个）归纳几何呈示 $X \cong \mathrm{colim}_\alpha X_\alpha$ 以及任意 X_α，都可以选取一个截断几何闭子叠 $Y_\alpha, \to Y$，使得 f 经由某个 $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$ 分解，且每个 f_α 都是适当的（分别地，闭浸入、几乎有限表示），则称其为归纳真（分别地，归纳闭浸入、几乎归纳有限表示）。这些态射性质在 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 中对复合和基变换稳定；更多细节见 [CW24，第 4] 节。

若归纳几何导出叠 $X \cong \mathrm{colim}_\alpha X_\alpha$ 的结构映射几乎有限表示，则称其为合理的。若其合理且所有 X_α 都是温和表示的，则称其为归纳温和呈现。

2.2. **凝聚层理论**。

2.2.1. 对于 DG 代数 $A \in \mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}$，令 Mod_A 表示 DG A-模的稳定 ∞-范畴；Mod_A 具有标准 t-结构。若一个 A-模 M 有界且几乎完美（即对于所有 n，$\tau^{\geq n}M$ 在 $\mathrm{Mod}_A^{\geq n}$ 中都是紧的），则称其为相干的。

对于导出栈 X，令 $\mathrm{QCoh}(X)$ 表示 X 上的拟凝聚层的稳定 ∞-范畴。它是对所有态射 $\mathrm{Spec}\, R \to X$ 上的 Mod_R 范畴取极限得到的。它具有标准 t-结构，其心记为 $\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit$。若 X 是几何的，则 $\mathrm{QCoh}(X)$ 等价于沿任意忠实平坦覆盖的 Čech 神经对相应范畴取极限（参见 [Lur18，命题 9.1.31]）。

当 X 是截断几何导出栈时，令 $\mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{QCoh}(X)$ 表示相干层的全 ∞-子范畴，即满足以下条件的 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$：其沿某个（等价地，任意）忠实平坦覆盖 $\mathrm{Spec}\, A \to X$ 的拉回是相干的。

几何导出栈 X 是局部凝聚的（分别地，局部诺特的，分别地，平坦局部几乎有限表示的），如果它存在一个忠实平坦覆盖 $\mathrm{Spec}\, A \to X$，使得 A 是凝聚的（分别地，诺特的，分别地，在点 $= \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}$ 上几乎有限表示的）。如果它存在到某个几何导出栈的仿射态射，且该态射平坦局部几乎有限表示，则称其为可容许的。[7] 可容许几何导出栈在关于点的积下封闭，因为平坦局部几乎有限表示的几何导出栈在关于点的积下封闭。

当 X 是局部凝聚时，$\mathrm{QCoh}(X)$ 上的标准 t-结构限制为 $\mathrm{Coh}(X)$ 上的 t-结构。可容许的温和表示几何导出栈 X 是凝聚的，这意味着 X 是局部凝聚的，并且 $\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit$ 是紧生成的（由 $\mathrm{Coh}(X)^\heartsuit$ 生成）；这是由 [Lur18，命题 9.5.2.3] 结合 [CW24，引理 4.26] 推出的。

我们还要指出，如果一个归纳几何导出栈存在一个归纳几何表示，使得其中各项都是可容许的几何导出栈，则称其为可容许的；如果它存在一个合理表示，使得其中各项都是相干的几何导出栈，则称其为相干的。可容许的归纳温和表示归纳几何导出栈构成相干归纳几何导出堆栈的一个关于（在点上）积封闭的子类，而全体相干归纳几何导出堆栈并不关于积封闭。

[7] 这里，可容许性质的定义不同于 [CW25, Def. 4.12], 其中，若一个几何导出栈 X 存在到局部诺特几何导出栈的仿射态射，则称其为可容许的。可容许性质的一项重要特征是，可容许几何导出栈的类应当在 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 中关于点取积下封闭。然而，尚不清楚 [CW25, Def. 4.12] 中定义的可容许性质是否在关于点取积下封闭，因为诺特仿射概形在关于点取积下并不封闭。注意，几乎有限表示（在点上）的仿射概形在关于点取积下封闭，并且根据希尔伯特基定理 [Lur17, Prop. 7.2.4.31]，它们是诺特的。因此，我们定义了一个几何导出栈的子类，它在关于点取积下封闭，并满足 [CW25, Def. 4.12] 中的条件。尽管这里的定义更严格，但在 [CW25, CW23] 中使用该定义的其他情形均满足这一更严格版本的要求。作者感谢 Lin Chen 教授指出这一问题。

例 2.2.1。 设 G 是一个经典仿射群概形，其作用于一个拟紧且半分离的导出概形 X 上，如商导出叠例 2.1.1 中所述。我们将 $\mathrm{QCoh}^G(X)$（分别地，$\mathrm{Coh}^G(X)$）记作 $\mathrm{QCoh}([G\backslash X])$（分别地，$\mathrm{Coh}([G\backslash X])$）。那么，利用下降过程，$\mathrm{QCoh}^G(X)^\heartsuit$ （分别地，$\mathrm{Coh}^G(X)^\heartsuit$）是 G-等变拟凝聚（分别地，相干）普通层的阿贝尔范畴。若 X是经典的，则 $\mathrm{QCoh}^G(X)$ 的有界下部可以用有界下导出范畴描述，即有一个自然等价

$$\mathrm{D}^+(\mathrm{QCoh}^G(X)^\heartsuit)\cong\mathrm{QCoh}^G(X)^+;$$

例如，参见 [GR17，命题 2.4.3]。在此等价下，$\mathrm{Coh}^G(X) \subset \mathrm{QCoh}^G(X)^+$ 对应于 $\mathrm{D}^+(\mathrm{QCoh}^G(X)^\heartsuit)$ 的满 ∞-子范畴，该子范畴由具有相干上同调的有界复形组成，其中 X 是局部凝聚的。

2.2.2. 拉回-推前函子。 给定 $\mathrm{Stk}_{\mathbb{C}}$ 中的一个态射 $f: X \to Y$，我们有一个自然的拉回函子$f^*: \mathrm{QCoh}(Y) \to \mathrm{QCoh}(X)$。它有一个右伴随 $f_*: \mathrm{QCoh}(X) \to \mathrm{QCoh}(Y)$。

令 $f: X \to Y$为 $\mathrm{GStk}_{\mathbb{C}}$ 中的一个态射。

- 若 $f^*(\mathrm{QCoh}(Y)^{\geq 0}) \subset \mathrm{QCoh}(Y)^{\geq n}$，则称其具有 ***Tor*** 维数 $\leq n$；若它对某个 n 具有 Tor 维数 $\leq n$，则称其具有有限 ***Tor*** 维数。
- 若 $f_*(\mathrm{QCoh}(X)^{\leq 0}) \subset \mathrm{QCoh}(Y)^{\leq n}$，则称其具有上同调维数 $\leq n$；若它对某个 n 具有上同调维数 $\leq n$，则称其具有有限上同调维数。

有限 Tor 维数（分别地，有限上同调维数）态射在 GStk_k 中在基变换下保持稳定，且在复合下保持稳定。有限上同调维数态射还在目标上是平坦的。（参见 [CW24，命题 3.6、命题 3.14]）

设以下为几何导出叠的一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle h'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array} \tag{2.2.1}$$

若 h 具有有限 Tor 维数（分别地，f 具有有限上同调维数），则 Beck-Chevalley 映射

$$h^* f_*(\mathcal{G}) \to f'_* h'^*(\mathcal{G}) \tag{2.2.2}$$

对所有 $\mathcal{G} \in \mathrm{QCoh}(X)^+$ （分别地，$\mathcal{G} \in \mathrm{QCoh}(X)$）都是同构

设 $f: X \to Y$是截断几何导出叠之间的一个态射。

- 若 f具有有限 Tor 维数，则 $f^*: \mathrm{QCoh}(Y) \to \mathrm{QCoh}(X)$ 限制为 $f^*: \mathrm{Coh}(Y) \to \mathrm{Coh}(X)$（[CW24，命题 3.6]）。
- 若 f 是适当且几乎有限表示的，则 $f_*: \mathrm{QCoh}(X) \to \mathrm{QCoh}(Y)$ 限制为 $f_*: \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(Y)$（[CW24，命题 3.19]）。

特别地，在上面的图 (2.2.1) 中，若 h 具有有限 Tor 维数，且 f 适当并且几乎有限表示，则可以将上面的基变换同构 (2.2.2) 应用于相干层 [8]。

2.2.3. 归纳几何导出栈上的相干层理论。 [CW24，定义 5.3] 将相干层理论推广到合理归纳几何导出堆栈[9]。 [CW24，命题 5.5] 表明，给定一个合理的归纳几何表示 $X \cong \mathrm{colim}_\alpha X_\alpha$，则 $\mathrm{Coh}(X)$ 可由以下方式计算：

$$\operatorname*{colim}_\alpha \mathrm{Coh}(X_\alpha)$$

在 Cat_∞ 中。特别地，任意 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ 都可以写成 $\mathcal{F} \cong i_{\alpha *}\mathcal{F}_\alpha$，其中 $i_\alpha: X_\alpha, \to X$ 以及$\mathcal{F}_\alpha \in \mathrm{Coh}(X_\alpha)$。

设 $f: X \to Y$是一个合理归纳几何导出栈的态射 s.

[8]这些基变换同构满足自然相容性。依照 [GR17], , 所有信息都可以打包成一个函子 $\mathrm{Coh}: \mathrm{Corr}(\mathrm{GStk})_{prop;ftd} \to \mathrm{Cat}_\infty$。更多细节请参见 [CW24，第 3 节。[9]根据 [CW24，定义 5.3], , 他们通过沿着 $\mathrm{Corr}(\mathrm{GStk}^{\dagger}_{\mathbb{C}})_{prop;ftd} \subset \mathrm{Corr}(\mathrm{indGStk}^{reas}_k)_{prop;ftd}$作左 Kan 延拓，定义 $\mathrm{Coh}: \mathrm{Corr}(\mathrm{indGStk}^{reas}_k)_{prop,ftd} \to \mathrm{Cat}_\infty$。

• 若它是几何的，且其到任意几何导出栈的基变换具有 $\leq n$ Tor 维数（分别地，具有有限 Tor 维数），则称其具有 Tor 维数 $\leq n$ （分别地，具有有限 Tor 维数）。若 f 具有有限 Tor 维数，则 [CW24，定义 5.3] 给出拉回函子 f^* : Coh(Y) →Coh(X)：对于 $\mathcal{F} = i_{\alpha *}\mathcal{F}_\alpha \in$ Coh(X)， $f^*\mathcal{F}$ 可通过 $i'_{\alpha_*} h^*_\alpha(\mathcal{F}_\alpha)$ 计算，其中 i'_α 和 h_α 由 i_α 和 h的基变换定义。• 若 f 是归纳真且几乎归纳有限表示的，则 [CW24，定义 5.3] 给出推前函子 f_* : Coh(X) → Coh(Y)：对于 $\mathcal{F} = i_{\alpha *}\mathcal{F}_\alpha$， $f_*\mathcal{F}$ 可通过 $j_{\alpha *} f_{\alpha *}\mathcal{F}_\alpha$计算，其中$X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} Y$是 $f_\alpha \circ i_\alpha$ 经过几何子堆栈 j_α 的任意分解: Y_α , → Y且 j_α 是一个几乎有限表示闭浸入。

与几何情形类似，对于拉回函子（沿有限 Tor 维数态射）和推前函子（沿归纳真且几乎归纳有限呈现的态射），我们也有基变换同构。

2.2.4. 归纳凝聚层。我们也会遇到归纳凝聚层（例如 (3.3.21)）。

对于几何导出栈 X，归纳凝聚层 IndCoh(X) 的稳定 ∞-范畴定义为 QCoh(X) 的左反完备化（参见 [CW24，定义 5.10、定义 5.13]）。存在一个自然函子Ψ_X : IndCoh(X) →QCoh(X)，它在这两个带有自然 t-结构的稳定 ∞-范畴的有界下部上限制为一个等价。当 X 可容许且温和表示时（或更一般地，当 X 相干时），IndCoh(X) 等价于 Coh(X) 的归纳完备化（参见 [CW24，命题 5.30][10]）。

这一 ind-相干层理论还包含了沿有限 Tor 维数态射的拉回函子、沿有限上同调维数态射的推前函子，以及相应的基变换同构（参见 [CW24，定义 5.13]）[11]。

这一 ind-相干层理论也可以推广到归纳几何导出栈（参见 [CW24，定义 5.16]）[12]。当 X 可容许且归纳温和呈现时（或者更一般地，当 X 相干时），IndCoh(X) 也等价于 Coh(X) 的归纳完备化（参见 [CW24，命题 5.30]）。

2.2.5. 稳定相干拉回。我们需要一类态射的拉回函子，这类态射推广了有限 Tor 维数态射。

设 f: $X \to Y$是截断几何导出栈之间的一个态射。若 f^*: QCoh(Y) → QCoh(X) 将 Coh(Y) 映至 Coh(X)，则称其具有相干拉回。若对于任意截断的 Y' 以及任意温和呈示态射 $Y' \to Y$，其基变换 f': $X \times_Y Y' \to Y'$ 都具有相干拉回，则称其具有稳定相干拉回。具有稳定相干拉回的态射在复合下以及沿 GStk$^+$ 中温和呈示态射的基变换下封闭（参见 [CW25，命题 4.14]）。

例 2.2.2. 一个典型例子是嵌入 $i : 0 \hookrightarrow \mathbb{A}^\infty_{\mathbb{C}}$。它具有相干拉回，因为 $\mathbb{A}^\infty_{\mathbb{C}}$ 上的任意相干层都是某个 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ 上的相干层沿平坦投影 $\mathbb{A}^\infty_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$的拉回（参见 [CW25，例 3.10]）。根据 [CW25，定理 3.11][13]， i 具有稳定相干拉回。

根据 [CW25，命题 4.14], , GStk$^+_{\mathbb{C}}$ 中的态射 f: $X \to Y$ 具有稳定相干拉回，当且仅当它沿忠实平坦覆盖的基变换具有稳定相干拉回。因此，若沿某个忠实平坦覆盖 $Y' \to Y$的基变换 f': $X' \to Y'$同构于零截面嵌入 $X' \hookrightarrow X' \times \mathbb{A}^\infty_{\mathbb{C}}$, , 则$f$ 具有稳定相干拉回。

类似地，设 f: $X \to Y$ 是 Ind-几何导出栈之间的态射，且 Y 合理。设 colim$_\alpha Y_\alpha$ 是一个合理表示。若 f 对每个 Y_α 的基变换都具有稳定相干拉回，则称 f 具有稳定相干拉回（参见 [CW25，命题 5.13]）。

第 2.2.2 节中截断几何导出堆栈以及第 2.2.3 节中合理的 ind-几何导出叠的相干层理论可以扩展：我们可以将拉回函子应用于

[10]我们还隐式地使用了 [CW24，命题 4.3]。[11]它可以概括为一个函子 IndCoh : Corr(GStk$_{\mathbb{C}}$)$_{fcd;ftd}$ → Cat$_\infty$。[12]它可以概括为一个函子 IndCoh : Corr(indGStk$_{\mathbb{C}}$)$_{fcd;ftd}$ → Cat$_\infty$。[13]参见 [CW25，命题 4.14] 后的评论。

具有稳定相干拉回的态射，而且对于几乎（ind-）有限表示的（ind-）适当推前，它们也具有基变换同构，参见 [CW25，第 5 节.5][14]。

设 X, Y 为相干归纳几何导出堆栈。在此情形下，IndCoh(X)（分别为 IndCoh(Y)）是 Coh(X)（分别为 Coh(Y)）的归纳完备化。于是，对于具有相干拉回的态射 $f\colon X \to Y$，可以将 f^* : IndCoh(Y) $\to$ IndCoh(X) 定义为唯一的连续函子，使其在 Coh(Y) 上的限制通过函子 f^* : Coh(Y) $\to$ Coh(X) 分解。

2.2.6. !-拉回。设 $f\colon X \to Y$ 为归纳几何导出栈之间的归纳真态射。根据 ind-相干层理论的构造（[CW24，定义 5.16]），f_* : IndCoh(X) $\to$ IndCoh(Y) 具有一个右伴随，记为 $f^!$。

我们记作

$$\omega_{X/Y} := f^! \mathcal{O}_Y.$$

当 $Y =$pt 时，我们简化记号，记为 $\omega_X :=^{} \omega_{X/\mathrm{pt}}$。

根据 [CW25，命题 6.17]，，! 拉回与稳定相干拉回相容。设下图是归纳几何导出叠的一个笛卡尔图:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle h'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

使得该图中的所有导出栈都是相干且归纳温和呈现的，h 具有归纳有限上同调维数并且具有稳定相干拉回，而 f 是归纳真且几乎归纳有限表示的。于是，对任意 $\mathcal{F} \in$ IndCoh(Y)，我们有一个 Beck-Chevalley 同构

$$h'^* f^!(\mathcal{F}) \to f'^! h^*(\mathcal{F}). \tag{2.2.3}$$

2.3. **其他一些函子**。

2.3.1. 外积。设 X, Y 是两个导出栈，为拟凝聚层定义外积

$$\boxtimes : \mathsf{QCoh}(X) \times \mathsf{QCoh}(Y) \to \mathsf{QCoh}(X \times Y)$$

由 $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := p_X^*(\mathcal{F}) \otimes p_Y^*(\mathcal{G})$ 给出，其中 $p_X\colon X \times Y \to X$ 和 $p_Y\colon X \times Y \to Y$ 是两个投影。

若 X 和 Y 是截断几何导出叠，且 $\mathcal{F} \in$ Coh(X)、$\mathcal{G} \in$ Coh(Y)，则 $X \times Y$ 是截断几何导出叠，且 $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \in$ Coh($X \times Y$)（参见 [CW24，命题 7.9]）。

在 [CW24 第 7.3]，节中，他们为合理归纳几何导出堆栈上的相干层定义了外积。设 $X \cong \mathrm{colim}_\alpha X_\alpha$ 和 $Z \cong \mathrm{colim}_\alpha Z_\alpha$ 是合理表示。[CW24 第 7.3] 节表明，$X \times Y$ 也是一个合理归纳几何导出堆栈。外积 $\boxtimes$: Coh(X) $\times$Coh(Y) $\to$ Coh($X \times Y$) 可由嵌入如下图表来刻画

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Coh}(X_\alpha) \times \mathsf{Coh}(Z_\beta) & \xrightarrow{\boxtimes} & \mathsf{Coh}(X_\alpha \times Z_\beta) \\ {\scriptstyle i_{\alpha *} \times i_{\beta *}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (i_\alpha \times i_\beta)_*} \\ \mathsf{Coh}(X) \times \mathsf{Coh}(Z) & \xrightarrow[\boxtimes]{} & \mathsf{Coh}(X \times Z) \end{array}$$

对所有 α, β。

在 [CW24][第 7], 节中，他们研究了其他层理论的外积，更多详情见同上。

[14]它们可以概括为函子 Coh : Corr(GStk$_{\mathbb{C}}^{+}$)$_{prop;coh} \to \mathsf{Cat}_\infty$、Coh : Corr(indGStk$_{\mathbb{C}}^{reas}$)$_{prop;coh} \to \mathsf{Cat}_\infty$

2.3.2. 扭曲积。设 H 是定义在 $\mathbb{C}$上的经典仿射群概形， $P \to X$ 是一个 H-挠子，其中P 和 X 都是定义在 $\mathbb{C}$上的合理归纳几何导出堆栈。设 Y 是一个带有 H-作用的合理归纳几何导出堆栈。定义扭曲积如下:

$$X \widetilde{\times} Y := P \times^H Y := [H\backslash(P \times Y)],$$

它是 $P \times Y$ 在 H 的对角作用下的 fpqc 商。它也可以定义为纤维积

$$\begin{array}{ccc} X \times^H Y & \xrightarrow{\mathrm{q}} & [H\backslash Y] \\ {\scriptstyle \mathrm{p}}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & [H\backslash \mathrm{pt}]; \end{array} \tag{2.3.1}$$

这里，态射 $X \to [H\backslash\mathrm{pt}]$ 由 H-主丛 $P \to X$ 确定。

令 $\mathcal{F} \in \mathsf{Coh}(X), \mathcal{G} \in \mathsf{Coh}^H(Y) = \mathsf{Coh}([H\backslash Y])$。考虑自然投影 $\mathbf{p} = \mathrm{p} \times \mathrm{q} : X \widetilde{\times} Y = [H\backslash(P \times Y)] \to X \times [H\backslash Y]$。于是我们可以如下定义扭曲（外）积 $\mathcal{F} \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G} \in \mathsf{Coh}(X \widetilde{\times} Y)$:

$$\mathcal{F} \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G} := \mathbf{p}^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) = \mathrm{p}^*(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{q}^*(\mathcal{G}).$$

注 2.3.1. 上述构造 $\widetilde{\boxtimes}, \boxtimes$ 可以定义在一般的光滑基概形上，而不只是 Spec $\mathbb{C}$，例如 X^I，其中 X 是一条光滑代数曲线， I 是一个有限集。

2.3.3. 层 *Hom*。给定几何导出栈 Y，以及 $\mathcal{F} \in \mathsf{QCoh}(Y)$，层 Hom

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -) : \mathsf{QCoh}(Y) \to \mathsf{QCoh}(Y)$$

由伴随定义

$$- \otimes \mathcal{F} : \leftrightarrows : \mathcal{H}om(\mathcal{F}, -).$$

若 Y是一个 合理归纳几何导出堆栈，且 $\mathcal{F} \in \mathsf{Coh}(Y)$，仍存在一个自然函子 r

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -) : \mathsf{IndCoh}(Y) \to \mathsf{IndCoh}(Y),$$

尽管缺少一般而言归纳凝聚层之间没有张量积，参见 [CW24，公式 7.38].

$\mathcal{H}$关于 与其他函子的若干相容条件。设 X 和 Y 为可容许、归纳温和呈现的归纳几何导出叠[15]。

- ([CW24，命题 7.52]) 设 $f : X \to Y$ 是一个归纳真、几乎归纳有限呈现态射。则对于任意 $\mathcal{F} \in \mathsf{Coh}(X)$ 和 $\mathcal{G} \in \mathsf{IndCoh}(Y)$，自然映射

$$f_* \mathcal{H}om(\mathcal{F}, f^!(\mathcal{G})) \to \mathcal{H}om(f_*(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \tag{2.3.2}$$

  是一个同构。
- ([CW25，命题 7.14]) 设 $h : X \to Y$ 是一个具有稳定相干拉回的态射，并设 $\mathcal{F} \in \mathsf{Coh}(Y)$、 $\mathcal{G} \in \mathsf{IndCoh}(Y)$。则 Beck–Chevalley 映射

$$h^* \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{H}om(h^*(\mathcal{F}), h^*(\mathcal{G})) \tag{2.3.3}$$

  是一个同构。

3. 范畴化库仑支

从现在起，固定复数域 $\mathbb{C}$ 上的连通约化群 G 。同时固定 B 中的 Borel 子群 B 和极大环面 T 。G 的李代数记为 $\mathfrak{g}$。令 $\check{} P = X_*(T)$（分别为 $P = X^*(T)$）表示余特征（分别为特征）格，$\check{}\Phi$ （分别为 Φ）表示 G 的根集（分别为余根集）。四元组 $(\check{} P, P, \check{}\Phi, \Phi)$ 称为 G 的根数据。令 $\check{} G$ 为朗朗兹对偶群，它是定义在 $\mathbb{C}$ 上、具有相反根数据 $(P, \check{} P, \Phi, \check{}\Phi)$ 的连通约化群。

$\check{}\check{}$ Borel 子群 B 的选择决定了支配余特征子集 $P_+ \subset P$ 和支配特征子集 $P_+ \subset P$。它还决定了 $\check{}\Phi$ （分别是 Φ）分解为正余根和负余根（分别为

[15]这些条件保证 X、 Y、 $X \times X$、 $Y \times Y$ 是相干的（参见 [CW25，定义 5.11] 后的注释），这两个命题中会用到这些条件。

根）：$\check{\Phi}=\check{\Phi}_+\bigsqcup\check{\Phi}_-$（分别为 $\Phi=\Phi_+\bigsqcup\Phi_-$）。在 $\check{P}$ 上有一个偏序 $\leq$：$\check{\lambda}\leq\check{\mu}$ 当且仅当 $\check{\mu}-\check{\lambda}$ 是正余根之和；对 P 也定义了类似的偏序。

$\check{}\,\check{}\,\check{}$ 对于支配余特征 $\lambda\in P_+$，令 $V_{\check{\lambda}}$ 表示 G 的最高 $\check{}\,\check{}\,\check{}$ 权为 λ 的不可约表示。对于三个支配余特征 $\lambda,\check{\mu},\check{\nu}\in P_+$，令

$$c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\check{\mu}}\in\mathbb{N} \tag{3.0.1}$$

表示 $V_{\check{\nu}}$ 在 $V_{\check{\lambda}}\otimes V_{\check{\mu}}$ 中的重数。

3.1. 仿射格拉斯曼与三元组空间。

3.1.1. 仿射格拉斯曼 Gr_G。令 $\mathcal{O}$ 表示形式幂级数环 $\mathbb{C}[[t]]$，令 $\mathcal{K}$ 表示形式洛朗幂级数环 $\mathbb{C}((t))$。

对于一个（经典）栈 $Y\in\mathsf{Stk}^{\mathrm{cl}}_{\mathbb{C}}$，定义正环空间 $Y_{\mathcal{O}}\in\mathsf{Stk}^{\mathrm{cl}}_{\mathbb{C}}$

$$Y_{\mathcal{O}}:\mathrm{CAlg}^{\mathrm{cl}}\to\mathsf{Grpd},R\mapsto Y(R[[t]])$$

以及环空间 $Y_{\mathcal{K}}\in\mathsf{Stk}^{\mathrm{cl}}_{\mathbb{C}}$

$$Y_{\mathcal{K}}:\mathrm{CAlg}^{\mathrm{cl}}\to\mathsf{Grpd},R\mapsto Y(R((t))).$$

我们将重点讨论 Y 是 $\mathbb{C}$ 上的光滑仿射概形的情形。在这种情况下，$Y_{\mathcal{O}}$ 由 $\mathbb{C}$ 上的无限型概形表示。此外，可以定义 $Y_{\mathcal{O}/t^n}\in\mathsf{Stk}^{\mathrm{cl}}_{\mathbb{C}}$

$$Y_{\mathcal{O}/t^n}:\mathrm{CAlg}^{\mathrm{cl}}\to\mathsf{Grpd},R\mapsto Y(R[t]/(t^n)), \tag{3.1.1}$$

它们由 $\mathbb{C}$ 上的光滑仿射概形表示；于是 $Y_{\mathcal{O}}$ 是沿平坦态射取 $Y_{\mathcal{O}/t^n}$ 的逆极限。并且，$Y_{\mathcal{K}}$ 由 $\mathbb{C}$ 上的归纳仿射概形表示，其中包含一个作为闭子概形的 $Y_{\mathcal{O}}$。更多细节可参见 [KV04，第 1] 节。

设 G 是 $\mathbb{C}$ 上的连通约化群。那么 $G_{\mathcal{O}}$ 是一个仿射群概形，而 $G_{\mathcal{K}}$ 是一个包含 $G_{\mathcal{O}}$ 作为闭子群的群 $\widehat{}$ 归纳仿射概形。定义 $G_{\mathcal{O}}:=(G_{\mathcal{O}}\rtimes\mathbb{G}_{\mathrm{m}})\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}},$，其中内层的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 通过对 $\mathcal{O}=\mathbb{C}[[t]]$ 中的环变量 t 进行自然的环旋转来作用。为便于后文使用，我们将内层的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 记作 $\mathbb{G}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{m}}$，将外层的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 记作 $\mathbb{G}^{\mathrm{dil}}_{\mathrm{m}}$。类似地，我们定义 $\widehat{G}_{\mathcal{K}}:=(G_{\mathcal{K}}\rtimes\mathbb{G}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{m}})\times\mathbb{G}^{\mathrm{dil}}_{\mathrm{m}}$。

$\widehat{}$ $\widehat{}$将仿射格拉斯曼量 Gr_G 定义为 fpqc 商 $[G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}]$。它与 $[G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}]$相同。$\widehat{}$仿射格拉斯曼量 Gr_G 由 $\mathbb{C}$上的一个归纳-射影概形表示，并带有一个自然的 $G_{\mathcal{O}}$作用，该作用由左乘给出。此作用的轨道可描述如下。设 $\lambda\in P$为一个余特征，则它确定一个映射 $\mathcal{K}^\times=\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathcal{K})\to T(\mathcal{K})\to G(\mathcal{K})$，其像 t 记为 $t^\lambda\in G(\mathcal{K})$。它在 $\mathrm{Gr}_G(\mathbb{C})=G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$中的像也记为 $t^{\check{\lambda}}$。对于支配余特征 $\lambda\in P_+$，定义 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ 为 $t^{\check{\lambda}}$的 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$轨道。它是 Gr_G的一个局部闭子概形，称为（球面）舒伯特胞腔；它是 $\mathbb{C}$上的光滑簇。令 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ 为它在 Gr_G中的闭包，称为（球面）舒伯特簇；它是 $\mathbb{C}$上的正规射影簇。我们将自然开嵌入记为 $j_{\check{\lambda}}:\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}\hookrightarrow\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$，将自然闭嵌入记为 $i_{\leq\check{\lambda}}:\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}\hookrightarrow\mathrm{Gr}$。$G(\mathcal{K})$上的嘉当分解表明

• 格拉斯曼量$_G(\mathbb{C})=\bigsqcup_{\check{\mu}\in\check{P}_+}$格拉斯曼量$_{\check{\mu}}(\mathbb{C})$；• 格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}(\mathbb{C})=\bigsqcup_{\check{\mu}\leq\check{\lambda}}$格拉斯曼量$_{\check{\mu}}(\mathbb{C})$；因此我们常将格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}$ 记作格拉斯曼量$_{\leq\check{\lambda}}$；• 格拉斯曼量$_G$ 的约化轨迹为：(格拉斯曼量$_G)_{\mathrm{red}}=\mathrm{colim}_{\check{\lambda}\in\check{P}}$格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}$。

$\check{}$ 格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}$ 和格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}$ 的维数均为 $d_{\check{\lambda}}:=\langle2\rho,\lambda\rangle$。注意，对于任意正余根$\check{}\alpha$，有序对$\langle2\rho,\check{}\alpha\rangle\in2\mathbb{Z}$，因此若 $d_{\check{\lambda}}\not\equiv d_{\check{\mu}}$（模 2），则格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}\bigcap$格拉斯曼量$_{\check{\mu}}=\emptyset$。这表明格拉斯曼量$_G=$格拉斯曼量$^0_G\bigsqcup$格拉斯曼量$^1_G$，其中格拉斯曼量$^0_G$是偶分支：(格拉斯曼量$^0_G)_{\mathrm{red}}=\bigcup_{\check{}\lambda\in\check{}P,\ 2|d_{\check{\lambda}}}$格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}$；而格拉斯曼量$^1_G$是奇分支：(格拉斯曼量$^1_G)_{\mathrm{red}}=\bigcup_{\check{}\lambda\in\check{}P,\ 2\nmid d_{\check{\lambda}}}$格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}$。

$\widehat{}$ $\widehat{}$我们通常将 $G_{\mathcal{K}}$ 视为 Gr_G 上的一个 $G_{\mathcal{O}}$-挠子。

$\widehat{}$ $\widehat{}$**引理 3.1.1**。$G_{\mathcal{K}}\to$格拉斯曼量$_G$ 上的 $G_{\mathcal{O}}$-挠子是扎里斯基局部平凡的。

证明。这个引理由 [Zhu17，备注 1.3.8、引理 2.3.5] 得出。□

3.1.2. 三元组空间。设 N 是 G 的一个有限维表示。设 $N_{\mathcal{O}}$（分别为 $N_{\mathcal{K}}$）是 N 的正环空间（分别为环空间）。这里 $N_{\mathcal{O}}$ 是一个仿射概形，与 (2.1.1) 中的 $\mathbb{A}^{\infty}_{\mathbb{C}}$ 同构。我们考虑两个自然的扎里斯基局部平凡纤维丛，它们定义在 Gr_G 上，纤维为 $N_{\mathcal{O}}$。第一个是积 $\mathsf{Gr}_G \times N_{\mathcal{O}}$。第二个是扭曲积（见第 2.3.2 节）：

$$\mathcal{T}_{G,N} := \mathrm{Gr} \widetilde{\times} N_{\mathcal{O}} := \widehat{G}_{\mathcal{K}} \times^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}} N_{\mathcal{O}}.$$

更具体地说，$\mathcal{T}_{G,\ N}$是 $\widehat{G}_{\mathcal{K}} \times N_{\mathcal{O}}$关于 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$-作用 $h \cdot (g, x) = (gh^{-1}, hx)$的 fpqc 商。这里， $N_{\mathcal{O}}$ 上的$\widehat{G}_{\mathcal{O}}$-作用由 $N_{\mathcal{O}}$上的自然 $G_{\mathcal{O}}$-作用、$\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$中环变量 t 上的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-环旋转，以及 N 上的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-伸缩（即标量乘法）给出（因此也作用于 $N_{\mathcal{O}}$、 $N_{\mathcal{K}}$）。

令 $j_1 : \mathsf{Gr}_G \times N_{\mathcal{O}} \to \mathsf{Gr}_G \times N_{\mathcal{K}}$ 表示自然嵌入，并令

$$j_2 : \mathcal{T}_{G,N} \to \mathrm{Gr}_G \times N_{\mathcal{K}},\ [g, s] \mapsto ([g], gs). \tag{3.1.2}$$

这些映射将 $\mathsf{Gr}_G \times N_{\mathcal{O}}$ 和 $\mathcal{T}_{G,\ N}$实现为 $\mathsf{Gr}_G \times N_{\mathcal{K}}$的闭归纳子概形。

注 3.1.1. 存在一个自然同构 $\mathsf{Gr}_G \widetilde{\times} N_{\mathcal{K}} \cong \mathsf{Gr}_G \times N_{\mathcal{K}}, [g, s] \to ([g], gs)$。

定义 3.1.1。三元组空间 $\mathcal{R}_{G,\ N}$ 定义为如下纤维积

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{G,N} & \xrightarrow{i_1} & \mathrm{Gr}_G \times N_{\mathcal{O}} \\ \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle j_1} \\ \mathcal{T}_{G,N} & \xrightarrow[j_2]{} & \mathrm{Gr}_G \times N_{\mathcal{K}} \end{array} \tag{3.1.3}$$

在归纳导出概形的∞-范畴中。

我们也记作

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\leq \check{\lambda}} := \mathcal{T}_{G,N} \times_{\mathrm{Gr}_G} \mathrm{Gr}_{\leq \check{\lambda}}, \mathcal{T}_{\check{\lambda}} := \mathcal{T}_{G,N} \times_{\mathrm{Gr}_G} \mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}; \\ \mathcal{R}_{\leq \check{\lambda}} := \mathcal{R}_{G,N} \times_{\mathrm{Gr}_G} \mathrm{Gr}_{\leq \check{\lambda}}, \mathcal{R}_{\check{\lambda}} := \mathcal{R}_{G,N} \times_{\mathrm{Gr}_G} \mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

以下命题证明见 [CW23]。

命题 3.1.1。

(1) ([CW23，命题 4。7]*)* 归纳导出概形 $\mathcal{R}_{G,\ N}$ 是归纳温和呈现的，并且 (3.1.3)中的所有映射都是几乎归纳有限表示的归纳闭浸入；

(2) ([CW23，命题 4。11]*)* *fpqc* 商 $[G_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}_{G,N}]$ 是可容许、归纳温和呈现的几何导出栈。

对 $[G_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}_{G,N}]$ 有如下一个有用的描述。

命题 3.1.2 （[CW23，命题 4。8]）。 在导出堆的 *1*-范畴中存在一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}_{G,N}] & \xrightarrow{\pi_1} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash N_{\mathcal{O}}] \\ {\scriptstyle \pi_2}\downarrow & & \downarrow \\ [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash N_{\mathcal{O}}] & \longrightarrow & [\widehat{G}_{\mathcal{K}} \backslash N_{\mathcal{K}}]. \end{array} \tag{3.1.5}$$

这里， π_1 是复合 $\widetilde{\pi}_1 \circ i_1$的 $G_{\mathcal{O}}$-商，其中 $\widetilde{\pi}_1$ 是投影格拉斯曼量 $\times N_{\mathcal{O}} \to N_O$；而 π_2 是 i_2 （对 $G_{\mathcal{O}}$取商）与态射 $\widetilde{\pi}_2$: $[G_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{T}] \to [G_{\mathcal{K}} \backslash \mathcal{T}] \cong [G_{\mathcal{O}} \backslash N_{\mathcal{O}}]$的复合。两个态射 π_1 和 π_2 都是归纳真且几乎归纳有限表示的。

定义 3.1.2。 相干层的稳定∞-范畴

$$\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N}) := \mathsf{Coh}([\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}_{G,N}])$$

称为范畴化库仑支。

这个稳定 ∞-范畴的 K 群称为 K 理论库仑分支，如 [BFN18，注 3.14] 中所述。

我们定义 $\mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N})$ 上的两个次数平移等变性 $\{1\}, \langle 1\rangle$ 如下。

定义 3.1.3. 令 wt_n 表示 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 的权为 n 的一维表示。定义

$$\{1\} : \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N}) \to \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N})$$

通过与 $\mathrm{wt}_{-1} \in \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}) = \mathrm{Coh}([\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\backslash 点])$ 作张量积来定义。

$$\langle 1\rangle : \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N}) \to \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N})$$

通过与 $\mathrm{wt}_{-1} \in \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}) = \mathrm{Coh}([\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}\backslash 点])$ 作张量积来定义。[16]

类似地，对于任意复数域 X 上的 $[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}\backslash 点]$, 导出栈，我们都可以通过与相应的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$和 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-表示进行张量积，在 $\mathrm{QCoh}(X)$、$\mathrm{Coh}(X)$ 和 $\mathrm{IndCoh}(X)$ 上定义 $\{1\}$ 和 $\langle 1\rangle$ 函子。

备注 3.1.2。 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变性在 KP_0 上交换约束和纤维函子的构造中发挥着重要作用（见第 6.1 节和 6.2），而 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-等变性则在 Koszul 反常 t-结构的构造中发挥着重要作用（见第 3.3 节）。

在本节剩余部分，我们分别将 $\mathrm{Gr}_G, \mathcal{T}_{G,N}, \mathcal{R}_{G,N}$ 简写为 $\mathrm{Gr}, \mathcal{T}, \mathcal{R}$。

3.2. 卷积

在本小节中，我们研究 $\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 上的幺半结构卷积构造

3.2.1. 根据命题 3.1.5，商导出栈 $[G_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}]$ 可识别为如下纤维积

$$[\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}] \underset{[\widehat{G}_{\mathcal{K}}\backslash N_{\mathcal{K}}]}{\times} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}].$$

这一识别在 $\mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N}) = \mathrm{Coh}([\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}_{G,N}])$ 上给出了自然的卷积构造。更确切地说，考虑卷积图：

$$([\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}_{G,N}]) \times ([\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}_{G,N}]) \xleftarrow{p_{12}\times p_{23}} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}] \underset{[\widehat{G}_{\mathcal{K}}\backslash N_{\mathcal{K}}]}{\times} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}] \underset{[\widehat{G}_{\mathcal{K}}\backslash N_{\mathcal{K}}]}{\times} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}] \xrightarrow{p_{13}} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}_{G,N}].$$

这里 $p_{12}\times p_{23}$ 具有稳定相干拉回，且 p_{13} 是归纳真且几乎归纳有限表示的。因此，卷积乘积可定义为

$$\mathcal{F} * \mathcal{G} := p_{13*}(p_{12}\times p_{23})^*(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}). \tag{3.2.1}$$

根据 [CW23，命题 5.5、命题 5.7]，$\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 上的卷积乘积可扩张为一个幺半群结构，其单位对象是对角映射 $e : [G_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}] \to [G_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}] \underset{[\widehat{G}_{\mathcal{K}}\backslash N_{\mathcal{K}}]}{\times} [G_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}]$ 的推前 $e_*(\mathcal{O}_{[\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}]})$。

我们还介绍 [CW23，第 5 节2] 中定义卷积乘积的第二种方法：在取商 $G_{\mathcal{O}}$之前，先展开上述卷积图。类似的图曾出现在 [BFN18，式 (3.2)] 中。

令 $\widetilde{\mathrm{Gr}} \times \widetilde{\mathcal{R}}$ 为扭曲积 $G_{\mathcal{K}} \times^{G_{\mathcal{O}}} \widetilde{\mathcal{R}}$ 如第 2.3.2 节所述；这个扭曲积有一个自然的投影映射 $p : \widetilde{\mathrm{Gr}} \times \widetilde{\mathcal{R}} \to \mathrm{Gr}$ 到第一因子。扭曲积 $\widetilde{\mathcal{T}} \times \widetilde{\mathcal{R}}$ 是沿投影 $\widetilde{\mathcal{T}} \to \widetilde{\mathrm{Gr}}$ 对 $\widetilde{\mathrm{Gr}} \times \widetilde{\mathcal{R}}$ 作基变换得到的，而 $\widetilde{\mathcal{R}} \times \widetilde{\mathcal{R}}$ 则是沿 $i_2 : \widetilde{\mathcal{R}} \to \widetilde{\mathcal{T}}$对 $\widetilde{\mathcal{T}} \times \widetilde{\mathcal{R}}$ 作进一步基变换得到的。

[16]这里的记号 $\langle 1\rangle$ 与 [CW19] 和 [CW23]不同。

回顾命题 3.1.2，我们有一个映射 $\pi_1 : [G_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}] \to [G_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}]$。我们也用 π_1 表示取 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$ 商之前的映射。令 $\widetilde{d}$ 表示映射 $\mathrm{id} \widetilde{\times} (\pi_1 \times \mathrm{id}) \colon \mathrm{Gr} \widetilde{\times} \mathcal{R} \to \mathrm{Gr} \widetilde{\times} (N_{\mathcal{O}} \times \mathcal{R}) \cong \mathcal{T} \widetilde{\times} \mathcal{R}$。更具体地说，$d$ 是从下式取 $G_{\mathcal{O}}$商后得到的映射

$$\begin{aligned} \mathrm{id} \times (\pi_1 \times \mathrm{id}) : \widehat{G}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{R} &\to \widehat{G}_{\mathcal{K}} \times (N_{\mathcal{O}} \times \mathcal{R}), \\ (g_1, [g_2, s]) &\mapsto (g_1, (g_2 s, [g_2, s])). \end{aligned}$$

我们也将 $\widetilde{m} \colon \mathrm{Gr} \widetilde{\times} \mathcal{R} \to \mathcal{T}$记作复合

$$\mathrm{Gr} \widetilde{\times} \mathcal{R} \xrightarrow{\mathrm{id} \widetilde{\times} i_2} \mathrm{Gr} \widetilde{\times} \mathcal{T} \cong \mathrm{Gr} \widetilde{\times} \mathrm{Gr} \widetilde{\times} N_{\mathcal{O}} \xrightarrow{m_{\mathrm{Gr}} \widetilde{\times} \mathrm{id}} \mathrm{Gr} \widetilde{\times} N_{\mathcal{O}} \cong \mathcal{T},$$

这里，$m_{\mathrm{Gr}} \colon \mathrm{Gr} \widetilde{\times} \mathrm{Gr} \to \mathrm{Gr}$ 是 Gr 的卷积映射，将 $[g, [h]]$ 映至 $[gh]$。

[CW23，命题 5.9] 表明，存在一个 ind-导出概形 $\mathcal{S}$，使其符合以下图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R} \widetilde{\times} \mathcal{R} & \xleftarrow{d} & \mathcal{S} & \xrightarrow{m} & \mathcal{R} \\ {\scriptstyle i_2 \widetilde{\times} \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ \mathcal{T} \widetilde{\times} \mathcal{R} & \xleftarrow{\widetilde{d}} & \mathrm{Gr} \widetilde{\times} \mathcal{R} & \xrightarrow{\widetilde{m}} & \mathcal{T}. \end{array} \tag{3.2.2}$$

其中两个方块均为笛卡尔方块，且所有映射均为 $G_{\mathcal{O}}$-等变。他们还证明，d 具有稳定相干拉回，且 $\widetilde{m}$ 是归纳真且几乎归纳有限表示的；因此，d 和 m 分别具有相同的性质。

令 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$。于是，由第 2.1.2 节的结果，$\mathcal{F} \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}} \times G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R} \widetilde{\times} \mathcal{R})$。由于 d 是 $G_{\mathcal{O}}$-等变的，根据第 2.3.2 节，我们定义卷积乘积为

$$\mathcal{F} * \mathcal{G} := m_* d^* (\mathcal{F} \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G}).$$

在 [CW23 的第 5 节2], 中，证明了此定义与 (3.2.1) 相同。对角映射 e : $[\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}] \to [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}] \underset{[\widehat{G}_{\mathcal{K}}\backslash N_{\mathcal{K}}]}{\times} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}]$ 可识别为 t^0-纤维嵌入的 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$-商

$$t^0 \times \mathrm{id} : N_{\mathcal{O}} \to \mathcal{R},$$

因此，单位对象可识别为 $(t^0 \times \mathrm{id})_* \mathcal{O}_{N_{\mathcal{O}}} \in \mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$。

3.2.2. 刚性。在 [CW23 的第 6], 节中，证明了 Coh 上的幺半结构 $(\mathcal{R}_{G,\ N}, \widehat{G}_{\mathcal{O}})$ 由卷积乘积给出，且是刚性的。下面简要介绍他们的构造。

首先，可以在 Coh 上构造一个 $(-)^*$-对合 。考虑态射

$$\mathrm{inv} : \widehat{G}_{\mathcal{K}} \to \widehat{G}_{\mathcal{K}} \tag{3.2.3}$$

由 $g \mapsto g^{-1}$ 给出。此态射与 $\widehat{G}_{\mathcal{K}}$ 上的两个 $\widehat{G}_{\mathcal{O}} \times \widehat{G}_{\mathcal{O}}$-作用交换：一个是 $(g_1, g_2) \cdot h = g_1 h g_2^{-1}$，另一个是 $(g_1, g_2) \cdot h = g_2 h g_1^{-1}$。定义

$$\iota_{\mathrm{Gr}} : [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\widehat{G}_{\mathcal{K}}/\widehat{G}_{\mathcal{O}}] \to [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\widehat{G}_{\mathcal{K}}/\widehat{G}_{\mathcal{O}}] \tag{3.2.4}$$

为 $\mathrm{inv} : G_{\mathcal{K}} \to G_{\mathcal{K}}$ 的 $G_{\mathcal{O}} \times G_{\mathcal{O}}$ 商，其中 inv 是 $[G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}] = [G_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}]$ 上的一个对合。在 将 $[G_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}]$ 与

$$[\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{pt}] \underset{[\widehat{G}_{\mathcal{K}}\backslash\mathrm{pt}]}{\times} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{pt}]$$

如命题 3.1.5 中所述，ι_{Gr} 成为交换两个因子的态射。

有两个 $N_{\mathcal{O}}$：一个是 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$-作用于 $(h, s) = (g_1 h g_2^{-1}, g_1 s)$，另一个是 $(g_1, g_2) \cdot (h, s) = (g_2 h g_1^{-1}, g_1 s)$。$G_{\mathcal{K}} \times N_{\mathcal{O}}$ 关于第一个 $\widehat{G}_{\mathcal{O}} \times \widehat{G}_{\mathcal{O}}$作用的商自然地同构于 $[G_{\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Gr} \times N_{\mathcal{O}})]$，而 $G_{\mathcal{K}} \times N_{\mathcal{O}}$ 关于第二个作用的商自然同构于 $[G_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{T}]$。

考虑态射 $\mathrm{inv}\times \mathrm{id}_{N_{\mathcal{O}}}$：$G_{\mathcal{K}}\times N_{\mathcal{O}}\to G_{\mathcal{K}}\times N_{\mathcal{O}}$。它交织了上文所述的两个 $G_{\mathcal{O}}\times G_{\mathcal{O}}$作用于 $G_{\mathcal{K}}\times N_{\mathcal{O}}$。我们有以下笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathcal{K}}\times N_{\mathcal{O}} & \xrightarrow{\mathrm{inv}\times N_{\mathcal{O}}} & G_{\mathcal{K}}\times \mathrm{id}_{N_{\mathcal{O}}} \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ G_{\mathcal{K}} & \xrightarrow{\mathrm{inv}} & G_{\mathcal{K}}. \end{array}$$

取商掉 $G_{\mathcal{O}}\times G_{\mathcal{O}}$-作用后，我们构造一个笛卡尔图（使用 [CW23，引理 4.10]）：

$$\begin{array}{ccc} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{O}})] & \xrightarrow{\widetilde{\iota}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{T}] \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}] & \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Gr}}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}]. \end{array} \tag{3.2.5}$$

我们将上述笛卡尔图左右翻转：

$$\begin{array}{ccc} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{T}] & \xrightarrow{\widetilde{\iota}^{-1}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{O}})] \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}] & \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Gr}}^{-1}=\iota_{\mathrm{Gr}}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}]. \end{array} \tag{3.2.6}$$

用相同的方法，我们得到以下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{K}})] & \xrightarrow{\widetilde{\iota}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Gr}\mathbin{\widetilde{\times}} N_{\mathcal{K}})]\cong[\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{K}})] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}] & \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Gr}}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}], \end{array} \tag{3.2.7}$$

右上角的自然同构在注 3.1.1 中讨论。

现在考虑图表（3.2.5）和（3.2.6）在（3.2.7）上的纤维积，我们得到以下笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}] & \xrightarrow{\iota} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}] \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}] & \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Gr}}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}]. \end{array} \tag{3.2.8}$$

这里，ι 也是 $[G_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}]$上的一个对合。将 $[G_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}]$ 与

$$[\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}]\underset{[\widehat{G}_{\mathcal{K}}\backslash N_{\mathcal{K}}]}{\times}[\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}]$$

按照命题 3.1.5 中的方式识别后，ι 就变成了交换两个因子的态射。定义

$$(-)^*:=\iota^*(-):\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})\to\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}). \tag{3.2.9}$$

通过在构造中将 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 替换为 $\mathsf{IndCoh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$，即可在 $\mathsf{IndCoh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 上定义同一个对合。

其次，我们构造 Grothendieck-Serre 对偶函子

$$\mathbb{D}(-):\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}).$$

令 π：格拉斯曼量 $\to$ 点为投影，并定义 $\omega_{\mathrm{Gr}} := \pi^!(\mathcal{O}_{\mathrm{pt}}) \in \mathsf{IndCoh}^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量)。回忆一下，$i_1$：$\mathcal{R} \to$ 格拉斯曼量 $\times N_{\mathcal{O}}$表示 (3.1.3) 中的定义嵌入，并记 p_1：格拉斯曼量 $\times N_{\mathcal{O}} \to$ 格拉斯曼量为投影到第一因子的投影。定义

$$\omega := i_1^! p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}}) \in \mathsf{IndCoh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}).$$

and

$$\mathbb{D}(-) := \mathcal{H}om(-, \omega) : \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})^{\mathrm{op}} \to \mathsf{IndCoh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}). \tag{3.2.10}$$

关于 ! 拉回和 $\mathcal{H}om$ 函子的讨论，请参见第 2.2.6 节和 2.3.3 节。

以下命题见 [CW23，第 6] 节。

命题3.2.1。

(1) 幺半-范畴 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 是刚性的（[CW23，命题 6.5]）；(2) 对任意 $\mathcal{F} \in \mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$，其右对偶 $\mathcal{F}^R$ 由 $\mathbb{D}(\mathcal{F})^*$ 给出，左对偶 $\mathcal{F}^L$ 由$\mathbb{D}(\mathcal{F}^*)$ 给出（[CW23，命题 6.8]）。特别地，$\mathbb{D}(\mathcal{F}) \cong (\mathcal{F}^R)^* \in \mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$，且 $\mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{F}) \cong ((\mathcal{F}^R)^{**})^L \cong \mathcal{F}$。

取 $N = 0$，函子 $\mathbb{D}(-) : \mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 变为 $\mathbb{D}_{\mathrm{Gr}}(-) := \mathcal{H}om(-, \omega_{\mathrm{Gr}}) : \mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$。这些函子称为 Grothendieck-Serre 对偶函子。

3.3. **Koszul 反常 t-结构**。本小节回顾 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N})$ 在 [CW23] 中的 Koszul 反常 t-结构。在讨论一些次数修正之后，我们将首先介绍 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$ 上的 perverse t-结构，其次介绍 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$ 和 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 上的 Koszul 反常 t-结构。

3.3.1. 对 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G)$ 的次数修正。在进入主要讨论之前，我们先说明 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$ 及相关范畴中一个次数问题（见 [CW19，第 2.1] 节）。回顾 $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}^0 \bigsqcup \mathrm{Gr}^1$，其中 Gr^0 和 Gr^1 分别是偶胞腔和奇胞腔的并。我们希望修正 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$，以

得到 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr})$（分别为 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{\langle 1/2\rangle}(\mathrm{Gr})$）。这些新范畴本质上与 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$ 相同，不同之处仅在于，形式上 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}^1)$ 中对象的上同调次数（分别为 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-次数）属于 $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$。这些修正将在讨论（Koszul）perverse t-结构时使用。

按照 [Fed21 第 1.2 节1]，我们将这些修改严谨化。

定义 **3.3.1.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有自等价 T 的（∞-）范畴。定义新范畴

$$\mathcal{C}[\sqrt{T}] := \mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-$$

为两个 $\mathcal{C}$ 的积。这个分解也赋予其 $\mathcal{C}[\sqrt{T}]$ 一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次。若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}[\sqrt{T}]$ 的一个对象，我们将视为 $\mathcal{C}^{\pm} \subset \mathcal{C}[\sqrt{T}]$ 的对象的 $\mathcal{F}$ 记作 $\mathcal{F}^{\pm}$。

定义 $\mathcal{C}[\sqrt{T}]$ 的自等价 $\sqrt{T}$ 如下：

$$\sqrt{T}(\mathcal{F}^+) = \mathcal{F}^-, \quad \sqrt{T}(\mathcal{F}^-) = T(\mathcal{F})^+.$$

注意，$T \cong (\sqrt{T})^2$。

回顾一下 [1]：$\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}) \to \mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$ 表示上同调分次平移，而 $\langle 1\rangle : \mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}) \to \mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$ 表示 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$ 分次平移（定义 3.1.3）。分解

$$\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}) = \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}^0) \times \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}^1)$$

可以视为一种 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次。

定义 3.3.2. 考虑 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})[\sqrt{[1]}]$。$\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})[\sqrt{[1]}]$ 上有一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次：一种$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次来自 Gr 的奇偶分解，另一种则来自平方根构造。我们沿对角嵌入 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,限制这个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次，并定义

$$\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr}) := \left(\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})\left[\sqrt{[1]}\right]\right)_+$$

是这个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次的 0 次部分。

将 $[1]$ 替换为 $\langle 1\rangle$后，我们可以进行相同的构造。于是定义

$$\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\langle 1/2\rangle}(\mathrm{Gr}) := \left(\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})\left[\sqrt{\langle 1\rangle}\right]\right)_+.$$

上述构造也适用于其他层范畴（例如，QCoh(Gr)、IndCoh(Gr)），以及具有此类自然奇偶分解的其他空间（例如，$\mathcal{R},\mathcal{T},\mathcal{R}\widetilde{\times}\mathcal{R}$, 等）。由 (3.1.3) 和 (3.2.2) 中的态射定义的拉回-推前函子，也有适应这些范畴的相应自然修改。

为简化记号，我们分别用 $\left[\frac{1}{2}\right]$和 $\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle$表示 $\sqrt{[1]}$和 $\sqrt{\langle 1\rangle}$。

注 3.3.1. 稍后我们将讨论 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr})$ 上的 perverse t-结构，以及 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{\langle 1/2\rangle}(\mathrm{Gr})$、$\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{\langle 1/2\rangle}(\mathcal{R})$ 上的 Koszul perverse t-结构。Koszul perverse t-结构是本文的核心。因此，为简化记号，在这些情形下，我们仅用 Coh（相应地，QCoh、IndCoh）表示 $\mathsf{Coh}^{\langle 1/2\rangle}$（相应地，$\mathsf{QCoh}^{\langle 1/2\rangle}$、$\mathsf{IndCoh}^{\langle 1/2\rangle}$）。

3.3.2. *Coh* 上的 *perverse t*-结构 复数域$G_{[1/2]}$(格拉斯曼量$_G$)。我们首先讨论 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr})$ 上的*perverse*（相干）*t*-结构，该结构由 [AB10、BFM05、CW19] 引入并研究。

令GS-不变的（经典）局部闭子概形。令 $a_S: S\to$ 点为投影。令 $\omega_S := a_S^!(\mathcal{O}_{\mathrm{pt}})\in\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(S)$ [17] 为我们固定的对偶化复形。定义 Grothendieck–Serre 对偶函子如下：

$$\mathbb{D}_S(-) := \mathcal{H}om(-,\omega_S): \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S). \tag{3.3.1}$$

定义 3.3.3 ([AB10])。定义以下满∞-子范畴

$$\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\leq 0}_{p}, \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\geq 0}_{p}$$

$\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)$，如下所示：

- $\mathcal{F}\in\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\leq 0}_{p}$当且仅当对所有 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}\subset S$，$(\mathcal{F})\in\mathsf{QCoh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}$(格拉斯曼量$_{\check{\lambda}})^{\leq -\frac{1}{2}d_{\check{\lambda}}}$（回忆一下 $d_{\check{\lambda}}=\dim\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$），$\bullet\,\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\geq 0}_{p} := \mathbb{D}\left(\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\leq 0\ \mathrm{op}}_{p}\right)$。

定理 3.3.1. [AB10] 这一对 $\left(\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\leq 0}_{p}, \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\geq 0}_{p}\right)$ 定义了一个有界且有限长度的 *t*-结构，赋予 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)$，称为（中间）*perverse t*-结构。

这一 perverse t-结构是可构造层的 perverse t-结构的相干类比，见 [BBD82], ，并且具有许多类似性质。例如，给定一个 $G_{\mathcal{O}}$-不变闭子概形

[17]当 a_S 是适当的时，我们按第 2.2.6 节中的方式定义 $a_S^!$。一般而言，令 S 为 S 在 $\overline{\mathrm{Gr}}$ 中的闭包。我们可以将 $a_S: S\to$ pt 分解为 $S\xrightarrow{j_S}\overline{S}\xrightarrow{a_{\overline{S}}}$pt，其中 $j_{S\hookrightarrow\overline{S}}$ 是一个开嵌入，而 $a_{\overline{S}}$ 是一个适当态射。然后通过复合 $j^*_{S\hookrightarrow\overline{S}}\circ a^!_{\overline{S}}$定义 $a_S^!$。我们不讨论非适当态射的 !-拉回函子的函子性。关于这一方面的更多讨论，请参阅 [GR17] 。

$Z \xrightarrow{i} S$，推前 $i_*\colon \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(Z) \to \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)$ 是 perverse t-正合的；给定一个 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$-不变开子概形 $U \xrightarrow{j} S$，拉回 $j^*\colon \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S) \to \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(U)$ 是 perverse t-正合的。

回顾一下，对于第 2.2.3 节中的任意合理表示 $\mathrm{Gr} \cong \mathrm{colim}_\alpha \mathrm{Gr}_\alpha$ as，都有 $\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr}) \cong \mathrm{colim}_\alpha \mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr}_\alpha)$。那么，$\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr}_\alpha)$ 上的 perverse t-结构通过 [CW23，引理 4.13] 粘合为 $\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr})$ 上的 perverse t-结构。换言之，$\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr})$ 上的 perverse t-结构

$$\left(\mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr})^{\leq 0}_{p}, \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr})^{\geq 0}_{p}\right)$$

可以定义为唯一的 t-结构，使得对于任意 $G_{\mathcal{O}}$-不变闭子概形 S，推送-前 $i_{S*}\colon \mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S) \to \mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr})$ 相对于 $\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)$ 上的 perverse t-结构是 t-正合的。

我们记 $\mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(S)$ 和 $\mathrm{P}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr})$ 为 perverse t-结构的心。心中的对象称为错 pervers（相干）层。余 perverse 层的阿贝尔范畴具有一些良好的性质，概述如下定理。

定理 3.3.2. [AB10,Sec. 4]

(1) 心 $\mathrm{P}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr})$ 是一个有限长度阿贝尔范畴，并且在 ***Grothendieck-Serre*** 对偶函子 $\mathbb{D}_{\mathrm{Gr}}$ 作用于 $\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr})$ 下保持稳定；

(2) 对于任意舒伯特胞腔 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ 以及自然嵌入 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}} \xrightarrow{j_{\check{\lambda}}} \mathrm{Gr}_{\check{\lambda}} \xrightarrow{i} \mathrm{Gr}$，存在一个称为中间延拓函子的全忠实函子

$$j_{\check{\lambda},p!*}\colon \mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}) \to \mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}}). \tag{3.3.2}$$

它满足 $j^*_{\check{\lambda}} \circ j_{\check{\lambda},p!*} \cong \mathrm{id}$。 $\mathcal{F} \in \mathrm{P}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}})$ 中的一个反常层属于 $j_{\check{\lambda},p!*}$ 的本质像，当且仅当

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0 \ \textit{for all}\ \mathcal{G} \in \mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}}) \ \textit{such that}\ \mathrm{Supp}\,\mathcal{G} \cap \mathrm{Gr}_{\lambda} = \emptyset \\ &\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = 0 \ \textit{for all}\ \mathcal{G} \in \mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}}) \ \textit{such that}\ \mathrm{Supp}\,\mathcal{G} \cap \mathrm{Gr}_{\lambda} = \emptyset \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

这两个条件分别等价于

$$\begin{aligned} &\mathrm{codim}\,\mathrm{Supp}\,\mathcal{H}^{k-\frac{1}{2}d_{\check{\lambda}}}(\mathcal{F}) \geq 2k+2 \ \textit{for all}\ k \geq 1, \\ &\mathrm{codim}\,\mathrm{Supp}\,\mathcal{H}^{k-\frac{1}{2}d_{\check{\lambda}}}(\mathbb{D}_{\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}}}(\mathcal{F})) \geq 2k+2 \ \textit{for all}\ k \geq 1. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

令 $\mathrm{P}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}})_{!*}$ 为 $j_{\check{\lambda},p!*}$的本质像。因此，$j_{\check{\lambda},p!*}$ 给出一个等价

$$\mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}) \cong \mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}})_{!*}.$$

(3) $\mathrm{P}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr})$ 的简单对象具有如下形式：$i_{\leq \check{\lambda}*} j_{\check{\lambda},p!*})$ ，其中 $\check{\lambda} \in \check{P}_+$ 为某个简单对象，且 $\mathcal{L} \in \mathrm{P}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}})$。

让我们更明确地描述 $\mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr})$ 中的简单对象。记 $\widehat{P}_{\check{\lambda}}$ 为相对于 $G_{\mathcal{O}}$ 在 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ 上的作用，$t^{\check{\lambda}}$ 的稳定子。商栈 $[G_{\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}]$ 可以与 $[P_{\check{\lambda}} \backslash \mathrm{pt}]$ 等同。这给出了一个等价：

$$\mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}) \cong \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}) \cong \mathrm{Coh}^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}}(\mathrm{pt}) \cong \mathrm{D}^b(\mathrm{Rep}(\widehat{P}_{\check{\lambda}})).$$

$\mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}})$上的 perverse t-结构对应于 $\mathrm{D}^b(\mathrm{Rep}(\widehat{P}_{\check{\lambda}}))$上的标准 t-结构。因此，$\mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}) \cong \mathrm{Rep}(\widehat{P}_{\check{\lambda}})$ 作为阿贝尔范畴。令 $L_{\check{\lambda}} \subset G$ 为 G 的子群，由 T 以及 G 中满足 $\langle \alpha, \check{\lambda} \rangle = 0$的那些根所对应的根子群 U_α 生成。那么 $\widehat{P}_{\check{\lambda}}$ 的 Levi商同构于

于 $L_{\check\lambda}\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$。 $L_{\check\lambda}$的不可约表示由权集 $\mu\in P$标记，这些权相对于 $L_{\check\lambda}$是支配的。这样的对$(\check\lambda,\mu)$ $\in\check P\times P$称为支配对。支配对的子集记作$(\check P\times P)_{\mathrm{dom}}$；该集合与$(\check P\times P)/W$一一对应。令$\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}$为 $\mathrm{Gr}_{\check\lambda}$ 上的 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$-等变层，它对应于 $L_\mu\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$的$(\mu,0,0)$-表示。于是我们得到

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{P}_{\mathrm{coh}}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{\check\lambda}))=\{\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}[\tfrac12 d_{\check\lambda}]\{m\}\langle n\rangle : m,n\in\mathbb{Z},\mu\in P \text{ such that } (\check\lambda,\mu)\in(\check P\times P)_{\mathrm{dom}}\}.$$

这里，Irr 表示阿贝尔范畴中的简单对象。

现在，对于一个支配对 $(\check\lambda,\mu)$，我们定义 $\mathrm{P}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr})$ 中的一个简单对象：

$$\overline{\mathcal{L}}^{p}_{\check\lambda,\mu}:=i_{\leq\check\lambda *}j_{\check\lambda,p!*}(\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}[\tfrac12 d_{\check\lambda}]). \tag{3.3.5}$$

由定理 3.3.2，得到

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{P}_{\mathrm{coh}}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}))=\{\overline{\mathcal{L}}^{p}_{\check\lambda,\mu}\{m\}\langle n\rangle\colon m,n\in\mathbb{Z},(\check\lambda,\mu)\in(\check P\times P)_{\mathrm{dom}}\}. \tag{3.3.6}$$

在本部分的最后，我们按照[Sch15] 和 [Xin25]的做法，介绍中间延拓函子的一个显式公式。该公式还使得这个函子能够在更广泛的情形下定义，我们将在第 5.3 节中用到它。[18]

设 X 是 复数域 $\mathbb{C}$上的一个簇，带有一个仿射群概形 H的作用。设 ω_X 是我们为 a 固定的对偶化复形 $a^!\mathcal{O}_{\mathrm{pt}}$： $X\to$点。[19] 我们记

$$\mathcal{D}_X(-):=\mathcal{H}om(-,\omega_X[-\dim X]):\mathsf{Coh}^H(X)^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Coh}^H(X), \tag{3.3.7}$$

它是 Grothendieck-Serre 对偶函子的上同调移位版本。

设 $\mathsf{Refl}^H(X)\subset\mathsf{Coh}^H(X)^\heartsuit$为由 H-等变反身相干层构成的加性全子范畴，其中「反身」的含义见 [Sta25, Tag 0AVU]。

定义 3.3.4. （1）定义

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{IC}}_X:\mathrm{Refl}^H(X)&\to\mathsf{Coh}^H(X)\\ \mathcal{F}&\mapsto(\tau_{\leq\ell-1}\circ\mathcal{D}_X\circ\tau_{\leq\ell-2}\circ\mathcal{D}_X\circ\cdots\circ\mathcal{D}_X\circ\tau_{\leq1}\circ\mathcal{D}_X)(\mathcal{F}).\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

这里，ℓ是任意满足 $2\ell+1\geq\dim X$ 的奇整数。根据 [Sch15, Prop. 22.2], 的证明，对于任意两个满足条件的 ℓ_1,ℓ_2，由上述公式得到的函子都可以典范地识别。

（2）假设 X 正规。设 U 为一个 H-不变开子集，且 $\mathrm{codim}(X\setminus U)\geq 2$。记 $\mathsf{VB}^H(U)\subset\mathsf{Coh}^H(U)^\heartsuit$为由有限秩 H-等变局部自由层构成的加性全子范畴。根据 [Sta25, Tag 0AY6], $\mathcal{H}^0(j_*(-))$ 定义了一个函子 $\mathsf{VB}^H(U)\to\mathsf{Refl}^H(X)$。定义

$$\begin{aligned}\mathcal{IC}_{U\subset X}:\mathrm{VB}^H(U)&\to\mathsf{Coh}^H(X)\\ \mathcal{E}&\mapsto\widetilde{\mathcal{IC}}_X\circ\mathcal{H}^0(j_*(\mathcal{E})).\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

$\widetilde{\ }$在上下文明确时，我们通常分别省略下标 X 和 $U\subset X$。由于根据定义， $\mathcal{IC}$ 和 $\mathcal{IC}$函子与遗忘 H-等变性相容，因此在遗忘 H-等变性前后，我们使用相同的记号。

以下命题已在 [Xin25，命题 4.7], 中证明，其采用了与 [Sch15，命题 21.1]相同的方法。

---

[18]更明确地说，我们想在 $\mathrm{Gr}\,\widetilde{\times}\,\mathrm{Gr}$ 上使用某个中间延拓函子。注意，$\mathrm{Gr}\,\widetilde{\times}\mathrm{Gr}^{\widehat{\ }}$ $\widetilde{\ }$上的 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$-轨道不具有奇偶性；这意味着，如果两个 $G_{\mathcal{O}}$-轨道 $\mathcal{O}_1$， $\mathcal{O}_2\subset\mathrm{Gr}\times\mathrm{Gr}$ 满足 $\mathcal{O}_1\supset\mathcal{O}_2$，那么 $\dim\mathcal{O}_1$ 和 $\dim\mathcal{O}_2$ 未必具有相同的奇偶性。因此，我们无法在 $\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}\,\widetilde{\times}\,\mathrm{Gr})$ 上定义某种中间相干周 perverse t-结构，以使用 [AB10，定理 4.2].[19]我们假设 X 如前一条脚注 17 所述是 H-可嵌入的。在我们的情形中，这一条件总是成立。

命题 3.3.1（[Sch15，命题 21。1]，[Xin25，命题 4。7]）。令 $\mathcal{C} \in \mathsf{Coh}^H(X)$。假设我们有以下支撑条件

$$\text{codim Supp } \mathcal{H}^k\mathcal{C} \geq 2k+2 \text{ 且 codim Supp } \mathcal{H}^k\mathcal{D}_X(\mathcal{C}) \geq 2k+2 \text{ 对所有 } k \geq 1, \tag{3.3.10}$$

且 $j^*\mathcal{H}^0\mathcal{C}$ 是局部自由的。因此存在自然同构 $\mathcal{C} \cong \mathcal{IC}(j^*\mathcal{H}^0\mathcal{C})$。

注释 3.3.2。

(1) 在 [Sch15][Xin25]，中，他们在非等变情形下陈述了这一结果，但证明实际上可推广到 H-等变情形。(2) 在 [Xin25, 命题 4.7]，中，作者假设了 $\mathcal{C} \in \mathsf{Coh}^H(X)^{\geq 0}$。利用 [Sch15, 引理 17.5]，可从 (3.3.10) 中的第二个支撑条件推导出这一条件。

在 $H = \widehat{G}_{\mathcal{O}}, X = \mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}, U = \mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ 的情形下，我们由 (3.3.4) 推得：对于任意 $\mathcal{E} \in$ 向量丛 $^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}})$,

$$j_{\check{\lambda},p!*}(\mathcal{E}[\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}]) \cong \mathcal{IC}(\mathcal{E})[\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}],$$

and

$$\mathcal{H}^k\mathcal{IC}(\mathcal{E}) \text{ 的支持的余维 } \geq 2k+2 \text{ 且 } \mathcal{H}^k\mathcal{D}_X(\mathcal{IC}(\mathcal{E})) \text{ 的支持的余维 } \geq 2k+2 \text{ 对所有 } k \geq 1. \tag{3.3.11}$$

3.3.3. *Coh* 上的 *Koszul* 周 *pervers t*-结构复数域$\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量$\mathrm{Gr}_G$)。为了在 $\widehat{\mathsf{Coh}}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$上定义所谓的 Koszul 周 pervers t-结构，我们需要引入 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$ 上的 Koszul 周 pervers t-结构，它是 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(\mathrm{Gr})$ 上 perverse t-结构的分次平移。

设 $S \subset \mathrm{Gr}^{\epsilon}$ 是一个对 $\epsilon \in \{0,1\}$ 不变的子概形。令 $(\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\leq 0}_p, \widehat{\mathsf{Coh}}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\geq 0}_p)$ 为 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)$ 上的perverse t-结构。

首先，由于 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$在 $\widehat{G}_{\mathcal{O}} = (G_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}})$ 中的 $\times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$在 S 上平凡作用，我们得到如下由该 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-等变性给出的权分解：

$$\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(S)_n.$$

分次平移 $\langle 1\rangle$ 的次数为 -1。

根据定义 3.3.3，perverse t-结构与该权分解相容，这意味着我们有如下权分解

$$\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\leq 0}_p = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\leq 0}_{p,n}\ ,\ \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\geq 0}_p = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\geq 0}_{p,n}.$$

接下来，考虑如下分次平移。其基本思想源自 Koszul 对偶。

定义 3.3.5 定义。定义 ∞-子范畴 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(S)^{\leq 0}{}_{\mathrm{K}p}$,$\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(S)^{\geq 0}{}_{\mathrm{K}p}\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(S)$ 如下 s:

$$\begin{aligned} \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(S)^{\leq 0}_{\mathrm{K}p} &:= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\leq 0}_{p,n}[-n][\tfrac{\epsilon}{2}]\langle\tfrac{\epsilon}{2}\rangle, \\ \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(S)^{\geq 0}_{\mathrm{K}p} &:= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{[1/2]}(S)^{\geq 0}_{p,n}[-n][\tfrac{\epsilon}{2}]\langle\tfrac{\epsilon}{2}\rangle; \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

这里，$[\frac{\epsilon}{2}]\langle\frac{\epsilon}{2}\rangle$的原因参见第 3.3.1 节。这将定义 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(S)$ 上的一个 t-结构，称为**Koszul 周 pervers t-结构**。Koszul 周 pervers t-结构的心记作 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\text{上同调}}(S)$。它可以分解为

$$\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(S) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{P}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(S)_n[-n][\tfrac{\epsilon}{2}]\langle\tfrac{\epsilon}{2}\rangle. \tag{3.3.13}$$

类似地，我们也在 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$ 上得到 Koszul 周 pervers t-结构。

相对于 perverse t-结构，有两个 t-正合的分次平移：$\{1\}$ 和 $\langle 1\rangle$。类似地，相对于 Koszul 周 pervers t-结构，也有两个 t-正合的分次平移：$\{1\}$ 和 $[1]\langle 1\rangle$。我们将 $[1]\langle 1\rangle$ 记为 $(1)_K$，并称之为 Koszul 平移。（我们添加下标 $_K$，以将其与霍奇模的 Tate 扭曲区分开。）

Th中间延拓函子（3.3.2）可以转移到 Koszul 反常层上。

$$j_{\check\lambda,!*}:\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_{\check\lambda})\to\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check\lambda}). \tag{3.3.14}$$

借助恒等式 (3.3.13)；更确切地说，对于 $\mathrm{Gr}_{\check\lambda}$ 上具有 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-权 n 的 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$-等变向量丛 $\mathcal{E}$，我们有 $\mathcal{E}[-n+\frac{1}{2}d_{\check\lambda}]\in\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_{\check\lambda})$，并且

$$j_{\check\lambda,!*}(\mathcal{E}[\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}-n]):=j_{\check\lambda,p!*}(\mathcal{E}[\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}])[-n]=\mathcal{IC}(\mathcal{E})[\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}-n]. \tag{3.3.15}$$

$j_{\check\lambda,!*}$ 的本质像记作

$$\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check\lambda})_{!*}; \tag{3.3.16}$$

Koszul 周反层属于这个全子范畴的判据与 (3.3.3) 类似。

对于一个支配对 $(\check\lambda,\mu)\in(\check P\times P)_{\mathrm{dom}}$，我们定义

$$\overline{\mathcal{L}}_{\check\lambda,\mu}:=\overline{\mathcal{L}}^{p}_{\check\lambda,\mu}(-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda})_K=i_{\leq\check\lambda *}j_{\check\lambda,!*}(\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle)=i_{\leq\check\lambda *}\mathcal{IC}(\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu})\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle. \tag{3.3.17}$$

根据错 perversity 心中简单对象的描述 (3.3.6)，我们得到 Koszul perversity 心中简单对象集合的如下描述：

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}))=\{\overline{\mathcal{L}}_{\check\lambda,\mu}\{m\}(n)_K\colon m,n\in\mathbb{Z},(\check\lambda,\mu)\in(\check P\times P)_{\mathrm{dom}}\}. \tag{3.3.18}$$

3.3.4. *Coh* 上的 *Koszul* 周 *pervers t*-结构 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N})$。现在，可以构造 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 上的 Koszul 周 pervers t-结构，这是 [CW23] 的主要成果之一。下面我们总结这一 t-结构的主要特征，更多详情请参阅同上。

我们用 $i_1\colon\mathcal{R}\to\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{O}},i_2\colon\mathcal{R}\to\mathcal{T}$ 表示 (3.1.3) 中的定义嵌入，用 $p_1\colon\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{O}}\to\mathrm{Gr},p_2\colon\mathcal{T}\to\mathrm{Gr}$ 表示投影，并用 $\sigma_1\colon\mathrm{Gr}\to\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{O}},\sigma_2\colon\mathrm{Gr}\to\mathcal{T}$ 表示零截面的嵌入。态射 σ_1,σ_2 具有稳定相干拉回（见例 2.2.2）。

令 S 为 Gr 的闭子概形。我们分别用 $\mathcal{R}_S,\mathcal{T}_S$ 表示 $\mathcal{R},\mathcal{T}$ 到 S 的基变换。我们滥用记号，将 $\sigma_1,\sigma_2,i_1,i_2,p_1,p_2$ 沿 $S\to\mathrm{Gr}$ 的基变换记为相同的符号。

定理 3.3.3。

(1)（[CW23，命题 3.16]）在 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(S\times N_{\mathcal{O}})$（分别地，$\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{T}_S)$）上存在唯一的 *t*-结构，使得拉回

$$\sigma_1^*:\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(S\times N_{\mathcal{O}})\to\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(S)$$

$$(\textit{resp. }\sigma_2^*:\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{T}_S)\to\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(S))$$

沿零截面是 *t*-正合的，其中 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(S)$ 上赋有 *Koszul perverse t*-结构。该 *t*-结构在 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(S\times N_{\mathcal{O}})$（分别地，$\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{T}_S)$）上也称为 *Koszul perverse t*-结构。

此外，这个 *t*-结构是有界且有限长度的，并且由 p_1^* 和 σ_1^*（分别由 p_2^* 和 σ_2^*）给出的 *Koszul* 反常心中的简单对象之间存在一一对应：

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(S))\underset{\sigma_1^*}{\overset{p_1^*}{\rightleftarrows}}\mathrm{Irr}(\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(S\times N_{\mathcal{O}})) \tag{3.3.19}$$

$$(\textit{resp.}\quad\mathrm{Irr}(\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(S))\underset{\sigma_2^*}{\overset{p_2^*}{\rightleftarrows}}\mathrm{Irr}(\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{T}_S))\ ).$$

(2) ([复数域 W23，定理 3.1，定理 4。1]*)* 在 $\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_S)$ 上存在唯一的 *t*-结构，使得

$$i_{1*}:\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_S)\to\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(S\times N_\mathcal{O})$$

关于 $\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{T}_S)$ 上的 *Koszul* 对偶 *perverse* 结构是 *t*-正合的唯一 *t*-结构：

$$i_{2*}:\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_S)\to\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathcal{T}_S)$$

关于$\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{T}_S)$上的 *Koszul* 周 *pervers t*-结构是 *t*-正合的。这一$\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_S)$ 上的 *t*-结构也称为 *Koszul* 周 *pervers t*-结构。

此外，这个 *t*-结构有界且具有有限长度，并且$\mathrm{KP}^{G_\mathcal{O}}{}_{\mathrm{coh}}(S\times N_\mathcal{O})$ 与$\mathrm{KP}^{G_\mathcal{O}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_S)$中的简单对象之间存在一一对应。

(3) ([CW23, 命题 3.11、3.13、3.24]*)* 对于一个 $\widehat{G}_\mathcal{O}$-不变子概形 $Z\xrightarrow{i}S$，推前 $\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_Z)\to\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_S)$ 是 *Koszul* 反常 *t*-正合的。对于一个 $\widehat{G}_\mathcal{O}$-不变开子概形 $U\xrightarrow{j}S$，拉回 $j^*:\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_S)\to\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_U)$ 是 *Koszul* 反常 *t*-正合的。

(4) ([CW23, 定理 4.1]*)* 由于

$$\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}\times N_\mathcal{O})\cong\operatorname*{colim}_\alpha\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_\alpha\times N_\mathcal{O}),$$
$$(resp.\ \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathcal{T})\cong\operatorname*{colim}_\alpha\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathcal{T}_{\mathrm{Gr}_\alpha}),$$
$$\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathcal{R})\cong\operatorname*{colim}_\alpha\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_{\mathrm{Gr}_\alpha})).$$

对于第 *2.2.3* 节中的任意合理表示 $Gr\cong colim_\alpha Gr_\alpha$，$Coh^{G_\mathcal{O}}(Gr_\alpha\times N_\mathcal{O})$（分别为 $Coh^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{T}_{\mathrm{Gr}_\alpha})$、$Coh^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_{\mathrm{Gr}_\alpha})$）上的 *Koszul* 反常 *t*-结构，通过 [*CW23*，引理 *4.13*]，粘合为 $Coh^{G_\mathcal{O}}(Gr\times N_\mathcal{O})$（分别为 $Coh^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{T})$、$Coh^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R})$）上的 *Koszul* 反常 *t*-结构。

注 3.3.3. 通过类似于 [CW23, 命题 3.2]，的一些范畴论论证，可以将 $\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(X)$ 上的 Koszul perverse t-结构（此处 X 表示 $S,S\times N_\mathcal{O},\mathcal{R}_S,$格拉斯曼量,格拉斯曼量 $\times N_\mathcal{O},\mathcal{R},$ 等）扩张为 $\mathrm{IndCoh}^{G_\mathcal{O}}(X)$（分别为 $\mathrm{QCoh}^{G_\mathcal{O}}(X)$ 上的一个 t-结构：将 $\mathrm{IndCoh}^{G_\mathcal{O}}(X)^{\leq 0}\mathrm{K}_p$（分别将 $\mathrm{QCoh}^{G_\mathcal{O}}(X)^{\leq 0}\mathrm{K}_p$）定义为由 $\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(X)^{\leq 0}\mathrm{K}_p$（分别由 $\mathsf{Coh}^{G_\mathcal{O}}(X)^{\leq 0}\mathrm{K}_p$）经扩张和余极限生成的满 1-子范畴；并将 $\mathrm{IndCoh}^{G_\mathcal{O}}(X)^{\geq 0}\mathrm{K}_p$（分别将 $\mathrm{QCoh}^{G_\mathcal{O}}(X)^{\geq 0}\mathrm{K}_p$）定义为 $\mathrm{IndCoh}^{G_\mathcal{O}}(X)^{\leq 0}\mathrm{K}_p$（分别为 $\mathrm{QCoh}^{G_\mathcal{O}}(X)^{\leq 0}\mathrm{K}_p$）的右正交。我们将这些 Koszul 反常 t-结构的心记作 $\mathrm{KP}^{G_\mathcal{O}}\mathrm{indcoh}(X)$（分别记作 $\mathrm{KP}^{G_\mathcal{O}}\mathrm{qcoh}(X)$）。这些扩张并非本文主要内容所涉及，但会用于一些论证；例如，下文 (3.3.23) 对简单对象的描述。

让我们更明确地描述 $\mathrm{KP}^{G_\mathcal{O}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R})$ 中的简单对象。令 $\mathrm{cl}:\mathcal{R}^{\mathrm{cl}}_{\check\lambda}\to\mathcal{R}_{\check\lambda}$ 为经典轨迹嵌入，并令 $p^{\mathrm{cl}}:\mathcal{R}^{\mathrm{cl}}_{\check\lambda}\to$ 格拉斯曼量$_{\check\lambda}$ 为投影（它是一个无限维向量丛）。于是

$$\mathrm{Irr}\,\mathrm{KP}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{\check\lambda})=\{\mathrm{cl}_*p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle)\{m\}(n):m,n\in\mathbb{Z},\mu\text{ dominant for }L_{\check\lambda}\}.\tag{3.3.20}$$

令 $j_{\check\lambda}:\mathcal{R}_{\check\lambda}\to\mathcal{R}_{\leq\check\lambda},i_{\leq\check\lambda}:\mathcal{R}_{\leq\check\lambda}\to\mathcal{R}$ 为嵌入。定义

$$\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}:=\text{the socle of }\mathcal{H}^0_K(j_{\check\lambda*}\mathrm{cl}_*p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle)).\tag{3.3.21}$$

这里，我们将 $j_{\check\lambda*}\mathrm{cl}_*p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}\langle-\frac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle)$ 视为 $\mathrm{IndCoh}^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_{\leq\check\lambda})$ 中的一个对象，而 $\mathcal{H}^0_K$表示 $\mathrm{IndCoh}^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R})$ 上 Koszul 周 pervers t-结构的上同调函子。根据 [CW23，第 3.28] 条命题 $\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}$ 是 $\mathrm{KP}^{G_\mathcal{O}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{\leq\check\lambda})$ 中满足以下条件的一个简单对象

$$j^*_{\check\lambda}(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu})\cong\mathrm{cl}_*p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle).\tag{3.3.22}$$

根据 [CW23，第 3.29], 条命题

$$\mathcal{L}_{\check{\lambda},\mu} := i_{\leq \check{\lambda}*}(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\mu}) \tag{3.3.23}$$

是 KP 中的一个简单对象 $\widehat{G_{\mathcal{O}}}$相干$(\mathcal{R})$。

根据 [CW23，定理 3.31], ，我们对$\widehat{\ }$KP$^{G_{\mathcal{O}}}$相干$(\mathcal{R})$ 中简单对象的集合有如下描述:

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R})) = \{\mathcal{L}_{\check{\lambda},\mu}\{m\}(n) \colon m,n \in \mathbb{Z}, (\check{\lambda},\mu) \in (\check{P}\times P)_{\mathrm{dom}}\}. \tag{3.3.24}$$

稍后，我们将更多地关注 $\mu = 0$ 的简单对象，因此记作

$$\mathcal{L}'_{\check{\lambda}} := \mathcal{L}'_{\check{\lambda},0},\ \mathcal{L}_{\check{\lambda}} := \mathcal{L}_{\check{\lambda},0}. \tag{3.3.25}$$

在本小节末尾，我们讨论 Koszul perverse t-结构与 Coh$^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 上的$\widehat{\ }$幺半结构的相容性，这体现在以下定理中。

定理 3.3.4 ([CW23，定理 5.1，定理 6.1])。

$\widehat{\ }$(1) 卷积乘积 $*$ 是 Koszul 反常 t-正合，即若 $\mathcal{F},\mathcal{G} \in KP^{G_{\mathcal{O}}}coh(\mathcal{R})$，则 $\mathcal{F}*\mathcal{G} \in \widehat{\ }KP^{G_{\mathcal{O}}}coh(\mathcal{R})$。此外，$Coh^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 中的幺半单位是 Koszul 周反层（事实上它是 $\mathcal{L}_0$）。$\widehat{\ }$(2) 取（右/左）对偶是 Koszul 反常 t-正合，即若 $\mathcal{F} \in KP^{G_{\mathcal{O}}}coh(\mathcal{R})$，则 $\mathcal{F}^R$ 和 $\mathcal{F}^L$ 都属于$\widehat{\ }KP^{G_{\mathcal{O}}}coh(\mathcal{R})$。此外，取 $(-)^*$ 和 $\mathbb{D}$ 都是 Koszul 反常 t-正合。

总之，KP $\widehat{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R})$ 是一个刚性幺半阿贝尔范畴。

3.4. **重正则化 r-矩阵**。本小节首先回顾重正则化 r-矩阵的概念。接着讨论 $\mathcal{R}_{G,N}$ 上的因子化结构，如 [CW23，第 7] 节所述。最后，依照 [CW19，第 5], 节，我们说明这一因子化结构如何在$\widehat{\ }$h(Coh$^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N})$)（Coh$^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N})$ 的同伦范畴）中诱导出重正则化 r-矩阵。重正则化 r-矩阵也限制到$\widehat{\ }$Koszul perversity 心 KP$^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,N}) \subset$h(Coh$^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,N})$)。

3.4.1. 重正则化 r-矩阵。设 $(\mathcal{C},*)$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性幺半范畴。假设 $\mathcal{C}$ 具有一个分次平移函子，记作 $\{1\}$。

定义 3.4.1 ([CW19，定义 4.1，定义 4.16])。$\mathcal{C}$ 中的重正则化 r-矩阵系统是指对每一对对象 $M,N \in \mathcal{C}$ 指定一个元素 $\Lambda(M,N) \in \mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ 以及一个映射

$$\mathbf{r}_{M,N} : M*N \to N*M\{\Lambda(M,N)\},$$

满足以下性质。（这里 $\Lambda(M,N) = -\infty$ 表示$\mathbf{r}_{M,\ N} = 0$。）

（1）对于任意 $M \in \mathcal{C}$，态射$\mathbf{r}_{M,\ 1_{\mathcal{C}}}$ 和$\mathbf{r}_{1_{\mathcal{C}},\ M}$ 由$M*1_{\mathcal{C}}$和 $1_{\mathcal{C}}*M$的单位同构与 M复合得到。（2）当且仅当 $\Lambda(M,N) \neq -\infty$时，$\mathbf{r}_{M,\ N}$非零。（3）对于任意 $M,N_1,N_2 \in \mathcal{C}$，我们有

$$\Lambda(M,N_1*N_2) \leq \Lambda(M,N_1) + \Lambda(M,N_2).$$

若等号成立，则

$$\mathbf{r}_{M,N_1*N_2} = (\mathrm{id}_{N_1}*\mathbf{r}_{M,N_2}\{\Lambda(M,N_1)\}) \circ (\mathbf{r}_{M,N_1}*\mathrm{id}_{N_2}),$$

而当不等式严格成立时，右侧的复合为零。将 M 置于另一侧时，相应的结论同样成立。

(4) 对于 $M,N \in \mathcal{C}$，我们有 $\Lambda(M,N) + \Lambda(N,M) \geq 0$。此外

$$\mathbf{r}_{N,M} \circ \mathbf{r}_{M,N} \neq 0 \iff \Lambda(M,N) + \Lambda(N,M) = 0. \tag{3.4.1}$$

(5) 对于任意 $M, N_1, N_2 \in \mathcal{C}$ 和态射 $f\colon N_1 \to N_2$，考虑如下图表

$$\begin{array}{ccc} M * N_1 & \xrightarrow{\mathbf{r}_{M,N_1}\{-\Lambda(M,N_1)\}} & N_1 * M \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_M * f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f * \mathrm{id}_M} \\ M * N_2 & \xrightarrow{\mathbf{r}_{M,N_2}\{-\Lambda(M,N_2)\}} & N_2 * M. \end{array}$$

• 若 $\Lambda(M,N_1) = \Lambda(M,N_2)$，则图表交换。• 若 $\Lambda(M,N_1) < \Lambda(M,N_2)$，则左下方的复合为零。• 若 $\Lambda(M,N_1) > \Lambda(M,N_2)$，则右上方的复合为零。

当与 M 的积取在另一侧时，相应的陈述也成立。

3.4.2. 关于 $\mathcal{R}_G$ 上的因子化结构，N。设 X 为一条光滑代数曲线，I 为一个有限集，且$S = \mathrm{Spec}\ R$为一个（经典的）仿射概形。对于映射组 $f_I = (f_i)_{i\in I}\colon S \to X^I$，记 $z_I \subset S \times X$为所有 $f_i, i \in I$的图像之并。令 $\mathcal{O}_{\widehat{z_I}}$表示 $S \times X$中约化轨迹为 z_I的闭子概形的坐标环的逆极限。定义 $\widehat{z_I} := \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{\widehat{z_I}}$，它可以视为 z_I的概形论形式邻域。我们还有穿孔形式邻域 $\widehat{z_I} \setminus z_I$。

对于一个（经典）堆栈 $Y \in \mathrm{Stk}^{\mathrm{cl}}_{\mathbb{C}}$，定义 I正环空间 $Y_{\mathcal{O},\ X^I}$

$$Y_{\mathcal{O},X^I} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{cl}} \to \mathsf{Grpd}, R \mapsto \{f_I : \mathrm{Spec}\, R \to X^I, \rho : \widehat{z_I} \to Y\}$$

以及 I环空间 $Y_{\mathcal{K},\ X^I}$

$$Y_{\mathcal{K},X^I} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{cl}} \to \mathsf{Grpd}, R \mapsto \{f_I : \mathrm{Spec}\, R \to X^I, \rho : \widehat{z_I} \setminus z_I \to Y\}.$$

我们将重点讨论 Y 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑仿射概形的情形。在这种情况下，$Y_{\mathcal{O},\ X^I}$ 由一个定义在 X^I 上的无限型概形表示；此外，该概形是由定义在 X^I 上的光滑概形之间的平坦态射构成的逆极限。而 $Y_{\mathcal{K},\ X^I}$ 由一个定义在X^I上的归纳仿射概形表示，其中包含 $Y_{\mathcal{O},\ X^I}$ 作为闭子概形。更多细节可参见 [KV04，第 2] 节。

这些构造的关键特征在于，族 $Y_{\mathcal{O},\ X^I}$、$Y_{\mathcal{K},\ X^I}$（其中 I 遍历非空有限集）各自构成一个因子化幺半群，其定义见 [KV04，定义 2.2.1]：对于有限集的一个满射 $f\colon J \twoheadrightarrow I$，记 $\Delta_{J/I}\colon X^I, \to X^J$ 为诱导的对角嵌入，记 $j_{J/I}\colon U_{J/I} := X^J \setminus X^I, \to X^J$ 为补集；那么，因子化幺半群结构由以下同构构成

$$\Delta^*_{J/I}(Y_{\mathcal{O},X^J}) \cong Y_{\mathcal{O},X^I}, \quad j^*_{J/I}(\prod_{i\in I} Y_{\mathcal{O},X^{f^{-1}(i)}}) \cong j^*_{J/I}(Y_{\mathcal{O},X^J}) \tag{3.4.2}$$

满足同上中的相容条件。类似的陈述对 $\{Y_{\mathcal{K},X^I}\}_I$ 也成立。

第 3.1 节中构造的空间都有其因子化对应物。Gr_G 的因子化对应物是 Beilinson-Drinfeld 格拉斯曼量

$$\mathrm{Gr}_{G,X^I} := G_{\mathcal{K},X^I}/G_{\mathcal{O},X^I}$$

（简称 Gr_{X^I}），它由 X^I 上的一个归纳-射影概形表示。$\mathcal{T}_{G,\ N}$ 的因子化对应物是

$$\mathcal{T}_{G,N,X^I} := G_{\mathcal{K},X^I} \times^{G_{\mathcal{O},X^I}} N_{\mathcal{O},X^I}$$

（简称 $\mathcal{T}_{X^I}$）。$G_{\mathcal{K},\ X^I}$ 对 $N_{\mathcal{K},\ X^I}$ 的自然作用产生一个映射

$$\mathcal{T}_{X^I} \to \mathrm{Gr}_{X^I} \times_{X^I} N_{\mathcal{K},X^I}$$

如 (3.1.2) 所示。

定义 3.4.2。 三元组 $\mathcal{R}_{G,N,X^I}$ 的因子化空间（简记为 $\mathcal{R}_{X^I}$）定义为以下纤维积:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{X^I} & \xrightarrow{i_1} & \mathrm{Gr}_{X^I} \times_{X^I} N_{\mathcal{O},X^I} \\ {\scriptstyle i_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_1} \\ \mathcal{T}_{X^I} & \xrightarrow{j_2} & \mathrm{Gr}_{X^I} \times_{X^I} N_{\mathcal{K},X^I} \end{array} \tag{3.4.3}$$

在归纳导出概形范畴中。

从现在起，固定 X 为 $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t]$。那么 X 自然带有一个旋转 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-作用。与局部情形一样，我们在此添加两个 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 作用 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$ 和 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$。定义 $\mathcal{G}^{\mathrm{rot}}{}_{\mathrm{m},X^I}$ 为作用群胚概形

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}} \times X^I \underset{\mathrm{pr}}{\overset{\mathrm{act}}{\rightrightarrows}} X^I.$$

定义群胚概形

$$\widehat{G}_{\mathcal{O},X^I} := (G_{\mathcal{O},X^I} \rtimes_{X^I} \mathcal{G}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{m},X^I}) \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}.$$

(3.4.3) 中出现的 X^I 上的空间都自然带有 $\widehat{G}_{\mathcal{O},\,X^I}$-作用。

注 3.4.1。 对于一个带有 $\widehat{G}_{\mathcal{O},\,X^I}$-作用的 $\mathcal{Y}$ 上的导出概形 X^I，fpqc 商 $[\widehat{G}_{\mathcal{O},X^I}\backslash\mathcal{Y}]_{X^I}$ 可识别为

$$\left[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\backslash\left[(G_{\mathcal{O},X^I} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}})\backslash\mathcal{Y}\right]_{X^I}\right]_{\mathrm{pt}}.$$

这意味着：首先，我们在 X^I 上将 $\mathcal{Y}$ 除以 $G_{\mathcal{O},\,X^I} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$；其次，再在点上将此导出栈除以 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$。于是，我们可以将 $[\widehat{G}_{\mathcal{O},X^I}\backslash\mathcal{Y}]_{X^I}$ 视为 $[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\backslash X^I]$ 上的导出栈。

命题 3.1.1 中的代数几何性质对于 $\mathcal{R}_{X^I}$ 和 $[G_{\mathcal{O},X^I}\backslash\mathcal{R}_{X^I}]_{X^I}$ 也分别成立。我们可以考虑 $\left\{\mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^I}}(\mathcal{R}_{X^I})\right\}_I$ 和 $\left\{\mathrm{IndCoh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^I}}(\mathcal{R}_{X^I})\right\}_I$。它们都可以通过卷积图的整体类比构造类似于 $\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$（如第 3.2 节所述）的卷积乘积:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_{X^I} \widetilde{\times}_{X^I} \mathcal{R}_{X^I} & \xleftarrow{d} & \mathcal{S}_{X^I} & \xrightarrow{m} & \mathcal{R}_{X^I} \\ {\scriptstyle i_2\widetilde{\times}\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ \mathcal{T}_{X^I} \widetilde{\times}_{X^I} \mathcal{R}_{X^I} & \xleftarrow{\widetilde{d}} & \mathrm{Gr}_{X^I} \widetilde{\times}_{X^I} \mathcal{R}_{X^I} & \xrightarrow{\widetilde{m}} & \mathcal{T}_{X^I}, \end{array}$$

并且这些卷积乘积与 $\{\mathcal{R}_{X^I}\}$ 和 $\frown^{G_{\mathcal{O},\,X^I}}$ 的因子化同构 (3.4.2) 相容。更多细节请参见 [CW23，第 7 节。2]

3.4.3. 重整化 r-矩阵 $\mathrm{h}(\mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},\,N}}(\mathcal{R}_{G,\,N}))$。$\left\{[\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}_{X^I}]_{X^I}\right\}_I$ 的因子化幺半群结构赋予 $\left\{\mathrm{IndCoh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^I}}(\mathcal{R}_{X^I})\right\}_I$ 一种 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变的手性范畴结构，其含义见 [Ras14][20]。此外，[CW23，第 7 节3] 表明，该手性结构是幺元的。我们将提取（幺元的）手性范畴这一概念中所蕴含的、为我们所需的信息。然后，我们将回顾如何利用这些结构，在 $\mathrm{h}(\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}))$ 中构造一个由$\frown$重整化 r-矩阵组成的系统。

令 $\mathcal{F},\mathcal{G} \in \mathrm{Coh}^{\widehat{G_{\mathcal{O}}}}(\mathcal{R})$。由于我们假设 $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{G}_a$，$X$ 上的群结构给出了平凡化 $\mathcal{R}_X \cong \mathcal{R} \times X$, $\widehat{G}_{\mathcal{O},X} \cong \big((G_{\mathcal{O}} \times X) \rtimes_X \mathcal{G}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{m},\,X}\big) \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$。令 $\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X}}(\mathcal{R}_X)$ 表示沿投影 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 的拉回

$$[\widehat{G}_{\mathcal{O},X}\backslash\mathcal{R}_X]_X \cong \left[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\backslash\big([(G_{\mathcal{O}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}})\backslash\mathcal{R}] \times X\big)\right] \to \left[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\backslash\big([(G_{\mathcal{O}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}})\backslash\mathcal{R}]\big)\right] \cong [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}].$$

[20] $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变性的概念遵循 [CW23，定义 5。4]

幺元手性结构的定义中包含幺函子

$$\eta_I^{I\sqcup J}:\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^I}}(\mathcal{R}_{X^I}\times X^J)\to\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^{I\sqcup J}}}(\mathcal{R}_{X^{I\sqcup J}}).$$

这些函子与因子化同构 (3.4.2) 相容。例如，在将 $(\mathcal{R}_{X^2})|_\Delta\cong\mathcal{R}_X$ for $\Delta=\Delta_{\{12\}/\{1\}}:X,\to X^2$ 识别后，我们有函子同构

$$(\eta_1^{12}(\mathcal{P}\boxtimes\mathcal{O}_X))|_\Delta\cong\mathcal{P},\quad\text{for }\mathcal{P}\in\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X}}(\mathcal{R}_X).\tag{3.4.4}$$

更确切地说，这意味着对于嵌入

$$\iota_\Delta:[\widehat{G}_{\mathcal{O},X}\backslash\mathcal{R}_X]_X\to[\widehat{G}_{\mathcal{O},X^2}\backslash\mathcal{R}_{X^2}]_{X^2}$$

在对角嵌入上

$$\Delta:[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\backslash X]\to[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\backslash X^2],$$

我们有

$$\iota_\Delta^*(\eta_1^{12}(\mathcal{P}\boxtimes\mathcal{O}_X))\cong\mathcal{P}.$$

Aft在识别 $\mathcal{R}_{X^2}|_U\cong(\mathcal{R}_X\times\mathcal{R}_X)|_U$ for $U=X^2\setminus\Delta$ 后，我们有函子同构 s

$$\eta_1^{12}(\mathcal{P}\boxtimes\mathcal{O}_X)|_U\cong(\mathcal{P}\boxtimes\mathcal{O}_X)|_U,\quad\text{for }\mathcal{P}\in\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X}}(\mathcal{R}_X).\tag{3.4.5}$$

更准确地说，这意味着当我们将.....的限制

$$[\widehat{G}_{\mathcal{O},X^2}\backslash\mathcal{R}_{X^2}]_{X^2}\ \text{ and }\ [\widehat{G}_{\mathcal{O},X}\backslash\mathcal{R}_X]_X\times_{[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\backslash\mathrm{pt}]}[\widehat{G}_{\mathcal{O},X}\backslash\mathcal{R}_X]_X$$

沿开嵌入

$$[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\backslash U]\to[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}\backslash X^2],$$

.....的限制

$$\eta_1^{12}(\mathcal{P}\boxtimes\mathcal{O}_X)\ \text{ and }\ \mathcal{P}\boxtimes\mathcal{O}_X$$

在它们各自对应的开集上自然同构。

注记 3.4.2. 我们将上述记号 (3.4.4) (3.4.5) 简记如下，因此只将限制写作 $(\,)|_\Delta,(\,)|_{U^2}$。其实际含义与上述说明类似。

~我们将 η_1 简记为 η_1^{12}: $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O},X}}(\mathcal{R}_X\times X)$ $\to\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O},X^2}}(\mathcal{R}_{X^2})$，并将 η_2 简记为 η_2^{12}: $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O},X}}(X\times_{\sim}\mathcal{R}_X)\to\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O},X^2}}(\mathcal{R}_{X^2}$。

定义

$$C_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:=\eta_1(\widetilde{\mathcal{F}}\boxtimes\mathcal{O}_X)*\eta_2(\mathcal{O}_X\boxtimes\widetilde{\mathcal{G}})\in\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^2}}(\mathcal{R}_{X^2}).\tag{3.4.6}$$

根据 (3.4.4) 和 (3.4.5)，我们有

$$(C_{\mathcal{F},\mathcal{G}})|_\Delta\cong\widetilde{\mathcal{F}}*\widetilde{\mathcal{G}}\cong\widetilde{\mathcal{F}*\mathcal{G}},\quad(C_{\mathcal{F},\mathcal{G}})|_U\cong(\widetilde{\mathcal{F}}\boxtimes\widetilde{\mathcal{G}})|_U.\tag{3.4.7}$$

定义 $\widehat{\mathsf{Hom}}(C_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}},C_{\mathcal{G},\ \mathcal{F}}):=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}(C_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}},C_{\mathcal{G},\ \mathcal{F}}\{m\})$[21]。它可以视为一个 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变 DG模，取值于 $\mathcal{O}_X(X)=\mathbb{C}[t_1,t_2]$。我们也可以类似地定义 $\widehat{\mathsf{Hom}}(C_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}}|_U,C_{\mathcal{G},\ \mathcal{F}}|_U)$。由 $C_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}}$是一个紧对象这一事实，可知 [CW19, 第 5 节2] 给出了

$$\widehat{\mathrm{Hom}}(C_{\mathcal{F},\mathcal{G}}|_U,C_{\mathcal{G},\mathcal{F}}|_U)\cong\widehat{\mathrm{Hom}}(C_{\mathcal{F},\mathcal{G}},C_{\mathcal{G},\mathcal{F}})\otimes_{\mathbb{C}[t_1,t_2]}\mathbb{C}[t_1,t_2,(t_1-t_2)^{-1}].\tag{3.4.8}$$

~ ~ ~ ~由于 (3.4.7) 给出了同构 $C_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}}|_U\cong(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G})|_U$, $C_{\mathcal{G},\ \mathcal{F}}|_U\cong(\mathcal{G}\boxtimes\mathcal{F})|_U$，交换两个因子得到一个态射

$$\mathrm{swap}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:C_{\mathcal{F},\mathcal{G}}|_U\xrightarrow{\cong}C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}|_U,$$

其中 $C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}:=\mathsf{sw}^*C_{\mathcal{G},\mathcal{F}}$表示交换两个因子的映射 $\mathsf{sw}:\ X^2\to X^2,(a_1,a_2)\mapsto(a_2,a_1)$。[22]这给出了一个 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变截面

$$\mathbb{C}[t_1,t_2,(t_1-t_2)^{-1}]\to\widehat{\mathrm{Hom}}(C_{\mathcal{F},\mathcal{G}}|_U,C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}|_U).$$

[21]这里的 Hom 指的是由 $\mathbb{C}$-线性 ∞-范畴中对象的映射空间所关联的 DG复形。[22]我们隐含地使用了同构 sw $^*\mathcal{R}_{X^2}\cong\mathcal{R}_{X^2}$，它是因子化同构之一

结合 (3.4.8)，我们得到一个 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变截面

$$\alpha:\mathbb{C}[t_1,t_2]\hookrightarrow\mathbb{C}[t_1,t_2,(t_1-t_2)^{-1}]\to\widehat{\mathrm{Hom}}(C_{\mathcal{F},\mathcal{G}},C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}})\otimes_{\mathbb{C}[t_1,t_2]}\mathbb{C}[t_1,t_2,(t_1-t_2)^{-1}]. \tag{3.4.9}$$

$\mathbb{C}[t_1,t_2]$模 $\mathbb{C}[t_1,t_2,(t_1-t_2)^{-1}]$ 具有自然的递增滤过 $F_k:=(t_1-t_2)^{-k}\mathbb{C}[t_1,t_2]$，这为上述等式 (3.4.9) 右侧给出了自然的递增滤过。令$\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\in\mathbb{Z}\bigcup\{-\infty\}$ 为使截面 α 可分解为如下形式的 k 的最小值:

$$\alpha:\mathbb{C}[t_1,t_2]\to\widehat{\mathrm{Hom}}(C_{\mathcal{F},\mathcal{G}},C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}})\bigotimes_{\mathbb{C}[t_1,t_2]}F_k.$$

- 若 $\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})=-\infty$，则$\mathbf{r}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 定义为 0。
- 若 $\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\neq-\infty$。我们可以将 $F_{\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})}$ 与 $\mathbb{C}[t_1,t_2]\{\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\}$ 识别为 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变的 $\mathbb{C}[t_1,t_2]$-模。于是 α 变为

$$\mathbb{C}[t_1,t_2]\to\widehat{\mathrm{Hom}}(C_{\mathcal{F},\mathcal{G}},C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}})\{\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\}$$

并生成一个属于

$$\alpha(1)\in\mathrm{Hom}(C_{\mathcal{F},\mathcal{G}},C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}\{\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\}).$$

将其限制到 $\{0\}\subset\Delta\subset X^2$，并使用 (3.4.7) 中的第一个同构，我们得到一个对象$\alpha(1)\in\mathcal{H}^0\big(\overline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}*\mathcal{G},\mathcal{G}*\mathcal{F}\{\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\})\big)$，即一个态射

$$\mathbf{r}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:\mathcal{F}*\mathcal{G}\to\mathcal{G}*\mathcal{F}\{\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\}$$

$\frown$in $\mathrm{h}(\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}))$。更多详情请参见 [CW19，第 5 节.2]。

特别地，当 $\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})=0$ 时，由交换两个$\frown$因子给出的态射 $\mathrm{swap}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:C_{\mathcal{F},\mathcal{G}}|_U\xrightarrow{\cong}C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}|_U$ 可以唯一地延拓为 $\mathrm{h}(\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}},x^2}(\mathcal{R}_{X^2}))$ 中的一个态射

$$\overline{\mathrm{swap}}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:C_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\to C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}},$$

并且 $\mathbf{r}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:\mathcal{F}*\mathcal{G}\to\mathcal{G}*\mathcal{F}$ 是 $\mathrm{swap}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 在 $\{0\}\in X^2$ 上的限制。

我们以陈述 [CW19，第 5.10] 定理结束本小节。

定理 3.4.1 ([CW19，第 5.10])。 态射 $\mathbf{r}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 以及元素 $\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\in\mathbb{Z}\bigcup\{-\infty\}$ 在上文定义的$\frown$构成了 $\mathrm{h}(\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}))$ 中的重整化 r-矩阵系统。

然后限制到 Koszul perversity 心，我们在$\frown\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R})$中得到一个重整化 r-矩阵系统。

$\frown$**注 3.4.3**。 根据 [CW19][推论 4.7], ，幺半阿贝尔范畴 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R})$$\frown$的刚性确保，对于所有非零的 $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R})$，都有 $\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\neq-\infty$（因此 $\mathbf{r}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\neq0$）。

4. The full subcategory $\mathrm{KP}_0\subset\mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}})$

在以下各节中，我们将集中讨论 $N=\mathfrak{g}$ 为 G 的伴随表示的情形（第 5.1 节和第 5.2 节除外）。

我们引入以下子范畴。

$\frown$**定义 4.0.1**。 令 KP_0 为 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}})$ 的全子范畴，该范畴由简单对象 $\mathcal{L}_{\check{\lambda}}$（定义见 (3.3.25)）生成，并对直和、卷积、子商以及右对偶与左对偶封闭，其中对所有 $\check{\lambda}\in\check{P}_+$ 均成立。

$\frown$根据定义，KP_0 是 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}})$ 的一个刚性幺半阿贝尔全子范畴。

4.1. **KP 中对偶的计算**。本节的剩余任务是在 KP_0 中计算右对偶与左对偶（命题 4.1.1），然后初步描述 KP_0（推论 4.1.1）。

命题 4.1.1。 对于 $\check{\lambda} \in \check{P}_+$ 以及简单对象 $\mathcal{L}_{\check{\lambda}} \in \mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}})$，我们有

$$\mathcal{L}_{\check{\lambda}}^R \cong \mathcal{L}_{\check{\lambda}}^L \cong \mathcal{L}_{\check{\lambda}^\dagger}.$$

这里 $\check{\lambda}^\dagger := -w_0(\check{\lambda})$。

证明。 根据命题3.2.1， $\mathcal{L}_{\check{\lambda}}$ 的右对偶与左对偶可计算如下

$$\mathcal{L}_{\check{\lambda}}^R \cong \mathbb{D}(\mathcal{F})^*, \mathcal{L}_{\check{\lambda}}^L \cong \mathbb{D}(\mathcal{F}^*).$$

关于函子 $(-)^*$ 和 $\mathbb{D}(-$的构造，请参阅第 3.2.2 节).

因此，我们将该命题的证明分为两个步骤，概括为以下两个引理。

引理 4.1.1. 对于 $\check{\lambda} \in \check{P}_+$，我们有 $(\mathcal{L}_{\check{\lambda}})^* \cong \mathcal{L}_{\check{\lambda}^\dagger}$。

证明。 回忆一下，利用态射 $\mathrm{inv}: \widehat{G}_{\mathcal{K}} \to \widehat{G}_{\mathcal{K}}, g \mapsto g^{-1}$ （如 (3.2.3) 中所示），我们构造了两个对合

$$\iota_{\mathrm{Gr}} : [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}] \to [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}]$$
$$\iota : [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}] \to [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}]$$

如 (3.2.4) 和 (3.2.8) 中所示。

注意，$\mathrm{inv}(t^{\check{\mu}}) = t^{-\check{\mu}} = \dot{w}_0 t^{\check{\mu}^\dagger} \dot{w}_0{}^{-1}$；这里 $\dot{w}_0 \in N(T)$ 是韦尔群 $W = N(T)/T$ 中最长元素 w_0 的一个代表。于是我们有 $\iota_{\mathrm{Gr}}([G_{\mathcal{O}}\backslash$格拉斯曼量$_{\leq \check{\lambda}}]) = [G_{\mathcal{O}}\backslash$格拉斯曼量$_{\leq \check{\lambda}^\dagger}]$，即有如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{\leq \check{\lambda}^\dagger}] & \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Gr}}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{\leq \check{\lambda}}] \\ {\scriptstyle i_{\leq \check{\lambda}^\dagger}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{\leq \check{\lambda}}} \\ [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}] & \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Gr}}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}]. \end{array}$$

通过进行基变换 沿笛卡尔图 (3.2.8)，我们得到以下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}_{\leq \check{\lambda}^\dagger}] & \xrightarrow{\iota} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}_{\leq \check{\lambda}}] \\ {\scriptstyle i_{\leq \check{\lambda}^\dagger}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{\leq \check{\lambda}}} \\ [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}] & \xrightarrow{\iota} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}]. \end{array}$$

由此可得 $(\mathcal{L}_{\check{\lambda}})^* \cong \iota^*(i_{\leq \check{\lambda}})_*(\mathcal{L}'_{\check{\lambda}}) \cong (i_{\leq \check{\lambda}^\dagger})_* \iota^*(\mathcal{L}'_{\check{\lambda}})$。

将 $\iota^*(\mathcal{L}'_{\check{\lambda}})$ 限制到 $j_{\check{\lambda}^\dagger} : \mathcal{R}_{\check{\lambda}^\dagger}, \to \mathcal{R}_{\leq \check{\lambda}^\dagger}$，我们得到

$$j_{\check{\lambda}^\dagger}^* \iota^*(\mathcal{L}'_{\check{\lambda}}) \cong \iota^* j_{\check{\lambda}}^*(\mathcal{L}'_{\check{\lambda}}) \overset{(3.3.22)}{\cong} \iota^* \left(\mathrm{cl}_* p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}\langle -\tfrac{1}{2} d_{\check{\lambda}} \rangle) \right).$$

利用笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}^{\mathrm{cl}}_{\check{\lambda}^\dagger}] & \xrightarrow{\iota^{\mathrm{cl}}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}^{\mathrm{cl}}_{\check{\lambda}}] \\ {\scriptstyle \mathrm{cl}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}} \\ [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}_{\check{\lambda}^\dagger}] & \xrightarrow{\iota} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{R}_{\check{\lambda}}], \end{array}$$

我们推得

$$\iota^* \mathrm{cl}_* p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}\langle -\tfrac{1}{2} d_{\check{\lambda}} \rangle) \cong \mathrm{cl}_* \iota^{\mathrm{cl}*} p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}\langle -\tfrac{1}{2} d_{\check{\lambda}} \rangle) \cong \mathrm{cl}_* p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}^\dagger}}\langle -\tfrac{1}{2} d_{\check{\lambda}^\dagger} \rangle).$$

.

总之，

$$(\mathcal{L}_{\check{\lambda}})^* \cong (i_{\leq \check{\lambda}^\dagger})_* \iota^*(\mathcal{L}'_{\check{\lambda}}) \quad \text{and} \quad j_{\check{\lambda}^\dagger}^* \iota^*(\mathcal{L}'_{\check{\lambda}}) \cong j_{\check{\lambda}^\dagger}^*(\mathcal{L}'_{\check{\lambda}^\dagger}). \tag{4.1.1}$$

由于（–）* 是 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R})$ 上的一个对合，它将简单对象映为简单对象，因此（$\mathcal{L}_{\check\lambda}$）* 具有以下形式 $\mathcal{L}_{\check\lambda',\ \mu'}$ 其中某个 $(\check\lambda',\mu')\in(\check P\times P)_{\mathrm{dom}}$。根据（4.1.1），$(\check\lambda',\mu')$只能是 $(\check\lambda^\dagger,0)$，因此（$\mathcal{L}_{\check\lambda}$）$^*\cong\mathcal{L}_{\check\lambda^\dagger}$。□

第二个引理更为关键，它是针对我们这一情形的 $N=\mathfrak{g}$，尤其是下文 (4.1.6) 中的计算。

引理 4.1.2. 对于 $\check\lambda\in\check P_+$，我们有 $\mathbb{D}(\mathcal{L}_{\check\lambda})\cong\mathcal{L}_{\check\lambda}$。

证明。 首先，我们进行如下计算：

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(\mathcal{L}_{\check\lambda})=\mathbb{D}(i_{\leq\check\lambda *}(\mathcal{L}'_{\check\lambda}))&=\mathcal{H}om(i_{\leq\check\lambda *}\mathcal{L}'_{\check\lambda},i_1^!p_1^*\omega_{\mathrm{Gr}}) \qquad \text{use (3.2.10)}\\ &\cong i_{\leq\check\lambda *}\mathcal{H}om(\mathcal{L}'_{\check\lambda},i_{\leq\check\lambda}^!i_1^!p_1^*\omega_{\mathrm{Gr}}) \quad \text{use (2.3.2)}\\ &\cong i_{\leq\check\lambda *}\mathcal{H}om(\mathcal{L}'_{\check\lambda},i_1^!i_{\leq\check\lambda}^!p_1^*\omega_{\mathrm{Gr}});\end{aligned}$$

这里我们滥用记号：i_1 既表示 $\mathcal{R}_{\check\lambda}\hookrightarrow$ 格拉斯曼量$_{\check\lambda}\times\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$，$\mathcal{R}\hookrightarrow$ 格拉斯曼量 $\times\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$，，也表示 $i_{\leq\check\lambda}$ 既表示$\mathcal{R}_{\check\lambda}\hookrightarrow\mathcal{R}$，也表示格拉斯曼量$_{\check\lambda}\times\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}\hookrightarrow$ 格拉斯曼量 $\times\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$。将 Beck-Chevalley 同构 (2.2.3) 应用于笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}\times\mathfrak{g}_{\mathcal{O}} & \xrightarrow{i_{\leq\check\lambda}} & \mathrm{Gr}\times\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}\\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_1}\\ \mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda} & \xrightarrow{i_{\leq\check\lambda}} & \mathrm{Gr},\end{array}$$

我们得到

$$\mathbb{D}(\mathcal{L}_{\check\lambda})\cong i_{\leq\check\lambda *}\mathcal{H}om(\mathcal{L}'_{\check\lambda},i_1^!p_1^*i_{\leq\check\lambda}^!(\omega_{\mathrm{Gr}}))\cong i_{\leq\check\lambda *}\mathcal{H}om(\mathcal{L}'_{\check\lambda},i_1^!p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}))=i_{\leq\check\lambda *}\mathbb{D}_{\mathcal{R}_{\leq\check\lambda}}(\mathcal{L}'_{\check\lambda}); \tag{4.1.2}$$

在此，我们定义

$$\mathbb{D}_{\mathcal{R}_{\leq\check\lambda}}(-):=\mathcal{H}om(-,i_1^!p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}))\colon\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{\leq\check\lambda})^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{\leq\check\lambda}). \tag{4.1.3}$$

接下来，我们按如下方式计算 $j_{\check\lambda}^*\mathbb{D}_{\mathcal{R}_{\leq\check\lambda}}(\mathcal{L}'_{\check\lambda})$：

$$\begin{aligned}&j_{\check\lambda}^*\mathcal{H}om(\mathcal{L}'_{\check\lambda},i_1^!p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}))\\ \overset{(2.3.3)}{\cong}\ &\mathcal{H}om(j_{\check\lambda}^*\mathcal{L}'_{\check\lambda},j_{\check\lambda}^*i_1^!p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}))\\ \overset{(3.3.22)}{\cong}\ &\mathcal{H}om(\mathrm{cl}_*p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_{\check\lambda}}\langle-\tfrac12 d_{\check\lambda}\rangle),j_{\check\lambda}^*i_1^!p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}))\\ \overset{(2.3.2)}{\cong}\ &\mathrm{cl}_*\,\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathcal{R}^{\mathrm{cl}}_{\check\lambda}},\mathrm{cl}^!i_1^!p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\check\lambda}}))\langle\tfrac12 d_{\check\lambda}\rangle\\ \cong\ &\mathrm{cl}_*i_1^{\mathrm{cl}!}p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\check\lambda}})\langle\tfrac12 d_{\check\lambda}\rangle.\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

这里，最后一项中的态射为 $\mathcal{R}^{\mathrm{cl}}_{\check\lambda}\xrightarrow{i_1^{\mathrm{cl}}}$，格拉斯曼量$_{\check\lambda}\times\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}\xrightarrow{p_1}$ 格拉斯曼量$_{\check\lambda}$。

回顾格拉斯曼量将关于的基定义为商 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$作用。我们还将 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$作用限制到 $G_{\mathcal{O}}$，并将 $t^{\check\lambda}$ 的稳定子记为 $P_{\check\lambda}$。设 $\mathfrak{p}_{\check\lambda}$ 为 $P_{\check\lambda}$的李代数，它可视为 $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$ 中的一个有限余维子空间。现在我们作如下识别，将向量$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$丛视为定义在格拉斯曼量$_{\check\lambda}\cong G_{\mathcal{O}}/P_{\check\lambda}\cong G_{\mathcal{O}}/P_{\check\lambda}$上的丛：

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{R}^{\mathrm{cl}}_{\check\lambda} & \xrightarrow{i_1^{\mathrm{cl}}} & \mathrm{Gr}_{\check\lambda}\times\mathfrak{g}_{\mathcal{O}} & \xleftarrow{\sigma_1} & \mathrm{Gr}_{\check\lambda}\\ {\scriptstyle①}\uparrow\cong & & {\scriptstyle②}\uparrow\cong & & {\scriptstyle③}\uparrow\cong\\ \widehat{G}_{\mathcal{O}}\times^{\widehat{P}_{\check\lambda}}\mathfrak{p}_{\check\lambda} & \xrightarrow{i_1^{\mathrm{cl}}} & \widehat{G}_{\mathcal{O}}\times^{\widehat{P}_{\check\lambda}}\mathfrak{g}_{\mathcal{O}} & \xleftarrow{\sigma_1} & \widehat{G}_{\mathcal{O}}/\widehat{P}_{\check\lambda}.\end{array} \tag{4.1.5}$$

这里，三个列映射为

$$\begin{aligned}
&① : [g, x] \mapsto [gt^{\check{\lambda}}, \mathrm{Ad}_{t^{-\check{\lambda}}} x],\\
&② : [g, x] \mapsto ([gt^{\check{\lambda}}], \mathrm{Ad}_g x),\\
&③ : [g] \mapsto [gt^{\check{\lambda}}].
\end{aligned}$$

利用 (4.1.5)，我们将嵌入 i_1^{cl}: $\mathcal{R}_{\check{\lambda}}^{\mathrm{cl}} \hookrightarrow$ 格拉斯曼量$_{\check{\lambda}} \times \mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$ 的法丛识别为 $p_1^* \left(\widehat{G}_{\mathcal{O}} \times^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}} (\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_{\check{\lambda}}) \right)$。因此

$$i_1^{\mathrm{cl}!} p_1^* (\omega_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}) \cong i_1^{\mathrm{cl}^*} p_1^* \left(\omega_{\widehat{G}_{\mathcal{O}}/\widehat{P}_{\check{\lambda}}} \otimes \det(\widehat{G}_{\mathcal{O}} \times^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}} (\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_{\check{\lambda}})) \right) [-\dim(\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_{\check{\lambda}})]. \tag{4.1.6}$$

注意到 $^{\omega}\widehat{G}_{\mathcal{O}}/\widehat{P}_{\check{\lambda}}$ 也可以被识别为行列式($\widehat{G}_{\mathcal{O}} \times^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}} ((\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_{\check{\lambda}})^*)$)[维($\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_{\check{\lambda}}$)],，但此处 $(\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_{\check{\lambda}})^*$具有**平凡** $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-作用。于是，4.1.6 的右端变为

$$i_1^{\mathrm{cl}^*} p_1^* (\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}} \langle -\dim(\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_{\check{\lambda}}) \rangle) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{R}_{\check{\lambda}}^{\mathrm{cl}}} \langle -d_{\check{\lambda}} \rangle. \tag{4.1.7}$$

结合方程 (4.1.4)、(4.1.6) 和 (4.1.7)，我们得出

$$j_{\check{\lambda}}^* \mathbb{D}_{\mathcal{R}_{\leq \check{\lambda}}} (\mathcal{L}'_{\check{\lambda}}) \cong \mathrm{cl}_* \mathcal{O}_{\mathcal{R}_{\check{\lambda}}^{\mathrm{cl}}} \langle -\tfrac{1}{2} d_{\check{\lambda}} \rangle \cong j_{\check{\lambda}}^* \mathcal{L}'_{\check{\lambda}}. \tag{4.1.8}$$

接下来我们再次使用前一个引理 4.1.1 中的论证。由于 $\mathbb{D}$ 是 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R})$ 上的一个对合， $\mathbb{D}(\mathcal{L}_{\check{\lambda}})$ 也是形如 $\mathcal{L}_{\check{\lambda}',\mu'}$ 的简单对象，其中 $(\check{\lambda}', \mu') \in (\check{P} \times P)_{\mathrm{dom}}$。由 (4.1.2) 和 (4.1.8)，$(\check{\lambda}', \mu')$ 只能是 $(\check{\lambda}, 0)$，因此 $\mathbb{D}(\mathcal{L}_{\check{\lambda}}) \cong \mathcal{L}_{\check{\lambda}}$。□

利用这两个引理，我们完成命题 4.1.1 的证明。 □

我们用下面的推论结束本节。

推论 4.1.1。 定义 *4.0.1* 中定义的全子范畴 $\mathrm{KP}_0 \subset \mathrm{KP}_{G,\mathfrak{g}}$ 由所有 $\lambda \in P_+$ 对应的简单 $\check{}$ $\check{}$对象 $\mathcal{L}_{\check{\lambda}}$ 在直和、卷积和子商运算下生成。这意味着我们无需像定义 *4.0.1* 那样额外添加对偶。

$\check{}\check{}$证明。 令 $\mathcal{C}$ 为 KP_0 的全子范畴，它由所有满足 $\lambda \in P_+$ 的 $\mathcal{L}_{\check{\lambda}}$ 在直和、卷积和子商运算下生成。这是一个幺半阿贝尔全子范畴，我们需要证明它是刚性的。

首先，根据上面的命题 4.1.1，我们知道 $\mathcal{L}_{\check{\lambda}}$ 的所有左、右对偶都属于 $\mathcal{C}$。其次，我们使用以下关于（左／右）对偶的性质：若 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中可对偶，则

• $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^L \cong \mathcal{F}^L \oplus \mathcal{G}^L$，$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^R \cong \mathcal{F}^R \oplus \mathcal{G}^R$；• 对象 $\mathcal{F}$ 的子商的（左／右）对偶，是 $\mathcal{F}$ 的（左／右）对偶的子商；• $(\mathcal{F} * \mathcal{G})^L \cong \mathcal{G}^L * \mathcal{F}^L$，$(\mathcal{F} * \mathcal{G})^R \cong \mathcal{G}^R * \mathcal{F}^R$。

利用这些观察以及 $\mathcal{C}$ 的定义，我们知道 $\mathcal{C}$ 是刚性的。根据 KP_0，的定义，我们得出 $\mathcal{C} = \mathrm{KP}_0$。□

5. Determine KP_0 at the K-group level

本节将在 K-群层面描述 KP_0。从现在起，我们假设 G 是**A 型**，尽管这一假设仅在第5.4节中起关键作用。

本节的主要定理如下。

Th **定理 5.0.1.** 在 K-群 $K(\mathrm{KP}_0) \subset K^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\ \mathfrak{g}})$中，有如下恒等式：

$$[\mathcal{L}_{\check{\lambda}}] * [\mathcal{L}_{\check{\mu}}] = \sum_{\check{\nu} \in \check{P}_+} c_{\check{\lambda},\check{\mu}}^{\check{\nu}} [\mathcal{L}_{\check{\nu}}].$$

这里，记号 $c_{\check{\lambda},\ \check{\mu}}^{\check{\nu}}$ 在(3.0.1)中定义。

$\check{}$ $\check{}$特别地，KP_0 中的简单对象恰好是那些满足 $\lambda \in P_+$ 的 $\mathcal{L}_{\check{\lambda}}$。

证明思路如下：我们尝试将 $\mathcal{L}_{\check{\lambda}}$ 与霍奇模联系起来，然后利用几何 Satake 等价的相关知识推导出上述恒等式。

5.1. 环同态 $\Xi := \sigma_1^* i_{1*}\colon K^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_{G,\ N}) \to K^{G_\mathcal{O}}$(格拉斯曼量$_G$)。 在本小节中，我们讨论一般的 N。

卷积 积在 $\mathrm{KP}^{G_\mathcal{O}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\ N})$ 上难以计算。我们的策略是应用函 or

$$\Xi := \sigma_1^* i_{1*} : \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathcal{R}) \to \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr})$$

用于态射 $\mathcal{R} \xrightarrow{i_1}, \to \mathsf{Gr} \times \mathfrak{g}_\mathcal{O} \xleftarrow{\sigma_1} \mathsf{Gr}$，并在仿射格拉斯曼 Gr 上进行所有计算。尽管 $\sigma_1^* i_{1*}$ 不是幺半群的，但它确实在 K-群层面诱导了一个环同态。

命题 5.1 **.1.** 映射 $\sigma_1^* i_{1*}, \sigma_2^* i_{2*}\colon K^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R}_{G,\ N}) \to K^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ 是两个环同态。

这个命题基本上可由 [CW23, 第 5 节.3][23] 中的证明推出。为求完整起见，我们在下文给出这一证明。我们指出，将 K-群替换为 Borel-Moore 同调后得到的同一命题也见于 [BFN18, 引理 5.11]。

证明。 我们首先证明，在 K-群层面上， $\sigma_2^* i_{2*}$ 是一个环同态，随后通过对合 $(-)^*$ 将这一结果转移到 $\sigma_1^* i_{1*}$ 上，如 (3.2.9) 所示。

步骤 1 （$\sigma_2^* i_{2*}$ 是一个环同态）令 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{KP}^{G_\mathcal{O}}$相干$(\mathcal{R})$。沿用图 (3.2.2) 中的记号，我们计算如下

$$\begin{aligned}
\sigma_2^* i_{2*}(\mathcal{F} * \mathcal{G}) &\cong \sigma_2^* i_{2*} m_* d^*(\mathcal{F} \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G}) \\
&\cong \sigma_2^* \widetilde{m}_* i_* d^*(\mathcal{F} \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G}) \\
&\cong \sigma_2^* \widetilde{m}_* \widetilde{d}^*(i_{2*}(\mathcal{F}) \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G});
\end{aligned}$$

这里，第一个同构由卷积积的定义给出，第三个同构则来自稳定相干拉回与几乎归纳有限表示的归纳真推前之间的基变换同构。

根据定理 3.3.2，$i_{2*}(\mathcal{F})$ 有限长且 Koszul perverse，令 $\left\{\widetilde{\mathcal{F}_1}, \ldots, \widetilde{\mathcal{F}_n}\right\}$ 为 $i_{2*}(\mathcal{F})$ 的简单合成因子。那么 $\sigma_2^* \widetilde{m}_* \widetilde{d}^*(i_{2*}(\mathcal{F}) \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G})$ 是 $\left\{\sigma_2^* \widetilde{m}_* \widetilde{d}^*(\widetilde{\mathcal{F}}_1 \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G}), \ldots, \sigma_2^* \widetilde{m}_* \widetilde{d}^*(\widetilde{\mathcal{F}}_n \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G})\right\}$ 的迭代扩张。

式 (3.3.19) 中对 $\mathrm{KP}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}\mathsf{Coh}(\mathcal{T})$ 的简单对象的描述表明，每个 $\widetilde{\mathcal{F}_i}$ 都同构于 $p_2^*(\mathcal{F}_i)$，其中 $\mathcal{F}_i := \sigma_2^*(\widetilde{\mathcal{F}_i}) \in \mathrm{KP}^{\widehat{G}_\mathcal{O}}\mathsf{Coh}$(格拉斯曼量)。因此有：

$$\sigma_2^* \widetilde{m}_* \widetilde{d}^*(\widetilde{\mathcal{F}}_i \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G}) \cong \sigma_2^* \widetilde{m}_* \widetilde{d}^*(p_2^*(\mathcal{F}_i) \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G}) \cong \sigma_2^* \widetilde{m}_*(\mathcal{F}_i \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G});$$

原 次一个同构的原因是，复合 $(p_2 \widetilde{\times} \mathrm{id}) \circ \widetilde{d}$ 是恒等映射。

现在可以看出， $\widetilde{m}$ 可分解为沿下方图表底行的复合

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{Gr} \mathbin{\widetilde{\times}} \mathrm{Gr} & \xrightarrow{m_{\mathrm{Gr}}} & \mathrm{Gr} \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{id} \widetilde{\times} \sigma_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_2} \\
\mathrm{Gr} \mathbin{\widetilde{\times}} \mathcal{R} & \xrightarrow[\mathrm{id} \widetilde{\times} i_2]{} & \mathrm{Gr} \mathbin{\widetilde{\times}} \mathcal{T} & \xrightarrow[m_{\mathrm{Gr}} \widetilde{\times} \mathrm{id}_{N_\mathcal{O}}]{} & \mathcal{T}
\end{array}$$

其中 m_{Gr} 是格拉斯曼量的卷积映射。右侧方块是笛卡尔的，因此

$$\begin{aligned}
\sigma_2^* \widetilde{m}_*(\mathcal{F}_i \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G}) &\cong \sigma_2^*(m_{\mathrm{Gr}} \mathbin{\widetilde{\times}} \mathrm{id}_{N_\mathcal{O}})_*(id \mathbin{\widetilde{\times}} i_2)_*(\mathcal{F}_i \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G}) \\
&\cong m_{\mathrm{Gr}*}(\mathrm{id} \mathbin{\widetilde{\times}} \sigma_2)^*(id \mathbin{\widetilde{\times}} i_2)_*(\mathcal{F}_i \widetilde{\boxtimes} \mathcal{G}) \\
&\cong m_{\mathrm{Gr}*}(\mathcal{F}_i \widetilde{\boxtimes} \sigma_2^* i_{2*}(\mathcal{G})) \\
&\cong \mathcal{F}_i * \sigma_2^* i_{2*}(\mathcal{G}).
\end{aligned}$$

[23] 参见该节的最后一段。

总之， $\sigma_2^* i_{2*}(\mathcal{F}*\mathcal{G})$ 是 $\{\mathcal{F}_i * \sigma_2^* i_{2*}(\mathcal{G})$ 的迭代扩张： $i=1,\dots,n\}$。由于 $i_{2*}(\mathcal{F})$ 是 $\left\{\widetilde{\mathcal{F}_i}$ 的迭代扩张： $i=1,\dots,n\right\}$， $\sigma_2^* i_{2*}(\mathcal{F})$ 是 $\left\{\mathcal{F}_i = \sigma_2^*(\widetilde{\mathcal{F}_i})$ 的迭代扩张： $i=1,\dots,n\right\}$。因此，在 K-群 $K^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量) 中，我们有

$$\sigma_2^* i_{2*}([\mathcal{F}]*[\mathcal{G}]) = \sum_{i=1}^{n} [\mathcal{F}_i] * \sigma_2^* i_{2*}([\mathcal{G}]),$$
$$\sigma_2^* i_{2*}([\mathcal{F}]) = \sum_{i=1}^{n} [\mathcal{F}_i].$$

结合这两个方程，我们推得 $\sigma_2^* i_{2*}([\mathcal{F}]*[\mathcal{G}]) = \sigma_2^* i_{2*}([\mathcal{F}]) * \sigma_2^* i_{2*}([\mathcal{G}])$，即 $\sigma_2^* i_{2*}$ 是一个环同态。

步骤 2 ($\sigma_1^* i_{1*}$ 是一个环同态)

断言： $\sigma_1^* i_{1*} \cong \iota_{\mathrm{Gr}}^* \circ \sigma_2^* i_{2*} \circ \iota_* : \mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}) \to \mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$；这里的态射 ι_{Gr} 和 ι 定义于 (3.2.4) 和 (3.2.8) 中。

通过构造图式 (3.2.5)、(3.2.6)、（3.2.7）中的 ι，我们得到以下两个笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}] & \xrightarrow{\iota} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}] \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{O}})] & \xrightarrow{\widetilde{\iota}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{T}]; \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Gr}\times N_{\mathcal{O}})] & \xrightarrow{\widetilde{\iota}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{T}] \\ {\scriptstyle \sigma_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \sigma_2} \\ [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}] & \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Gr}}} & [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}]. \end{array}$$

由此可推出我们的结论：

$$\sigma_1^* i_{1*} \cong \sigma_1^* \widetilde{\iota}^* \widetilde{\iota}_* i_{1*} \cong (\widetilde{\iota}\sigma_1)^* (\widetilde{\iota} i_1)_* \cong (\sigma_2 \iota_{\mathrm{Gr}})^* (i_2 \iota)_* \cong \iota_{\mathrm{Gr}}^* \sigma_2^* i_{2*} \iota_*.$$

在将 $[G_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{R}]$ 与

$$[\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}] \underset{[\widehat{G}_{\mathcal{K}}\backslash N_{\mathcal{K}}]}{\times} [\widehat{G}_{\mathcal{O}}\backslash N_{\mathcal{O}}]$$

按照命题 3.1.2， ι 成为交换两个因子的态射。根据卷积乘积（3.2.1）的定义，对合 ι_* 是反幺半群的，即 $\iota_*(\mathcal{F}*\mathcal{G}) \cong \iota_*(\mathcal{G}) * \iota_*(\mathcal{F})$。类似地， ι_{Gr}^* 也是反幺半群的。结合上述结论与步骤 1，我们可推出 $\sigma_1^* i_{1*}$：$K^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}) \to K^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量) 是一个环同态。

□

5.2. **的计算** $\mathcal{L}_{\check{\lambda},\,\mu}$。本小节讨论一般的 N。本小节的目标是计算 $\Xi\mathcal{L}_{\check{\lambda},\,\mu}$，其中 $\mathcal{L}_{\check{\lambda},\,\mu} \in \mathbf{KP}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\text{相干上同调}}(\mathcal{R})$ 是简单对象。

定义 $N_{\check{\lambda}}$ 为 $N_{\mathcal{O}} \overset{\mathrm{cl}}{\cap} t^{\check{\lambda}} N_{\mathcal{O}}$ 中的经典交 $N_{\mathcal{K}}$；它是一个经典概形（无限型），也可以视为 $N_{\mathcal{O}}$中有限余维的向量空间。回顾一下，我们将格拉斯曼量 $\mathbf{Gr}^{\check{\lambda}}$ 识别为 $G_{\mathcal{O}}/P_{\check{\lambda}}$，视为 $G_{\mathcal{O}}$-齐性空间。

命题 5.2.1. 对于 $({}^{\vee}\lambda,\mu) \in ({}^{\vee}P\times P)_{\mathrm{dom}}$，考虑简单对象 $\mathcal{L}_{\check{\lambda},\,\mu} \in \mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\text{相干上同调}}(\mathcal{R})$ 和 $\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\,\mu} \in \mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}{}_{\text{相干上同调}}(\mathcal{R}_{\leq\check{\lambda}})$。我们有如下同构

$$\begin{aligned} \Xi(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\mu}) &\cong j_{\check{\lambda},!*}\left(\bigoplus_{0\leq k\leq \dim(N_{\mathcal{O}}/N_{\check{\lambda}})} \mathcal{O}_{\check{\lambda},\mu}\langle -\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle \otimes \bigwedge^{k}\left(\widehat{G}_{\mathcal{O}} \times^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}} (N_{\mathcal{O}}/N_{\check{\lambda}})^*\right)[k]\right); \\ \Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda},\mu}) &\cong i_{\leq\check{\lambda}*} j_{\check{\lambda},!*}\left(\bigoplus_{0\leq k\leq \dim(N_{\mathcal{O}}/N_{\check{\lambda}})} \mathcal{O}_{\check{\lambda},\mu}\langle -\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle \otimes \bigwedge^{k}\left(\widehat{G}_{\mathcal{O}} \times^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}} (N_{\mathcal{O}}/N_{\check{\lambda}})^*\right)[k]\right). \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

这里 $j_{\check{\lambda},\,!*}$ 是 $j_{\check{\lambda}}$：格拉斯曼量$^{\check{\lambda}}$,→ 格拉斯曼量$^{\leq\check{\lambda}}$ 在 (3.3.14) 中的中间延拓函子。

证明。 证明中使用了许多符号；请读者参阅图 1 中的列表以快速回顾。我们将证明分为两步。

步骤 1 回忆 $\mathcal{L}_{\check{\lambda},\ \mu}=i_{\leq\check{\lambda}*}\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\ \mu}$ 如（3.3.23）所示。因此

$$\Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda},\mu})=\sigma_1^*i_{1*}(i_{\leq\check{\lambda}*}\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\mu})\cong i_{\leq\check{\lambda}*}\sigma_1^*i_{1*}\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\mu}=i_{\leq\check{\lambda}*}\Xi(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\mu}).$$

∽第一步的目标是证明 $\Xi(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\ \mu})$ 属于全子范畴 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\text{相干}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}})_{!*}$ （定义见此处）。为此，我们 (3.3.10)
使用定理 3.3.2 (2)，并证明 $\Xi(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\ \mu})$ 满足判据（3.3.3）。

根据定义，$\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\ \mu}$ 是 $\mathcal{H}^0_K(j_{\check{\lambda}*}\mathrm{cl}_*p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check{\lambda},\ \mu}\langle-\frac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle))\in\mathrm{KP}$ 的底 $\widehat{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{indcoh}}(\mathcal{R}_{\leq\check{\lambda}})$（参见（3.3.21））。因此 $i_{1*}(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\ \mu})$是一个子对象，属于

$$i_{1*}\left(\mathcal{H}^0_K(j_{\check{\lambda}*}\mathrm{cl}_*p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check{\lambda},\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle))\right)=\mathcal{H}^0_K(i_{1*}j_{\check{\lambda}*}\mathrm{cl}_*p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check{\lambda},\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle)).$$

复合 $\mathcal{R}_{\check{\lambda}}\xrightarrow{j_{\check{\lambda}}}\mathcal{R}_{\leq\check{\lambda}}\xrightarrow{i_1}\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}}$ 与复合 $\mathcal{R}_{\check{\lambda}}\xrightarrow{i_1}\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}}\xrightarrow{j_{\check{\lambda}}}\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}}$同构。因此，上述等式的右边变为

$$\mathcal{H}^0_K(j_{\check{\lambda}*}i_{1*}\mathrm{cl}_*p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check{\lambda},\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle)).$$

∽令 $\mathcal{P}$表示 $i_{1*}\mathrm{cl}_*p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check{\lambda},\ \mu}\langle-\frac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle)\in\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}})$。我们进一步将 σ_1^*应用于 $i_{1*}(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\ \mu})$，并推得 $\Xi(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\ \mu})=\sigma_1^*i_{1*}(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\ \mu})$是一个子对象，属于

$$\sigma_1^*\mathcal{H}^0_K(j_{\check{\lambda}*}\mathcal{P})\cong\mathcal{H}^0_K(\sigma_1^*j_{\check{\lambda}*}\mathcal{P}).$$

.

∽**引理 5.2.1.** 我们有一个同构 $\sigma_1^*j_{\check{\lambda}*}\mathcal{P}\cong j_{\check{\lambda}*}\sigma_1^*\mathcal{P}$ *in* $\mathrm{IndCoh}^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量$_{\leq\check{\lambda}}$)。

证明. 根据 [CW23，引理 4.14]，$\mathcal{P}\cong p_1^{(k)*}\mathcal{P}_k$ 对于某个 $k\in\mathbb{N}$，其中 $p_1^{(k)}$: 格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}}\to$ ∽格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}/t^k}$是投影，且 $\mathcal{P}_k\in\mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}/t^k}$)；这里 $N_{\mathcal{O}/t^k}$是按 (3.1.1) 定义的有限维向量空间；我们也将投影 格拉斯曼量$_{\leq\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}}\to$ 格拉斯曼量$_{\leq\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}/t^k}$ 记为$p_1^{(k)}$。于是我们有

$$\sigma_1^*j_{\check{\lambda}*}\mathcal{P}\cong\sigma_1^*j_{\check{\lambda}*}p_1^{(k)*}\mathcal{P}_k\cong\sigma_1^*p_1^{(k)*}j_{\check{\lambda}*}\mathcal{P}_k.$$

最后一个同构来自基变换同构；这是因为 $j_{\check{\lambda}}$ 具有有限上同调维数，且 $p_1^{(k)}$ 是平坦的；参见第 2.2.4 节。

令 $\sigma_1^{(k)}$ 表示复合 $\mathrm{Gr}_{\leq\check{\lambda}}\ \ ^{\sigma_1},\longrightarrow\mathrm{Gr}_{\leq\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}}\xrightarrow{p_1^{(k)}}\mathrm{Gr}_{\leq\check{\lambda}}\times N_{\mathcal{O}/t^k},$，它具有有限 Tor 维数；我们也用 $\sigma_1^{(k)}$ 表示其对 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ 的限制。接下来继续计算：

$$\sigma_1^*p_1^{(k)*}j_{\check{\lambda}*}\mathcal{P}_k\cong\sigma_1^{(k)*}j_{\check{\lambda}*}\mathcal{P}_k\cong j_{\check{\lambda}*}\sigma_1^{(k)*}\mathcal{P}_k\cong j_{\check{\lambda}*}\sigma_1^*p_1^{(k)*}\mathcal{P}_k\cong j_{\check{\lambda}*}\sigma_1^*\mathcal{P},$$

其中第二个同构来自基变换同构；这是因为 $j_{\check{\lambda}}$ 具有有限上同调维数，且 $\sigma_1^{(k)}$ 具有有限 Tor 维数。□

∽总之， $\Xi(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\ \mu})$ 是 $\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{indcoh}}(\mathrm{Gr}_{\leq\check{\lambda}})$ 中的一个子对象。因此，对于任意满足 $\mathrm{Supp}\,\mathcal{G}\cap\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}=\emptyset$ 的 $\mathcal{G}\in$∽$\mathrm{KP}^{G_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr}_{\leq\check{\lambda}})$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{KP}}(\mathcal{G},\Xi(\mathcal{L}'_{\check{\lambda},\mu}))\subset\mathrm{Hom}_{\mathrm{KP}}(\mathcal{G},\mathcal{H}^0_K(j_{\check{\lambda}*}\sigma_1^*\mathcal{P}))=^{24}\mathrm{Hom}_{\mathrm{KP}}(j_{\check{\lambda}}^*\mathcal{G},\sigma_1^*\mathcal{P})=0. \tag{5.2.2}$$

因此，判据 (3.3.3) 中的第二个条件得到了验证。

接下来，我们使用 Grothendieck-Serre 对偶函子来验证判据 (3.3.3) 中的第一个条件。回顾我们在 (4.1.3) 中定义了 $\mathbb{D}_{\mathcal{R}_{\leq\check{\lambda}}}(-)=\mathcal{H}om(-,i_1^!p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\leq\check{\lambda}}}))$，并且有

[24]这里，$(j_{\check{\lambda}}^*(-)\ \mathcal{H}^0_K(j_{\check{\lambda}*}(-)))$ 是 Koszul 反常层的一个伴随对，因为 $(j_{\check{\lambda}}^*(-)\ j_{\check{\lambda}*}(-))$ 是一个伴随对，并且 $j_{\check{\lambda}}^*$ 是 Koszul 反常 t-正合的。

$\mathbb{D}(\mathcal{L}_{\check\lambda,\ \mu}) \cong i_{\leq\check\lambda}\mathbb{D}_{\mathcal{R}_{\leq\check\lambda}}(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\ \mu})$，如 (4.1.2)[25] 所示。由于 $\mathbb{D}(\mathcal{L}_{\check\lambda,\ \mu})$ 是一个简单对象，我们知道 $\mathbb{D}_{\mathcal{R}_{\leq\check\lambda}}(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\ \mu})$ 也是一个简单对象。将 (5.2.2) 应用于这个简单对象，我们推得，对于任意 $\mathcal{G}\in \mathrm{KP}^{G\mathcal{O}_{\mathrm{coh}}}(\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda})$，使得 $\mathrm{Supp}\,\mathcal{G}\cap \mathrm{Gr}_{\check\lambda}=\emptyset$，

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{KP}}(\mathbb{D}_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}(\mathcal{G}),\Xi\circ\mathbb{D}_{\mathcal{R}_{\leq\check\lambda}}(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}))=0.$$

注意到

$$\begin{aligned}\Xi\circ\mathbb{D}_{\mathcal{R}_{\leq\check\lambda}}(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}) &= \sigma_1^* i_{1*}\,\mathcal{H}om(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}, i_1^! p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}))\\ &\overset{(2.3.2)}{\cong} \sigma_1^*\,\mathcal{H}om(i_{1*}\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}, p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}))\\ &\overset{(2.3.3)}{\cong} \mathcal{H}om(\sigma_1^* i_{1*}\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}, \sigma_1^* p_1^*(\omega_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}))\\ &\overset{p_1\circ\sigma_1=\mathrm{id}}{\cong} \mathcal{H}om(\sigma_1^* i_{1*}\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}, \omega_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}) = \mathbb{D}_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}\circ\Xi(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}).\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{KP}}(\Xi(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}),\mathcal{G}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{KP}}(\mathbb{D}_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}(\mathcal{G}),\mathbb{D}_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}\circ\Xi(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{KP}}(\mathbb{D}_{\mathrm{Gr}_{\leq\check\lambda}}(\mathcal{G}),\Xi\circ\mathbb{D}_{\mathcal{R}_{\leq\check\lambda}}(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}))=0.\end{aligned}$$

因此，判据 (3.3.3) 中的第一个条件得以验证。综上，$\Xi(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\ \mu})\in \mathrm{KP}^{G\mathcal{O}}\mathrm{coh}(\text{格拉斯曼量}\leq\check\lambda)_{!*}$**步骤 2** 完成**步骤 1**后，只需计算 $j_{\check\lambda}^*\Xi(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\ \mu})$。

首先，

$$\begin{aligned}j_{\check\lambda}^*\Xi(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu}) &\cong \Xi\circ j_{\check\lambda}^*(\mathcal{L}'_{\check\lambda,\mu})\\ &\cong \Xi(\mathrm{cl}_* p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle))\\ &= \sigma_1^* i_{1*}^{\mathrm{cl}} p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle).\end{aligned}$$

我们进行与图式 (4.1.5) 类似的识别：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Gr}_{\lambda^\vee} & \xleftarrow{p^{\mathrm{cl}}} & \mathcal{R}^{\mathrm{cl}}_{\check\lambda} & \xrightarrow{i_1^{\mathrm{cl}}} & \mathrm{Gr}_{\lambda^\vee}\times N_{\mathcal{O}} & \xleftarrow{\sigma_1} & \mathrm{Gr}_{\lambda^\vee}\\
\uparrow\cong & & \text{①}\uparrow\cong & & \text{②}\uparrow\cong & & \text{③}\uparrow\cong\\
\widehat{G}_{\mathcal{O}}/\widehat{P}_{\check\lambda} & \xleftarrow{p^{\mathrm{cl}}} & \widehat{G}_{\mathcal{O}}\times^{\widehat{P}_{\check\lambda}} N_{\check\lambda} & \xrightarrow{i_1^{\mathrm{cl}}} & \widehat{G}_{\mathcal{O}}\times^{\widehat{P}_{\check\lambda}} N_{\mathcal{O}} & \xleftarrow{\sigma_1} & \widehat{G}_{\mathcal{O}}/\widehat{P}_{\check\lambda}
\end{array}$$

其中三个列映射为

$$\begin{aligned}&\text{①}: [g,x]\mapsto [gt^{\check\lambda}, t^{-\check\lambda}x],\\ &\text{②}: [g,x]\mapsto ([gt^{\check\lambda}], gx),\\ &\text{③}: [g]\mapsto [gt^{\check\lambda}].\end{aligned}$$

根据标准的 Koszul 分解论证，我们有：

$$\sigma_1^* i_{1*}^{\mathrm{cl}} p^{\mathrm{cl}*}(\mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle)\cong\bigoplus_k \mathcal{O}_{\check\lambda,\mu}\langle-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle\otimes\bigwedge^k\left(\widehat{G}_{\mathcal{O}}\times^{\widehat{P}_{\check\lambda}}(N_{\mathcal{O}}/N_{\check\lambda})^*\right)[k].$$

结合**步骤 1**，我们完成了该命题的证明。

□

我们以以上命题 5.2.1 的两个推论结束本小节。

[25]那里假设了 $N=\mathfrak{g}$，但（4.1.2）中的计算对一般的 N 都有效。

推论 5.2.1。 两个 K-群之间的映射

$$\Xi : K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}) \to K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}) \tag{5.2.3}$$

是单射。[26]

证明。 该 K-群 $K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ 有一个滤过，其各项为 $\left\{K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{\leq\check{\lambda}})\right\}_{\check{\lambda}\in\check{P}_+}$。该滤过的伴随分次可识别为 $\bigoplus_{\check{\lambda}\in\check{P}_+} K^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{\check{\lambda}})$. 类似地， $K^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$ 有一个滤过，其各项为 $\left\{K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{\leq\check{\lambda}})\right\}_{\check{\lambda}\in\check{P}}$，其伴随分次的描述类似。

根据定义， $\Xi^+ = \sigma_1^* i_{1*}$ 保持滤过，因此我们需要证明该映射在每个伴随分次片上都是单射

$$\Xi = \sigma_1^* i_{1*} : K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{\check{\lambda}}) \to K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}).$$

经过以下识别

$$K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}) \cong K^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}}(\mathrm{pt})$$
$$K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{\check{\lambda}}) = K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}^{\mathrm{cl}}_{\check{\lambda}}) \xrightarrow[\cong]{\sigma^*} K^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}) \cong K^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}}(\mathrm{pt}),$$

命题 5.2.1 表明，映射 Ξ 可识别为映射 $K^{P_{\check{\lambda}}}(\text{点}) \to K^{P_{\check{\lambda}}}(\text{点})$，该映射由与 $\sum_k (-1)^k[\bigwedge^k (N_{\mathcal{O}}/N_{\check{\lambda}})^*]$ 作张量积给出，而后者是一个非零元素。由于 $K^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}}(\text{点})$ 关于以张量积为乘法的结构是一个整环，映射 Ξ 是单射。□

另一个推论适用于特殊情形 $N = \mathfrak{g}$。

推论 5.2.2。 设 N 为 $\mathfrak{g}$的伴随表示。则

$$\Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda}}) \cong \bigoplus_{0\leq k\leq d_{\check{\lambda}}} i_{\leq\check{\lambda}*} j_{\check{\lambda},!*}\left(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}\langle k-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle[k]\right) \overset{(3.3.15)}{\cong} \bigoplus_{0\leq k\leq d_{\check{\lambda}}} i_{\leq\check{\lambda}*}\mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}})\langle k-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle[k]. \tag{5.2.4}$$

这里，$\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}} = \bigwedge^k \Omega^1_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}$ 是相对于 格拉斯曼量$\check{\lambda}$ 的 k 阶微分层，其中 点 $= \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ 赋予了自然的$G_{\mathcal{O}}$-等变性。

证明。 对于 $N = \mathfrak{g}$，我们可以识别 $N_{\check{\lambda}} = \mathfrak{p}_{\check{\lambda}}$，于是 (5.2.1) 变为

$$\Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda}}) \cong \bigoplus_{0\leq k\leq d_{\check{\lambda}}} i_{\leq\check{\lambda}*} j_{\check{\lambda},!*}\left(\bigwedge^k (\widehat{G}_{\mathcal{O}} \times^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}} (\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_{\check{\lambda}})^*)\langle -\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle[k]\right). \tag{5.2.5}$$

我们可以将 $\widehat{G}_{\mathcal{O}} \times^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}} (\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_{\check{\lambda}})^*$ 识别为 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}/\widehat{P}_{\check{\lambda}}$ 的余切丛，但其中 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-作用通过权 -1 缩放。于是我们可以将 $\widehat{G}_{\mathcal{O}} \times^{\widehat{P}_{\check{\lambda}}} (\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_{\check{\lambda}})^*$ 识别为 $\Omega^1_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}\langle 1\rangle$。将其代入上述公式 (5.2.5) 即完成该推论的证明。□

5.3. 计算 $\Xi[\mathcal{L}_{\check{\lambda}}] \boxtimes \Xi[\mathcal{L}_{\check{\mu}}]$。

在前一小节中，我们将 $\Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda}})$ 识别为 $\bigoplus_k i_{\leq\check{\lambda}*}\mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}})\langle k-\frac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle[k]$。在本小节中，我们将给出命题 5.3.1 中扭曲积 $\Xi[\mathcal{L}'_{\check{\lambda}}] \boxtimes \Xi[\mathcal{L}'_{\check{\mu}}]$ 的描述。

我们将 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\,\check{\mu}} := \overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}} \times \overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\mu}} \subset \mathrm{Gr} \times \mathrm{Gr}$ 记作 Gr；它在 $\mathrm{Gr} \times \mathrm{Gr}$ 中的闭包为 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}} \times \mathrm{Gr}_{\check{\mu}}$，记作 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\,\check{\mu}}$。我们还将 $d_{\check{\lambda},\,\check{\mu}} := \dim \mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\,\check{\mu}} = d_{\check{\lambda}} + d_{\check{\mu}}$ 记作 Gr。

命题 5.3.1。 在 $K^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量$\check{\lambda},\,\check{\mu}$)中，我们有如下识别

$$\Xi[\mathcal{L}'_{\check{\lambda}}] \,\widetilde{\boxtimes}\, \Xi[\mathcal{L}'_{\check{\mu}}] = \sum_{0\leq m\leq d_{\check{\lambda},\check{\mu}}} \left[\mathcal{IC}(\Omega^m_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\check{\mu}}})\langle m-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}\rangle[m]\right].$$

[26]我们指出，下面的证明本质上只用到了命题 5.2.1 证明中较容易的部分**步骤 2**。我们还指出，这个推论对 Borel-Moore 同调版本的库仑分支同样成立；这两个版本也都可以通过局部化定理证明。

证明。 利用识别 (5.2.4)，我们得到

$$\Xi[\mathcal{L}'_{\check\lambda}]\,\widetilde{\boxtimes}\,\Xi[\mathcal{L}'_{\check\mu}]=\sum_{k,l}\left[\mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check\lambda}})\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{IC}(\Omega^l_{\mathrm{Gr}_{\check\mu}})\langle k+l-\tfrac{1}{2}d_{\check\lambda,\check\mu}\rangle[k+l]\right].$$

因此，仍需证明

$$\left[\mathcal{IC}(\Omega^m_{\mathrm{Gr}_{\check\lambda,\check\mu}})\right]=\sum_{k+l=m}\left[\mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check\lambda}})\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{IC}(\Omega^l_{\mathrm{Gr}_{\check\mu}})\right]. \tag{5.3.1}$$

$\widehat{\ }$为简化记号，在本证明中记 $H=G_{\mathcal{O}}$, $X=$ 格拉斯曼量$_{\check\lambda}$, $Y=$ 格拉斯曼量$_{\check\mu}$。我们可以将 $\widehat{\ }$$H$-挠子 $G_{\mathcal{K}}\to$ 格拉斯曼量 $X=$ 限制到 $X=$ 格拉斯曼量$_{\check\lambda}\twoheadrightarrow$ 格拉斯曼量，并将所得的 H-挠子记为 $P(:=G_{\mathcal{K}}\times_{\mathrm{Gr}}$ 格拉斯曼量$_{\check\lambda})\to X$，其为扎里斯基局部平凡的（引理 3.1.1）。根据定义，扭曲积 $X\,\widetilde{\times}\,Y=$ 格拉斯曼量$_{\check\lambda}\,\widetilde{\times}$ 格拉斯曼量$_{\check\mu}$是伴随丛 $P\times^H Y$。开子集格拉斯曼量$_{\check\lambda}\subset$ 格拉斯曼量$_{\check\lambda}$、格拉斯曼量$_{\check\mu}\subset$ 格拉斯曼量$_{\check\mu}$ 分别记为 X°, $Y^{\circ\widetilde{\ }}$。对于开嵌入，我们记 $j_X\colon X^\circ\hookrightarrow X$, $j_Y\colon Y^\circ\hookrightarrow Y$, $j\colon X^\circ\times Y^\circ\hookrightarrow X\times Y$；对于自然投影，记 $\mathrm{p}\colon X\,\widetilde{\times}\,Y\to X$, $\mathrm{q}\colon X\,\widetilde{\times}\,Y\to[H\backslash Y]$, $\mathrm{p}_\circ\colon X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ\to X^\circ$, $\mathrm{q}_\circ\colon X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ\to[H\backslash Y^\circ]$,（见第 2.3.2 节）。

步骤 1 为了说明 (5.3.1) 的主要思想，我们先解释限制到开子概形 $X^\circ\ \ \widetilde{\times}\,Y^\circ\subset X\,\widetilde{\times}\,Y$。

对于纤维丛 $X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ\to X^\circ,$，在 $\mathsf{Coh}^H(X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ)^\heartsuit$ 中有一个短正合列：

$$0\to\mathrm{p}_\circ^*\Omega^1_{X^\circ}\to\Omega^1_{X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ}\to\Omega^1_{X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ/X^\circ}\to 0. \tag{5.3.2}$$

注意，

$$\mathrm{p}_\circ^*\Omega^1_{X^\circ}=\Omega^1_{X^\circ}\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{O}_{Y^\circ}. \tag{5.3.3}$$

根据笛卡尔图 (2.3.1)，我们还有

$$\Omega^1_{X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ/X^\circ}\cong\mathrm{q}_\circ^*\Omega^1_{Y^\circ}=\mathcal{O}_{X^\circ}\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega^1_{Y^\circ}. \tag{5.3.4}$$

短正合列 (5.3.2) 为每个 $\Omega^m_{X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ}=\bigwedge^m\Omega^1_{X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ}$ 产生一个滤过，其关联分次为

$$\bigwedge^k\left(\Omega^1_{X^\circ}\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{O}_{Y^\circ}\right)\otimes\bigwedge^l\left(\mathcal{O}_{X^\circ}\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega^1_{Y^\circ}\right)=\Omega^k_{X^\circ}\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega^l_{Y^\circ},\ \text{for } k+l=m.$$

因此我们有

$$\left[\Omega^m_{X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ}\right]=\sum_{k+l=m}\left[\Omega^k_{X^\circ}\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega^l_{Y^\circ}\right]$$

在 K-群 $K^H(X^\circ\,\widetilde{\times}\,Y^\circ)$ 中。

步骤 2 我们证明

$$\mathcal{IC}(\Omega^k_{X^\circ})\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{IC}(\Omega^l_{Y^\circ})\cong\mathcal{IC}(\Omega^k_{X^\circ}\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega^l_{Y^\circ})$$

利用命题 3.3.1。

注意，与外积类似，扭曲积也满足以下 Künneth 公式：

$$\mathcal{H}^r\left(\mathcal{IC}(\Omega^k_{X^\circ})\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{IC}(\Omega^l_{Y^\circ})\right)\cong\bigoplus_{i+j=r}\mathcal{H}^i\left(\mathcal{IC}(\Omega^k_{X^\circ})\right)\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{H}^j\left(\mathcal{IC}(\Omega^l_{Y^\circ})\right).$$

So

$$\operatorname{Supp}\mathcal{H}^r\left(\mathcal{IC}(\Omega^k_{X^\circ})\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{IC}(\Omega^l_{Y^\circ})\right)=\bigcup_{i+j=r}\operatorname{Supp}\mathcal{H}^i\left(\mathcal{IC}(\Omega^k_{X^\circ})\right)\,\widetilde{\times}\,\operatorname{Supp}\mathcal{H}^j\left(\mathcal{IC}(\Omega^l_{Y^\circ})\right).$$

根据 (3.3.11)， $\mathcal{IC}(\Omega^k_{X^\circ})$ 和 $\mathcal{IC}(\Omega^l_{Y^\circ})$ 满足支撑条件 (3.3.10)。令 $i+j=r\geq 1$。若 $i\geq 1$ 且 $j\geq 1$，则有

$$\operatorname{codim}\left(\operatorname{Supp}\mathcal{H}^i\left(\mathcal{IC}(\Omega^k_{X^\circ})\right)\,\widetilde{\times}\,\operatorname{Supp}\mathcal{H}^j\left(\mathcal{IC}(\Omega^l_{Y^\circ})\right)\right)\geq 2i+2+2j+2>2r+2.$$

若 i,j 中有一个为 0，不失一般性，令 $i=0$, $j=r\geq 1$；则
余维 $\left(\text{支撑集 } \mathcal{H}^0\left(\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^k)\right)\widetilde{\times}\text{支撑集 } \mathcal{H}^r\left(\mathcal{IC}(\Omega_{Y^\circ}^l)\right)\right)\geq$余维 支撑集 $\mathcal{H}^r\left(\mathcal{IC}(\Omega_{Y^\circ}^l)\right)\geq 2r+2.$

因此 $\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^k)\ \widetilde{\boxtimes}\ \mathcal{IC}(\Omega_{Y^\circ}^l)$ 满足 (3.3.10) 中的第一个支撑条件。由于

$$\omega_{X\widetilde{\times}Y}\cong \mathrm{p}^!\omega_X\cong \mathrm{p}^*\omega_X\otimes\omega_{X\widetilde{\times}Y/X}\cong \mathrm{p}^*\omega_X\otimes\mathrm{q}^*\omega_Y=\omega_X\,\widetilde{\boxtimes}\,\omega_Y,$$

我们有

$$\mathcal{D}_{X\widetilde{\times}Y}\left(\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^k)\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{IC}(\Omega_{Y^\circ}^l)\right)\cong \mathcal{D}_X\left(\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^k)\right)\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{D}_Y\left(\mathcal{IC}(\Omega_{Y^\circ}^l)\right);$$

这里 $\mathcal{D}$ 是 (3.3.7) 中的移位 Grothendieck-Serre 对偶函子。再次应用上述论证，我们便可推出 $\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^k)\ \widetilde{\boxtimes}\ \mathcal{IC}(\Omega_{Y^\circ}^l)$ 满足 (3.3.10) 中的第二个支撑条件。结合等式

$$j_{\lambda,\mu}^*(\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^k)\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{IC}(\Omega_{Y^\circ}^l))\cong \Omega_{X^\circ}^k\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_{Y^\circ}^l,$$

我们得出

$$\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^k)\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{IC}(\Omega_{Y^\circ}^l)\cong \mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^k\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_{Y^\circ}^l).$$

步骤 3 我们证明存在一个纤维-余纤维序列

$$\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^1\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{O}_{Y^\circ})\to\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^1\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_{Y^\circ}^1)\to\mathcal{IC}(\mathcal{O}_{X^\circ}\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_{Y^\circ}^1)\tag{5.3.5}$$

在稳定的∞-范畴 $\mathsf{Coh}^H(X\widetilde{\times}Y)$ 中；换言之，$\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^1\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_{Y^\circ}^1)$ 在该稳定∞-范畴中具有一个滤过，其伴随分次片为 $\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^1\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{O}_{Y^\circ})$ 和 $\mathcal{IC}(\mathcal{O}_{X^\circ}\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_{Y^\circ}^1)$。于是，在 K-群 $K^H(X\widetilde{\times}Y)$ 中，我们得到恒等式

$$[\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^1\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_{Y^\circ}^1)]=[\mathcal{IC}(\Omega_{X^\circ}^1\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{O}_{Y^\circ})]+[\mathcal{IC}(\mathcal{O}_{X^\circ}\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_{Y^\circ}^1)].$$

事实上，对于纤维丛 $X\widetilde{\times}Y\to X,$，我们在 $\mathsf{Coh}^H(X\widetilde{\times}Y)^\heartsuit$ 中有一个短正合列：

$$0\to\mathrm{p}^*\Omega_X^1\to\Omega_{X\widetilde{\times}Y}^1\to\Omega_{X\widetilde{\times}Y/X}^1\to 0.$$

经过与**步骤 1** (5.3.3) (5.3.4) 中类似的计算，该短正合列变为

$$0\to\Omega_X^1\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{O}_Y\to\Omega_{X\widetilde{\times}Y}^1\to\mathcal{O}_X\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_Y^1\to 0.\tag{5.3.6}$$

我们记 $\Omega_X^{[k]}:=(\Omega_X^k)^{\vee\vee}\in\mathsf{Coh}^H(X)^\heartsuit$，其中 $(-)^\vee:=\mathcal{H}^0(\mathcal{H}om(-))$. 这是 Ω_X^k 的反身包，见 [Sta25, 标记 0AVT]；由 [Sta25，标记 0AY6]，有 $\Omega_X^{[k]}=\mathcal{H}^0(j_{X*}(\Omega_{X^\circ}^k))$。其他 Kähler 微分层也使用类似的记号。

忘记 H-等变性后，短正合列 (5.3.6) 局部地在扎里斯基拓扑下分裂，因为~纤维丛 $X\times Y\to X$ 是扎里斯基局部平凡的。更明确地说，我们选择一个扎里斯基开覆盖 $\phi:\ U\to X$，使得 $\phi^*(X\widetilde{\times}Y)=U\widetilde{\times}Y\cong U\times Y$在 U 上成立。沿着$\rightsquigarrow\phi\times\mathrm{id}$ 对 (5.3.6) 作拉回后变为

$$0\to\Omega_U^1\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{O}_Y\to\Omega_{U\widetilde{\times}Y}^1\to\mathcal{O}_U\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_Y^1\to 0,$$

通过选择平凡化 $U\widetilde{\times}Y\cong U\times Y$，该序列分裂。应用加性函子 $(-)^{\vee\vee}$，我们得到反身包的一个分裂短正合列：

$$0\to\Omega_U^{[1]}\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{O}_Y\to\Omega_{U\widetilde{\times}Y}^{[1]}\to\mathcal{O}_U\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_Y^{[1]}\to 0;\tag{5.3.7}$$

~该序列是沿 $\phi\times\mathrm{id}$ 对以下序列的拉回，其各项是 (5.3.6) 中层的反身包：

$$0\to\Omega_X^{[1]}\,\widetilde{\boxtimes}\,\mathcal{O}_Y\to\Omega_{X\widetilde{\times}Y}^{[1]}\to\mathcal{O}_X\,\widetilde{\boxtimes}\,\Omega_Y^{[1]}\to 0.\tag{5.3.8}$$

总之，序列 (5.3.8) 是一个短正合列，并且局部地在扎里斯基拓扑下分裂。

现在我们将函子 (3.3.8)

$$\widetilde{\mathcal{IC}}:\mathrm{Refl}^H(X\widetilde{\times}Y)\to\mathsf{Coh}^H(X\widetilde{\times}Y)$$

应用于 (5.3.8)，并得到一列态射：

$$\widetilde{\mathcal{IC}}(\Omega_X^{[1]} \widetilde{\boxtimes} \mathcal{O}_Y) \to \widetilde{\mathcal{IC}}(\Omega_{U \widetilde{\times} Y}^{[1]}) \to \widetilde{\mathcal{IC}}(\mathcal{O}_U \widetilde{\boxtimes} \Omega_Y^{[1]}), \tag{5.3.9}$$

根据定义 3.3.4，每一项分别与 (5.3.5) 中的项相同。要证明该序列可以构成纤维-余纤维序列，只需利用 QCoh 的 fpqc 下降，证明沿忠实平坦覆盖 $X \widetilde{\times} Y \to [H\backslash X \widetilde{\times} Y]$（即遗忘 H-等变性）拉回该序列后可以构成纤维-余纤维序列。我们进一步将该序列拉回到扎里斯基覆盖 $\phi \times \mathrm{id}_Y \colon U \times Y \to X \times Y$，并证明它可以构成纤维-余纤维序列。注意，$\mathcal{IC}$-函子与沿 $\phi \times \mathrm{id}_Y$ 的拉回可交换：

$$(\phi \widetilde{\times} \mathrm{id}_Y)^* \circ \widetilde{\mathcal{IC}} \cong \widetilde{\mathcal{IC}} \circ (\phi \widetilde{\times} \mathrm{id}_Y)^*$$

因为我们选取的对偶化复形满足 $\omega_{U \widetilde{\times} Y} = (\phi \widetilde{\times} \mathrm{id}_Y)^* \omega_{X \widetilde{\times} Y}$。因此，将序列 (5.3.9) 拉回到 $U \widetilde{\times} Y$ 后得到

$$\widetilde{\mathcal{IC}}(\Omega_U^{[1]} \widetilde{\boxtimes} \mathcal{O}_Y) \to \widetilde{\mathcal{IC}}(\Omega_{U \widetilde{\times} Y}^{[1]}) \to \widetilde{\mathcal{IC}}(\mathcal{O}_U \widetilde{\boxtimes} \Omega_Y^{[1]}),$$

由于 (5.3.7) 是分裂短正合列，因此可以将其构造成分裂的纤维-余纤维序列。综上，(5.3.9) 可以构造成纤维-余纤维序列。

步骤 4 利用扎里斯基局部可分裂短正合列 (5.3.6)，我们为每个 $\Omega_{X \widetilde{\times} Y}^m = \bigwedge^m \Omega_{X \widetilde{\times} Y}^1$ 得到一个滤过，其伴随分次片为

$$\bigwedge^k \left(\Omega_X^1 \widetilde{\boxtimes} \mathcal{O}_Y\right) \otimes \bigwedge^l \left(\mathcal{O}_X \widetilde{\boxtimes} \Omega_Y^1\right) = \Omega_X^k \widetilde{\boxtimes} \Omega_Y^l, \text{ for } k + l = m.$$

按照**步骤 2**中的同样论证，$\Omega_{X \widetilde{\times} Y}^m$ 的滤过在阿贝尔范畴 $\mathrm{Coh}^H(X \widetilde{\times} Y)^\heartsuit$ 中为反身包 $\Omega_{X \widetilde{\times} Y}^{[m]}$ 生成一个滤过，其伴随分次片为

$$\Omega_X^{[k]} \widetilde{\boxtimes} \Omega_Y^{[l]}, \text{ for } k + l = m,$$

并进一步为稳定∞范畴 $\mathrm{Coh}^H(X \widetilde{\times} Y)$ 中的 $\widetilde{\mathcal{IC}}(\Omega_{X \widetilde{\times} Y}^{[m]})$ 生成一个滤过，其伴随分次片为

$$\widetilde{\mathcal{IC}}(\Omega_X^{[k]}) \widetilde{\boxtimes} \widetilde{\mathcal{IC}}(\Omega_Y^{[l]}), \text{ for } k + l = m.$$

因此，我们在 K-群 $K^H(X \widetilde{\times} Y)$ 中得到等式 (5.3.1)。

□

5.4. **霍奇模理论中的工具**。 根据命题 5.3.1，我们只需计算类

$$\left[m_{\mathrm{Gr},*}\left(\mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\check{\mu}}})\right)\right]$$

在每个 $k \in \mathbb{Z}, 0 \le k \le d_{\check{\lambda},\check{\mu}}$ 对应的 K-群 $K^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr})$ 中，其中 $m_{\mathrm{Gr}} \colon \mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\check{\mu}} = \mathrm{Gr}_{\check{\lambda}} \widetilde{\times} \overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\mu}} \to \overline{\mathrm{Gr}}^{\check{\lambda}+\check{\mu}}$ 是卷积映射；在本节余下部分中，我们将 m_{Gr} 简称为 m。

这些工具源自霍奇模理论。我们在附录 A 中简要回顾霍奇模理论的一些基本事实。

将相干 $\mathcal{IC}$-层与霍奇模联系起来的关键，在于 [Xin25] 的一项结果。我们先回顾一些关于辛簇的知识。

定义 5.4.1 ([Bea00])**.** 若一个簇 X 在正则轨迹 X_{reg} 上存在辛形式 ω，且对于某个（等价地，任意）奇点消解 $\pi \colon X \to X$，其拉回 $\pi^*\omega$ 到 $\pi^{-1}(X_{\mathrm{reg}})$ 后可延拓为 $\tilde{X}$上的全纯 2-形式 $\tilde{\omega}$，则称 X 具有辛奇点。

此外，若形式 $\tilde{\omega}$ 处处非退化，则称 π 为辛解消。

定理 5.4.1 ([Xin25,Thm. 5.4])**.** 设 X 是一个具有辛奇点、维数为 $2n$的簇，并假设它存在一个辛解消。设$\mathbf{IC}_X^{\mathrm{Hg}}$ 是 X上的 ***IC-Hodge*** 模，即权为 $2n$ 的纯霍奇模，满足$\mathrm{Rat}(\mathbf{IC}_X^{\mathrm{Hg}}) = \mathrm{IC}_X^{\mathbb{Q}}$。则有以下不等式

$$\operatorname{codim}\operatorname{Supp}\mathcal{H}^i\left(\mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}(\mathbf{IC}_X^{\mathrm{Hg}})[k-2n]\right) \geq 2i+2 \quad \textit{for any } i \geq 1.$$

这里，$\mathrm{gr}_{-k}\mathrm{DR}(-)$ 是附录 *A.2* 中介绍的分次德拉姆函子。

为了应用这一结果，我们需要引入仿射 Grassmann 切片 $\mathcal{W}^{\check{\mu}}{}_{\check{\lambda}}$，它们刻画了（球面）Schubert 簇 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ 的局部奇点。设 G 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的约化群。考虑负的（多项式）环群

$$L^-_{\mathrm{pol}}G : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{cl}} \to \mathrm{Set},\ R \to G(R[t^{-1}]).$$

它可以看作 $G_{\mathcal{K}}$ 的一个子群。群 $L^-{}_{\mathrm{pol}}G$ 具有求值映射 $ev:\ L^-{}_{\mathrm{pol}}G \to G$。其核记为 $L^{<0}_{\mathrm{pol}}G$。于是，轨道 $L^{<0}_{\mathrm{pol}}G \cdot t^{\check{\mu}}$ 是 $\mathrm{Gr}_{\check{\mu}}$ 在 Gr 中的一个横截切片；更多详情参见例如 [Zhu17，第 2.3 命题。9]

定义 5.4.2。对于两个支配余特征 $\check{\mu} \leq \lambda$，定义仿射格拉斯曼切片为

$$\overline{\mathcal{W}}^{\check{\mu}}_{\check{\lambda}} := L^{<0}_{\mathrm{pol}}G \cdot t^{\check{\mu}} \cap \overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}}. \tag{5.4.1}$$

这是格拉斯曼量 $\mathrm{Gr}_{\check{\mu}}$ 在格拉斯曼量$\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}}$ 中的一个横截切片，这意味着在 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ 中存在 $t^{\check{\mu}}$ 的一个开邻域，同构于 $\mathcal{W}^{\check{\mu}}{}_{\check{\lambda}} \times \mathrm{Gr}_{\check{\mu}}$。

命题 5.4.1 ([KWWY14，定理 2。7])。设 G 是一个连通约化群。

(1) 所有仿射格拉斯曼切片 $\mathcal{W}^{\check{\mu}}{}_{\check{\lambda}}$都具有辛奇点；*(2)* 若 G 是 ***A*** 型，则所有仿射格拉斯曼切片 $\mathcal{W}^{\check{\mu}}{}_{\check{\lambda}}$ 都有辛解消。

现在我们可以将定理 5.4.1 应用于 $\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}}$。为简洁起见，我们将 **交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\text{格拉斯曼流形}\check{\lambda}}$ 简写为 **交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\check{\lambda}}$，将 **交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\text{格拉斯曼流形}\check{\lambda},\check{\mu}}$ 简写为 **交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\check{\lambda},\check{\mu}}$。

命题 5.4.2. 令 $\check{\lambda},\check{\mu} \in P_+$。以下不等式成立：

$$\begin{aligned}
&\operatorname{codim}\operatorname{Supp}\mathcal{H}^i\left(\mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda}})[k-d_{\check{\lambda}}]\right) \geq 2i+2 \quad \textit{for any } i \geq 1,\\
&\operatorname{codim}\operatorname{Supp}\mathcal{H}^i\left(\mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda},\check{\mu}})[k-d_{\check{\lambda}}]\right) \geq 2i+2 \quad \textit{for any } i \geq 1.
\end{aligned} \tag{5.4.2}$$

证明。我们局部地分析这些模的支撑。

对于每个 $t^{\check{\nu}} \in$ 格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}$，都存在一个开邻域 $U_{\check{\nu}}$，它与 $\mathcal{W}^{\check{\nu}}_{\check{\lambda}} \times$格拉斯曼量$_{\check{\nu}}$ 同构。由于格拉斯曼量$_{\check{\nu}}$ 是光滑的，借助与 [Xin25, Lemma 5.3] 中类似的计算（或参见命题 5.3.1 证明中的 **步骤 2**），我们推得格拉斯曼量$_{\check{\nu}}$ 上的 IC 霍奇模 **交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}_{U_{\check{\nu}}}$ 满足不等式 (5.4.2)。

由于 $\check{\nu}$ 对所有 $\check{\nu} \leq \lambda$ 的 $U_{\check{\nu}}$ 的并覆盖格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}$，我们便完成了 (5.4.2) 第一部分的证明。

第二部分类似。根据引理 3.1.1，$\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\,\check{\mu}}$ 是 $\mathrm{Gr}_{\check{\mu}}$ 上一个扎里斯基局部平凡的 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$-丛。因此，$\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\,\check{\mu}}$ 局部地是 $\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}$ 和 $\mathrm{Gr}_{\check{\mu}}$ 的开子集的积。使用与 [Xin25 中引理 5.3] 相似的计算，我们再次得到 (5.4.2) 的第二部分。□

在附录 A.3 中，我们回顾了等变霍奇模理论，并将分次德拉姆函子扩展为弱等变版本。对于 $Y =$ 格拉斯曼量$_{\check{\lambda}}$ 或格拉斯曼量$_{\check{\lambda},\,\check{\mu}}$，令 $G_{\mathcal{O}}$ 在 Y 因子上的作用通过某个有限维商群 $G_{\mathcal{O}} \twoheadrightarrow G_i$。我们可以定义如下弱 G_i-等变德拉姆函子

$$\mathrm{gr}_p\,\mathrm{DR}^{G_i} : \mathrm{MHM}^{G_i}(Y) \to \mathrm{h}(\mathsf{Coh}^{G_i}(Y)),\quad p \in \mathbb{Z}.$$

根据定义，$\mathrm{MHM}^{G_{\mathcal{O}}}(Y) = \mathrm{MHM}^{G_i}(Y)$（见 A.4节）。沿着 $\widehat{G}_{\mathcal{O}} \twoheadrightarrow G_i$，将其与自然遗忘函子 $\mathsf{Coh}^{G_i}(Y) \to \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(Y)$ 复合，我们得到如下弱 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$-等变德拉姆函子

$$\mathrm{gr}_p \mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}} : \mathrm{MHM}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(Y) \to \mathrm{h}(\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(Y)), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

根据与遗忘函子 (A.3.6) 的相容性，这个 $\mathrm{gr}_p\mathrm{DR}^{G_{\mathcal{O}}}$ 函子不依赖于$\widehat{\ }$有限维商 $G_{\mathcal{O}} \twoheadrightarrow G_i$的选择；遗忘 $G_{\mathcal{O}}$-等变性后，我们得到 $\mathrm{gr}_p\mathrm{DR}$ 函子。

利用命题 5.4.2，我们可以推得以下推论。

推论 5.4.1。设 $\lambda, \mu \in P_+$，则有同构

$$\mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}) \cong \mathrm{gr}_{-k} \mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda}})[k - d_{\check{\lambda}}] \in \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}}),$$

$$\mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\check{\mu}}}) \cong \mathrm{gr}_{-k} \mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda},\check{\mu}})[k - d_{\check{\lambda},\check{\mu}}] \in \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda},\check{\mu}}).$$

结合推论 *5.2.2*，我们得到以下公式：

$$\Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda}}) \cong \bigoplus_{0 \le k \le d_{\check{\lambda}}} \mathrm{gr}_{-k} \mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda}})\langle k - \tfrac{1}{2} d_{\check{\lambda}} \rangle [2k - d_{\check{\lambda}}]. \tag{5.4.3}$$

证明。 利用命题 3.3.1，我们只需验证遗忘$\widehat{\ }$ $G_{\mathcal{O}}$-等变性后支撑条件 (3.3.10) 成立。设 $Y =$格拉斯曼量$_{\check{\lambda},\ \check{\mu}}$或格拉斯曼量$_{\check{\lambda},\ \check{\mu}}$。根据定义 (3.3.7)，$\mathcal{D}_Y(-) = \overline{\mathcal{H}}$的$\overline{(-, \omega_Y[-\text{维数 } Y])} = \mathbb{D}_Y(-)[-d_Y]$，再利用 (A.2.5)，可得一个同构

$$\mathcal{D}_Y\left(\mathrm{gr}_{-k} \mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y)[k - d_Y]\right) = \mathbb{D}_Y\left(\mathrm{gr}_{-k} \mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y)\right)[-k] \cong \mathrm{gr}_{k-d_Y} \mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y)[-k].$$

因此，支撑条件 (3.3.10) 可由命题 5.4.2 推得。 □

然后，我们将霍奇模的 Satake 等价应用于计算。

推论 5.4.2。令 $\check{\lambda}, \check{\mu} \in \check{P}_+$。我们在 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量$_{\check{\lambda}+\check{\mu}}$) 中有一个同构：

$$m_*\left(\mathcal{IC}(\Omega^k_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\check{\mu}}})\right) \cong \bigoplus_{\check{\nu} \in \check{P}_+} \mathcal{IC}(\Omega^{k+\frac{1}{2}d_{\check{\nu}} - \frac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}}_{\mathrm{Gr}_{\check{\nu}}})^{\oplus c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\check{\mu}}}[\tfrac{1}{2}d_{\check{\nu}} - \tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}].$$

证明。 根据上述推论 5.4.1，我们有一个同构

$$m_*\left(\mathcal{IC}(\Omega^n_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\check{\mu}}})\right) \cong m_*\left(\mathrm{gr}_{-k} \mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda},\check{\mu}})[k - d_{\check{\lambda},\check{\mu}}]\right).$$

接下来，我们应用命题 A.3.1，它给出了弱等变分次 de Rham$\widehat{\ }$函子与真推前函子之间的交换性。取一个有限维商群 $G_{\mathcal{O}} \twoheadrightarrow G_i$，使得$\widehat{\ }$ $G_{\mathcal{O}}$ 在格拉斯曼量$_{\check{\lambda},\ \check{\mu}}$ 以及格拉斯曼量$_{\check{\lambda}+\check{\mu}}$ 上的作用都通过 G_i分解。命题 A.3.1 蕴含

$$m_*\left(\mathrm{gr}_{-k} \mathrm{DR}^{G_i}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda},\check{\mu}})\right) \cong \mathrm{gr}_{-k} \mathrm{DR}^{G_i}\left(m_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda},\check{\mu}})\right)$$

在 Coh^{G_i}(格拉斯曼量$_{\check{\lambda},\ \check{\mu}}$) 中，这进一步蕴含

$$m_*\left(\mathrm{gr}_{-k} \mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda},\check{\mu}})\right) \cong \mathrm{gr}_{-k} \mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}\left(m_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda},\check{\mu}})\right)$$

属于 $\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}$(格拉斯曼量$_{\check{\lambda},\ \check{\mu}}$)。

结合霍奇模的推前计算 A.4.1，我们得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}\left(m_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda},\check{\mu}})\right)[k-d_{\check{\lambda},\check{\mu}}] &\cong \mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}\left(\bigoplus_{\check{\nu}\in\check{P}_+}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\nu}})^{\oplus c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\check{\mu}}(\frac{1}{2}d_{\check{\nu}}-\frac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}})}\right)[k-d_{\check{\lambda},\check{\mu}}]\\ &\cong \bigoplus_{\check{\nu}\in\check{P}_+}\mathrm{gr}_{-k-\frac{1}{2}d_{\check{\nu}}+\frac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}}\,\mathrm{DR}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\nu}})^{\oplus c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\check{\mu}}}[k-d_{\check{\lambda},\check{\mu}}]\\ &\cong \bigoplus_{\check{\nu}\in\check{P}_+}\mathcal{IC}(\Omega^{k+\frac{1}{2}d_{\check{\nu}}-\frac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}}_{\mathrm{Gr}_{\check{\nu}}})^{\oplus c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\check{\mu}}}[\tfrac{1}{2}d_{\check{\nu}}-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}].\end{aligned}$$

□

5.5. **定理 5.0.1 证明的结束部分**。

定理 *5.0.1* 的证明。 由推论 5.2.1，只需证明

$$\Xi([\mathcal{L}_{\check{\lambda}}]*[\mathcal{L}_{\check{\mu}}])=\sum_{\check{\nu}}c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\check{\mu}}\Xi[\mathcal{L}_{\check{\nu}}].$$

~根据命题 5.1.1，左边为 $\Xi[\mathcal{L}_{\check{\lambda}}]*\Xi[\mathcal{L}_{\check{\mu}}]$，根据定义即为 $m_*(\Xi[\mathcal{L}_{\check{\lambda}}]\boxtimes\Xi[\mathcal{L}_{\check{\mu}}])$。利用命题 5.3.1，我们有

$$\Xi[\mathcal{L}_{\check{\lambda}}]\,\widetilde{\boxtimes}\,\Xi[\mathcal{L}_{\check{\mu}}]=\sum_{0\le n\le d_{\check{\lambda},\check{\mu}}}\left[\mathcal{IC}(\Omega^n_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\check{\mu}}})\langle n-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}\rangle[n]\right].$$

然后利用推论 5.4.2，我们有

$$\begin{aligned}m_*(\Xi([\mathcal{L}_{\check{\lambda}}]*[\mathcal{L}_{\check{\mu}}])) &= \sum_{0\le n\le d_{\check{\lambda},\check{\mu}}}m_*\left[\mathcal{IC}(\Omega^n_{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda},\check{\mu}}})\langle n-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}\rangle[n]\right]\\ &= \sum_{0\le n\le d_{\check{\lambda},\check{\mu}}}\sum_{\check{\nu}\in\check{P}_+}c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\check{\mu}}\left[\mathcal{IC}(\Omega^{n+\frac{1}{2}d_{\check{\nu}}-\frac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}}_{\mathrm{Gr}_{\check{\nu}}})\langle n-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}\rangle[n+\tfrac{1}{2}d_{\check{\nu}}-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda},\check{\mu}}]\right]\\ &= \sum_{\check{\nu}\in\check{P}_+}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\check{\mu}}\left[\mathcal{IC}(\Omega^{n'}_{\mathrm{Gr}_{\check{\nu}}})\langle n'-\tfrac{1}{2}d_{\check{\nu}}\rangle[n']\right],\end{aligned}$$

根据 (5.2.2)，这等于 $\sum_{\check{\nu}\in\check{P}_+}c^{\check{\nu}}_{\check{\lambda},\check{\mu}}\Xi([\mathcal{L}_{\check{\nu}}])$。

□

6. Tannakian structure on KP_0

在本节中，我们仍假设约化群 G 是**A 型**。

定理 6.0.1。 范畴 KP_0 具有中性 *Tannakian* 结构（按照 [DM82，第 2 个定义。19]的意义），并且作为 $\mathbb{C}$上的中性 *Tannakian* 范畴，与$\mathrm{Rep}(\check{G})$ 等价。

主要工具是前一节建立的 K-群层面的结果，以及第 3.4 节中讨论的因子化结构。

6.1. **KP 的交换约束**$_0$。 根据第 3.4 节，KP 中存在一个重整化~r-矩阵系统$^{G_{\mathcal{O}}}\mathrm{coh}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}})$。

引理 6.1.1。 对于任意非零 $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathrm{KP}_0,$，有 $\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})=0$。

证明。 根据定理 5.0.1， $\mathcal{F}*\mathcal{G}$ 的合成因子只包含形如$\mathcal{L}_{\check{\lambda}}\{\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\}$ 的简单对象，其中$\check{}$ $\lambda\in\check{}P_+$；而 $\mathcal{G}*\mathcal{F}\{\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\}$ 的合成因子只包含形如$\mathcal{L}_{\check{\lambda}}\{\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\}$ 的简单对象，其中$\check{}$ $\lambda\in\check{}P_+$。若 $\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\neq 0$，则 $\mathcal{F}*\mathcal{G}$与 $\mathcal{G}*\mathcal{F}\{\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})\}$ 的合成因子没有交集，因此$\mathbf{r}_{\mathcal{F},\,\mathcal{G}}$ 必为零。这与 [CW19，推论 4.7] （见注 3.4.3）矛盾。因此$\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})=0$。□

推论 6.1.1。 KP_0 中的重整化 r-矩阵系统定义了KP_0中的一个交换约束系统。

证明。 我们只需证明，对于任意非零的 $\mathcal{F},\mathcal{G}\in \mathbf{KP}_0$，$\mathbf{r}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}\circ \mathbf{r}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \mathrm{id}$。交换约束的其他性质可由重整化 r-矩阵的定义以及前面的引理 6.1.1 得出。

回顾一下，在构造重整化 r-矩阵时，我们首先定义

$$C_{\mathcal{F},\mathcal{G}} := \eta_1(\widetilde{\mathcal{F}}\boxtimes \mathcal{O}_X)*\eta_2(\mathcal{O}_X\boxtimes\widetilde{\mathcal{G}})\in \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^2}}(\mathcal{R}_{X^2}),$$

然后考虑交换两个因子的态射

$$\mathrm{swap}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : C_{\mathcal{F},\mathcal{G}}|_U \to C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}|_U.$$

数值 $\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 衡量该态射如何延拓到整个 X^2 上。前面的引理 6.1.1 表明 $\Lambda(\mathcal{F},\mathcal{G}) = 0$，这意味着 $\mathrm{swap}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 可以唯一延拓为一个态射

$$\overline{\mathrm{swap}}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : C_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \to C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}.$$

~~属于 $\mathsf{h}(\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O},X^2}}(\mathcal{R}_{X^2}))$，且 $\mathbf{r}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$：$\mathcal{F}*\mathcal{G}\to \mathcal{G}*\mathcal{F}$是 swap 在 $\{0\}\in X^2$ 上的限制。由于~~$\mathrm{sw}^*(\mathrm{swap}_{\mathcal{G},\mathcal{F}})\circ\mathrm{swap}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \mathrm{id}$ in $\mathsf{h}(\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O},X^2}|_U}(\mathcal{R}_{X^2}|_U))$，唯一延拓性蕴含 $\mathrm{sw}^*(\mathrm{swap}_{\mathcal{G},\mathcal{F}})\circ\mathrm{swap}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \mathrm{id}$ i~~n $\mathsf{h}(\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O},X^2}}(\mathcal{R}_{X^2}))$。限制到 $\{0\}\subset X^2$ 上，我们推出 $\mathbf{r}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}\circ\mathbf{r}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \mathrm{id}$。

□

6.2. **纤维函子 $\mathbf{F}:\mathrm{KP}_0\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$。** 在本小节中，我们构造一个纤维函子$\mathbf{F}:\mathrm{KP}_0\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$，使 KP_0 成为 $\mathbb{C}$上的中性坦纳范畴。

令 $\pi:\mathrm{Gr}\to\mathrm{pt}$ 为投影，它是一个归纳射影态射。考虑超上同调函子

$$\mathbb{H}^i := \mathcal{H}^i\circ\pi_* : \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Gr})\subset \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})\to \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{pt})^{\heartsuit}[\sqrt{\langle 1\rangle}] = \mathrm{Rep}(\widehat{G}_{\mathcal{O}})[\sqrt{\langle 1\rangle}], i\in\mathbb{Z}. \tag{6.2.1}$$

此处，右边添加 $\langle 1\rangle$ 的平方根，是为了计入~~$\mathsf{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$~~ 的次数修正；参见第 3.3.1 节。

命题 6.2.1. 对于 $\lambda\in P_+$，有

(1) $\mathbb{H}^i\circ\Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda}}) = 0$，对 $i\neq 0$ 成立；*(2)* $\mathbb{H}^0\circ\Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda}})\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^p(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}},\text{交叉上同调复形}^{\mathbb{C}}_{\check{\lambda}})\langle\frac{1}{2}p\rangle$ 属于表示范畴$(\widehat{G}_{\mathcal{O}})[\sqrt{\langle 1\rangle}]$。这里 $\overline{H}^*(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}},\text{交叉上同调复形}^{\mathbb{C}}_{\check{\lambda}})$ 表示 $\overline{Gr}$ 上以 $\mathbb{C}$ 为系数的可构造交叉复形的上同调。注意，由于 $G_{\mathcal{O}}$ 连通，自然的 $\widehat{G}_{\mathcal{O}}$-作用在 $\overline{H}^p(\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}},\text{交叉上同调复形}^{\mathbb{C}}_{\check{\lambda}})$ 上是平凡的。

我们指出，几何 Satake 等价蕴含交叉上同调复形

$$IH^*(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}}) := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^p(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\lambda}}, \mathrm{IC}^{\mathbb{C}}_{\check{\lambda}})$$

$\check{}$ 与 $V_{\check{\lambda}}$ 作为向量空间同构，其中 $V_{\check{\lambda}}$ 是 G 的最高权为 $\check{}\lambda$的不可约表示。

证明。 根据公式 (5.4.3)，我们有

$$\mathbb{H}^i\circ\Xi(\mathcal{L}_{\check{\lambda}})\cong\bigoplus_{0\le k\le d_{\check{\lambda}}}\mathbb{H}^i\left(\mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda}})\langle k-\tfrac{1}{2}d_{\check{\lambda}}\rangle[2k-d_{\check{\lambda}}]\right). \tag{6.2.2}$$

利用真推前与分次德拉姆函子（命题 A.2.2）的交换性，我们有

$$\mathbb{H}^n\left(\mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda}})\right)\cong\mathcal{H}^n\left(\mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}\left(\pi_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check{\lambda}})\right)\right). \tag{6.2.3}$$

[27]证明与 [CW19]第 750 页最后一段基本相同。

显然，我们可以将点上的霍奇模的 $\mathrm{gr} = \mathrm{gr}\,\mathrm{DR}$ 识别为，因此

$$\mathcal{H}^n\left(\mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}\left(\pi_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda})\right)\right) = \mathcal{H}^n\left(\mathrm{gr}_{-k}\left(\pi_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda})\right)\right). \tag{6.2.4}$$

由于投影 $\pi : \mathrm{Gr}_{\check\lambda} \to \mathrm{pt}$ 是射影的，且 **交叉上同调复形** $^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda}$ 是权为 $d_{\check\lambda}$ 的纯霍奇模，霍奇结构

$$\mathcal{H}^n\left(\pi_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda})\right) \in \mathrm{HM}(\mathrm{pt})$$

是权为 $n + d_{\check\lambda}$ 的纯 $\mathbb{C}$-向量空间 $H^n(\mathrm{Gr}_{\check\lambda}, \mathrm{IC}^{\mathbb{C}}_{\check\lambda})$。根据 [Fed21, 命题 4.3 (i)], , 这是平凡霍奇结构的 Tate 扭曲的直和。因此我们有

$$\mathcal{H}^n\left(\pi_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda})\right) = 0, \quad \text{when } 2 \nmid n + d_{\check\lambda}$$

并且当 $2 \mid n + d_{\check\lambda}$ 时，$\mathcal{H}^n\left(\pi_{*,\ \mathrm{Hg}}(\{\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}{}_{\check\lambda})\right)$ 上的霍奇滤过为

$$\begin{aligned} F_{-k-1}\mathcal{H}^n\left(\pi_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda})\right) &= 0, \\ F_{-k}\mathcal{H}^n\left(\pi_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda})\right) &= H^n(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check\lambda}, \mathrm{IC}^{\mathbb{C}}_{\check\lambda}) \end{aligned}$$

对于 $k = (n + d_{\check\lambda})/2$。等价地，我们有

$$\mathcal{H}^n\left(\mathrm{gr}_{-k}\left(\pi_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda})\right)\right) \cong \mathrm{gr}_{-k}\left(\mathcal{H}^n\left(\pi_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda})\right)\right) = \begin{cases} 0, & \text{if } 2k \neq n + d_{\check\lambda}, \\ H^n(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check\lambda}, \mathrm{IC}^{\mathbb{C}}_{\check\lambda}), & \text{if } 2k = n + d_{\check\lambda}; \end{cases}$$

这里，第一个等式来自 $\mathrm{gr}_{-k} : \mathrm{D}^b\mathrm{HM}(\mathrm{pt}) \to \mathrm{D}^b\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ 的正合性。

结合 (6.2.3) 和 (6.2.4)，我们可以继续计算 (6.2.2):

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^i \circ \Xi(\mathcal{L}_{\check\lambda}) &\cong \bigoplus_{0 \le k \le d_{\check\lambda}} \mathbb{H}^i\left(\mathrm{gr}_{-k}\,\mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda})\langle k - \tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle[2k - d_{\check\lambda}]\right) \\ &\cong \bigoplus_{0 \le k \le d_{\check\lambda}} \mathcal{H}^{i+2k-d_{\check\lambda}}\left(\mathrm{gr}_{-k}\left(\pi_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda})\right)\right)\langle k - \tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle \\ &\cong \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq 0, \\ \bigoplus_{0 \le k \le d_{\check\lambda}} H^{2k-d_{\check\lambda}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check\lambda}, \mathrm{IC}^{\mathbb{C}}_{\check\lambda})\langle k - \frac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle, & \text{if } i = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

此外，这个同构可以提升为 $G_{\mathcal{O}}$-等变版本：在 (6.2.3) 中，我们改用命题 A.3.1。因此

$$\mathbb{H}^0 \circ \Xi(\mathcal{L}_{\check\lambda}) \cong \bigoplus_{0 \le k \le d_{\check\lambda}} H^{2k-d_{\check\lambda}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check\lambda}, \mathrm{IC}^{\mathbb{C}}_{\check\lambda})\langle k - \tfrac{1}{2}d_{\check\lambda}\rangle$$

作为 $G_{\mathcal{O}}$-表示。

此外，已知 $H^p(\mathrm{Gr}_{\check\lambda}, \mathrm{IC}^{\mathbb{C}}_{\check\lambda})^{\frown} = 0$ 若 $2 \nmid p - d_{\check\lambda}$；由此我们得出该命题。 □

上述命题有以下两个推论 6.2.1、6.2.2。

推论 6.2.1。

(1) 函子的复合

$$\mathbb{H}^i \circ \Xi : \mathrm{KP}_0 \subset \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\Xi} \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,0}) \xrightarrow{\mathbb{H}^i} \mathrm{Rep}(\widehat{G}_{\mathcal{O}})[\sqrt{\langle 1\rangle}]$$

当 $i \neq 0$ 时为零。而对于所有 $\mathcal{F} \in \mathrm{KP}_0$, $\mathbb{H}^0 \circ \Xi(\mathcal{F})$ 具有平凡的 $\mathbb{G}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{m}}$-作用；

(2) 定义

$$\mathbf{F} := \mathrm{For} \circ \mathbb{H}^0 \circ \Xi : \mathrm{KP}_0 \subset \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\Xi} \mathrm{KP}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{R}_{G,0}) \xrightarrow{\mathbb{H}^0} \mathrm{Rep}(\widehat{G}_{\mathcal{O}})[\sqrt{\langle 1\rangle}] \xrightarrow{\mathrm{For}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}.$$

那么$\mathbf{F}$ 是一个正合忠实函子。

证明。对于任意 短正合列 $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ 在 KP_0, 中，我们有一个长正合列

$$\cdots \to \mathbb{H}^i \circ \Xi(\mathcal{F}') \to \mathbb{H}^i \circ \Xi(\mathcal{F}) \to \mathbb{H}^i \circ \Xi(\mathcal{F}'') \to \mathbb{H}^{i+1} \circ \Xi(\mathcal{F}') \ldots . \tag{6.2.5}$$

定理 5.0.1 表明，KP_0 中的每个对象都是形如 $\check{}\check{}\mathcal{L}_{\check{\lambda}}, \lambda \in P_+$ 的简单对象的迭代扩张。于是命题 6.2.1 推出

$$\mathbb{H}^i(\mathcal{F}) = 0, \forall \mathcal{F} \in \mathrm{KP}_0, \quad \text{when } i \neq 0.$$

因此，长正合列 (6.2.5) 成为一个短正合列

$$0 \to \mathbb{H}^0 \circ \Xi(\mathcal{F}') \to \mathbb{H}^0 \circ \Xi(\mathcal{F}) \to \mathbb{H}^0 \circ \Xi(\mathcal{F}'') \to 0 \tag{6.2.6}$$

对于 KP_0，中的任意短正合列 $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ ，$\mathbf{F}$ 都是正合的。

根据命题 6.2.1，由于 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}} \subset \check{G}(\mathcal{L}_{\check{\lambda}})$ 对所有对象都具有平凡的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$ 作用，我们可以推得，对于所有 $\mathcal{F} \in \mathrm{KP}_0$， $\mathbb{H}^0 \circ \Xi(\mathcal{F})$ 上的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$ 作用是平凡的。

命题 6.2.1 还蕴含，对于所有 $\check{} \lambda \in \check{}P_+$，$\dim \mathbf{F}(\mathcal{L}_{\check{\lambda}}) = \dim\ IH^*(\overline{\mathrm{Gr}_{\check{\lambda}}}) = \dim\ V_{\check{\lambda}} \neq 0$，于是 $\mathbf{F}$ 的忠实性便得证。□

注 6.2.1。 完成中性 Tannakian 结构的构造后，我们可以推得 KP_0 是半单的；参见引理 6.3.1 和注 6.3.1。于是命题 6.2.1 蕴含，对于所有 $\mathcal{F} \in \mathrm{KP}_0$， $\mathbb{H}^0 \circ \Xi(\mathcal{F})$ 上的 $G_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$ 作用是平凡的。

第二个推论为$\mathbf{F}$上的张量结构提供了数值证据。

推论 6.2.2。对于任意 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{KP}_0$, 我们有

$$\dim(\mathbf{F}(\mathcal{F} * \mathcal{G})) = \dim(\mathbf{F}(\mathcal{F})) \cdot \dim(\mathbf{F}(\mathcal{G})). \tag{6.2.7}$$

证明。 由定理 5.0.1 和命题 6.2.1，我们有

$$\begin{aligned}
\dim \mathbf{F}(\mathcal{L}_{\check{\lambda}} * \mathcal{L}_{\check{\mu}}) &= \sum_{\check{\nu} \in \check{P}_+} c_{\check{\lambda},\check{\mu}}^{\check{\nu}} \dim \mathbf{F}(\mathcal{L}_{\check{\nu}}) \\
&= \sum_{\check{\nu} \in \check{P}_+} c_{\check{\lambda},\check{\mu}}^{\check{\nu}} \dim IH^*(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check{\nu}}) \\
&= \sum_{\check{\nu} \in \check{P}_+} c_{\check{\lambda},\check{\mu}}^{\check{\nu}} \dim V_{\check{\nu}} \\
&= \dim V_{\check{\lambda}} \cdot \dim V_{\check{\mu}} \\
&= \dim \mathbf{F}(\mathcal{L}_{\check{\lambda}}) \cdot \dim \mathbf{F}(\mathcal{L}_{\check{\mu}}).
\end{aligned}$$

于是，由$\mathbf{F}$的正合性可知，(6.2.7) 对所有 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{KP}_0$ 均成立。 □

注记 6.2.2。 上述推论 6.2.2 的另一个特点是， $\mathbb{H}^* \circ \Xi(\mathcal{F})$ 都具有平凡的$\measuredangle G_{\mathcal{O}}$-作用。不难证明，对于 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}^{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr})$，如果 $m_*(\mathcal{G})$ 属于沿着商 $\widehat{G}_{\mathcal{O}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$, 的遗忘函子 $\mathrm{Coh}^{\mathbb{G}^{\mathrm{rot}}{}_{\mathrm{m}} \times \mathbb{G}^{\mathrm{dil}}{}_{\mathrm{m}}}(\mathrm{pt}) \to \mathrm{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O}}}(\mathrm{pt})$ 的本质像，那么我们有一个（非典范的）同构

$$m_*(\overline{\mathcal{F}} * \overline{\mathcal{G}}) \cong m_*(\overline{\mathcal{F}}) \otimes m_*(\overline{\mathcal{G}}).$$

本小节余下部分将致力于将上述数值结果提升为 $\mathbf{F}$ 上的张量结构，该结构由函子同构组成

$$\mathbf{F}(\mathcal{F} * \mathcal{G}) \cong \mathbf{F}(\mathcal{F}) \otimes \mathbf{F}(\mathcal{G})$$

并满足某些相容条件。具体定义参见 [DM82，定义 1.8]。

定理 6.2.1。 正合忠实的 $\mathbb{C}$-线性函子 $\mathbf{F}$ 带有张量结构。因此，我们在 KP_0 上构造一个纤维函子，并使 KP_0 成为一个中性坦纳范畴。

证明。 我们将使用来自 $\mathcal{R}_{G,\mathfrak{g}}$ 上因子化结构的工具，如第 3.4 节所述。令$\mathcal{F},\mathcal{G}\in \mathrm{KP}_0$。

回顾一下，在 (3.4.6) 中我们定义了一个对象

$$C_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:=\eta_1(\widetilde{\mathcal{F}}\boxtimes\mathcal{O}_X)*\eta_2(\mathcal{O}_X\boxtimes\widetilde{\mathcal{G}})\in \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^2}}(\mathcal{R}_{X^2})$$

并带有同构 (3.4.7)。

现在我们应用等变 Ξ-下降，我们的整体版本的态射记为 $i_1\colon \mathcal{R}_{X^I}\to \mathrm{Gr}_{X^I}\times_{X^I}\widehat{N}_{\mathcal{O},X^I}$, $\sigma_1\colon \mathrm{Gr}_{X^I}\to \mathrm{Gr}_{X^I}\times_{X^I}N_{\mathcal{O},X^I}$, $\pi\colon \mathrm{Gr}_{X^I}\to X^I$，并记

$$\Xi=\sigma_1^* i_{1*}:\mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^I}}(\mathcal{R}_{X^I})\to \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^I}}(\mathrm{Gr}_{X^I}).$$

然后我们考虑

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:=\pi_*\Xi(C_{\mathcal{F},\mathcal{G}})\in \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^2}}(X^2).$$

同构 (3.4.7) 表明

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}|_\Delta\cong \pi_*\Xi(\widetilde{\mathcal{F}*\mathcal{G}}),\quad \mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}|_U\ \cong\Big(\pi_*\Xi(\widetilde{\mathcal{F}})\boxtimes\pi_*\Xi(\widetilde{\mathcal{G}})\Big)|_U. \tag{6.2.8}$$

如果我们忘掉等变性，并将其视为 $\mathsf{Coh}(X^2)$ 中的一个对象，那么 (6.2.8) 表明，它在闭点 $x\in\Delta$ 处的限制为 $\pi_*\Xi(\mathcal{F}*\mathcal{G})$，而它在闭点 $x\in U$ 处的限制为$\pi_*\Xi(\mathcal{F})\boxtimes\pi_*\Xi(\mathcal{G})$。根据推论 6.2.1， $\pi_*\Xi(\mathcal{F}*\mathcal{G})$ 和 $\pi_*\Xi(\mathcal{F})\boxtimes\pi_*\Xi(\mathcal{G})$ 都集中在上同调次数 0，且根据定义，它们分别是向量空间 $\mathbf{F}(\mathcal{F}*\mathcal{G})$ 和 $\mathbf{F}(\mathcal{F})\otimes\mathbf{F}(\mathcal{G})$。记

$$r:=\dim(\mathbf{F}(\mathcal{F}*\mathcal{G}))=\dim(\mathbf{F}(\mathcal{F})\otimes\mathbf{F}(\mathcal{G})).$$

我们断言，上述信息表明 $\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 是秩为 r、集中于上同调次数 0 的局部自由普通相干层；换言之，$\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 是秩为 r的向量丛。我们将这一断言总结为下文的引理 6.2.1。

现在我们重新加入 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变性，从而将 $\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 视为 X^2上的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变向量丛。下一个断言是，$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变性给出了 $\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 各纤维之间作为向量空间的典范识别。记 $R:=\mathbb{C}[X^2]$为 $0\in X^2$的极大理想，$\mathfrak{m}:=$ 为 $\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$的整体截面；我们将 $R=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}R_d$ 视为分次 $\mathbb{C}$-代数，将 M 视为有限生成的分次射影 R-模。令 $M:=M/\mathfrak{m}M=$ 为 $\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$在 $0\in X^2$处的纤维；它可识别为 $\mathbb{H}^0\circ\Xi(\mathcal{F}*\mathcal{G})$，因此由推论 6.2.2 可知其 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-作用平凡。下文的引理 6.2.2 表明 $M\cong R\otimes_{\mathbb{C}}M$ 是分次 R-模。令

$$\mathrm{Isom}_{R\rtimes\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}}(M,R\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M})$$

表示 M 与 $R\otimes_{\mathbb{C}}M$ 之间作为分次 R-模的同构集合。自同构群在其上有一个传递自由作用

$$\mathrm{Aut}_{R\rtimes\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}}(R\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M}).$$

注意

$$\mathrm{Aut}_{R\rtimes\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}}(R\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M})\subset\mathrm{Hom}_{R\rtimes\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}}(R\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M},R\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M})=\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}}(\overline{M},R\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M}),$$

并且 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}}(\overline{M},R\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M})=\mathrm{Hom}(\overline{M},R_0\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M})=\mathrm{Hom}(\overline{M},\overline{M})$，因为 M具有平凡的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-作用。因此

$$\mathrm{Aut}_{R\rtimes\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}}(R\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M})=\mathrm{GL}(\overline{M}),$$

i.e. $R\otimes_{\mathbb{C}}M$ 的分次 R-模自同构只能是常值自同构 s.

总之，$\mathrm{GL}(M)$ 在以下对象上有一个传递自由作用

$$\mathrm{Isom}_{R\rtimes\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}}(M,R\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M})=\mathrm{Isom}_{X^2\rtimes\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}}\left(\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}},\mathcal{O}_{X^2}\otimes_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}|_0)\right),$$

这实际上意味着我们可以将 $\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 的每个纤维典范地识别为向量空间。这个过程给出一个典范同构

$$\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:\mathbf{F}(\mathcal{F})\otimes F(\mathcal{G})\cong\mathbf{F}(\mathcal{F}*\mathcal{G}).$$

接下来，我们验证这类同构在 $\mathbf{F}$ 上给出了张量结构。

(1) 对于 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \in \mathrm{KP}_0$, , 考虑以下乘积

$$C_{\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2,\ \mathcal{F}_3} := \eta_1^{123}(\widetilde{\mathcal{F}}_1 \boxtimes \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_X) * \eta_2^{123}(\mathcal{O}_X \boxtimes \widetilde{\mathcal{F}}_2 \boxtimes \mathcal{O}_X) * \eta_3^{123}(\mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_X \boxtimes \widetilde{\mathcal{F}}_3) \in \mathsf{Coh}^{\widehat{G}_{\mathcal{O},X^3}}(\mathcal{R}_{X^3}$$

$$\begin{gathered}
\Delta_{123} := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 | x_1 = x_2 = x_3\right\}, \\
\Delta_{ij} := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 | x_i = x_j\right\} \setminus \Delta_{123}, \text{ for } \{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}, \\
U_{123} := X^3 \setminus \Delta_{12} \cup \Delta_{13} \cup \Delta_{23}.
\end{gathered}$$

与前面的论证类似，我们可以将

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3} := \pi_* \Xi(C_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3}),$$

视为定义在 X^3 上的一个 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变向量丛，其秩为 $\dim \mathbf{F}(\mathcal{F}_1) \cdot \dim \mathbf{F}(\mathcal{F}_2) \cdot \dim \mathbf{F}(\mathcal{F}_3)$。令 $x \in X^3$ 为 X^3 的一个闭点；$\mathcal{E}_{\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2,\ \mathcal{F}_3}$ 在 x 处的纤维为

$$\begin{cases}
\mathbf{F}(\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 * \mathcal{F}_3), & \text{if } x \in \Delta_{123}; \\
(\mathbf{F}(\mathcal{F}_i * \mathcal{F}_j) \otimes \mathcal{F}_k)_{i,j,k}, & \text{if } x \in \Delta_{ij}; \\
\mathbf{F}(\mathcal{F}_1) \otimes \mathbf{F}(\mathcal{F}_2) \otimes \mathbf{F}(\mathcal{F}_3), & \text{if } x \in U_{123};
\end{cases}$$

这里，第二行中的记号表示我们将 $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k$ 放在第 i, j, k 个位置。 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变向量丛 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2,\ \mathcal{F}_3}$ 在各纤维之间给出自然的识别；由因子化等价，这些识别也可以用自然的方式通过 $\alpha_{-,\ -}$ 来表达。这意味着 [DM82，定义 1.8] 中的第一个图表是交换的。

(2) 回顾推论 6.1.1，我们有一个同构

$$\overline{\mathrm{swap}} : C_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \to C^{\mathrm{sw}}_{\mathcal{G},\mathcal{F}},$$

使其在 $U \subset X^2$ 上的限制是交换两个因子的同构 swap：$(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})|_U \to \mathrm{sw}^*(\mathcal{G} \boxtimes \mathcal{F})|_U$，而其在 $\{0\} \subset X^2$ 上的限制是 $\mathbf{r}_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}}$： $\mathcal{F} * \mathcal{G} \to \mathcal{G} * \mathcal{F}$。应用 $\pi_* \Xi$，我们得到两个 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}$-等变向量丛之间的同构

$$\pi_* \Xi(\overline{\mathrm{swap}}) : \mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \to \mathrm{sw}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}),$$

这给出了下图的交换性：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}|_{x_U} & \longrightarrow & \mathrm{sw}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{G},\mathcal{F}})|_{x_U} \\
{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{G},\mathcal{F}}} \\
\mathcal{E}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}|_{x_\Delta} & \longrightarrow & \mathrm{sw}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{G},\mathcal{F}})|_{x_\Delta}
\end{array}$$

对于任意闭点 $x_U \in U$、 $x_\Delta \in \Delta$。这意味着图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{F}(\mathcal{F}) \otimes \mathbf{F}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathbf{F}(\mathcal{G}) \otimes \mathbf{F}(\mathcal{F}) \\
{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{G},\mathcal{F}}} \\
\mathbf{F}(\mathcal{F} * \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathbf{F}(\mathcal{G} * \mathcal{F})
\end{array}$$

交换。

□

引理 6.2.1. 设 Y 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑簇，且 $\mathcal{C} \in \mathsf{Coh}(Y)$。假设对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 和任意闭点 $y \in Y$，非导出纤维 $\mathcal{H}^k(i_y^* \mathcal{C})$ 的维数等于某个仅依赖于 k 的 $r_k \in \mathbb{N}$ 。那么对任意 $k \in \mathbb{Z}$， $\mathcal{H}^k(\mathcal{C})$ 是秩为 r_k 的局部自由层。

证明. 我们将使用一个标准的子引理。设 $\mathcal{M}$ 是定义在 Y 上的普通相干层，且对任意闭点 $y \in Y$，非导出纤维 $\mathcal{H}^0(i_y^*\mathcal{M})$ 的维数等于某个固定的 $n \in \mathbb{N}$。那么 M 是 Y 上秩为 n 的局部自由层。[28]

这个子引理推出另一个标准子引理。设 $0 \to \mathcal{M}'' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}' \to 0$ 是普通相干层的一个短正合列。假设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 是有限秩局部自由层，那么 $\mathcal{M}''$ 也是有限秩局部自由层。事实上，对于 Y 中任意一个闭点 y，我们有一个正合列

$$\mathcal{H}^{-1}(i_y^*\mathcal{M}') = 0 \to \mathcal{H}^0(i_y^*\mathcal{M}'') \to \mathcal{H}^0(i_y^*\mathcal{M}) \to \mathcal{H}^0(i_y^*\mathcal{M}') \to 0.$$

因此，$\dim \mathcal{H}^0(i_y^*\mathcal{M}'')$ 是常数秩 $\mathcal{M} - \operatorname{rank} \mathcal{M}'$。由上述子引理可知，$\mathcal{M}''$ 是有限秩局部自由层。

现在回到原问题。由于 Y 光滑，$\mathcal{C}$ 可以由一个完美复形 $0 \to \mathcal{M}^m \to \mathcal{M}^{m+1} \to \cdots \to \mathcal{M}^n \to 0$ 表示（即每个 $\mathcal{M}^i$ 都是有限秩局部自由层）。令$\mathcal{P}^k :=$ 的像为 $(\mathcal{M}^k \to \mathcal{M}^{k+1})$，并令 $\mathcal{Q}^k :=$ 的核为 $(\mathcal{M}^k \to \mathcal{M}^{k+1})$。我们有两个短正合列

$$0 \to \mathcal{Q}^k \to \mathcal{M}^k \to \mathcal{P}^k \to 0, \tag{6.2.9}$$

$$0 \to \mathcal{P}^k \to \mathcal{Q}^{k+1} \to \mathcal{H}^{k+1}(\mathcal{C}) \to 0. \tag{6.2.10}$$

我们将对 k 进行归纳，证明 $\mathcal{P}^k, \mathcal{Q}^k, \mathcal{H}^k(\mathcal{C})$ 都是有限秩局部自由层，并且 $\operatorname{rank} \mathcal{H}^k(\mathcal{C}) = r_k$。当 $k = n+1$ 时，无需证明。假设这一结论对 $k+1$ 情形成立。由第二个子引理，第二个短正合列 (6.2.10) 表明 $\mathcal{P}^k$ 是有限秩局部自由层；于是由第二个子引理，第一个短正合列 (6.2.9) 表明 $\mathcal{Q}^k$ 是有限秩局部自由层。

对于任意闭点 $y \in Y$，将 i_y^* 应用于 (6.2.10)，可知 $i_y^*\mathcal{P}^k \to i_y^*\mathcal{Q}^{k+1}$ 是单射；将 i_y^* 应用于 (6.2.9) 的 $k+1$ 情形，可知 $i_y^*\mathcal{Q}^{k+1} \to i_y^*\mathcal{M}^{k+1}$ 是单射。因此我们有

$$i_y^*\mathcal{Q}^k \overset{(6.2.9)}{\cong} \ker(i_y^*\mathcal{M}^k \to i_y^*\mathcal{P}^k) \cong \ker(i_y^*\mathcal{M}^k \to i_y^*\mathcal{M}^{k+1}),$$

thus

$$\mathcal{H}^k(i_y^*\mathcal{C}) \cong \mathcal{H}^k(\cdots \to i_y^*\mathcal{M}^{k-1} \to i_y^*\mathcal{M}^k \to i_y^*\mathcal{M}^{k+1} \to \dots) \cong \operatorname{coker}(i_y^*\mathcal{M}^{k-1} \to i_y^*\mathcal{Q}^k),$$

由 i_y^* 的右正合性以及正合列，右侧同构于非导出纤维 $\mathcal{H}^0(i_y^*\mathcal{H}^k(\mathcal{C}))$

$$\mathcal{M}^{k-1} \to \mathcal{Q}^k \to \mathcal{H}^k(\mathcal{C}) \to 0.$$

因此，对于 Y 中任意闭点 y，$\mathcal{H}^0(i_y^*\mathcal{H}^k(\mathcal{C}))$ 都是常值的；由第一个子引理可推出，$\mathcal{H}^k(\mathcal{C})$ 是秩为 r_k 的局部自由层。至此，我们完成了 k 情形的证明。

□

引理 6.2.2。设 $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R_d$ 是一个分次 $\mathbb{C}$-代数，满足 $R_0 = \mathbb{C}$。设 M 是一个有限生成的分次射影 R-模。记极大理想为 $\mathfrak{m} := \bigoplus_{d>0} R_d$，并且 $M := M/\mathfrak{m}M$。则 M 是一个分次自由 R-模，并且同构于 $R \otimes_{\mathbb{C}} M$（作为分次 R-模）；

---

[28]为方便读者，我们在此给出证明。对于闭点 $y \in Y$，设 $\mathcal{O}_{Y,y}$ 是 $\mathcal{O}_Y$ 在 y 处的茎，$\mathfrak{m}_y$ 是其极大理想。设 $\mathcal{M}/\mathfrak{m}_y\mathcal{M}$ 的一组基为 $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n$；由中山引理，可将它们提升为 $\mathcal{M}_y$ 这个茎作为 $\mathcal{O}_{Y,y}$-模的一组生成元 $s_1, \dots, s_n$。设 V 是 y 的一个仿射开邻域，使得 $s_1, \dots, s_n$ 都属于 $\mathcal{O}_Y(V)$。设 $t_1, \dots, t_l$ 是 $\mathcal{O}_Y(V)$-模 $\mathcal{M}(V)$ 的一组生成元。在茎 $\mathcal{M}_x$ 处，对于某个 $a_{ij} \in \mathcal{O}_{Y,y}$，有 $t_i = \sum_j a_{ij}s_j$。设 $V' \subset V$ 是 y 的一个仿射开邻域，使得 a_{ij} 都属于 $\mathcal{O}_Y(V')$。于是，由截面 $s_1, \dots, s_n$ 定义的态射 $\phi: \mathcal{O}_{V'}^{\oplus n} \to \mathcal{M}|_{V'}$ 是满射。由于对所有闭点 $y' \in V'$，$\mathcal{M}/\mathfrak{m}_{y'}\mathcal{M}$ 的维数均为 n，所以态射 ϕ 在每个非导出纤维 $\phi|_{y'}$: $(\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_{y'}\mathcal{O}_Y)^{\oplus n} \to \mathcal{M}/\mathfrak{m}_{y'}\mathcal{M}$ 上都是同构。因此，对于任意满足 $\phi(b_1, \dots, b_n) = 0$ 的 $(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{O}_Y^{\oplus n}(V')$，我们知道

$$b_1, \dots, b_n \in \bigcap_{\text{closed pt } y' \in V'} \mathfrak{m}_{y'}.$$

根据希尔伯特零点定理，$\bigcap_{\text{闭点 } y' \in V'} \mathfrak{m}_{y'}$ 是 $\mathcal{O}_Y(V')$的幂零根基，而该根基为 0。因此，ϕ 是同构。我们得出，$\mathcal{M}$ 是秩为 n 的局部自由模。

证明。 我们选取投影 $p\colon M \twoheadrightarrow M$ 的一个保持分次的截面 $s\colon M, \to M$（即 $p \circ s = \mathrm{id}$）。于是 s 产生一个分次 R-模同态

$$\phi : R \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M} \to M.$$

该映射在基变换到 $R/\mathfrak{m}$ 后是一个同构，因此根据分次 R-模的 Nakayama 引理， ϕ 是满射。由于 M 是射影的，映射 ϕ 具有一个保持分次的截面 ψ。于是 ψ 在基变换到 $R/\mathfrak{m}$ 后也是一个同构，因此 ψ 也是满射。因此， ψ 和 ϕ 在 $R \otimes_{\mathbb{C}} M$ 与 M 之间诱导出一个同构。□

6.3. **定理 6.0.1 的证明**。 在赋予范畴 KP_0 中性 Tannakian 结构之后，我们可以应用 [DM82，定理 2.11], , 从而得到中性 Tannakian 范畴之间的一个等价

$$\mathrm{KP}_0 \cong \mathrm{Rep}(G')$$

对于某个定义在 $\mathbb{C}$ 上的（经典）仿射群概形 G'。为了完成主要定理 6.0.1 的证明，我们需要将 G' 与 $\check{}G$ 识别起来。

引理 6.3.1。 仿射群概形 G' 是代数的，即是 $\mathbb{C}$上的有限型概形。此外， G' 是连通且约化的。

证明。 为证明 G' 是代数的，我们使用 [DM82，命题 2.20]: 我们需要找到一个张量生成元 $X \in$Rep$(G') \cong \mathrm{KP}_0$, , 这意味着 X 通过取直和、卷积、子商和对偶生成整个范畴 KP_0。我们选取 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的一组生成元作为幺半群，并取 $X = \bigoplus_{1 \le i \le n} \mathcal{L}_{\check{\lambda}_i}$，于是根据 KP_0 的定义以及定理 5.0.1 中的公式，这一断言便成立。

为证明 G' 是连通的，我们使用 [DM82，推论 2.22]: 我们需要证明，对于任意非单位对象$X \in$ Rep$(G') \cong \mathrm{KP}_0$, , 由 $X^{\oplus n}, n \in \mathbb{N}$ 的子商组成的子范畴 $\langle X \rangle$ 在卷积下不封闭。根据定理 5.0.1， X的合成因子具有 $\{\mathcal{L}_{\check{\lambda}_1}, \ldots, \mathcal{L}_{\check{\lambda}_n}\}$的形式。因此， $\langle X \rangle$ 中的任意对象也是 $\{\mathcal{L}_{\check{\lambda}_1}, \ldots, \mathcal{L}_{\check{\lambda}_n}\}$中简单对象的迭代扩张。注意，根据定理 5.0.1 中的公式， $\mathcal{L}_{m\check{\lambda}_i}$ 是 $\mathcal{L}_{\check{\lambda}_i}^{*m}$的一个子商，而当 $\check{} \lambda_i \neq 0$和 m 足够大时， $\mathcal{L}_{m\check{\lambda}_i}$ 不属于 $\{\mathcal{L}_{\check{\lambda}_1}, \ldots, \mathcal{L}_{\check{\lambda}_n}\}$，因此 $\langle X \rangle$ 在卷积下不封闭。

令 $R_u(G')$ 为这个连通代数群 G' 的幺幂根基，并令 L' 为 $R_u(G') \to G'$ 的商，它是一个连通约化群。于是，Rep(L') 在直和、张量积、子商和对偶运算下由简单对象生成。商 $G' \twoheadrightarrow L'$ 诱导出一个全忠实嵌入 Rep$(L') \to$ Rep(G')，且 Rep(G') 中的所有简单对象都来自 Rep(L')。根据 KP_0, Rep$(G') \cong \mathrm{KP}_0$ 的定义，它在直和、张量积、子商和对偶运算下由简单对象生成。因此，嵌入 Rep$(L') \to$ Rep(G') 本质满，这意味着$G' \xrightarrow{\cong} L'$ 和 G' 是约化的。□

注 6.3.1. 从上面的引理 6.3.1 的论证可知，KP_0上的中性 Tannakian 结构立即意味着，对于 KP_0, 中的简单对象 $\mathcal{L}_{\check{\lambda}}, \mathcal{L}_{\check{\mu}}$， $\mathcal{L}_{\check{\lambda}} * \mathcal{L}_{\check{\mu}}$ 是半单的；这一点并非显而易见。

对于幺半阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，令 $K^+(\mathcal{A})$ 表示其格罗滕迪克半环。换言之，$K^+(\mathcal{A})$ 是范畴 $\mathcal{A}$ 中对象的等价类集合，并以 $\oplus$ 作为加法、以 $\otimes$ 作为乘法。若 $\mathcal{A}$ 是半单且具有有限长度的，我们可以将 $K^+(\mathcal{A})$ 视为 $K(\mathcal{A})$ 的子半环。对于约化群 H，令 $K^+[H]$ 表示 $K^+(\mathrm{Rep}(H))$。

我们将使用 [KLV14] 中的以下定理。

定理 6.3.1 ([KLV14，定理 1。2])。 设 k 为特征零的代数闭域。对于 k 上的两个连通约化群 H_1 和 H_2，令 $\phi\colon K^+[H_1] \xrightarrow{\cong} K^+[H_2]$ 为半环的一个同构。

那么存在一个同构 $\rho\colon H_2 \xrightarrow{\cong} H_1$，使得 $\rho^* = \phi$。（此外，这样的同构在共轭意义下唯一。）

证明 定理 *6.0.1* 的根据定理 5.0.1，我们有一个半环同构：

$$\phi : K^+[G'] \to K^+[\check{G}]$$
$$[\mathcal{L}_{\check{\lambda}}] \mapsto [V_{\check{\lambda}}].$$

于是， [KLV14，定理 1.2] 给出了一个同构 $\check{G} \cong G'$。 □

附录 A. 霍奇模与伴随分次构造

在本附录中，我们回顾主要上下文中用到的关于霍奇模和伴随分次构造的一些基本事实。本附录中我们很少使用导出代数几何，而是采用普通范畴。因此，我们会使用一些传统记号，例如，概形 X 上拟凝聚层的导出范畴记作 $\mathrm{D}_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{O}_X)$，其由具有凝聚上同调的复形组成的全子范畴记作 $\mathrm{D}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X)$；它们分别对应于主要上下文中的 $\mathrm{QCoh}(X)$ 和 $\mathrm{Coh}(X)$ 的同伦范畴。我们也会用“层”指普通的层。我们只考虑作为 $\mathcal{O}$-模拟凝聚的 $\mathcal{D}$-模（及其滤过分量）。本附录中所有余 perverse 层均指余 perverse 可构造层。

A.1. 霍奇模范畴。 设 Y 是 $\mathbb{C}$ 上的光滑簇。霍奇模理论中的基本对象是带有 $\mathbb{Q}$ 结构的滤过正则全纯 $\mathcal{D}_Y$-模，由四元组 $\mathbf{M} = (\mathcal{M}, F_\bullet\mathcal{M}, K, \alpha)$ 给出，其组成部分为

- 一个正则全纯右 $\mathcal{D}_Y$-模 $\mathcal{M}$，
- 在 $\mathcal{M}$ 上的良滤过 $F_\bullet\mathcal{M}$（即 $(\mathcal{M}, F_\bullet\mathcal{M})$ 是关于 $\mathcal{D}_Y$ 上 PBW 滤过的滤过 $(\mathcal{D}_Y, F_\bullet\mathcal{D}_Y)$-模，且 $\mathrm{gr}^F\mathcal{M}$ 是一个相干 $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_Y$-模），
- 一个取值于 $\mathbb{Q}$ 的系数反常层 K，定义在复流形 Y^{an} 上，并带有层的同构 α： $\mathrm{DR}^{\mathrm{an}}(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} K$。

这里，$\mathrm{DR}^{\mathrm{an}}$ 是黎曼–希尔伯特对应中的德拉姆函子

$$\mathrm{DR}^{\mathrm{an}} : \mathcal{D}_Y\text{-mod}_{rh} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Perv}(Y, \mathbb{C}), \mathcal{M} \mapsto \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{D}_{Y^{\mathrm{an}}}} \mathcal{M}^{\mathrm{an}}.$$

我们用 $\mathrm{FM}^{\mathbb{Q}}_{\mathrm{rs}}(\mathcal{D}_Y)$ 表示这类四元组所构成的范畴。定义 Rat 函子

$$\mathrm{Rat} : \mathrm{FM}^{\mathbb{Q}}_{\mathrm{rs}}(\mathcal{D}_Y) \to \mathrm{Perv}(Y, \mathbb{Q}) \tag{A.1.1}$$

为 $\mathrm{Rat}(\mathcal{M}, F_\bullet\mathcal{M}, K, \alpha) = K$。该函子是忠实的。

在 [Sai88]，中，作者定义了 Y 上权为 w 的（可极化）[29] 纯霍奇模范畴 $\mathrm{HM}(Y, w)$，它是 $\mathrm{FM}^{\mathbb{Q}}_{\mathrm{rs}}(\mathcal{D}_Y)$ 的一个全子范畴。范畴 $\mathrm{HM}(Y, w)$ 是一个阿贝尔范畴。 [Sai88] 还证明了光滑代数簇上的纯霍奇模范畴满足柏原等价。随后，$\mathrm{HM}(Y, w)$ 的定义可以扩展到 $\mathbb{C}$ 上的一般代数簇。具体而言，对于一个可能是奇异的代数簇 Y，我们选取一个将 Y 闭嵌入到某个光滑代数簇 Y' 中的闭嵌入，然后将 $\mathrm{HM}(Y, w)$ 定义为 $\mathrm{HM}(Y', w)$ 的全子范畴，其中的对象是集合论意义上支撑于 Y 的霍奇模。Rat 函子（A.1.1）也可以定义在这个可能是奇异的代数簇 Y 上。可以验证，$\mathrm{HM}(Y, w)$ 的定义与嵌入的选择无关；例如参见 [Sch16，B 节]。

设 X Y是一个整子概形。若 Hodge 模$\mathbf{M} \in \mathrm{HM}(Y, w)$ 满足 $\mathrm{Rat}(\mathbf{M})$ 是一个支撑为 X的 IC-偏层，则称其具有严格支撑X 。于是$\mathbf{M}$ 在 X上一般是一个纯霍奇结构变分。反过来，在 X 上一般定义的纯霍奇结构变分可以唯一地 IC 延拓为 X上的纯霍奇模。特别地，存在一个权为 $\dim X$ 、定义在X上的纯霍奇模，称为 X上的 IC-Hodge 模：

$$\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_X$$

使得 $\mathrm{Rat}(\textbf{交叉上同调复形}^{\mathrm{Hg}}_X) = \mathrm{IC}^{\mathbb{Q}}_X$。此外，$\mathrm{HM}(Y, w)$ 中的每个霍奇模都可唯一地按严格支撑分解，且 $\mathrm{HM}(Y, w)$ 是一个半单范畴。

我们还将回顾 Saito 的混合霍奇模块理论。除 A.1 中的数据外，混合霍奇模的定义还包含一种称为权滤过的数据。对于簇 Y 上的 $\mathbb{C}$，Saito [Sai90]定义了混合（可极化）霍奇模的阿贝尔范畴 $\mathrm{MHM}(Y)$，其有界导出

[29]我们只考虑极化的（混合）霍奇模，因此默认省略“极化”一词。

范畴记作 $\mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y)$。A.1.1 中的 Rat 函子也可以扩展为一个 t-正合函子，从 $\mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y)$ 映到余 perverse 层的有界导出范畴：

$$\mathrm{Rat} : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y) \to \mathrm{D}^b \operatorname{Perv}(Y, \mathbb{Q}).$$

定义 $\mathrm{D}^b\mathrm{HM}(Y, w)$ 为由复形 $\mathbf{M}^\bullet$ 组成的全子范畴，其中 $\mathcal{H}^i(\mathbf{M}^\bullet) \in \mathrm{HM}(Y, w+i)$。（**警告**：这不是 $\mathrm{HM}(Y, w)$ 的导出范畴。）在 $\mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y)$ 上有一个称为 Tate 扭曲的分次平移函子，记作 (1)。该函子将 $\mathrm{D}^b\mathrm{HM}(Y, w)$ 映到 $\mathrm{D}^b\mathrm{HM}(Y, w-2)$。对于四元组 $(\mathcal{M}, F_\bullet\mathcal{M}, K, \alpha) \in \mathrm{FM}_{\mathrm{rs}}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}_Y)$，下划线标出一个霍奇模 $\mathbf{M}$，Tate 扭曲 (1) 的作用为

$$(\mathcal{M}, F_\bullet\mathcal{M}, K, \alpha)(1) = (\mathcal{M}, F_{\bullet-1}\mathcal{M}, K(1), \alpha) \tag{A.1.2}$$

其中 $K(1) := K \otimes_{\mathbb{Q}} (2\pi i)\mathbb{Q} \subset K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$。

混合霍奇模理论中建立了六函子形式（[Sai90]）。我们回顾几个与本文相关的函子。设 Y 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的簇。存在一个 t-正合对偶函子

$$\mathbf{D}_Y : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y) \to \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y), \tag{A.1.3}$$

在 Rat 下与 $\mathrm{D}^b \operatorname{Perv}(Y, \mathbb{Q})$ 上的 Verdier对偶相容。此对偶函子还限制到 $\mathrm{D}^b\mathrm{HM}(Y, w)$ 上为：

$$\mathbf{D}_Y : \mathrm{D}^b\mathrm{HM}(Y, w) \to \mathrm{D}^b\mathrm{HM}(Y, -w).$$

令 $f : X \to Y$ 是代数簇之间的一个适当态射，且定义推前函子：

$$f_{*,\mathrm{Hg}} : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(X) \to \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y)$$

在 Rat 下与 $\mathrm{D}^b \operatorname{Perv}(-, \mathbb{Q})$ 上的推前函子相容。此推前函子还限制到 $\mathrm{D}^b\mathrm{HM}(Y, w)$ 上为：

$$f_{*,\mathrm{Hg}} : \mathrm{D}^b\mathrm{HM}(X, w) \to \mathrm{D}^b\mathrm{HM}(Y, w).^{30}$$

当 X 和 Y 光滑时，推前函子 $f_{*,\mathrm{Hg}}$ 与其底层过滤 $\mathcal{D}$-模的推前函子相容。更确切地，定义

$$\mathcal{D}_\hbar := \operatorname{Rees}(\mathcal{D}) := \bigoplus_{n \geq 0} \hbar^n F_n\mathcal{D} \subset \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\hbar].$$

利用 Rees构造，我们可以将过滤的 $\mathcal{D}$-模视为分次的 $\mathcal{D}_\hbar$-模。这个分次也可以视为一种 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-等变性；我们也将这种 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 记作 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$，因为在伴随分次构造（A.2.2）下，它与$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-等变性相容。记作

$$\mathrm{U}_X : \mathrm{MHM}(X) \to \mathcal{D}_{X,\hbar}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{gr}} \tag{A.1.4}$$

将混合 Hodge 模映射为其底层分次 $\mathcal{D}_{X,\hbar}$-模的函子；这是一个正合函子。我们用同一符号表示其导出函子。定义传递 $\mathcal{D}_\hbar$-模

$$\mathcal{D}_{X \to Y,\hbar} := f^*\mathcal{D}_{Y,\hbar},$$

以及推前函子

$$\int_f (-) := f_*\left((-) \otimes_{\mathcal{D}_{X,\hbar}} \mathcal{D}_{X \to Y,\hbar}\right) : \mathrm{D}^b(\mathcal{D}_{X,\hbar}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{gr}}) \to \mathrm{D}^b(\mathcal{D}_{Y,\hbar}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{gr}}) \tag{A.1.5}$$

根据混合 Hodge 模的推前函子的定义，存在一个自然同构

$$\mathrm{U}_Y \circ f_{*,\mathrm{Hg}} \cong \int_f \circ \mathrm{U}_X. \tag{A.1.6}$$

设 $g : Y \to Z$ 是代数簇之间相对维数为 d 的光滑态射，且这些代数簇定义在 $\mathbb{C}$上。存在拉回函子：

$$g^{!,\mathrm{Hg}}, g^{*,\mathrm{Hg}} : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Z) \to \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y)$$

[30]事实上，$f_{*,\mathrm{Hg}}, f_{!,\mathrm{Hg}}$ 对一般态射 f 定义在 $\mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(-)$ 上，并且 $f_{*,\mathrm{Hg}}$ 不降低权，而 $f_{!,\mathrm{Hg}}$ 不升高权。

它们与 Rat 下 $\mathrm{D}^b\,\mathrm{Perv}(-,\mathbb{Q})$ 的相应拉回函子相容。由于态射 g 是光滑的，我们有函子同构 $g^{!,\,\mathrm{Hg}} \cong g^{*,\,\mathrm{Hg}}[2d](d)$。它们也限制在纯霍奇模上，如下所示：

$$g^{!,\mathrm{Hg}} \cong g^{*,\mathrm{Hg}}[2d](d) : \mathrm{D}^b\mathrm{HM}(Z,w) \to \mathrm{D}^b\mathrm{HM}(Y,w).$$

定义 $g^{\dagger,\,\mathrm{Hg}} := g^{*,\,\mathrm{Hg}}[d] \cong g^{!,\,\mathrm{Hg}}[-d](-d)$。此函子是 t-正合的，因此我们可以将其限制到心：

$$g^{\dagger,\mathrm{Hg}} : \mathrm{HM}(Z,w) \to \mathrm{HM}(Y,w+d).$$

当 Y 和 Z 光滑时，拉回函子 $g^\dagger$ 与其底层滤过 $\mathcal{D}$-模的拉回函子相容。更确切地说，定义拉回函子

$$g^\dagger := \Omega^{\mathrm{top}}_{Y/Z} \otimes g^*(-)\langle -d\rangle : \mathrm{D}^b(\mathcal{D}_{Z,\hbar}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{gr}}) \to \mathrm{D}^b(\mathcal{D}_{Y,\hbar}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{gr}}).$$

这里 $\Omega^{\mathrm{top}}_{Y/Z}$ 是最高相对微分层，而 $\langle -d\rangle$ 是关于$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-作用的分次平移函子。根据霍奇模拉回函子的定义，存在自然同构

$$\mathrm{U}_Y \circ g^{\dagger,\mathrm{Hg}} \cong g^\dagger \circ \mathrm{U}_Z. \tag{A.1.7}$$

A.2. 分次德拉姆函子。 设 Y 是复数域上的一个簇，并选取一个闭嵌入 $i : Y, \to Y'$ 到某个光滑簇 Y'[31] 中（这样的光滑环境空间总是存在的，因为我们假设 Y在 $\mathbb{C}$上准射影）。

令 $\mathcal{M}'$ 为一个 $\mathcal{D}_{Y'}$-模。定义 $\mathcal{M}'$的德拉姆复形为以下复数域向量空间复形

$$\mathrm{DR}_{Y'}(\mathcal{M}') := \left[0 \to \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \bigwedge^{d_{Y'}} \mathcal{T}_{Y'} \to \cdots \to \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \bigwedge^{1} \mathcal{T}_{Y'} \to \mathcal{M}' \to 0\right],$$

其上同调次数为 $-d,\ldots,0$。

Let $(\mathcal{M}', F_\bullet\mathcal{M}')$为一个滤过的 $\mathcal{D}_{Y'}$-模。那么德拉姆复形继承一个滤过 on:

$$F_p\,\mathrm{DR}_{Y'}(\mathcal{M}') = \left[0 \to F_{p-d_{Y'}}\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \bigwedge^{d_{Y'}} \mathcal{T}_{Y'} \to \cdots \to F_{p-1}\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \bigwedge^{1} \mathcal{T}_{Y'} \to F_p\mathcal{M}' \to 0\right].$$

伴随分次为

(A.2.1)

$$\mathrm{gr}^F_p\,\mathrm{DR}_{Y'}(\mathcal{M}') = \left[0 \to \mathrm{gr}^F_{p-d_{Y'}}\,\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \bigwedge^{d_{Y'}} \mathcal{T}_{Y'} \to \cdots \to \mathrm{gr}^F_{p-1}\,\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \bigwedge^{1} \mathcal{T}_{Y'} \to \mathrm{gr}^F_p\,\mathcal{M}' \to 0\right],$$

which 是一个 $\mathcal{O}_{Y'}$-模复形。这个复形称为分次德拉姆复形。

这个复形也可以用以下方式解释。考虑分次 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{Y'}}\mathcal{T}_{Y'}$-模

$$\mathrm{gr}_{Y'}\,\mathcal{M}' := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^F_p\,\mathcal{M}'. \tag{A.2.2}$$

它也可以通过以下方式构造：

$$\mathcal{M}' \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}_0, \quad \mathbb{C}_0 := \mathbb{C}[\hbar]/(\hbar)$$

将 $\mathcal{M}'$ 视为 $\mathcal{D}_\hbar$-模时。然后利用 Koszul 分解，导出张量积

$$\mathrm{gr}_{Y'}\,\mathcal{M}' \bigotimes_{\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{Y'}}\mathcal{T}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'}$$

由分次德拉姆复形计算得到

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}_{Y'}(\mathcal{M}') := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^F_p\,\mathrm{DR}_{Y'}(\mathcal{M}')$$

[31]在其余各节中，带撇号上标的簇（例如 Y'）均默认是光滑的。

在分次 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{Y'}}\mathcal{T}_{Y'}$-模的导出范畴中。令 $p_{Y'}\colon \mathrm{T}^*Y' \to Y'$ 为余切丛 T^*Y' 的自然投影，$\sigma_{Y'}\colon Y' \to \mathrm{T}^*Y'$ 为零截面嵌入。我们有 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{Y'}}\mathcal{T}_{Y'} = p_{Y'*}\mathcal{O}_{\mathrm{T}^*Y'}$，且 $\mathrm{gr}\ \mathcal{M}'$ 可以等价地视为 T^*Y' 上的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$-等变拟凝聚层。于是，上述构造可以重新诠释为

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}_{Y'}(\mathcal{M}') \cong \sigma_{Y'}^*(\mathrm{gr}_{Y'}\,\mathcal{M}') \in \mathrm{D}^{b,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{Y'}).$$

现在我们将范围限制到 Y。首先固定一些态射的记号

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}^*Y'|_Y & \xrightarrow{i} & \mathrm{T}^*Y' \\ {\scriptstyle\sigma_Y}\uparrow\downarrow{\scriptstyle p_Y} & & {\scriptstyle p_{Y'}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle\sigma_{Y'}} \\ Y & \xrightarrow{i} & Y'; \end{array}$$

这里 $\mathrm{T}^*Y'|_Y := \mathrm{T}^*Y' \times_{Y'} Y$。

假设 $(\mathcal{M}', F_\bullet\mathcal{M}')$ 表示一个混合霍奇模 $\mathbf{M}'$，其集合论支撑位于 $Y \subset Y'$ 上。那么混合霍奇模的条件迫使 $\mathcal{O}_{Y'}$-模 $\mathrm{gr}\ \mathcal{M}'$ 的概形论支撑位于 Y 上；更准确地说，定义 Y 的理想 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{Y'}$ 消灭 $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}'$（参见 [Sai88，引理 3.2.6]）。这表明 $i^{-1}\,\mathrm{gr}_{Y'}\,\mathcal{M}' \in \mathcal{O}_{\mathrm{T}^*Y'|_Y}$-模$^{\mathbb{G}^{\mathrm{dil}}_{\mathrm{m}}\text{相干}}$ 且 $\mathrm{gr}_{Y'}\,\mathcal{M}' = i_*i^{-1}\,\mathrm{gr}_{Y'}\,\mathcal{M}'$，其中 i^{-1} 是阿贝尔层的通常逆像函子。因此我们得到一个函子

$$i^{-1}\,\mathrm{gr}_{Y'}(-) : \mathrm{MHM}(Y) \to \mathcal{O}_{\mathrm{T}^*Y'|_Y}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}_{\mathrm{coh}}$$

根据定义，这是正合的。我们还记作

$$i^{-1}\,\mathrm{gr}_{Y'}(-) : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y) \to \mathrm{D}^{b,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathrm{T}^*Y'|_Y})$$

其导出函子。

我们进一步应用 $\sigma_{Y'}^*$。注意到

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}_{Y'}(\mathcal{M}') \cong \sigma_{Y'}^*(i_*i^{-1}\,\mathrm{gr}_{Y'}\,\mathcal{M}') \cong i_*\sigma_Y^*(i^{-1}\,\mathrm{gr}_{Y'}\,\mathcal{M}'). \tag{A.2.3}$$

因此，我们将 分次德拉姆函子 $\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}_{Y,\,i}$ 定义为函子的复合

$$\mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y) \xrightarrow{i^{-1}\,\mathrm{gr}_{Y'}(-)} \mathrm{D}^{b,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathrm{T}^*Y'|_Y}) \xrightarrow{\sigma_Y^*} \mathrm{D}^{b,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y), \tag{A.2.4}$$

它适合以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y) & \xrightarrow{\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}_{Y,i}} & \mathrm{D}^{b,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y) \\ {\scriptstyle i_{*,\mathrm{Hg}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y') & \xrightarrow{\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}_{Y'}} & \mathrm{D}^{b,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{Y'}). \end{array}$$

这个函子的 p 次分次部分记为

$$\mathrm{gr}_p\,\mathrm{DR}_{Y,i}(-) : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y) \to \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y).$$

文献 [Sai90，命题 2.33]（更详尽的说明也可参见 [Sch16，引理 7.3]）证明，对于另一个嵌入 $i'\colon Y \hookrightarrow Y''$，存在一个自然同构 $\mathrm{gr}^p\,\mathrm{DR}_{Y,i}(\mathbf{M}) \cong \mathrm{gr}^p\,\mathrm{DR}_{Y,i'}(\mathbf{M})$。总之，对于任意 $p \in \mathbb{Z}$，我们都有一个良定义的函子，称为分次德拉姆函子，记作

$$\mathrm{gr}_p\,\mathrm{DR}_Y : \mathrm{D}^b(\mathrm{MHM}(Y)) \to \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y).$$

若不会引起混淆，我们将省略下标 Y。

我们还指出，根据 (A.1.2),

$$\mathrm{gr}_p\,\mathrm{DR}(\mathbf{M}(1)) = \mathrm{gr}_{p-1}\,\mathrm{DR}(\mathbf{M}).$$

本文将用到以下关于分次德拉姆函子的性质。

命题 A.2.1 ([Sai88，第 2 节。4])。设 $\omega_Y \in \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y)$ 为对偶化复形 $a^!\mathcal{O}_{\mathrm{pt}}$，且$\mathbb{D}_Y(-) := \mathcal{H}om(-,\omega_Y)$：$\mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y)$ 为 *Grothendieck-Serre* 对偶函子。则存在一个同构

$$\mathbb{D}_Y \circ \mathrm{gr}_p \mathrm{DR} \cong \mathrm{gr}_{-p} \mathrm{DR} \circ \mathbf{D}_Y : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(Y)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y).$$

特别地，我们将此同构应用于 *IC-Hodge* 模 $\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y \in \mathrm{HM}(Y, d_Y)$。在 $\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y$ 上选取极化会诱导一个同构 $\mathbf{D}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y) \cong \mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y(d_Y)$，因此

$$\mathbb{D}_Y\left(\mathrm{gr}_p \mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y)\right) \cong \mathrm{gr}_{-p} \mathrm{DR} \circ \mathbf{D}_Y(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y) \cong \mathrm{gr}_{-p} \mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y(d_Y)) = \mathrm{gr}_{-p-d_Y} \mathrm{DR}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_Y). \tag{A.2.5}$$

命题 A.2.2 ([Sai88，第 2.3 节。7])。设 $f\colon X \to Y$ 是代数簇之间的可嵌入真态射（即我们可以选取闭嵌入 $i\colon X, \to X', j\colon Y, \to Y'$，使其嵌入到光滑簇 X', Y'中，并选取与 i, j, f相容的适当态射 $f'\colon X' \to Y'$）。那么存在一个同构

$$f_* \circ \mathrm{gr}_p \mathrm{DR} \cong \mathrm{gr}_p \mathrm{DR} \circ f_{*,\mathrm{Hg}} : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(X) \to \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y).$$

注 A.2.1。根据我们的假设，X, Y 是 $\mathbb{C}$上的准射影簇，因此总满足可嵌入条件。原因如下。我们选取一个局部闭嵌入 $X \to \mathbb{P}^n$，其中n。然后考虑复合 $X \hookrightarrow X \times Y \to \mathbb{P}^n \times Y, ,$，其中第一个态射是 f的图。由于复合 $X \to \mathbb{P}^n \times Y \to Y$是适当态射 f，我们知道局部闭嵌入$X \to \mathbb{P}^n \times Y$是闭的。现在我们选取一个闭嵌入 $j\colon Y \hookrightarrow Y'$，将其嵌入到某个光滑簇 Y'中；定义$X' := \mathbb{P}^n \times Y', i\colon X \hookrightarrow X'$ 为复合 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times Y', ,$ 并令 f' 为投影$\mathbb{P}^n \times Y' \to Y'$。

我们将写出 A.2.2 的证明；稍后会将其推广到弱等变版本。

证明。余切丛之间的对应关系如下：

$$\mathrm{T}^*X' \xleftarrow{\pi_{f'}} \mathrm{T}^*Y' \times_{Y'} X' \xrightarrow{p_{f'}} \mathrm{T}^*Y'.$$

那么，根据 [CDK21，第 3.9], 条推论，对于 $\mathcal{M}' \in \mathrm{D}^b(\mathcal{D}_{\hbar,X'}$-模$^{\mathrm{gr}})$，存在一个自然同构

$$(\int_{f'} \mathcal{M}') \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}_0 \cong p_{f'*}\pi_{f'}^*(\mathcal{M}' \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}_0).^{32}$$

此外，将上述图表限制到 X, Y 上：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}^*X'|_X & \xleftarrow{\pi_f} & \mathrm{T}^*Y'|_Y \times_Y X \xrightarrow{p_f} \mathrm{T}^*Y'|_Y. \\ & & || \\ & & \mathrm{T}^*Y' \times_{Y'} X \end{array}$$

设 $\mathbf{M}' = i_{*,\mathrm{Hg}}\mathbf{M}$，其中 $\mathbf{M} \in \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(X)$，且 $\mathcal{M}' = \mathrm{U}_{X'}(\mathbf{M}') \in \mathrm{D}^b(\mathcal{D}_{\hbar,X'}$-模$^{\mathrm{gr}})$。结合相容性 (A.1.6)，我们得到

$$\mathrm{gr}\left(f'_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{M}')\right) \cong p_{f'*}\pi_{f'}^* \mathrm{gr}(\mathbf{M}').$$

那么，根据 gr DR (A.2.3) 的解释，我们可以计算得出

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}\, f_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{M}) = \sigma_Y^* j^{-1} \mathrm{gr}\, f'_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{M}') \cong \sigma_Y^* j^{-1} p_{f'*}\pi_{f'}^* \mathrm{gr}(\mathbf{M}') = \sigma_Y^* j^{-1} p_{f'*}\pi_{f'}^* i_* i^{-1} \mathrm{gr}(\mathbf{M}').$$

由于 T^*X'、$\mathrm{T}^*Y' \times_{Y'} X'$ 在 X' 上平坦，我们可以沿 i 做基变换：$X, \to X'$，并得到导出意义下的笛卡尔图（即在导出概形的 ∞-范畴中）：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}^*X' & \xleftarrow{\pi_{f'}} & \mathrm{T}^*Y' \times_{Y'} X' \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{i}} \\ \mathrm{T}^*X'|_X & \xleftarrow{\pi_f} & \mathrm{T}^*Y' \times_{Y'} X. \end{array} \tag{A.2.6}$$

[32]他们的公式中还有另一项 $\omega_{X/Y}$，因为他们使用左 $\mathcal{D}$-模

然后我们可以继续计算：

$$\sigma_Y^* j^{-1} p_{f'*} \pi_{f'}^* i_* i^{-1} \operatorname{gr}(\mathbf{M}') \cong \sigma_Y^* j^{-1} p_{f'*} \widetilde{i}_* \pi_f^* i^{-1} \operatorname{gr}(\mathbf{M}') \cong \sigma_Y^* j^{-1} j_* p_{f*} \pi_f^* i^{-1} \operatorname{gr}(\mathbf{M}') \cong \sigma_Y^* p_{f*} \pi_f^* i^{-1} \operatorname{gr}(\mathbf{M}');$$

这里，第一个同构是将基变换同构应用于 (A.2.6) 所得到的，第二个同构$\widetilde{}$由等式 $p_{f'} \circ i = j \circ p_f$ 得出。

基于与之前类似的理由，在导出意义下，我们有如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}^*Y'|_Y \times_Y X & \xrightarrow{p_f} & \mathrm{T}^*Y'|_Y \\ {\scriptstyle \widetilde{\sigma_Y}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \sigma_Y} \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y. \end{array} \tag{A.2.7}$$

于是我们可以完成计算：

$$\sigma_Y^* p_{f*} \pi_f^* i^{-1} \operatorname{gr}(\mathbf{M}') \cong f_* \widetilde{\sigma_Y}^* \pi_f^* i^{-1} \operatorname{gr}(\mathbf{M}') \cong f_* \sigma_X^* i^{-1} \operatorname{gr}(\mathbf{M}') = f_* \operatorname{gr} \mathrm{DR}(\mathbf{M});$$

这里，第一个同构是将基变换同构应用于 (A.2.7) 所得到的，第二个同构由等式 $\sigma_X = \pi_f \circ \widetilde{\sigma_Y}$ 得出。□

A.3. 等变霍奇模与弱等变分次德拉姆函子。 我们固定一个连通代数群 H，即在 $\mathbb{C}$ 上有限型的连通仿射群概形。

A.3.1. 等变霍奇模与 $\mathcal{D}_\hbar$-模。 设 H 作用于复数域 $\mathbb{C}$上的簇 Y。记 $a\colon H\times Y\to Y$为作用映射， $p\colon H\times Y\to Y$为投影映射。 Y上的 H-等变混合霍奇模是一个对偶组（$\mathbf{M},\beta$），其中 $\mathbf{M}\in\mathbf{MHM}(Y)$，且 $\beta\colon a^\dagger\mathbf{M}\xrightarrow{\cong}p^\dagger\mathbf{M}$ 是满足通常余循环条件的同构。令

$$\mathrm{MHM}^H(Y)$$

表示 Y上的 H-等变混合霍奇模（阿贝尔）范畴。

混合霍奇模上的等变结构赋予其底层分次 $\mathcal{D}_\hbar$-模一个等变结构。但需要注意，等变 $\mathcal{D}_\hbar$-模有两种定义：强版本和弱版本。对于带有 H-作用的光滑簇 Y'，一个强 H-等变分次 $\mathcal{D}_{\hbar,Y'}$-模是一个对偶组（$\mathcal{M}',\beta'$），其中 $\mathcal{M}'\in\mathcal{D}_{\hbar,Y'}$-模$^{\mathrm{gr}}$，且 $\beta'\colon a^\dagger\mathcal{M}'\xrightarrow{\cong}p^\dagger\mathcal{M}'$是分次 $\mathcal{D}_{\hbar,H\times Y'}=\mathcal{D}_{\hbar,H}\boxtimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathcal{D}_{\hbar,Y'}$-模之间的同构，并满足通常的余循环条件。一个弱$H$-等变分次 $\mathcal{D}_{\hbar,Y'}$-模是一个对偶组（$\mathcal{M}',\beta'$），其中 $\mathcal{M}'\in\mathcal{D}_{\hbar,Y'}$-模$^{\mathrm{gr}}$，且 $\beta'\colon a^\dagger\mathcal{M}'\xrightarrow{\cong}p^\dagger\mathcal{M}'$是分次 $\mathcal{O}_{\hbar,H}\boxtimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathcal{D}_{\hbar,Y'}=\mathcal{O}_H\boxtimes\mathcal{D}_{\hbar,Y'}$-模之间的同构，并满足通常的余循环条件。令

$$\mathcal{D}_{\hbar,Y'}\text{-mod}^{\mathrm{gr},H\text{-strong}}\quad\text{and}\quad\mathcal{D}_{\hbar,Y'}\text{-mod}^{\mathrm{gr},H\text{-weak}}$$

分别表示强 H—等变分次 $\mathcal{D}_{\hbar,Y'}$—模和弱 H—等变分次 $\mathcal{D}_{\hbar,Y'}$—模的（阿贝尔）范畴。存在一个自然的正合遗忘函子

$$\mathrm{For}^{\mathrm{s}\to\mathrm{w}}:\mathcal{D}_{\hbar,Y'}\text{-mod}^{\mathrm{gr},H\text{-strong}}\to\mathcal{D}_{\hbar,Y'}\text{-mod}^{\mathrm{gr},H\text{-weak}}.$$

对于一个 H—等变混合霍奇模 $\mathbf{M}'\in\mathbf{MHM}^H(Y')$，其底层分次 $\mathcal{D}_\hbar$—模具有自然的强 H—等变结构。因此存在一个自然函子，它是（强）等变版本的（A.1.4）：

$$\mathrm{U}_{Y'}^{H\text{-strong}}:\mathrm{MHM}^H(Y')\to\mathcal{D}_{\hbar,Y'}\text{-mod}^{\mathrm{gr},H\text{-strong}}. \tag{A.3.1}$$

我们也记作

$$\mathrm{U}_{Y'}^{H\text{-weak}}:=\mathrm{For}^{\mathrm{s}\to\mathrm{w}}\circ\mathrm{U}_{Y'}^{H\text{-strong}}:\mathrm{MHM}^H(Y')\to\mathcal{D}_{\hbar,Y'}\text{-mod}^{\mathrm{gr},H\text{-weak}}.$$

这些等变构造都有三角范畴版本。混合霍奇模的等变导出范畴

$$\mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^H(Y)$$

以及分次 $\mathcal{D}_\hbar$-模的强等变导出范畴

$$\mathrm{D}^{b,\mathrm{gr},H\text{-strong}}(\mathcal{D}_{\hbar,Y'})$$

可以遵循 [BL94] 的思想构造；详细论述分别见 [Ach13] 和 [Kas08 第 4][33] 节[34]。应当**注意**，除非 H 是酉的，否则这些等变导出范畴并不是等变阿贝尔范畴的导出范畴。此外，还有一个自然函子

$$\mathrm{U}_{Y'}^{H\text{-strong}} : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^H(Y') \to \mathrm{D}^{b,\mathrm{gr},H\text{-strong}}(\mathcal{D}_{\hbar,Y'}), \tag{A.3.2}$$

该函子是 t-正合的，并且限制到心上后恢复 (A.3.1)。

在弱等变情形中，根据 [Kas08, Sec. 3.4-3.8][35], , $\mathcal{D}_{\hbar,Y'}$-$\mathrm{mod}^{\mathrm{gr},H\text{-weak}}$ 的导出范畴是“正确的”范畴，因此我们定义

$$\mathrm{D}^{b,\mathrm{gr},H\text{-weak}}(\mathcal{D}_{\hbar,Y'}) := \mathrm{D}^b(\mathcal{D}_{\hbar,Y'}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{gr},H\text{-weak}}).$$

此外，还有一个自然遗忘函子

$$\mathrm{For}^{\mathrm{s}\to\mathrm{w}} : \mathrm{D}^{b,\mathrm{gr},H\text{-strong}}(\mathcal{D}_{\hbar,Y'}) \to \mathrm{D}^{b,\mathrm{gr},H\text{-weak}}(\mathcal{D}_{\hbar,Y'}), \tag{A.3.3}$$

该函子是 t-正合的，并且限制到心上后恢复 (A.3.1)。同样，

$$\mathrm{U}_{Y'}^{H\text{-weak}} := \mathrm{For}^{\mathrm{s}\to\mathrm{w}} \circ \mathrm{U}_{Y'}^{H\text{-strong}} : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^H(Y') \to \mathrm{D}^{b,\mathrm{gr},H\text{-weak}}(\mathcal{D}_{\hbar,Y'}).$$

我们将使用上述参考文献中定义的这些等变导出范畴的推前函子。它们与函子 (A.3.2)、(A.3.3) 相容；遗忘等变性后，它们也与非等变导出范畴的推前函子相容。我们还要指出，弱等变导出范畴的推前函子与 (A.1.5) 中的公式相同。

A.3.2. 弱等变分次德拉姆函子。 现在我们要将小节 A.2 中的构造推广为弱等变版本。这里的“弱”表示弱等变 $\mathcal{D}_\hbar$-模。

对于光滑的 H-簇 Y'，定义弱等变分次德拉姆函子 $\mathbf{grDR}_{Y'}^H$ 为以下复合

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}_{Y'}^H : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^H(Y') \xrightarrow{U_{Y'}^{H\text{-weak}}} \mathrm{D}_{\mathrm{coh}}^{b,\mathrm{gr},H\text{-weak}}(\mathcal{D}_{\hbar,Y'}) \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}_0} \mathrm{D}_{\mathrm{coh}}^{b,H\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}(\mathcal{O}_{\mathrm{T}^*Y'}) \xrightarrow{\sigma_{Y'}^*} \mathrm{D}_{\mathrm{coh}}^{b,H\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}(\mathcal{O}_{Y'}).$$

对于可能奇异的 H-簇 Y，我们假设存在一个 H-等变闭嵌入 $i\colon Y, \to Y'$将其嵌入某个光滑的 H-簇 Y' 中（当 Y 正规时，利用 [CG10，定理 5.1.25]总能做到这一点）。给定 $\mathbf{M}\in\mathrm{MHM}^H(Y)$，令 $\mathbf{M}' := i_{*,\ \mathrm{Hg}}\mathbf{M}\in\mathrm{MHM}^H(Y')$。与前一小节 A.2 中一样，

$$\mathrm{gr}_{Y'}^H(\mathbf{M}') := \mathrm{U}_{Y'}^{H\text{-weak}}(\mathbf{M}') \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}_0 \in \mathcal{O}_{\mathrm{T}^*Y'}\text{-}\mathrm{mod}_{\mathrm{coh}}^{H\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}$$

根据 [Sai88，引理 3.2.6], , 在 Y 上的支撑表明 $i^{-1}\,\mathbf{gr}_{Y'}^H(\mathbf{M}') \in \mathcal{O}_{\mathrm{T}^*Y'|_Y}$-模$^{H\times\mathbb{G}^{\mathrm{dil}}}{}_{\mathrm{m}}\mathrm{Coh}$ 且 $\mathbf{gr}_{Y'}^H(\mathbf{M}') = i_*i^{-1}\,\mathbf{gr}_{Y'}^H(\mathbf{M}')$。我们进一步通过以下复合定义弱等变分次德拉姆函子 在可能奇异的情形下的版本

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}_Y^H : \mathrm{MHM}^H(Y) \xrightarrow{i^{-1}\,\mathrm{gr}_{Y'}^H} \mathcal{O}_{\mathrm{T}^*Y'|_Y}\text{-}\mathrm{mod}_{\mathrm{coh}}^{H\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}} \xrightarrow{\sigma_Y^*} \mathrm{D}_{\mathrm{coh}}^{b,H\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}(\mathcal{O}_Y), \tag{A.3.4}$$

它适合以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MHM}^H(Y) & \xrightarrow{\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}_Y^H} & \mathrm{D}_{\mathrm{coh}}^{b,H\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}(\mathcal{O}_Y) \\ \downarrow{\scriptstyle i_{*,\mathrm{Hg}}} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ \mathrm{MHM}^H(Y') & \xrightarrow{\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}_{Y'}^H} & \mathrm{D}_{\mathrm{coh}}^{b,H\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}(\mathcal{O}_{Y'}). \end{array}$$

[33]更准确地说， [Kas08] 考虑的是 $\mathcal{D}$-模，而这些构造适用于 $\mathcal{D}_\hbar$-模。[34]对于光滑代数簇，我们只使用（等变的） $\mathcal{D}_\hbar$-模。对于混合霍奇模，尽管 [Ach13] 只考虑了 Y 光滑的情形，但可以使用柏原引理的导出版将这一理论推广到奇异情形。事实上，$\mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^H(Y)$ 应被视为商栈 $[H\backslash Y]$ 上混合霍奇模的导出范畴，并且可以通过 [Tub25] 将这一理论推广到一般的代数栈。[35]那里使用的名称是拟等变 $\mathcal{D}$-模。

证明下文的命题（A.3.1）后，这个函子便不再依赖于光滑环境空间的选择。与前面一样，对于任意 $p \in \mathbb{Z}$，我们将 $\mathrm{gr}^p \mathrm{DR}_Y^H$记作 grDR_Y^H的第 p 个分次部分；若不会引起混淆，则省略下标 Y。

注记 A.3.1. 由于 $\mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^H(Y)$ 并非 $\mathrm{MHM}^H(Y)$ 的导出范畴，因此当 Y 可能是奇异空间时，要为整个等变导出范畴定义 $\mathrm{gr}\ \mathrm{DR}_Y^H$ 更为棘手。给定一个 H-等变的光滑环境空间 $Y, \to Y'$，我们有复合函子

$$\mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^H(Y) \xrightarrow{i_{*,\mathrm{Hg}}} \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^H(Y') \xrightarrow{\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}^H_{Y'}} \mathrm{D}^{b,H\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{Y'}); \tag{A.3.5}$$

我们希望此函子经由 $\mathrm{D}_{b,\ H\times\mathbb{G}^{\mathrm{dil}}\,\mathrm{mcoh}}(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{i_*} \mathrm{D}_{b,\ H\times\mathbb{G}^{\mathrm{dil}}\,\mathrm{mcoh}}(\mathcal{O}_{Y'})$ 分解。注意，应用 (A.2.4) 后，这一过程是在遗忘 H-等变性后完成的。

版本 (A.3.4) 足以满足我们的需要。

现在我们讨论命题 A.2.2 的弱等变版本。

命题 A.3.1. [36]

(1) 设 $f'\colon\ X' \to Y'$ 是光滑 H 代数簇 X', Y' 之间的适当 H-等变态射。那么存在一个同构

$$f'_* \circ \mathrm{gr}_p \mathrm{DR}^H \cong \mathrm{gr}_p \mathrm{DR}^H \circ f'_{*,\mathrm{Hg}} : \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^H(X') \to \mathrm{D}^{b,H}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{Y'}).$$

(2) 设 $f\colon\ X \to Y$ 是 H 代数簇 X, Y 之间的可嵌入 H-等变适当态射（即可以选取 H-等变闭嵌入 $i\colon X、\to X', j\colon\ Y、\to Y'$，其中 X', Y' 是光滑 H 代数簇，并且存在与 i, j, f 相容的 H-等变适当态射 $f'\colon X' \to Y'$）。设 $\mathbf{M}$ *2* 混合 Hodge 模 $^H(X)$。假设 $f_{*,\ \mathrm{Hg}}(\mathbf{M})$ *2* 混合 Hodge 模 $^H(Y)$。那么存在一个同构

$$f_* \circ \mathrm{gr}_p \mathrm{DR}^H(\mathbf{M}) \cong \mathrm{gr}_p \mathrm{DR}^H \circ f_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{M})$$

在 $\mathrm{D}^{b,}{}_{H\ \mathrm{Coh}(\mathcal{O}_Y)}$ 中。

注 A.3.2. 当 X 和 Y 正规时，可以利用 [CG10，定理 5.1.25] 将它们 H-等变地嵌入某个射影空间 $\mathbb{P}^n$。随后我们可以使用注 A.2.1 中的方法构造 f 的某个嵌入。

命题 *A.3.1* 的证明。 证明与非等变情形完全平行。我们只需仿照 [CDK21, 推论 3.9], 的证明，即可得到以下自然同构

$$(\int_{f'} \mathcal{M}') \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}_0 \cong p_{f'*}\pi_{f'}^*(\mathcal{M}' \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}_0), \quad \forall \mathcal{M}' \in \mathrm{D}^{b,\mathrm{gr},H\text{-weak}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_{\hbar,Y'})$$

在 $\mathrm{D}^{b,\ \mathrm{gr},\ H\text{-weak}\ \mathrm{Coh}}(\mathcal{O}_{\mathrm{T}^*Y'})$ □

最后，我们说明群作用改变时的相容性，这可直接由构造得出。设 $H_1 \to H_2$ 是复数域 $\mathbb{C}$上的代数群同态。设 H_2 作用于簇 Y，则 Y 继承了 H_1的作用。存在自然遗忘函子

$$\mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^{H_2}(Y) \to \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}^{H_1}(Y), \quad \mathrm{D}^{b,H_2}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y) \to \mathrm{D}^{b,H_1}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y),$$

它们与弱等变分次德拉姆函子相容，即下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MHM}^{H_2}(Y) & \xrightarrow{\mathrm{gr}_p \mathrm{DR}^{H_2}} & \mathrm{D}^{b,H_2}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{MHM}^{H_1}(Y) & \xrightarrow{\mathrm{gr}_p \mathrm{DR}^{H_1}} & \mathrm{D}^{b,H_1}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y). \end{array} \tag{A.3.6}$$

[36]一旦定义了可能奇异情形下弱等变分次德拉姆函子的完整导出版（A.3.4），我们也应当能够对本命题给出一个更统一的表述。

A.4. **Hodge 模 Satake 范畴**。在本小节中，我们回顾第 5.4 节所需的 Hodge 模 Satake 范畴的一些结果 [Fed21]，尤其是推论 5.4.2 的证明。

在 [Fed21], 中，作者将等变霍奇模理论 $\mathrm{HM}^H(Y,w)$ 扩展到 H 为某个原代数群的情形（即 H 是沿代数群满射态射的极限 $\lim_{+\infty\leftarrow m} H^{(m)}$；他们还假设每个 $H^{(m)}$ 以及过渡映射的核都是连通的）。事实上，若 $H_1 \to H_2$ 是核连通的代数群满射态射，且 H_2 作用于 Y，则遗忘函子 $\mathrm{HM}^{H_2}(Y,w) \to \mathrm{HM}^{H_1}(Y,w)$ 是一个等价（[Fed21，引理 2.15]）。因此可以定义 $\mathrm{HM}^H(Y,w) := \mathrm{colim}_{m>>0}\mathrm{HM}^{H^{(m)}}(Y,w)$；事实上，对于任意 $m >> 0$，它都等价于 $\mathrm{HM}^{H^{(m)}}(Y,w)$。$\mathrm{MHM}^H(Y)$ 也有类似的构造。

[Fed21] 也将 $\mathrm{HM}^H(Y,w)$ 的理论推广到了 Y 为归纳簇的情形。特别是，作者定义并研究了 $\mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G,w)$，以及

$$\mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G) := \bigoplus_{w\in\mathbb{Z}} \mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G,w).$$

这个范畴带有由卷积乘积给出的幺半结构。

定义 $\mathrm{Tate}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ 为 $\mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ 的全子范畴，其对象同构于以下对象的 Tate 扭曲的直和：

$$\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda} := \mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\overline{\mathrm{Gr}}_{\check\lambda}} \in \mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}(\overline{\mathrm{Gr}}_{\check\lambda}) \subset \mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$$

$\check\lambda$ 对所有 $\lambda \in P_+$ 均成立。

命题 A.4.1 ([Fed21，命题 4.3])。全子范畴 $\mathrm{Tate}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G) \subset \mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ 在卷积乘积下封闭。

推论 A.4.1。设 $m : \mathrm{Gr}_{\check\lambda,\check\mu} := \mathrm{Gr}_{\check\lambda} \widetilde{\times} \overline{\mathrm{Gr}}_{\check\mu} \to \overline{\mathrm{Gr}}^{\check\lambda+\check\mu}$ 为卷积映射，且 **交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\check\lambda,\check\mu} :=$ **交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\overline{\mathrm{Gr}}_{\check\lambda,\check\mu}} \in \mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_{\check\lambda,\check\mu}) \subset \mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr} \widetilde{\times} \mathrm{Gr})$。那么

$$m_{*,\mathrm{Hg}}(\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\lambda,\check\mu}) \cong \bigoplus_{\check\nu\in\check P_+} (\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\nu})^{\oplus c^{\check\nu}_{\check\lambda,\check\mu}(\frac{1}{2}d_{\check\nu} - \frac{1}{2}d_{\check\lambda,\check\mu})}$$

于 $\mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}$(格拉斯莫量$_{\check\lambda+\check\mu}$) $\subset \mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}$(格拉斯曼量$_G$)。

证明。根据卷积乘积的公式，$m_{*,\mathrm{Hg}}$(**交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\check\lambda,\check\mu}$)正是卷积乘积**交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\check\lambda}$ *__交叉上同调复形__$^{\mathrm{Hg}}{}_{\check\mu}$。接着，根据命题 A.4.1，$m_{*,\mathrm{Hg}}$(**交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\check\lambda,\check\mu}$)具有如下形式

$$\bigoplus_{\check\nu\in\check P_+} (\mathbf{IC}^{\mathrm{Hg}}_{\check\nu})^{\oplus a_{\check\nu}}(w_{\check\nu})$$

对于某个 $a_{\check\nu}, w_{\check\nu} \in \mathbb{N}$。通过比较权，我们得到 $w_{\check\nu} = \frac{1}{2}d_{\check\nu} - \frac{1}{2}d_{\check\lambda,\check\mu}$。应用函子 Rat：$\mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G) \to \mathrm{Perv}^{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G,\mathbb{Q})$，由几何 Satake 等价[MV07]可得 $a_{\check\nu} = c^{\check\nu}_{\check\lambda,\check\mu}$。□

注 A.4.1. 与主要上下文中一样，令 $\widehat{G}_\mathcal{O} = (G_\mathcal{O} \rtimes \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rot}}) \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dil}}$。我们可以将上述推论 A.4.1 中的 $G_\mathcal{O}$-等变性替换为 $\widehat{G}_\mathcal{O}$-等变性，因为 **交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\check\lambda,\check\mu}$，**交叉上同调复形**$^{\mathrm{Hg}}{}_{\check\nu}$ 都具有 $\widehat{G}_\mathcal{O}$-等变结构，并且众所周知，自然遗忘函子 $\mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}$(格拉斯曼量) $\to \mathrm{HM}^{G_\mathcal{O}}$(格拉斯曼量) 是完全忠实的（例如参见 [Fed21，命题 2.16]）。

参考文献

[AB10] Dmitry Arinkin 和 Roman Bezrukavnikov。《反常相干层》。《莫斯科数学杂志》，10(1):3–29, 271, 2010。doi:10.17323/1609-4514-2010-10-1-3-29.[Ach13] Pramod Achar。《等变混合霍奇模》，2013。https:。个人主页上的讲义。网址：。//www.math.lsu.edu/~pramod/docs/emhm.pdf

[BBD82] Alexander Beilinson、Joseph Bernstein 和 Pierre Deligne。《反常层》。载于《奇异空间上的分析与拓扑》I（吕米尼，1981），Astérisque 第100卷，5–171页。法国数学会，巴黎，1982年。[Bea00] Arnaud Beauville。《辛奇点》。《数学发明》，139(3):541–549，2000年。 doi:10.1007/s002229900043。[BFM05] Roman Bezrukavnikov、Michael Finkelberg 和 Ivan Mirković。《仿射格拉斯曼流形的等变同调与 K理论及 Toda格》。《组合数学》，141(3):746–768，2005年。 doi:10.1112/S0010437X04001228。[BFN18] Alexander Braverman、Michael Finkelberg 和 Hiraku Nakajima。《迈向 3 $\mathcal{N}=4$ 22 5 1071 1147, 维规范理论库仑分支的数学定义，II》。《理论物理进展》，( ): – 。. 2018 doi:10.4310/ATMP.2018.v22.n5.a1 。[BL94] Joseph Bernstein 和 Valery Lunts。《等变层与函子》，数学讲义第1578卷。施普林格出版社，柏林，1994年。 doi:10.1007/BFb0073549。[CDK21] Sabin Cautis、Christopher Dodd 和 Joel Kamnitzer。《霍奇模的伴随分次与范畴 $\mathfrak{sl}_2$ 作用》。《Selecta Mathematica》（新版），27(2):第22号论文，55，2021年。 doi:10.1007/s00029-021-00639-0。[CG10] Neil Chriss 和 Victor Ginzburg。《表示论与复几何》。现代 Birkhäuser 经典著作。Birkhäuser Boston 有限公司，马萨诸塞州波士顿，2010年。1997年版重印。 doi:10.1007/978-0-8176-4938-8。[CW19] Sabin Cautis 和 Harold Williams。《相干萨特范畴的簇理论》。《美国数学会杂志》，32(3):709–778，2019年。 doi:10.1090/jams/918。[CW23] Sabin Cautis 和 Harold Williams。《四维 $\mathcal{N}=2$ 规范理论库仑分支的典范基》，2023年。网址： https://arxiv.org/abs/2306.03023, arXiv:2306.03023。[CW24] Sabin Cautis 和 Harold Williams。《归纳几何堆》，2024年。网址： https://arxiv.org/abs/2306.03043, arXiv:2306.03043 。[CW25] Sabin Cautis 和 Harold Williams。《温和呈示态射与相干拉回》。《数学杂志》，311(4):第88号论文，2025年。 doi:10.1007/s00209-025-03872-x。[DM82] Pierre Deligne 和 James S. Milne。《坦纳范畴》，101–228页。施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，1982年。 doi:10.1007/978-3-540-38955-2_4。[Fed21] Roman Fedorov。《仿射格拉斯曼流形上霍奇模的萨特克等价》，2021 https://arxiv. 。网址： ， 。. arXiv:2112.06747 2112.06747 。[GR17] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum。《导出代数几何研究》。第一卷：对应与对偶，数学调查与专著第221卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017年。 doi:10.1090/surv/221.1。[Kas08] Masaki Kashiwara。《等变导出范畴与实半单李群的表示》。载于《表示论与复分析》，数学讲义第1931卷，137–234页。施普林格，柏林，2008年。网址： https://doi.org/10.1007/978-3-540-76892-0_3, doi:10.1007/978-3-540-76892-0_3。[KLV14] David Kazhdan、Michael Larsen 和 Yakov Varshavsky。《坦纳形式主义与朗兰兹猜想》。《代数与数论》，8(1):243–256，2014年。 doi:10.2140/ant.2014.8.243。[KV04] Mikhail Kapranov 和 Eric Vasserot。《顶点代数与形式环空间》。《高等科学研究所数学出版物》，(100):209–269，2004年。 doi:10.1007/s10240-004-0023-9。[KWWY14] Joel Kamnitzer、Ben Webster、Alex Weekes 和 Oded Yacobi。《杨量子群与仿射格拉斯曼流形中切片的量子化》。《代数与数论》，8(4):857–893，2014年。 doi:10.2140/ant.2014.8.857。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》。 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf，2017年。[Lur18] Jacob Lurie。《谱代数几何》。 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf，2018年。[MV07] Ivan Mirković 和 Kari Vilonen。《几何朗兰兹对偶与交换环上的代数群表示》。《数学年刊》（第二辑），166(1):95–143，2007年。 doi:10.4007/annals.2007.166.95。[Ras14] Samuel David Raskin。《手征主系列范畴》。ProQuest有限责任公司，密歇根州安娜堡，2014年。博士论文——哈佛大学。网址： http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqm&rft_dat=xri:pqdiss:3627063 。[Sai88] Morihiko Saito。《可极化霍奇模》。《数理科学研究所出版物》，24 6 849 995, 1988 doi:10.2977/ ( ): – 。. prims/1195173930 。[Sai90] Morihiko Saito。《混合霍奇模》。《数理科学研究所出版物》，26 2 221 333, 1990 doi:10.2977/prims/ ( ): – 。. 1195171082 。[Sch15] Christian Schnell。《阿贝尔簇上的全纯D模》。《高等科学研究所数学出版物》，121 1 55, : – 。. 2015 doi:10.1007/s10240-014-0061-x 。[Sch16] Christian Schnell。《关于 Saito 消失定理》。《数学研究通讯》，23 2 499 527, 2016 doi:10.4310/MRL.2016. ( ): – 。. v23.n2.a10 。[Sta25] Stacks项目作者。《Stacks项目》。 https://stacks.math.columbia.edu，2025年。[Tub25] Swann Tubach。《堆上的混合霍奇模》。《数学论坛：西格玛》，13 175, 29, 2025 doi: :第 e 号论文。. 10.1017/fms.2025.10122 。[VV25] Michela Varagnolo 和 Eric Vasserot。《移位仿射量子群的表示与库仑分支》，2025年。网址： https://arxiv.org/abs/2503.06262, arXiv:2503.06262。[Xin25] Zhengze Xin。《拉格朗日纤维化与辛解消的反常霍奇复形》，2025 https: 。网址： ， 。//arxiv.org/abs/2503.14890 arXiv:2503.14890

[朱歆文17] 朱歆文：《仿射格拉斯曼流形与几何 Satake 等价导论》，载于模空间几何与表示论，第 24 卷*IAS/*帕克城数学丛书，第 59–154 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017年。

中国北京清华大学求真书院电子邮箱：
liangsyx21@mails.tsinghua.edu.cn