arXiv:2601.07391v1 [math.AP] 12 Jan 2026

低黏度下二维水族箱中的定常内波

´ ´MALO JEZEQUEL 和 JIAN WANG

Abstract. 在莫尔斯–斯梅尔动力学假设下，我们证明了具有实解析边界的二维水族箱中，小黏度下与内波方程相关的定常问题具有一致可解性。为此，我们对水族箱进行复形变，并证明无黏定常内波算子在形变后的区域上可逆。

Contents

1. 引言 3
1.1. 设定与主要结果 3
1.2. 背景 6
1.3. 证明策略 8
1.4. 论文结构 10

2. 几何与动力学考量 10
2.1. 概述 11
2.2. 边界的形变 13
2.3. 区域的复形变 17

3. 常系数微分算子在变形区域上的作用 22
4. 无黏算子在变形区域上的可逆性 25
4.1. 当 $\mathrm{Im}\,\omega > 0$. 26
4.2. 变形区域上的基本解 28
4.3. 约化到边界 34
4.4. 受限层势算子的微局部结构 38
4.5. 命题 4.1 的证明 44
5. 零黏性极限 47
5.1. 变形区域上的先验估计 47
5.2. 定理 1 的证明 50

附录 A. 边值问题的椭圆正则性 52参考文献 54

1. Introduction

1.1. 设置与主要结果。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中具有实解析边界的有界开子集。为理解黏度存在时 Ω 中的受迫内波，我们考虑方程 [Bro16，（1.20）、（1.21）]

$$\begin{cases} \partial_t^2 \Delta u + \partial_{x_2}^2 u - \nu \partial_t \Delta^2 u = f(x) \cos \lambda t, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \\ (\mathrm{d}u)_{|\partial\Omega} = 0 \text{ if } \nu > 0, \\ u_{|t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里，$\nu > 0$ 是黏度参数，而 $\lambda \in$（0，1）是强迫频率。函数 f 是实值光滑函数，而 u是未知函数。为理解该方程解的长时间渐近行为，对时间应用傅里叶逆变换[1] 并引入算子

$$P_{\omega,\nu} = -\omega^2 \partial_{x_1}^2 + (1-\omega^2)\partial_{x_2}^2 + i\omega\nu\Delta^2.$$

这里，$\omega \in \mathbb{C}$ 是时间上的频率参数，我们希望理解$P_{\omega、\nu}$ 在 ω 接近 λ 且 $\nu > 0$ 较小时的可逆性。当 $\nu > 0$时，我们将为$P_{\omega、\nu}$ 补充狄利克雷边界条件和诺伊曼边界条件。令$\nu = 0$，即可得到算子P_{ω}，0，该算子在 [DWZ25] 中有所研究，其中我们仅使用狄利克雷边界条件。回顾[Ral73，第 2] 定理：若 Ω 是单连通的，则P_{ω}，0：H_0^1(Ω) $\to H^{-1}$(Ω) 对于[2] $\omega \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$是可逆的。

在 Ω 满足某些几何与动力学假设的条件下（见定义 2.3），Dyatlov、Wang 和 Zworski [DWZ25] 描述了 1.1 ）中解的渐近行为，适用于 $\nu = 0$ 的情形（在该情形下，诺伊曼边界条件被省略）。更准确地说，设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个有界开子集，其 C^∞ 边界满足 $\lambda \in (0,1)$ 上的莫尔斯–斯梅尔条件（定义 2.3）。那么对于 $f \in C_c^\infty$(Ω; $\mathbb{R}$)，根据 [DWZ25，定理 1，3], 满足 1.1）且 $\nu = 0$ 的解具有如下分解：

$$u(t) = \mathrm{Re}\left(e^{-i\lambda t} u_+\right) + r(t) + e(t),$$

其中，$r(t)$ 在 H^1(Ω) 中关于 $t \geq 0$ 一致有界，项 $e(t)$ 在 $H^{\frac{1}{2}-}$(Ω) 中当 t 趋于 $+\infty$ 时趋于 0，且 $u_+ \in H^{\frac{1}{2}-}$(Ω)。首项奇异项 u_+ 称为内波吸引子，尤其值得关注。研究表明，u_+ 属于一个以棋盘台球映射的动力学定义的拉格朗日分布空间。

---

[1]我们使用傅里叶逆变换，而不是傅里叶变换，从而得到一个在 $\omega \in (0,1)+i(0,+\infty)$ 上可逆的算子，见定理 1，然后研究从上方穿过 (0,1) 时发生的情况，这在散射理论中是标准做法。这样做还有一个优点，即使我们的中间结果中的符号与 [DWZ25] 保持一致。[2]下文中，我们只讨论 ω 靠近一点 $\lambda \in$ (0, 1) 时发生的情况。对于ω 靠近 (−1, 0) 中各点时的结果，利用 $P_{\omega,\nu}$ 在 $\omega \mapsto -\omega$下的不变性即可立即推出。

此外， u_+ 是定常方程 $P_{\lambda,0}u_+ = f$ 的一个特解，由以下极限分布给出

$$u_+ = P^{-1}_{\lambda+i0,0}f \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0^+} P^{-1}_{\lambda+i\epsilon,0}f.$$

分布空间中的极限 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 的存在性由极限吸收原理保证，该原理已在 [DWZ25，定理 1 中确立。4]。

[DWZ25] 的结果给出了无黏情形下内波吸引子的微局部描述。一个自然的问题是将黏度纳入方程，并考察其对无黏吸引子的耗散效应。因此，我们考虑同时满足狄利克雷边界条件和诺伊曼边界条件的定常方程 $P_{\omega,\,\nu}u_{\omega,\,\nu} = f$ 的解。本文的主要定理证明了这一含黏度的定常内波方程具有一致可解性。

定理 1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界开子集，具有实解析边界，且 $\lambda \in (0,1)$ 满足莫尔斯–斯梅尔条件（定义 2.3）。那么存在$\delta > 0$，使得对于每个 $\omega \in (\lambda-\delta,\lambda+\delta) + i(-\delta,+\infty)$ 和 $\nu \in (0,\delta)$，算子$P_{\omega,\,\nu}\colon H^4(\Omega)\cap H^2_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 可逆。

注意到，无黏算子 $P_{\lambda,\,0}\colon H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 在 对于$\lambda \in (0,1)$ 上不可逆。[3] 因此，令人意外的是，定理 ω 中的值域 1 包含虚部非正的复数，并且在 ν 的值变得足够小时，不再依赖于 ν 。

定理 1 应与 [GZ22 中 Galkowski 和 Zworski 的定理 1] 作比较；该定理研究了环面上 $P_{\omega,\nu}\Delta^{-1}$ Ω 的微局部模型。此处， Δ^{-1} Ω 是 $\Delta\colon H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 的逆算子。在 [GZ22] 中，无黏算子可能具有嵌入特征值（见 [GZ22，附录 B.3]）；因此，他们没有证明一致可逆性，而是证明了带黏度算子的特征值收敛到无黏算子的共振（见 [JW25]，关于奥尔–索末菲方程背景下的类似结论）。在我们的情形中，[DWZ25，定理 1.4] 表明，在满足莫尔斯–斯梅尔条件的 $\lambda \in (0,1)$ 附近不存在嵌入特征值。随后在定理 2 中，我们证明这类λ的复邻域中不存在“共振”。因此，在我们的情形中，带黏度的算子 $P_{\omega,\nu}$ 在 λ的复邻域中一致可逆。

定理 1 的地球物理学和天体物理学意义体现在两个方面。首先，在物理学文献中，为了理解方程 (1.1) 解的长时间演化，人们会忽略初始条件，寻找形如 $u(t,x) = \mathrm{Re}(u_{\lambda,\nu}(x)e^{-i\lambda t})$ 的定常解。参见 Ogilvie 在 [Ogi05, §2] 中的讨论。该剖面 $u_{\lambda,\nu}$

[3]否则，存在 $\lambda \in (0,1)$ 和 $C > 0$ ，使得$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|P_{\lambda,\,0}u\|_{L^2(\Omega)}$ 对所有$u \in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$均成立。取 $u_n(x) = \psi(x)e^{i\langle n,\,x\rangle}$ 其中 $\psi \in C^\infty_c(\Omega)$ 非零，则 $n \in \mathbb{Z}^2$、 $|n| \to +\infty$ 和 $\frac{n_2^2}{|n|^2} \to \lambda^2$ 得出矛盾。

随后必须满足定常方程 $P_{\lambda,\nu}u_{\lambda,\nu} = f$，并具有狄利克雷和诺伊曼边界条件。鉴于[DWZ25 的定理 1.3 和 1.4]，，解 $u_{\lambda,\nu}$ 可视为具有黏度的内波或惯性波吸引子。 [Ogi05] 的一项主要目的是，为一个玩具模型构造$u_{\lambda,\nu}$ 在零黏性极限下的形式渐近展开。定理 1（及其证明）在莫尔斯–斯梅尔条件下，以复变形空间中的一致估计为依据，证明了如此定义的低黏度内波或惯性波吸引子的存在性和唯一性。其次，对于 $\nu > 0$，使 $P_{\omega,\nu}$ 不可逆的 ω 复数值可视为“内波特征值”。“惯性波特征值”也可以用非常相似的方式定义，参见 Rieutord、Valdettaro 和 Georgeot[RVG02, (3.13)]的工作。这些特征值在复平面上的分布相当复杂，且具有重要的物理意义。定理 1 表明，当 $\nu \to 0^+$时，满足莫尔斯–斯梅尔条件的 $\lambda \in (0, 1)$ 复邻域中一致不存在特征值。

如上文所述，定理 1 是无黏算子不存在“共振”的结果。换言之，需要证明预解式 $P_{\omega 0}^{-1}$，，Im $\omega > 0$ 在 λ 附近跨过 (0, 1) 存在全纯延拓。为了提供这样的延拓，我们将采用复变形方法（参考文献见 §1.2 末尾），以便将 $P_{\lambda,0}$ 变为椭圆算子。我们~寻找一个带边界的全实曲面 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ （通常是 Ω 的一个小形变~ ~ ~），使得 $P_{\lambda,0} : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 可逆。$P_{\lambda,0}$ 如何在 Ω 上定义微分算子将在 §3中解释。然而，即使 $P_{\lambda,0}$ 在 Ω 上的作用始终定义良好，我们仍需明确所使用的边界条件的含义。为此，注意到，由于 $\partial\Omega$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个维数为 1 的实解析子流形，它具有一个复化（$\partial\Omega$）$_{\mathbb{C}}$，该复化可视为 $\mathbb{C}^2$ 中一个包含 $\partial\Omega$ 的一维连通复子流形。为了明确 Ω 上边界条件的含义，我们规定 $\partial\Omega \subseteq (\partial\Omega)_{\mathbb{C}}$。因此，如果 u 是 $\mathbb{C}^2$ 的一个连通开子集上的全纯函数，且该开子集包含 Ω 和 Ω，那么当且仅当 u 在 Ω 上满足狄利克雷边界条件时，u 才在 Ω 上满足该条件（这一事实对于引理 4.3 的证明中的一个论证至关重要，并且在命题 4.1 和引理 5.5 的证明中再次使用）。定理 1 的证明基于构造一个满足上述条件的曲面：

定理 2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个具有实解析边界的有界开子集，并且$\lambda \in (0,1)$ 满足莫尔斯–斯梅尔条件（定义 2.3）。那么存在 $\delta > 0$~以及一个带边界的全实实解析曲面 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$，使得：

~(i) Ω 的边界包含于 Ω 的边界的复化（$\partial\Omega$）$_{\mathbb{C}}$ 之中；~ ~(ii) 对任意 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i(-\delta, +\infty)$，算子 $P_{\omega,0} : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to\sim L^2(\Omega)$ 可逆。

注 1.1. 由于 $\partial\Omega$ 包含于 $\mathbb{R}^2$，我们可以假设 $(\partial\Omega)_{\mathbb{C}}$ 在$\widetilde{\ }$复共轭下不变。因此，若将 Ω 替换为其在复共轭下的像，则定理 2 中的 (i) 仍然成立，但在 (ii) 中，集合 $(\lambda-\delta, \lambda+\delta) + i(-\delta, +\infty)$ 被替换为 $(\lambda-\delta, \lambda+\delta) + i(-\infty, \delta)$。参见备注 2.13。

注 1.2。 遗憾的是，我们无法使用定理 1.1 对方程（1）的解的长期渐近行为证明任何具体结果。Frantz 和 Wrochna [FW25] 能够在一个时间 $t \sim \nu^{-\frac{1}{3}-}$ 描述（1.1）在闭流形上的玩具模型的解。然而，有两个困难阻止我们在当前背景下应用 Frantz 和 Wrochna 的方法。

第一个困难在于 $\omega = 0$在我们的设定中所扮演的特殊角色，这是由于黏性项 ω 中存在因子 $P_{\omega,\ \nu}$。因此，$P_{0,\ \nu}$ 不是椭圆的，即使 $\nu > 0$，所以，对于固定的 $\nu > 0$，使得 ω 不可逆的 $P_{\omega\text{谱参数}\nu}$ 集合原则上可能在零点处聚积。这一特征对于 [FW25]中所考虑的扰动类是不可能出现的（谱参数在那里不出现在黏性项中），因此可以通过沿精心选择的轮廓对预解式进行积分，准确描述其演化问题的解。不过要注意，在研究下文讨论的方程（1.2）时，不会出现这一困难。

第二个问题源于自伴性的丧失。研究无黏问题时，可以使用与自伴算子 $\partial_{x_2}^2\Delta^{-1}{}_{\Omega}$ 在$H^{-1}(\Omega)$ 上的泛函演算，参见 [DWZ25]。这里，$\Delta^{-1}{}_{\Omega}$ 表示 Ω 上狄利克雷拉普拉斯算子的逆算子。引入 $\nu > 0$ 后，算子 $\partial_{x_2}^2\Delta^{-1}{}_{\Omega}$ 被一个非自伴算子取代。 [FW25] 通过使用与算子 P 相关的泛函演算来处理这一问题；在他们的背景下，该算子发挥着 $\partial_{x_2}^2\Delta^{-1}{}_{\Omega}$ 的作用。他们将强迫项f 替换为 $\varphi(P)f$，其中 φ 是一个支撑集位于强迫频率附近的光滑函数。他们的论证中有一点很重要：若起初 f 是光滑的（C^∞），则函数 $\varphi(P)f$ 仍然光滑。这在他们的背景下成立，因为 $\varphi(P)$ 是一个 0 阶伪微分算子。然而，要在我们的背景下采用类似的论证，我们需要 $\varphi(P)f$ 是实解析的。一般而言，这不太可能成立，除非 φ 是实解析的；但如此一来，它的支撑集就不可能很小。

需要指出的是，自伴性的丧失是我们的方法的核心：算子$\partial_{x_2}^2\Delta^{-1}{}_{\Omega}$ 在曲面 $\widetilde{\ }$ Ω 上先验地并非自伴算子，该曲面见定理 2。然而，复变形方法大大简化了问题的其他所有方面，参见注 1.3。

1.2. 背景。 将 $\partial_{x_2}^2$ 替换为 $\partial_{x_1}^2$后，方程（1.1）描述了二维内波的时间演化，推导见 [Bro16，（1.20）、（1.21）]以及 [Ogi05，§2]。类似的方程可用于近似旋转流体中惯性波的时间演化。为此，我们回顾三维惯性波所采用的以下线性近似

Rieutord 和 Valdettaro 所采用的三维惯性波 [RV18, （2.1）]

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla p + E\Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

其中 $\mathbf{k}$ 为旋转轴， p 为压力，且 E 为与黏度成正比的埃克曼数。沿用 Ralston [Ral73]，我们假设 $\mathbf{k} = (0,1,0)$，$\mathbf{u}$ 与 x_3无关，且 $\mathbf{u} = (\partial_{x_2}\phi, -\partial_{x_1}\phi, u_3)$ 可由某个流函数 ϕ表示。于是，关于 $\mathbf{u}$的系统可改写为关于 ϕ 的形式：

$$(\partial_t - E\Delta)^2 \Delta\phi + \partial_{x_2}^2 \phi = 0. \tag{1.2}$$

该方程左端与方程（1.1）的左端仅相差一个 $\mathcal{O}(E^2)$ 项。我们的方法也给出了方程（1）定理的类似结果，参见注 5.7。

关于惯性波的一个重要天体物理问题，是描述低埃克曼数下特征值的分布，因为特征函数对应于演化方程的时间定常解。这是 Rieutord 等人 [RGV01、RVG02、RV18、HFRLD23]关于球壳研究中的核心课题。球壳的数值研究发现，低埃克曼数下，惯性波的特征值可能聚集于 λ，使得相应的 $\lambda \in (0,1)$ 棋盘台球具有李雅普诺夫指数趋零的吸引子。参见 [Mos24、§3.2。2]其中给出了在二维凸域中构造此类棋盘台球吸引子的明确方法。相反，如果 $\lambda \in (0,1)$ 确定的吸引子具有非零李雅普诺夫指数，那么在 λ的某个复邻域内，埃克曼数趋零极限下不存在惯性波特征值。参见 [RV18，图 3] 以数值方式展示了特征值聚集与缺失这两种情形。本文在二维凸域背景下，对后一种情形给出了严格的数学证明。

二维无黏区域中的内波与惯性波及其边界在多种情境下引起了广泛的研究兴趣[DWZ25、CdVL24、Li25，LWW24、LWW25], 其中建立了零阶内波算子的谱理论，尤其是极限吸收原理。对于无边界的理想微局部模型，这类模型最初由 Colin de Verdi`ere 和 Saint-Raymond[CdVSR20], Galkowski 和 Zworski [GZ22] 研究了特征值的零黏性极限。Galkowski 和 Zworski 的工作[GZ22]为这类微局部模型定义了散射共振，并证明当黏度趋于零时，特征值收敛到共振。对于这些微局部模型，Frantz 和 Wrochna[FW25]研究了黏度在长时间演化中的耗散效应。

本文所研究的问题同时考虑了区域边界和黏度，因此在物理上更具现实意义。但在数学上也更为困难：在

存在边界的情况下，用高阶算子扰动微分算子可能会产生“边界层”（参见 [VL62]），这会使得在零黏性极限下无法获得一致的先验估计，除非考虑正则性相对较低的空间。本文采用的复变形方法与 [GZ22，附录 B] 中 Galkowski 和 Zworski 所用的方法相似，也与 [DBLR25] 中 Dang、Guedes Bonthonneau、L´eautaud 和 Rivi`ere 所用的方法相似，还与本文作者在 [JW25] 中所用的方法相似。复变形方法也与散射理论中的复伸缩方法有许多相似之处（例如参见 [DZ19]）。请注意， [GZ22] 和 [DBLR25]研究的是没有边界的流形；在 [JW25], 中，边界仅由两个点构成，复形变设计为避开边界。本文中，区域边界是一个拓扑圆；为体现棋盘台球动力学，必须在整个区域内（包括边界）进行复形变。

~1.3. 证明策略。证明定理 2 的第一个想法，是选择 Ω，使其为 Ω 的一个小~形变，并使得当 $\omega \in (\lambda-\delta,\lambda+\delta)+i(-\delta,+\infty)$ 时，$P_{\omega,0}$ 在 Ω 上为椭圆的。这并不太难，[4], 难点在于满足条件 (i)。这正是我们运用关于 λ 和 Ω 的假设之处。我们首先在 $(\partial\Omega)_{\mathbb{C}}$ 内构造 Ω 的一个形变。这一构造受到 §2.2 中阐述的动力学考量的启发。这里我们不予介绍，因为这需要定义国际象棋台球动力学；我们将在 §2.1 回顾其定义。设计好边界的形变后，我们在 §2.3 中通过对边界上的点进行插值，将其扩展为整个区域的形变。

~一旦我们知道，对于 $\omega \in (\lambda-\delta,\lambda+\delta)+i(-\delta,+\infty)$，$P_{\omega,0}$ 在 Ω 上是椭圆的，就需要证明它是可逆的（满足狄利克雷边界条件）。为此，我们利用 ~Ω 是 Ω 的一种形变。因此，存在一个带边界曲面的光滑族[5] $(N_s)_{s\in[0,1]}$，使得 $N_0=\Omega$ 和 $N_1=\Omega$。此外，我们的构造表明，若 $\omega \in (\lambda-\delta,\lambda+\delta)+i(0,+\infty)$，则对每个 $s\in[0,1]$，$P_{\omega,0}$ 在 N_s 上都是椭圆的。利用实解析范畴中的椭圆正则性结果（我们采用 [LM70, Chapitre 8, Th´eor`eme 1.2], ，另见 [MJN57]），可知若 u 属于 $P_{\omega,0}$ 在 $\Omega=N_1$ 上作用所得算子的核~，则 u 可全纯延拓到$\bigcup_{s\in[0,1]} N_s$的一个邻域，并且 $u_{|N_0}$ 也属于 $P_{\omega,0}$ 的核（根据解析延拓原理）。随后，利用分部积分可证明 $u_{|\Omega}=0$，从而得到 $u=0$。要使这一论证成立，需要 u在 Ω 的边界上为零；这由~解析延拓原理、 u 在 Ω 的边界上为零这一事实，以及~Ω 和 Ω 的边界均包含于连通复曲线 $(\partial\Omega)_{\mathbb{C}}$ 这一事实得出。

[4]只需对某个小的 $\theta>0$，取 Ω 在映射 $(x_1,x_2)\mapsto(e^{-i\theta}x_1,x_2)$ 下的像即可。[5]更准确地说，我们构造一族形变 $(\Omega_\tau)_{\tau\in[0,\tau_0)}$，然后证明对于足够小的 $\tau>0$，可以取~$\Omega=\Omega_\tau$。

上述论证证明了当 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i(0, +\infty)$ 时，$P_{\omega,0}$ 在 Ω 上（满足狄利克雷边界条件）可逆。为完成定理 2 的证明，我们希望证明 $P_{\lambda,0}$ 在 Ω 上也可逆。实际上，我们先证明当 $s > 0$ 足够小时，它在 N_s 上可逆，然后将 Ω 替换为 N_s。为此，我们对作用于 N_s 上的$P_{\lambda,0}$（当 $s > 0$ 时为椭圆算子）进行约化到边界。随着 s 趋于 0，出现的边界算子会退化，但这种退化与 [DWZ25] 中其参数“$\epsilon = \operatorname{Im}\omega$”趋于 0 时的情形类似。因此，我们可以借鉴他们的分析来证明可逆性，其中关键结论是[DWZ25, 引理 7.2]。

一旦定理 2得到证明，我们便希望利用曲面 Ω 来证明定理 1。注意，当 $\nu > 0$ 时，算子 $P_{\omega,\nu}$ 对每个 $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 都是椭圆的。因此，运用上述基于实解析椭圆正则性和解析延拓原理的相同论证，我们发现，只要 Ω 是 Ω 的充分小形变，在 Ω 和 $\widetilde{\Omega}$ 上带有狄利克雷和诺伊曼边界条件的 $P_{\omega,\nu}$ 的可逆性就是等价的。因而，我们希望研究 Ω 上的 $P_{\omega,\nu}$ 在 ν 趋于 0 时的情形，并希望 $\widetilde{\Omega}$ 上的 $P_{\omega,0}$ 的可逆性（已在定理 2 中证明）能够推出$P_{\omega,\nu}$ 在 $\nu > 0$ 足够小时的可逆性。

困难在于，$P_{\omega,\nu}$ 是 P_{ω} 的高阶扰动。关于边值问题背景下此类扰动的研究，已有专门的文献。一个重要参考文献是 [VL62]。我们将改为依赖 [Fra79]，其中包含一个我们可以直接引用的结果。[Vol06] 中的论述或许可以作为该主题的良好入门。如果说在无边界情形下，用高阶算子扰动微分算子已经是一个并非平凡的主题，那么在存在边界时问题就更加复杂。例如，在我们的情形中，当 ν 趋于 0 时，对于 $P_{\omega,\nu}$ 我们有两个边界条件，但在 $\nu = 0$ 处只有一个。最高阶边界条件的消失，可能可以由边界层的存在来解释（即 $P_{\omega,\nu}$ 的核中集中在边界附近的函数），参见 [VL62]。这就是为什么当 ν 趋于 0 时，我们只能在正则性相对较低的空间中，对 $P_{\omega,\nu}$ 获得一致的先验估计，参见命题 5.1。然而，这些估计足以证明定理 1，因为我们可以使用附录 A 中证明的椭圆正则性结果。

注 1.3。值得一提的是，复变形方法不仅使 $P_{\lambda,0}$变为椭圆的，还改善了当 $P_{\lambda,\nu}$ 趋于 ν 0 时，对于$P_{\lambda,\nu}$ 在边界上的一点处满足狄利克雷和诺伊曼边界条件时，Shapiro–Lopatinskii 条件中出现的多项式$\widetilde{\Omega}$ 在 ν 趋于 0 时，该多项式有两个量级为 1 的根，以及两个量级为 $\nu^{-\frac{1}{2}}$的根。从[Fra79] 出发进行分析时，理解这些根至关重要（这与大小为 $\nu^{\frac{1}{2}}$的边界层的存在有关）。若在 $\widetilde{\Omega}$上进行研究，而非在 Ω 上，则会看到类似的现象，但边界的特征点处除外。在这种情况下，有一个大小为 1 的根，以及三个大小为 $\nu^{-\frac{1}{3}}$ 的根（这

可能导致更大的边界层）。请注意，这种现象只有在存在边界时才会出现，因此在[FW25]中不会出现。我们预计，在 Ω 上直接研究黏性极限时（若要获得 C^∞ 类别中的结果，这种做法很自然），这一注释将是造成主要困难的根源。

1.4. 论文结构。 我们首先讨论 Ω 的动力学和几何性质，以及它们与方程（1.1）的关系。特别地，我们回顾棋盘台球动力学的定义，并陈述定理 1˜和 2 在 §2.1中所需的 Ω 的性质。随后，我们将定理 2 中的曲面 Ω 构造为 Ω 的一个形变。我们先在 $\partial\Omega$ 上构造一个形变，见 §2.2 ，然后在 §2.3中将其扩展为整个区域的一个形变。

在 §3 中，我们回顾常系数微分算子在 $\mathbb{R}^2$ 上的作用在 $\mathbb{C}^2$ 中全实曲面上的定义，并证明，当 $\mathrm{Im}\,\omega \geq 0$ 和 ˜$\mathrm{Re}\,\omega$ 接近 λ 时（在定理 2 的设定下），算子 $P_{\omega,0}$ 在 Ω 上是椭圆的。

在 §4中，我们通过证明 定理 2 中的 $P_{\omega,0}$ 在本定理的 ω 值域内可逆，从而完成定理 2 的证明。这是论文中技术性最强的部分，我们关键依赖于 [DWZ25] 中的一项关于 Ω 的困难可逆性结果（参见该文献的引理 7.2）。

定理1 的证明见§5，更确切地说，见§5.2。证明基于˜的可逆性$P_{\omega,\ 0}$ 该结果在§4 中得到证明，以及对$P_{\omega,\ \nu}$ 的先验估计： $H_0^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$，当 $\nu > 0$ 趋于 0 时，这些估计是一致的。这些估计由 Frank [Fra79] 在§5.1中的工作推导得出。

本文有一个附录，其中给出了一个椭圆正则性结果的证明。我们未能在文献中找到这个关于边值问题的结果。

注意，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 和 $\lambda \in (0,1)$将在§2.1 中固定，并在全文中保持不变。

致谢。作者感谢 Maciej Zworski、Semyon Dyat- lov、Long Jin 和 Michel Rieutord 提供了许多有益的讨论。MJ 得到了法国政府“未来投资计划”（Investissements d’Avenir）项目的支持，该项目纳入法国2030，项目编号为 ANR-11-LABX-0020-01。JW´通过西蒙斯基金会的资助，获得在高等科学研究所的博士后职位。

2. Geometric and dynamical considerations

我们在本节开头回顾 §2.1 中的一些几何和动力学概念，这些概念来自[DWZ25]。特别地，我们回顾-单纯性以及莫尔斯–斯梅尔条件的定义；定理 1 和2需要用到这些定义。本节其余部分致力于构造定理2中的形变 Ω；该形变作为 Ω 的一族形变 $(\Omega_\tau)_{\tau\in[0,\tau_0)}$ 中的一个元素生成（即 $\Omega = \Omega_0$ 且 $\Omega = \Omega_\tau$，其中某个

小 $\tau > 0$）。Ω 的边界变形起着关键作用，我们将首先在§2.2中对其进行设计。然后，我们根据 ∂§2.3中 Ω 的形变推导出整个 Ω 的形变。

本节的主要结果是命题2.5 和2.9。它们足以~构造定理2中的区域 Ω，不过该定理的第(ii) 项要到§4才会证明。

2.1. 一般性说明。从现在起，固定一个边界为实解析的有界开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$。同时固定一个实解析的保向微分同胚$z: \mathbb{S}^1 \to \partial\Omega$，其中 $\mathbb{S}^1$ 的模型为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。为了陈述 λ-简单性和莫尔斯–斯梅尔条件，对于每个 $\omega \in (0,1) + i\mathbb{R}$，我们通过[6]在 $\mathbb{R}^2$ 上引入线性形式 $\ell^{\pm}_{\omega}$

$$\ell^{\pm}_{\omega}(x_1, x_2) := \pm\frac{x_1}{\omega} + \frac{x_2}{\sqrt{1-\omega^2}}.$$

我们对 Ω 和 λ所要求的第一个假设如下。

定义 2.1 ([DWZ25，定义 1。1])。令 $\lambda \in (0, 1)$。我们称 Ω 是 λ-简单的，如果和 ℓ^{-}_{λ} 在 $\partial\Omega$ 上的限制各自恰有两个临界点，且这些临界点均非退化。

注 2.2. 注意，如果存在一个 $\lambda \in (0,1)$，使得 Ω 是 λ-简单的，那么 $\partial\Omega$ 与圆微分同胚，因此 Ω 是单连通的。

从现在起，固定 $\lambda \in (0,1)$，并假设 Ω 是 λ-简单的。回顾[DWZ25 的 (1.3)]，存在两个反向不变映射 $\gamma^{\pm}_{\lambda}$ $\partial\Omega$，使得

$$\ell^{\pm}_{\lambda}(\gamma^{\pm}_{\lambda}(x)) = \ell^{\pm}_{\lambda}(x) \tag{2.1}$$

对每个 $x \in \partial\Omega$。注意，(2.1) 唯一确定了 $\gamma^{\pm}_{\lambda}$，前提是要求其光滑且不等于恒等映射：对每个 $x \in \partial\Omega$，我们有 $(x+\ker \ell^{\pm}_{\lambda}) \cap \partial\Omega = \{x, \gamma^{\pm}_{\lambda}(x)\}$。在特征点处 $\gamma^{\pm}_{\lambda}$ 的光滑性，可通过边界上的莫尔斯坐标（针对 $\ell^{\pm}_{\lambda}$ 的限制）看出，参见 [DWZ25，第 2 节。1]。在我们的背景下，甚至可以证明 $(\lambda, x) \mapsto \gamma^{\pm}_{\lambda}(x)$ 是实解析的，但我们不需要这一事实。

为了引入我们将要使用的莫尔斯–斯梅尔条件，先定义从 $\mathbb{S}^1$ 到 $\mathbb{S}^1$ 的保向微分同胚 $b = \gamma^{+}_{\lambda} \circ \gamma^{-}_{\lambda}$，称为国际象棋台球映射。

定义 2.3 ([DWZ25，定义 1。2])。我们称 λ 满足莫尔斯–斯梅尔条件，如果：

(i) Ω 是 λ-单的；(ii) b 至少有一个周期点；

[6]在我们考虑的 ω 值域内，$1-\omega^2$ 总是具有正实部，这意味着平方根有良好定义（使用在 $\mathbb{R}^*_+ + i\mathbb{R}$ 上且在 $\mathbb{R}^*_+$ 上为正的平方根分支）。

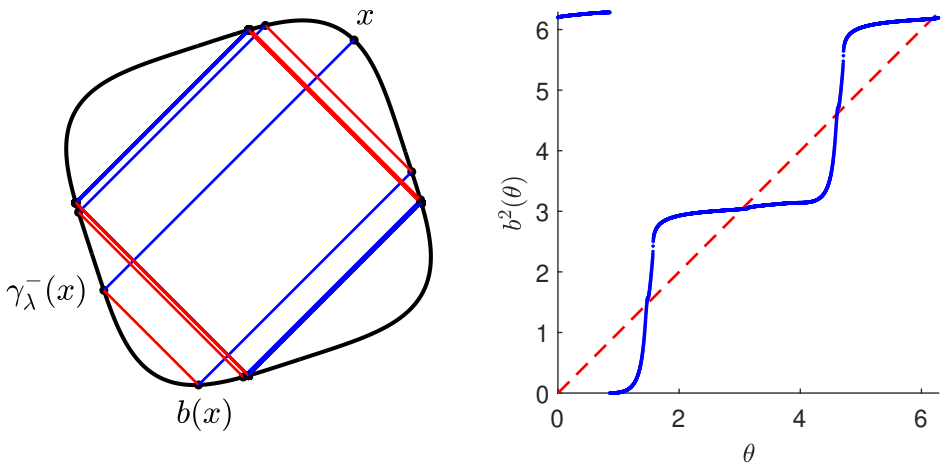

FIGURE 1. 数值计算得到的国际象棋台球轨道及国际象棋台球映射。这里取 Ω 为 $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 + x_2^4 < 1\}$ 逆时针旋转$\frac{\pi}{10}$，并且 $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$。左：从 $\partial\Omega$ 上一点出发的国际象棋台球轨道。右：在参数化 $\theta \mapsto (s_1|\cos(\theta + \frac{\pi}{10})|^{\frac{1}{2}}, s_2|\sin(\theta + \frac{\pi}{10})|^{\frac{1}{2}})$ 下，映射 b^2 的图，其中 $s_1 = \operatorname{sign}(\cos(\theta + \frac{\pi}{10}))$、$s_2 = \operatorname{sign}(\sin(\theta + \frac{\pi}{10}))$，且 $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$。数值结果表明 Ω 和 λ满足莫尔斯–斯梅尔条件。

(iii) 对于每个 $x \in \mathbb{S}^1$ 和 $n \geq 1$，如果 $b^n(x) = x$ 那么[7] $(b^n)'(x) \neq 1$。

从现在起，我们假设 λ 满足莫尔斯–斯梅尔条件。关于莫尔斯–斯梅尔条件以及 b 的动力学的详细讨论，请参阅 [DWZ25，§2]。关于国际象棋台球映射动力学的进一步讨论，可参阅[LBC23]。满足莫尔斯–斯梅尔条件的区域示例见[DWZ25，§2.4-2。5]作为对某些带角点区域的“圆化”处理。注意，如果一个具有 C^∞ 边界的区域满足莫尔斯–斯梅尔条件，那么我们可以用实解析曲线逼近其边界，从而得到一个具有实解析边界的例子。另见图1。

我们将用到以下引理，出自[DWZ25]。

引理 2.4 ([DWZ25，引理 2.1])。对于每个 $x \in \partial\Omega$，令 $\mu^\pm(x)$ 表示[8]$\ell_\lambda^\pm(z'(z^{-1}(x)))$的符号。对于每个 $x \in \partial\Omega$，有

$$\operatorname{sign}(\ell_\lambda^\mp(\gamma_\lambda^\pm(x) - x)) = \pm\mu^\pm(x), \tag{2.2}$$

[7]由于 $b^n(x) = x$，因此 b^n 在 x 处的导数是 1 维实向量空间$T_x\partial\Omega$上的自同态，因而可用一个实数表示。此外，$(b^n)'(x) > 0$，因为 b^n 是保定向的。[8]注意，若通过参数化 z将 $\partial\Omega$与 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 等同，则 $\ell_\lambda^\pm(z'(z^{-1}(x)))$ 就是 $\ell_\lambda^\pm$ 在 x处的导数。特别地，$\mu^\pm(x)$不依赖于参数化的选择。

$$\mu^{\pm}(\gamma_\lambda^{\pm}(x)) = -\mu^{\pm}(x). \tag{2.3}$$

此外，对于每个 $x \in \mathbb{R}^2$，有

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\ell_\omega^{\pm}(x)\right)_{|\omega=\lambda} = \frac{2\lambda^2-1}{2\lambda(1-\lambda^2)}\ell_\lambda^{\pm}(x) + \frac{1}{2\lambda(1-\lambda^2)}\ell_\lambda^{\mp}(x). \tag{2.4}$$

2.2. 边界变形。 如上所述，证明定理 2 的第一步是构造 边界 Ω 的一个形变。这由以下引理给出：

命题 2.5。存在一个定义在 $\partial\Omega$ 上的实解析向量场 X，使得由此定义在 $\partial\Omega$ 上的向量场 Y_+ 和 Y_- 为

$$Y_\pm(x) = X(x) - \mathrm{d}\gamma_\lambda^{\pm}(\gamma_\lambda^{\pm}(x)) \cdot X(\gamma_\lambda^{\pm}(x)),$$

对于 $x \in \partial\Omega$，它们均不为零，且分别为负向定向和正向定向。

下面说明如何根据命题 2.5 推导出 $\partial\Omega$ 在 $\mathbb{C}^2$ 中的形变。记 $(\Phi_\tau^X)_{\tau\in\mathbb{R}}$ 为向量场 X的流。由于 X 是实解析的，函数 $(\tau, x) \mapsto \Phi_\tau^X(x)$ 是从 $\mathbb{R}\times\partial\Omega$ 到 $\partial\Omega$ 的实解析函数 $\subseteq \mathbb{C}^2$ （例如参见 [Tes12, 定理 4.1]）。因此，该映射可从 $\mathbb{R}\times\partial\Omega$ 在 $\mathbb{C}\times(\partial\Omega)_{\mathbb{C}}$ 中的一个邻域全纯延拓至 $\mathbb{C}^2$。因此，当 $\tau_0 > 0$ 足够小时，我们可以定义映射Ξ：$(-\tau_0, \tau_0) \times \partial\Omega \to \mathbb{C}^2$，定义为[9]

$$\Xi(\tau, x) = \Phi_{i\tau}^X(x) \text{ for } (\tau, x) \in (-\tau_0, \tau_0) \times \partial\Omega. \tag{2.5}$$

我们来为这种形变的选择给出一个启发式论证（一个更实际的理由是，它使命题 2.9 成为可能，进而我们可以推出定理1和定理2）。研究边值问题的一种标准方法是约化到边界（参见例如 [H¨or07，第 XX]章）。[DWZ25], 采用的就是这种方法，它也将在 §4 中发挥作用。其思路是利用基本解，将 Ω 上关于椭圆线性偏微分算子 P 的边值问题，替换为 $\partial\Omega$ 上的一个（或一组）伪微分方程。新方程先验地更简单，因为 $\partial\Omega$ 是一个闭流形。然而，如果我们尝试将这种方法用于算子P_λ,0（它不是椭圆的），最终会得到 $\partial\Omega$ 上形如$\mathcal{C}u = f$ 的方程，其中 $\mathcal{C}$ 不是伪微分算子。事实上，$\mathcal{C}$ 的施瓦茨核在γ_λ^+ 和γ_λ^- 的图上有奇点（而伪微分算子的核只有在对角线上才有奇点），参见 [DWZ25，命题 4.15]。绕过这一困难的一个~自然想法是用复变形 $\partial\Omega$ 替换 $\partial\Omega$

[9]这里不必对向量场 X 积分，因为我们只关心 Ξ关于τ 的导数。因此，我们也可以用以下公式定义 Ξ：

$$\Xi(\tau, x) = z(z^{-1}(x) + i\tau\mathrm{d}z^{-1}(x) \cdot X(x)),$$

其中我们回顾一下，z： $\mathbb{S}^1 \to \partial\Omega$ 是一个实解析的保向微分同胚，并将 $\mathbb{S}^1$ 视为 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 的子集。

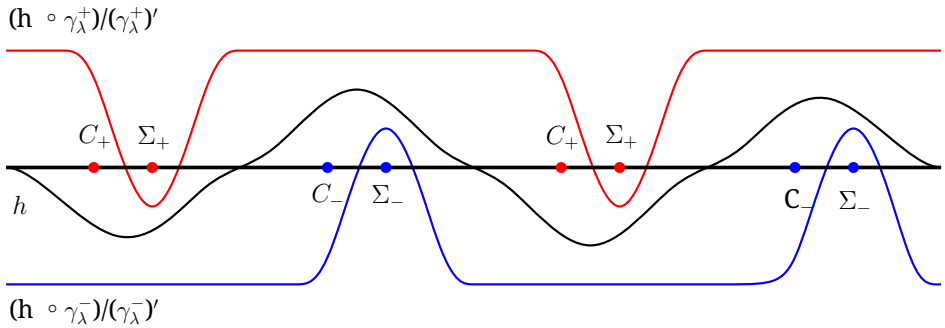

FIGURE 2. 函数 h 平凡化 $X = h(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}$ 以及平凡化 $(\gamma_\lambda^\pm)^*X$ 的函数示意图，其中我们通过参数化 z 将 $\partial\Omega$ 与 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 识别。这里，$C_\pm := \{\gamma_\lambda^\pm(\theta) = \theta\}$ 是特征点集，而 $\Sigma_\pm$ 是周期点集。

~ ~使得 $\partial\Omega \times \partial\Omega$ 不与（全纯延拓后的）γ_λ^+ 和 γ_λ^- 的图相交。利用泰勒公式很容易验证，当 τ 足够小但不为零时，形变 $\Xi(\tau, \partial\Omega)$ 具有这一性质。

注2.6. 本文的早期版本更广泛地使用了边界约化方法。当时我们只对边界进行形变，没有对整个区域进行形变。另一种方法也很有意思，尤其是它要求定义一个实解析伪微分算子的作用，该算子原本定义在 $\partial\Omega$ 上，却要作用于 $\partial\Omega$ 的复变形。我们最终选择了当前的方法，因为它在某种程度上更具内在性（我们直接处理方程本身，而不是将其约化到边界），而且最重要的是，它的技术性要低得多。

我们记 n 为 b 中周期点的共同最小周期（见[DWZ25，引理 2.4]），并用 Σ_+（分别用 Σ_-）表示 x 中满足（b）的周期点集合b^n。′（x）> 1（分别为（b^n）′（x）< 1。我们将用到以下引理。

引理 2.7. 设 U 和 V 是 $\partial\Omega$ 中分别包含 Σ_+ 和 Σ_- 的邻域。设 K_+和 K_- 分别是 $\partial\Omega \setminus \Sigma_-$ 和 $\partial\Omega \setminus \Sigma_+$的紧子集。存在一个整数$m_0$，使得对每个 $m \geq m_0$，都有

$$b^{-m}(K_+) \subseteq U \text{ and } b^m(K_-) \subseteq V.$$

证明。举例来说，我们证明当 m 足够大时，$b^m(K_-) \subseteq V$。由于 Σ_- 是吸引周期轨道的并集，我们可以找到 Σ_- 的一个邻域 $W \subseteq V$，使得$b(W) \subseteq W$。因此，我们只需证明对每个 $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \Sigma_+$，都存在 $m \geq 0$，使得 $b^m(x) \in W$（随后可通过紧致性论证得出结论）。

~ 设 $x \in \partial\Omega \setminus \Sigma_+$。设 $\pi\colon \mathbb{R} \to \partial\Omega$ 是 $\partial\Omega$ 的（光滑）万有覆盖。 ~ ~设 $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 b 的一个提升（即b 光滑，且我们有 $\pi \circ b = b \circ \pi$），并且

$\tilde{x} \in \mathbb{R}$ 是 x 的一个提升。设 x_0, x_1 是 $\mathbb{R}$ 中满足以下条件的两个点：$x_0 < \tilde{x} < x_1$，即 x_0 和 x_1 的投影是 b 的周期点，并且在 (x_0, x_1) 中不存在其他投影为周期点的点。由于莫尔斯–斯梅尔条件，b 的周期点是孤立的，因此这样的点确实存在。于是存在一个整数 k，使得[10] $\tilde{b}^n(x_0) - x_0 = \tilde{b}^n(x_1) - x_1 = k$。考虑由 $y_m = b^{mn}(\tilde{x}) - mk$ 定义的序列 $(y_m)_{m\geq 0}$ ˜ ˜。由于 b 是递增的，这是一列位于 (x_0, x_1) 中的点。此外，由于 (x_0, x_1) 中没有任何点投影为 b 的周期点，我们 ˜ ˜可以发现，对于每个 $y \in (x_0, x_1)$，都有 $b^n(y) - k < y$；或者对于每个 $y \in (x_0, x_1)$，都有 $b^n(y) - k > y$。因此，序列 $(y_m)_{m\geq 0}$ 是单调的，因而有极限。这意味着序列 $(b^{mn}(x))_{m\geq 0}$ 有极限，该极限必为 b 的一个周期点；又由于它不可能是 Σ_+ 的元素，我们发现，当 m 足够大时，$b^{mn}(x) \in W$。□

在下面的引理中，我们构造一个向量场的初步候选 X，它来自命题 2.5，之后我们会对其进行改进。在该引理的陈述中，我们使用以下记号

$$g^*Y(x) = \mathrm{d}g(x)^{-1} \cdot Y(g(x)) \text{ for } x \in \partial\Omega,$$

其中 $g: \partial\Omega \to \partial\Omega$ 是一个微分同胚，且 $Y \in \Gamma(T\partial\Omega)$。注意，如果 g_1 和g_2 是 Ω 上的两个微分同胚 ∂，那么链式法则意味着 $(g_1 \circ g_2)^*Y = g_2^*(g_1^*Y)$。利用 $\gamma_\lambda^\pm$ 是对合这一事实，我们得到命题 2.5 中的向量场 $Y_\pm$ 由下式定义 $Y_\pm = X - (\gamma_\lambda^\pm)^*X$。

引理 2.8。存在 $X_0 \in \Gamma(T\partial\Omega)$ 和一个整数 $N \geq 1$，使得向量场$X_0 - (b^N)^*X_0$ 处处不为零，且为正向定向。

证明。在此证明中，我们使用直接参数化 $z: \mathbb{S}^1 \to \partial\Omega$，将 $\partial\Omega$ 与$\mathbb{S}^1$对应起来。略微滥用一下记号，我们对定义在$\mathbb{S}^1$ 上和定义在 $\partial\Omega$上的对象使用相同的记号，例如将 b 视为从 $\mathbb{S}^1$ 到自身的映射（特别是，b在任意一点处的导数可对应为一个正实数）。

设 U_+ 和 U_- 分别是 Σ_+ 和 Σ_- 的邻域，使得 t

$$\sup_{\theta\in U_+} (b^{-n})'(\theta) < 1 \text{ and } \sup_{\theta\in U_-} (b^n)'(\theta) < 1.$$

此外，我们可以假设 U_+ 和 U_- 分别在 b作用下后向不变和前向不变。于是，设 V_+ 和 V_- 分别是 Σ_+ 和 Σ_-的开邻域，且分别相对紧包含于 U_+ 和 U_- 中。根据引理 2.7，我们可以找到一个足够大的$N \geq 1$，使得 $b^N(\mathbb{S}^1 \setminus V_+) \subseteq V_-$且 $b^{-N}(\mathbb{S}^1 \setminus V_-) \subseteq V_+$。此外，我们可以假设 N 是 n 的倍数，即对于某个整数 $p \geq 1$，有 $N = pn$。于是，设 h_0 是一个光滑函数，其支集包含于 $U_+ \cup U_-$，并且满足

- $|h_0| \leq 1$;

[10]由于 x_0和 x_1的投影是周期点，我们知道 $\tilde{b}^n(x_0) - x_0$和 $\tilde{b}^n(x_1) - x_1$都是整数，而且它们必定相同，否则就会与 b 是单射这一事实矛盾。

- $h_0 \geq 0$ 关于 U_+ 和 $h_0 \leq 0$ 关于 U_-;
- $h_0 \equiv 1$ 在 V_+ 和 $h_0 \equiv -1$ 在 V_-。

于是我们定义 $X_0 = h_0 \frac{\partial}{\partial \theta}$ 并注意到

$$X_0 - (b^N)^*(X_0) = \left(h_0 - \frac{h_0 \circ b^N}{(b^N)'} \right) \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

因此，我们要证明函数 $h_0 - h_0 \circ b^N / (b^N)'$ 严格为正。

我们区分几种情况。如果 $\theta \notin V_+$，那么 $b^N(\theta) \in V_-$，因此 $h_0(b^N(\theta)) = -1$。如果 $\theta \notin U_-$，那么 $h_0(\theta) \geq 0$，因此 $h_0(\theta) - h_0(b^N(\theta))/(b^N)'(\theta) \geq (b^N)'(\theta)^{-1} > 0$。如果 $\theta \in U_-$，那么 $h_0(\theta) - h_0(b^N(\theta))/(b^N)'(\theta) \geq -1 + (b^N)'(\theta)^{-1}$。但是，由于 $\theta \in U_-$，集合 U_- 在 b^n下前向不变，b^n 的导数在 U_- 上处处严格小于 1，且N是 n的倍数，我们得到 $(b^N)'(\theta) < 1$，因此 $h_0(\theta) - h_0(b^N(\theta))/(b^N)'(\theta) > 0$。

接下来需要处理 $\theta \in V_+$ 的情形。在这种情形下，我们有 $h_0(\theta) = 1$。如果$b^N(\theta) \notin U_+$，那么 $h_0(b^N(\theta))$ 非正，因此 $h_0(\theta) - h_0(b^N(\theta))/(b^N)'(\theta) \geq 1 > 0$。如果 $b^N(\theta) \in U_+$，那么按照前一种情形的做法（此外利用 $(b^N)'(\theta) = (b^{-N})'(b^N(\theta))^{-1}$），我们得到 $(b^N)'(\theta) > 1$，因此 $h_0(\theta) - h_0(b^N(\theta))/(b^N)'(\theta) \geq 1 - (b^N)'(\theta)^{-1} > 0$。□

通过对 X_0 引理 2.8中的向量场取平均，我们证明命题 2.5。

命题 2.5的证明。令 $X_1 = \sum_{k=0}^{N-1} (b^k)^* X_0$ 和 $X = 2X_1 + (\gamma_\lambda^+)^* X_1 + (\gamma_\lambda^-)^* X_1$，其中 X_0 是引理 2.8中的向量场。注意到 $X_1 - b^* X_1 = X_0 - (b^N)^* X_0$是直接定向的。现在，我们来计算

$$\begin{aligned} X - (\gamma_\lambda^+)^* X &= 2X_1 + (\gamma_\lambda^+)^* X_1 + (\gamma_\lambda^-)^* X_1 - 2(\gamma_\lambda^+)^* X_1 - X_1 - (b^{-1})^* X_1 \\ &= X_1 - (\gamma_\lambda^+)^* X_1 - (b^{-1})^* X_1 + (\gamma_\lambda^-)^* X_1 \\ &= (\gamma_\lambda^-)^* (X_1 - b^* X_1) - (b^{-1})^* (X_1 - b^* X_1). \end{aligned}$$

由于 $X_1 - b^* X_1$ 是正向定向的，b 是保向的，而 γ_λ^- 是反向的，因此 $Y_+ = X - (\gamma_\lambda^+)^* X$ 是负向定向的。类似地，我们计算

$$\begin{aligned} X - (\gamma_\lambda^-)^* X &= X_1 + (\gamma_\lambda^+)^* X_1 - (\gamma_\lambda^-)^* X_1 - b^* X_1 \\ &= (X_1 - b^* X_1) - (\gamma_\lambda^-)^* (X_1 - b^* X_1), \end{aligned}$$

并且如上所述，我们得到 $Y_- = X - (\gamma_\lambda^-)^* X$ 是正向定向的。

按照我们对 X 的定义，它先验上仅是 C^∞。然而，由于我们希望 X 具备的性质是开性质（在圆上的一致收敛拓扑中），我们可以用一个仍满足这些性质的实解析向量场来逼近 X。□

2.3. 区域的复形变。 现在我们希望构造一个区域 Ω 的形变族 $(\Omega_\tau)_{\tau\in[0,\tau_0)}$ ，使其在 $\mathbb{C}^2$ 内延伸前一小节中设计的边界变形（见 (2.5)）。为了陈述我们将要构造的区域形变所具备的性质，先引入微分算子

$$L_\lambda^\pm = \frac{1}{2}\left(\pm\lambda\partial_{x_1} + \sqrt{1-\lambda^2}\partial_{x_2}\right). \tag{2.6}$$

这些是一次常系数微分算子，因此可与 $\mathbb{R}^2$ 上的常向量场等同。我们将它们与向量 $_1$ $_2(\pm\lambda, \sqrt{1-\lambda^2})$ 等同。按照这一约定，对于每个 $x \in \mathbb{R}^2$，我们有

$$x = \ell_\lambda^+(x)L_\lambda^+ + \ell_\lambda^-(x)L_\lambda^-.$$

族 $(\Omega_\tau)_{\tau\in[0,\tau_0)}$ 将由 $\Omega_\tau = \Xi(\tau, \Omega)$ 给出，其中 Ξ 到 Ω 的延拓由以下结果给出。

命题 2.9。 存在 $\tau_0 > 0$ ，使函数 Ξ 在 (2.5) 可实解析延拓至 $(-\tau_0, \tau_0) \times \Omega$ ，并具有以下性质：

(i) $\Xi(0, x) = x$ 对每个 $x \in \Omega$
均成立；(ii) 对每个 $\overline{x} \in \Omega$，我们有[11]：

$$\ell_\lambda^\pm\left(\frac{\partial L_\lambda^\mp \Xi}{\partial\tau}(0, x)\right) \in i\mathbb{R}_+^*.$$

注 2.10. 命题 (ii)中的条件 2.9 可理解为一个横截性条件。事实上，当 $\tau > 0$ 足够小时，带边界曲面 $\Omega_\tau = \Xi(\tau,\Omega)$ 与双曲算子 $P_{\lambda,0}$所对应的两个传播方向横截：复直线 $\ker \ell_\lambda^+$ 和 $\ker\ell_\lambda^-$ （其方向分别由 L_λ^- 和 L_λ^+ 给出）。这最终将推出 $P_{\lambda,0}$ 在 Ω_τ 上当 $\tau > 0$足够小时具有椭圆性（见引理 3.1）。

为了粗略理解 (ii) 与 $P_{\lambda,\ 0}$ 在 Ω_τ上的椭圆性之间的关系，回顾 [DWZ25， （4.3）] 可知 $P_{\lambda,\ 0} = 4L_\lambda^+L_\lambda^-$ 。因此，$P_{\lambda,\ 0}$ 是一个波算子，其传播方向由 L_λ^+ 和 L_λ^- 给出。复变形消除了这些方向，从而使算子变为椭圆算子。

我们将由(ii) 推得 ℓ_λ^+ 和 ℓ_λ^- 限制在 Ω_τ 上诱导出从 Ω_τ 到其像（它们是 $\mathbb{C}$的子集）的微分同胚，见引理 4.7。

注 2.11. 由 (2.5) 可知，若 $x \in \partial\Omega$ 且 τ 足够小，则 $\Xi(\tau, x) \in (\partial\Omega)_{\mathbb{C}}$。事实上，若 φ: $U \to \mathbb{R}$ 是在 x 于$\mathbb{R}^2$ 的一个邻域上定义的实解析淹没映射，且满足 $U \cap \partial\Omega$, $= \{\varphi = 0\}$ 那么 φ 有一个全纯延拓 $\tilde{\varphi} : W \to \mathbb{C}$

[11]算子 $L_\lambda^\pm$ 作用于 Ξ ，其中 τ 变量固定。

在某些邻域 W of x in $\mathbb{C}^2$上。此外，至多取 W 更小，我们有 $(\partial\Omega)_{\mathbb{C}} \cap W = \{\tilde{\varphi} = 0\}$。对于一个足够小的实数 τ，有 $\Phi_\tau^X(x) \in V \cap \partial\Omega$，因此$\tilde{\varphi}(\Phi_\tau^X(x)) = 0$。于是由解析延拓原理可知，对于足够小的 τ，我们也有 $\tilde{\varphi}(\Phi_{i\tau}^X(x)) = 0$，即 $\Xi(\tau, x) \in (\partial\Omega)_{\mathbb{C}}$。

注 2.12。 注意，在命题 2.9 中，我们能够构造 Ω 的实解析变形。这种正则性有时很方便，例如参见备注 2.11 以及引理 4.4证明的开头。我们还利用了 $\Omega_\tau = \Xi(\tau, \Omega)$ 是一个实解析曲面这一事实，从而可以应用实解析椭圆正则性结果，例如 [LM70, 第 8 章，定理 ´eor`eme 1。2]或 [MJN57]。不过，我们猜想，通过利用 Ω 的亚解析流形结构，即使没有 Ξ的实解析性质，也可以进行研究$_\tau$。

备注 2.13。我们也可以考虑 Ω_τ，其中 τ取较小的负值。这样便能够将逆算子 P_ω^{-1}，0 从实轴下方延拓。也就是说，在定理 2 的第 (ii) 项中，子集 $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i(-\delta, +\infty)$ 将替换为 $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i(-\infty, \delta)$。一种看法是注意到，按照我们的构造，有 $\Omega_{-\tau} = \iota(\Omega_\tau)$，其中 $\iota : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 表示复共轭（逐坐标进行）。因此，在 $H_0^1(\Omega_\tau)$（分别为 $H^{-1}(\Omega_\tau)$）与$H_0^1(\Omega_{-\tau})$（分别为 $H^{-1}(\Omega_{-\tau})$）之间存在一个由 $u \mapsto \bar{u} \circ \iota$给出的反线性同构。该同构将作用于 Ω_τ 上的 $P_{\omega,\nu}$ 与作用于 $\Omega_{-\tau}$ 上的 $P_{\bar{\omega},-\nu}$ 共轭（关于常系数微分算子在 $\mathbb{C}^2$全实曲面上的作用定义，见 §3）。

注意，从 Ω_τ 到 $\Omega_{-\tau}$ 会改变 ν的符号。因此，我们不能在定理 1的证明中使用 $\Omega_{-\tau}$。将会失效的部分是椭圆性估计引理5.3的证明。

命题 2.9的证明。 我们将通过以下公式定义 Ξ的延拓

$$\Xi(\tau, x) = g_+(\tau, x)L_\lambda^+ + g_-(\tau, x)L_\lambda^- \tag{2.7}$$

其中，g_+ 和 g_- 是待定义的复函数。

例如，我们将构造 g_+；函数 g_- 的构造类似，只需在下文的构造中交换相关符号。对于 $x \in \Omega$，由 λ-简单性条件可知，直线 $\{y \in \mathbb{R}^2 : \ell_\lambda^+(y) = \ell_\lambda^+(x)\}$ 与 $\partial\Omega$ 的交集由两点 $\pi_+^{\text{down}}(x)$ 和 $\pi_+^{\text{up}}(x)$ 构成（两点可能重合），并且 $\ell_\lambda^-(\pi_+^{\text{down}}(x)) \le \ell_\lambda^-(\pi_+^{\text{up}}(x))$。注意，当且仅当 x 是 $\partial\Omega$ 上的一个点，且 $\{y \in \mathbb{R}^2 : \ell_\lambda^+(y) = \ell_\lambda^+(x)\}$ 与 $\partial\Omega$ 相切时，点 $\pi_+^{\text{up}}(x)$ 和 $\pi_+^{\text{down}}(x)$ 才重合。我们用公式定义 g_+

$$g_+(\tau, x) = \begin{cases} \ell_\lambda^+(\Xi(\tau, \pi_+^{\text{down}}(x))) + \ell_\lambda^-(x - \pi_+^{\text{down}}(x))\frac{\ell_\lambda^+(\Xi(\tau,\pi_+^{\text{up}}(x)) - \Xi(\tau,\pi_+^{\text{down}}(x)))}{\ell_\lambda^-(\pi_+^{\text{up}}(x) - \pi_+^{\text{down}}(x))}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } \pi_+^{\text{up}}(x) \neq \pi_+^{\text{down}}(x), \\ \ell_\lambda^+(\Xi(\tau, x)), \qquad \text{if } \pi_+^{\text{up}}(x) = \pi_+^{\text{down}}(x). \end{cases}$$

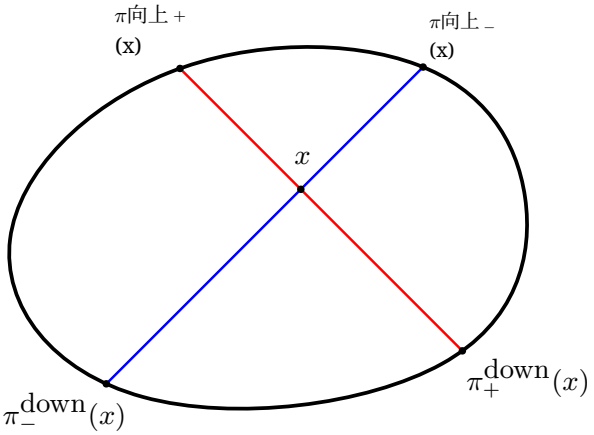

FIGURE 3. 用于 Ξ延拓的映射 $\pi_{\pm}^{\text{up/down}}$ 。

函数 g_- 的定义类似，只需交换指标和指数“+”与“−”（定义见图 3 ）即可得到 $\pi_-^{\text{up/down}}$ 。定义g_+ 的动机如下：我们通过沿 L_λ^- 所给定的方向进行插值，扩展边界（即给定边界）上的定义。

我们来证明，当 τ_0 >0足够小时，函数 g_+ 在（$-\tau_0$， τ_0） × Ω上是实解析的。令$x_0 \in \Omega$。若 x_0 不是 ∂Ω上的一个点，且在该点 ℓ_λ^+ 的核不与 ∂Ω相切，则由隐函数定理可知，π_+^{up} 和 π_+^{down}在 x_0的某个邻域上定义了实解析函数，从而 g_+ 在（$-\tau_0$，τ_0） × {x_0}的某个邻域上是实解析的。

现在考虑点 $x_0 \in \partial\Omega$满足 $T_{x_0}\partial\Omega$ = 核ℓ_λ^+ 的情形。由于 ℓ_λ^+ 的核是由 L_λ^- 张成的，我们发现存在 x_0 的一个邻域 U，使得ℓ_λ^- 将 $U \cap \partial\Omega$微分同胚地映射到其像 I。特别地，存在一个实解析函数 f： $I \to \mathbb{R}$，使得对于每个 $x \in \partial\Omega \cap U$，都有 $\ell_\lambda^+(x)$ = $f(\ell_\lambda^-(x))$。这尤其意味着

$$\partial\Omega \cap U = \left\{x_0 + uL_\lambda^- + f(u)L_\lambda^+ : u \in I\right\}.$$

根据 λ-简单性假设， f 在 $\ell_\lambda^-(x_0)$ 处有一个非退化临界点，因此存在 $\alpha \in \mathbb{R}^*$ 和一个实解析函数 $w: I \to \mathbb{R}$ ，使得 $w(\ell_\lambda^-(x_0)) = 0$且 $w'(\ell_\lambda^-(x_0)) = 1$，并且 $f(u)$ = $\ell_\lambda^+(x_0) + \alpha w(u)^2$（根据一维莫尔斯引理）。注意， α 的符号取决于 $\ell_\lambda^+(x_0)$ 是 ℓ_λ^+ 在 Ω 上的全局最小值还是最大值。因此，当 $x \in \Omega$ 接近 x_0时，数值 $\ell_\lambda^+(x - x_0)$ /α 非负且接近 0。因此，对于这样的 x ，我们有

$$\pi_+^{\text{up/down}}(x) = x_0 + w^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{\ell_\lambda^+(x-x_0)}{\alpha}}\right)L_\lambda^- + \ell_\lambda^+(x)L_\lambda^+.$$

事实上，右端的公式定义了 ∂Ω 上与 x 具有相同像的点 ℓ_λ^+ 。

接下来引入实解析函数

$$k(\tau,u)=\ell_\lambda^+(\Xi(\tau,x_0+w^{-1}(u)L_\lambda^-+(\alpha u^2+\ell_\lambda^+(x_0))L_\lambda^+))$$

并注意到，当 $x\neq x_0$ 接近 x_0 时，我们有

$$g_+(\tau,x)=\ell_\lambda^-(x)a_1\left(\tau,\frac{\ell_\lambda^+(x-x_0)}{\alpha}\right)+a_2\left(\tau,\frac{\ell_\lambda^+(x-x_0)}{\alpha}\right),$$

其中

$$a_1(\tau,u)=\frac{k(\tau,\sqrt{u})-k(\tau,-\sqrt{u})}{w^{-1}(\sqrt{u})-w^{-1}(-\sqrt{u})},$$

and

$$a_2(\tau,u)=\frac{k(t,-\sqrt{u})w^{-1}(\sqrt{u})-k(\tau,\sqrt{u})w^{-1}(-\sqrt{u})}{w^{-1}(\sqrt{u})-w^{-1}(-\sqrt{u})}.$$

因此，我们只需证明 a_1 和 a_2 在 $(0,0)$ 的某个邻域内是实解析的。

将表达式 $k(\tau,\sqrt{u})-k(\tau,-\sqrt{u})$ 中的 k 按其第二个自变量展开成幂级数，并注意到 $k(\tau,\sqrt{u})$ 和 $k(\tau,-\sqrt{u})$ 中 $\sqrt{u}$ 的偶次幂项彼此抵消。因此，剩下的是 $\sqrt{u}$ 与 τ 和 u的一个解析函数的乘积。类似地， $w^{-1}(\sqrt{u})-w^{-1}(-\sqrt{u})$ 是 $\sqrt{u}$ 与 u的一个解析函数的乘积。因此，在 a_1的定义中，分子和分母中的 $\sqrt{u}$ 相互抵消，由此 a_1 是解析函数的商。当 u 较小时，分母不为零，因为 $(w^{-1})'(0)=1$，由此可知 a_1 是实解析的。

现在证明 a_2 是解析的。将幂级数展开明确写出：

$$k(\tau,z)=\sum_{k\geq 0}b_k(\tau)z^k \text{ and } w^{-1}(z)=\sum_{k\geq 0}c_kz^k$$

然后注意到

$$\begin{aligned}k(\tau,-\sqrt{u})w^{-1}(\sqrt{u})-k(\tau,\sqrt{u})w^{-1}(-\sqrt{u})&\\=\sum_{k_1,k_2\geq 0}b_{k_1}(\tau)c_{k_2}((-1)^{k_1}-(-1)^{k_2})\sqrt{u}^{k_1+k_2}.&\end{aligned}$$

当 k_1+k_2 为偶数时，则 $(-1)^{k_1}=(-1)^{k_2}$。因此，

$$k(\tau,-\sqrt{u})w^{-1}(\sqrt{u})-k(\tau,\sqrt{u})w^{-1}(-\sqrt{u})$$

是 $\sqrt{u}$ 与关于 τ 和 u 的一个解析函数的乘积。因此 a_2 是解析的（分母的处理方式与 a_1 相同）。

由此可知， g_+ 在 Ω 中去掉 $\{x_0\}$后的 x_0 的小邻域上是解析的，并且可以解析延拓到整个邻域。接下来需要验证，该延拓在 x_0 处的值与根据我们的定义得到的 $g_+(\tau,x_0)$的值一致。由连续性可知，当 x 沿着 Ω 趋近于 x_0 时，结论成立。

我们证明了 g_+ 是解析的，因此公式 (2.7) 定义了一个实解析函数。此外，由于当 $x \in \partial\Omega$ 时，$g_+(\tau, x) = \ell_\lambda^+(\Xi(\tau, x))$，我们发现 (2.7) 确实为 Ξ定义了一个延拓。由于当 $x \in \partial\Omega$ 时，$\ell_\lambda^+(\Xi(0, x)) = \ell_\lambda^+(x)$，我们发现当 $x \in \Omega$ 时，$g_+(0, x) = \ell_\lambda^+(x)$，于是 (i) 成立（本段中，隐含地假设对 g_-也有对称的结果）。

还需证明(ii)。如上所述，我们只讨论“+”情形。首先注意到 $\ell_\lambda^+(L_\lambda^-\Xi) = L_\lambda^- g_+$，因此对于 $x \in \Omega$，我们有

$$\begin{aligned} \ell_\lambda^+\left(L_\lambda^- \frac{\partial \Xi}{\partial \tau}(0, x)\right) &= \frac{\partial L_\lambda^- g_+}{\partial \tau}(0, x) \\ &= i\frac{\ell_\lambda^+(X(\pi_+^{\mathrm{up}}(x)) - X(\pi_+^{\mathrm{down}}(x)))}{\ell_\lambda^-(\pi_+^{\mathrm{up}}(x) - \pi_+^{\mathrm{down}}(x))}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

对关系式 $\ell_\lambda^+(y) = \ell_\lambda^+(\gamma_\lambda^+(y))$ 关于 X 求导，可得

$$\ell_\lambda^+(\mathrm{d}\gamma_\lambda^+(y) \cdot X(y)) = \ell_\lambda^+(X(y))$$

对于每个 $y \in \partial\Omega$。还要注意到 $\pi_+^{\mathrm{down}}(x) = \gamma_\lambda^+(\pi_+^{\mathrm{up}}(x))$。因此，(2.8) 变为 es

$$\begin{aligned} \ell_\lambda^+\left(L_\lambda^- \frac{\partial \Xi}{\partial t}(0, x)\right) &= i\frac{\ell_\lambda^+(X(\pi_+^{\mathrm{up}}(x)) - \mathrm{d}\gamma_\lambda^+(\pi_+^{\mathrm{down}}(x)) \cdot X(\pi_+^{\mathrm{down}}(x)))}{\ell_\lambda^-(\pi_+^{\mathrm{up}}(x) - \pi_+^{\mathrm{down}}(x))} \\ &= i\frac{\ell_\lambda^+(Y_+(\pi_+^{\mathrm{up}}(x)))}{\ell_\lambda^-(\pi_+^{\mathrm{up}}(x) - \pi_+^{\mathrm{down}}(x))}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

回顾引理 2.4 和命题 2.5，可知 (2.9) 中的分子和分母均具有符号 $-\mu^+(\pi_+^{\mathrm{up}}(x))$。由此可得，对于满足 $\ell_\lambda^+(L_\lambda^- \frac{\partial \Xi}{\partial t}(0, x)) \in i\mathbb{R}_+^*$的每个 $x \in\Omega$，$\mu^+(\pi_+^{\mathrm{up}}(x)) \neq 0$。

Ω 中恰有两个点满足 $\mu^+(\pi_+^{\mathrm{up}}(x)) = 0$。若 x 是这样的一个点，则 $x \in \partial\Omega$，且 $x + \ker\ell_\lambda^+$ 与 $\partial\Omega$ 相切，因此根据连续性

$$\ell_\lambda^+\left(L_\lambda^- \frac{\partial \Xi}{\partial t}(0, x)\right) = i \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \partial\Omega}} \frac{\ell_\lambda^+(Y_+(y))}{\ell_\lambda^-(y - \gamma_\lambda^+(y))}.$$

由 λ-简单性假设可知，在 x处，该极限中的分子和分母都以 1 阶消失，因此极限非零（并且由连续性可知为正），命题的证明至此完成。注意，我们还得到$L_\lambda^+ g_-$ 的取值位于 $i\mathbb{R}_+^*$ 中，因为 Y_-（来自命题 2.5）是正向定向的，而 Y_+ 是负向定向的，并且在引理–”情形中还多出一个负号2.4。这两个符号彼此抵消，因此我们得到 $L_\lambda^+ g_-$ 和 $L_\lambda^- g_+$ 的虚部具有相同的符号。□

3. Action of constant coefficient differential operators on the deformed domain

如上所述，对于某个足够小的 $\tau > 0$，我们将在带边界曲面 $\Omega_\tau = \Xi(\tau, \Omega)$ 上进行讨论，其中 Ξ 在（2.5）和命题 2.9 中定义。在 §4 中，将 Ξ 延拓为 $M \times (-\tau_0, \tau_0)$ 上的实解析函数会很方便，其中 $\tau_0 > 0$ 很小，而 M 是 $\mathbb{R}^2$中 Ω 的一个开邻域。M 的具体选取将在引理 4.4 中确定。由于 $\Xi(0, \cdot)$ 是恒等映射，我们看到，如果 M 和 τ 足够小，那么 $\Xi(\tau, \cdot)$ 会诱导出 $\mathbb{C}^2$ 中 $\overline{M}$ 的一个邻域的实解析嵌入。我们将 M 在该嵌入下的像记为 M_τ，并将 Ω 的像记为 Ω_τ。只要 τ 足够小，M_τ就是全实的，也就是说，对于每个 $x \in M_\tau$，都有 $\mathbb{C}^2 = T_x M_\tau \oplus i T_x M_\tau$。

我们的目标是研究作用于 Ω_τ 上的算子 $P_{\omega,\nu}$。下面回顾如何定义这一作用。设 A 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个 $m \in \mathbb{R}$ 阶常系数微分算子。写作

$$A = \sum_{p+q \le m} a_{p,q} \frac{\partial^{p+q}}{\partial x_1^p \partial x_2^q}$$

我们可以通过公式定义作用于 $\mathbb{C}^2$ 上的微分算子 $\widetilde{A}$

$$\widetilde{A} = \sum_{p+q \le m} a_{p,q} \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q}$$

其中，对于 $j = 1$，全纯导数 $\partial/\partial z_j$ 在 $\mathbb{C}^2$ 的坐标 $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$ 下由公式定义

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

现在，若 $u \in C_c^\infty(M_\tau)$，由于 M_τ 是全实的，存在 $\tilde{u} \in C_c^\infty(\mathbb{C}^2)$，使得 $\tilde{u}_{|M_\tau} = u$ 且 $\overline{\partial}\tilde{u}$ 在 M_τ 上无穷阶消失。我们称 $\tilde{u}$ 是 u 的几乎解析延拓（例如参见 [Zwo12, 定理 3，6] 关于 $\tilde{u}$ 的存在性）。于是我们可以定义 A 在 u 上的作用：

$$Au := (\widetilde{A}\tilde{u})_{|M_\tau}.$$

很容易[12] 验证，结果不依赖于所选的 $\tilde{u}$。注意，如果M_τ 包含在 $\mathbb{R}^2$ 之内（当 $\tau = 0$ 时即如此），那么该定义与 A的原始定义一致。

[12]实际上，无需借助几乎解析延拓，也可以定义 A 在 M_τ 上的作用。由于 M_τ 是全实的，若 $u \in C^\infty(M_\tau)$，则在 M_τ 处存在唯一的$\mathbb{C}^2$中函数的喷射，记作 U，它满足柯西–黎曼方程，且其在 M_τ 上的限制是 u的喷射。然后，我们可以将 A 应用于 U，并在 M_τ上计算结果。注意，当 u 具有紧支撑时，$\tilde{u}$ 只需通过对 U进行博雷尔求和即可得到。

在 $M \subseteq \mathbb{R}^2$ 上而非 M_τ 上进行讨论会更方便。我们将使用参数化 $\Xi(\tau,\cdot)$，以 M 的坐标表示作用于 M_τ 上的算子。令 $A^{(\tau)}$ 表示定义在 M 上的算子，其定义如下：

$$A^{(\tau)}u = A(u \circ \Xi(\tau,\cdot)^{-1}) \circ \Xi(\tau,\cdot)$$

关于 $u \in C^\infty(M)$。因此，$A^{(\tau)}$ 就是在由$\Xi(\tau,\cdot)$给出的坐标中，将 A 作用于 M_τ。令 a 为 A的齐次主符号：

$$a(\xi) = i^m \sum_{p+q=m} a_{p,q}\xi_1^p\xi_2^q.$$

$A^{(\tau)}$ 的齐次主符号 $a^{(\tau)}$ 由公式[13]给出

$$a^{(\tau)}(x,\xi) = a({}^tD_x\Xi(\tau,x)^{-1}\xi) \text{ for } (x,\xi) \in M \times \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

我们尤其关注$A = P_{\omega,\,0}$的情形。注意，若 $\omega \in (0,1)$，则$P_{\omega,\,0}$ 的符号$p_{\omega,\,0}$ 由[14]给出

$$p_{\omega,0}(\xi) = -4\xi(L_\omega^+)\xi(L_\omega^-),$$

其中 $L_\omega^\pm$ 由（2.6）定义，其中 λ 替换为 ω。由克莱姆公式可得

$$D_x\Xi(\tau,x)^{-1}L_\omega^\pm = \frac{1}{\det(D_x\Xi(\tau,x))}\left(\ell_\omega^\mp(D_x\Xi(\tau,x)L_\omega^\mp)L_\omega^\pm - \ell_\omega^\mp(D_x\Xi(\tau,x)L_\omega^\pm)L_\omega^\mp\right).$$

因此，（3.1）意味着

$$\begin{aligned}
&\frac{\det(D_x\Xi(\tau,x))^2}{4}p_{\omega,0}^{(\tau)}(x,\xi)\\
&= -\left(\ell_\omega^-(L_\omega^-\Xi(\tau,x))\ell_\omega^+(L_\omega^+\Xi(\tau,x)) + \ell_\omega^-(L_\omega^+\Xi(\tau,x))\ell_\omega^+(L_\omega^-\Xi(\tau,x))\right)\xi(L_\omega^+)\xi(L_\omega^-)\\
&\qquad + \ell_\omega^-(L_\omega^-\Xi(\tau,x))\ell_\omega^+(L_\omega^-\Xi(\tau,x))\xi(L_\omega^+)^2\\
&\qquad + \ell_\omega^+(L_\omega^+\Xi(\tau,x))\ell_\omega^-(L_\omega^+\Xi(\tau,x))\xi(L_\omega^-)^2,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

对 $\omega \in (0,1)$。

为了证明定理 1 和2，我们需要为符号 $p_{\omega\,0}^{(\tau)}$,确立精确的椭圆性性质。

[13]在此公式中，$D_x\Xi(\tau,x)$ 表示映射 $y \mapsto \Xi(\tau,y)$ 在 $y = x$ 处的导数，我们将其视为一个具有复系数的可逆矩阵。要验证该公式，可以注意到，我们对微分算子作用于 M_τ 的定义与微分算子的乘法可交换。因此，只需对 0 阶和 1 阶算子证明即可，这不过是应用链式法则和定义。[14]这里，对于 $\xi = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{C}^2$ 和 $x = (x_1,x_2)$，其中 $\mathbb{C}^2$，我们写作 $\xi(x) = \xi_1x_1 + \xi_2x_2$，这与将 ξ 解释为余向量是一致的。

引理 3.1. 存在 $\tau_0 > 0$、$\delta > 0$ 和一个常数 $C_0 > 0$，使得对于每个 $x \in \Omega$、$\xi \in \mathbb{R}^2$、$\tau \in [0, \tau_0)$ 以及 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i[0, +\infty)$，都有：

$$\operatorname{Im} p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi) + C_0\tau |\operatorname{Re} p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi)| \geq C_0^{-1}(\tau + \operatorname{Im}\omega)|\xi|^2.$$

注 3.2. 引理 3.1 是关于 $p^{(\tau)}_{\omega\,0}$ 的椭圆性估计，（当 $\tau > 0$ 或 $\operatorname{Im}\omega > 0$ 时），并且有更精确的结论：该符号的值域包含于

$$\left\{ re^{i\theta} : r \in \mathbb{R}_+, \theta \in [-C_1\tau, \pi + C_1\tau] \right\}$$

对于某个 $C_1 > 0$。

引理 *3.1* 的证明。将 $\omega = \omega_R + i\omega_I$ 分解为 ω 的实部和虚部。首先考虑符号 $p^{(\tau)}_{\omega_R}$，$_0$。由命题 2.9 可知，若 δ 足够小且 $\omega_R \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$，则

$$\operatorname{Im} \ell^{\pm}_{\omega_R}(L^{\mp}_{\omega_R}\Xi(0,x)) > 0.$$

因此，公式（3.2）意味着存在常数 $C > 0$，使得只要 τ 和δ 足够小，就有

$$C^{-1}|\xi(L^+_{\omega_R})\xi(L^-_{\omega_R})| - C\tau|\xi|^2 \leq |\operatorname{Re} p^{(\tau)}_{\omega_R,0}(x,\xi)| \leq C|\xi|^2$$

and

$$\operatorname{Im} p^{(\tau)}_{\omega_R,0}(x,\xi) \geq C^{-1}\tau|\xi|^2 - C\tau|\xi(L^+_{\omega_R})\xi(L^-_{\omega_R})|.$$

为了考虑 ω 的虚部，请注意

$$p_{\omega,0}(\xi) - p_{\omega_R,0}(\xi) = \omega_I(-\omega_I + 2i\omega_R)|\xi|^2.$$

因此，我们有[15]

$$p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi) - p^{(\tau)}_{\omega_R,0}(x,\xi) = \omega_I(-\omega_I + 2i\omega_R)|{}^tD_x\Xi(\tau,x)^{-1}\xi|^2.$$

由于 $D_x\Xi(0,x)$ 是恒等映射，我们发现存在某个 $C > 0$，使得

$$C^{-1}\omega_I^2|\xi|^2 - C\tau\omega_I|\xi|^2 \leq |\operatorname{Re}(p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi) - p^{(\tau)}_{\omega_R,0}(x,\xi))| \leq C\omega_I^2|\xi|^2 + C\tau\omega_I|\xi|^2$$

and

$$\operatorname{Im}(p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi) - p^{(\tau)}_{\omega_R,0}(x,\xi)) \geq C^{-1}\omega_I|\xi|^2 - C\omega_I^2\tau|\xi|^2.$$

综合上述估计，并可能取更大的 C，我们得 et

$$\operatorname{Im} p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi) \geq C^{-1}(\tau + \omega_I)|\xi|^2 - C\tau|\xi(L^+_{\omega_R})\xi(L^-_{\omega_R})| - C\omega_I^2\tau|\xi|^2.$$

对于符号的实部，我们有两个估计（分别来自第二三角不等式的两种形式）

$$|\operatorname{Re}(p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi))| \geq C^{-1}|\xi(L^+_{\omega_R})\xi(L^-_{\omega_R})| - C\tau|\xi|^2 - C\omega_I^2|\xi|^2 - C\tau\omega_I|\xi|^2$$

and

$$|\operatorname{Re}(p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi))| \geq C^{-1}\omega_I^2|\xi|^2 - C\tau\omega_I|\xi|^2 - C|\xi|^2.$$

[15]在下面的公式中，我们将 $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^2$记作 $|\eta|^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2$。

因此，或许可以进一步增大 $C \geq 1$ （尤其是复制一些正项），由此可得，对于 $C_0 \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi) + C_0\tau|\operatorname{Re} p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi)| \\ \geq C^{-1}(\tau+\omega_I)|\xi|^2 + (C_0C^{-1}-C)\tau|\xi(L^+_{\omega_R})\xi(L^-_{\omega_R})| \\ + (C^{-1}-C_0C\omega_I\tau)\omega_I|\xi|^2 + (C^{-1}-C_0C\tau)\tau|\xi|^2 \\ + (C^{-1}-C_0C\tau^2)\omega_I|\xi|^2\end{aligned} \tag{3.3}$$

and

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi) + C_0\tau|\operatorname{Re} p^{(\tau)}_{\omega,0}(x,\xi)| \\ \geq C^{-1}(\tau+\omega_I)|\xi|^2 + (C_0C^{-1}-C)\omega_I^2\tau|\xi|^2 \\ + (C^{-1}-C_0C\tau^2)\omega_I|\xi|^2 + C_0(C^{-1}\omega_I^2-C)\tau|\xi|^2.\end{aligned} \tag{3.4}$$

现在我们可以选择 C_0 和 τ_0。令 C 为 (3.3) 和 (3.4) 中的常数，我们设定$C_0 = C^2$，然后施加条件 $\tau_0 \leq C^{-5}$。由 $C_0 = C^2$，我们可以消去 (3.3) 和 (3.4) 右端所有含因子 $C_0C^{-1} - C$ 的项。对于 $\tau \in [0,\tau_0)$，有 $\tau \leq (C_0C^2)^{-1}$，因此所有含因子 $C^{-1} - C_0C\tau$或 $C^{-1} - C_0C\tau^2$的项均非负，可以删去。除第一项（即我们所需的项）之外，(3.3) 右端只剩下 $(C^{-1} - C_0C\omega_I\tau)\omega_I|\xi|^2$，而 (3.4) 右端只剩下 $C_0(C^{-1}\omega_I^2 - C)\tau|\xi|^2$。若 $\omega_I\tau \leq (C_0C^2)^{-1}$，则 (3.3) 中的额外项非负，于是得证。若 $\omega_I\tau \geq (C_0C^2)^{-1}$，则利用 $\tau \leq \tau_0 \leq C^{-5}$，我们有

$$C^{-1}\omega_I^2 - C \geq C^{-9}\tau^{-2} - C \geq C - C = 0.$$

因此，在这种情况下，式（3.4）中的最后一个因子非负，结论得证。 □

4. Invertibility of the inviscid operator on the deformed domain

本节通过证明以下命题，完成定理 2 的证明：

命题 4.1. 存在 $\tau_0 > 0$ 和 $\delta > 0$，使得对每个 $\tau \in (0,\tau_0)$ 和$\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i[0,+\infty)$，算子 $P_{\omega,0}$： $H^2(\Omega_\tau) \cap H^1_0(\Omega_\tau) \to L^2(\Omega_\tau)$ 可逆。

如第 §3 节所述，我们将转而证明算子 $P_{(\tau)\omega,0}$： $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是可逆的，这等价于[16]。

[16]对于 $s \in \mathbb{R}$，空间 $H^s(\overline{\Omega_\tau})$ 可通过将 Ω_τ 嵌入闭曲面 N （例如 Ω_τ的双重）中来定义，然后将 $H^s(\Omega_\tau)$ 定义为$H^s(N)$中各元素在 $\overline{\Omega_\tau}$上的限制所构成的空间。通过将 $H^s(\overline{\Omega_\tau})$ 与 $H^s(N)$ 中由支撑在 $N \setminus \Omega_\tau$中的分布构成的子空间的正交补等同，我们赋予 $H^s(\Omega_\tau)$ 希尔伯特空间结构。随后，我们可以将 $H^s_0(N)$ 定义为 $C^\infty_c(\Omega_\tau)$ 在 $H^s(\Omega_\tau)$ 中的闭包。微分同胚 $\Xi(\tau,\cdot) : \Omega \to \Omega_\tau$ 在拓扑向量空间意义下诱导出 $H^s(\Omega)$（分别为 $H^s_0(\Omega)$）与 $H^s(\Omega_\tau)$（分别为 $H^s_0(\Omega_\tau)$）之间的自然同构。

我们首先证明 $P^{(\tau)}_{\omega,0}$ 当 $\mathrm{Im}\ \omega > 0$ 属于 §4.1 时的可逆性。为此，我们利用这一情形下 $P^{(\tau)}_{\omega,0}$ 对于 $\tau \geq 0$ 足够小时（包括 $\tau = 0$ 的情形）是椭圆的这一事实。因此，$P^{(\tau)}_{\omega,0}$ 的核中的任意函数都是解析的（例如利用 [LM70，第 8 章，定理 1.2]）。我们将利用这一事实证明，$P^{(\tau)}_{\omega,0}$ 的（不）可逆性不依赖于 $\tau \geq 0$ 足够小。通过分部积分可证明，$P_{\omega,0}: H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是可逆的。

本节其余部分将证明当 $\tau > 0$ 较小时，$P(\tau)_{\lambda,0}: H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 的可逆性。其策略与 $\mathrm{Im}\ \omega > 0$ 的情形类似；然而，由于 $P_{\lambda,0}$ 不是椭圆的，因此当 $\tau > 0$ 时，将 $P^{(\tau)}_{\lambda,0}$ 与 $P_{\lambda,0}$ 联系起来更加困难。我们将使用的 $\tau = 0$ 处的可逆性结论是 [DWZ25，引理 7.2]。为应用该结论，我们将采用 [DWZ25] 中的边界约化方法。在 §4.2 中，我们在 Ω_τ 上定义一个算子，它起到卷积算子的作用，其卷积核为 $E_{\lambda+i0}$ 中为 $P_{\lambda,0}$ 定义的基本解，见 [DWZ25，§4.3.2]。在 §4.3 中，我们用该算子将方程 $P^{(\tau)}_{\lambda,0} u = 0$ 替换为 Ω ∂ 上的方程。在 §4.4 中，我们研究 Ω_τ 上问题约化到边界后所对应的受限层势在 τ 趋于 0 时的行为。这种行为与我们观察到的 Ω 上 $\mathrm{Im}\,\omega$ 趋于 0 时的情形非常相似；后者详见 [DWZ25，§4.6]。由于这两种情形相似，我们将在 §4.5 中应用 [DWZ25] 中的方法，完成命题 4.1 的证明。

4.1. $\mathrm{Im}\,\omega > 0$时的可逆性。 我们先给出一个结果，将命题 4.1 归结为单射性问题。

引理 4.2. 存在 $\tau_0 > 0$ 和 $\delta > 0$，使得对于每个 $\tau \in [0, \tau_0)$ 和 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i[0, +\infty)$，若 $\tau > 0$ 或 $\mathrm{Im}\ \omega > 0$，则算子 $P^{(\tau)}_{\omega,0}$，是正规椭圆的，特别地，$P_{(\tau)\omega,0}: H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是指标为零的 Fredholm 算子。

证明。令 $\tau_0 > 0$ 和 $\delta > 0$ 如引理 3.1 中所述。令 $\tau \in [0, \tau_0)$ 和 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i[0, +\infty)$，并假设 $\tau > 0$ 或 $\mathrm{Im}\,\omega > 0$。对于 $\varpi \geq 0$，考虑算子 $Q_\varpi = P^{(\tau)}_{\omega,0} - i\varpi\Delta$，其中 Δ 表示 Ω 上的拉普拉斯算子。由引理 3.1 可知，对于每个 $\varpi \geq 0$，Q_ϖ 是椭圆的。注意，当 ϖ 足够大时，算子 Q_ϖ 是强椭圆的（[LM68，第 2 章，定义 1.3]）。特别地，它是正规椭圆的（[LM68，第 2 章，定义 1.2]）。然而，在椭圆算子类中，正规椭圆性在形变下保持不变。因此，对于每个 $\varpi \geq 0$，Q_ϖ 都是正规椭圆的。特别地，$P^{(\tau)}_{\omega,0} = Q_0$ 是正规椭圆的，这意味着 $P(\tau)_{\omega,0}: H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是指标为零的 Fredholm 算子，见 [LM68，第 2 章，（8.4）]。□

现在我们通过将问题归结为 4.1 在 $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ 的情形，来证明命题 $\tau = 0$。

引理 4.3。存在 $\tau_0 > 0$ 和 $\delta > 0$，使得对于每个 $\tau \in [0, \tau_0)$ 和 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i(0, +\infty)$，算子 $P_{(\tau)\,\omega,\,0}\colon\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是可逆的。

证明。设 τ_0 和 $\delta > 0$ 如引理 4.2 中所述。令 $\omega \in (\lambda-\delta, \lambda+\delta)+i(0, +\infty)$。对于每个 $\tau \in [0, \tau_0)$，算子 $P_{(\tau)\,\omega,\,0}\colon H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 的核的维数有限。下面证明，函数 $\tau \mapsto \dim \ker P^{(\tau)}_{\omega\,0,}$ 在 $[0, \tau_0)$ 上局部常数（因而为常数）。

取 $\tau_1 \in [0, \tau_0)$。令 $u_1, \ldots, u_n$ 为 $\ker P^{(\tau_1)}{}_{\omega,0}$ 的一组基。由 [LM70, Chapitre 8, Th´eor`eme 1.2] 可知，$u_1, \ldots, u_n$ 是实解析的（回顾引理 4.2，$P^{(\tau_1)}{}_{\omega,0}$ 是正规椭圆的，因此狄利克雷边界条件覆盖 $P^{(\tau_1)}{}_{\omega,0}$ 在 $\partial\Omega$ 上的情形）。对于 $j = 1, \ldots, n$，令 v_j 为 Ω_{τ_1} 上由 $v_j(\Xi(\tau, x)) = u_j(x)$ 定义的实解析函数。这些函数可全纯延拓，我们仍记为 $v_1, \ldots, v_n$，延拓到 Ω_{τ_1} 的一个连通邻域 U 上。当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 足够接近 τ_1 时，集合 $\bigcup_{\tau' \in [\tau, \tau_1]} \Omega_{\tau'}$ 包含于 U 中，因此我们可以定义一个映射

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \ker P^{(\tau_1)}_{\omega,0} & \to & \ker P^{(\tau)}_{\omega,0} \\ & & \sum_{j=1}^n a_j u_j & \mapsto & \left(x \mapsto \sum_{j=1}^n a_j v_j(\Xi(\tau, x))\right). \end{array}$$

根据解析延拓原理，Φ 确实将 $\ker P^{(\tau_1)}{}_{\omega,0}$ 映射到 $\ker P^{(\tau)}_{\omega\,0,}$（特别是，值域 Φ 中的函数满足狄利克雷边界条件，因为 $\partial\Omega_{\tau_1}$ 和 $\partial\Omega_\tau$ 包含在 $(\partial\Omega)_{\mathbb{C}}$ 中）。解析延拓原理还意味着 Φ 是单射。因此，对于接近 τ_1 的 τ，有 $\dim \ker P^{(\tau_1)}{}_{\omega,0} \leq \dim \ker P_{(\tau)\,\omega,0}$。

现在，设 $f_1, \ldots, f_n$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的一个线性无关族，它张成了 $P^{(\tau_1)}{}_{\omega,0}$ 值域的一个补空间。该族中有 n 个元素（即算子 $P^{(\tau_1)}{}_{\omega,0}$ 的核的维数），因为 $P_{(\tau_1)\,\omega,0}$ 是指标为零的 Fredholm 算子。对于接近 τ_1 的 τ，考虑算子

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}(\tau) & : & H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{C}^n & \to & L^2(\Omega) \times \mathbb{C}^n \\ & & (u, x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \left(P^{(\tau)}_{\omega,0} u + \sum_{j=1}^n x_j f_j, (\langle u, u_j\rangle)_{1 \leq j \leq n}\right), \end{array}$$

其中标量积定义在 $L^2(\Omega)$ 中。注意，$\mathcal{P}(\tau_1)$ 是可逆的。因此，当 τ 接近 τ_1 时，算子 $\mathcal{P}(\tau)$ 是可逆的，并且 $(\ker P(\tau)_{\omega,0}) \times \{0\}$ 包含于 $\mathcal{P}(\tau)^{-1}(\{0\} \times \mathbb{C}^n)$ 中。由此可得 $\dim \ker P^{(\tau)}_{\omega,0} \leq n = \dim \ker P(\tau_1)_{\omega,0}$，从而证明了 $\dim \ker P(\tau)_{\omega,0} = \dim \ker P^{(\tau_1)}{}_{\omega,0}$。

我们证明了函数 $\tau \mapsto \dim \ker P^{(\tau)}_{\omega\,0,}$ 在 $[0, \tau_0)$ 上为常数。因此，根据引理 4.2，我们只需证明 $P_{\omega,\,0}\colon H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是单射。

设 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足 $P_{\omega,\,0}u = 0$。通过分部积分可得

$$0 = \operatorname{Im}\left(\int_\Omega P_{\omega,0} u\bar{u}\,\mathrm{d}x\right) = 2\operatorname{Re}\omega \operatorname{Im}\omega \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x.$$

通过将 δ 取足够小，我们可确保 $\operatorname{Re}\omega > 0$；根据假设，我们有 $\operatorname{Im}\omega > 0$，因此 Poincar´e 不等式意味着 $u = 0$。□

4.2. 变形区域上的基本解。本节余下部分旨在证明 $P_{(\tau)\,\lambda,0}\colon H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 对于 $\tau > 0$足够小时的可逆性。正如§3中所解释的，引入 Ω 在 M中的一个小邻域 $\mathbb{R}^2_{\rightarrow}$ 并对 $\tau \geq 0$ 足够小定义曲面 $M_\tau = \Xi(\tau, M) \subseteq \mathbb{C}^2$.

为了证明 $P^{(\tau)}_{\lambda\,0,}$ 的可逆性，我们将采用 [DWZ25]，中的边界约化方法；我们的目标是应用可逆性结论 [DWZ25，引理 7.2]。为此，我们需要说明边界约化方法如何应用于 $P^{(\tau)}_{\lambda\,0}$,。在 [DWZ25] 中应用该方法的一个关键工具是基本解 $E_{\lambda+i0}$，它对应于 $P_{\lambda,0}$，定义如下

$$E_{\lambda+i0}(x) = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \log(A_\lambda(x) + i0)$$

其中

$$A_\lambda(x) = \ell^+_\lambda(x)\ell^-_\lambda(x) \text{ and } \log(y+i0) = \begin{cases} \log y & \text{if } y \in \mathbb{R}^*_+, \\ \log(-y) + i\pi & \text{if } y \in \mathbb{R}^*_-. \end{cases}$$

因此，$E_{\lambda+i0}$ 是一个局部可积函数（几乎处处定义）。[DWZ25 第 4.3 节证明了，$E_{\lambda+i0}$ 是$P_{\lambda,0}$的基本解。

我们需要在 M_τ 上定义一个算子，使其发挥由 $E_{\lambda+i0}$卷积的算子的作用。因此，当 $\tau > 0$ 足够小时，我们引入算子 $E^{(\tau)}_\lambda$： $C^\infty_c(M) \to C^\infty(M)$，定义为[17]

$$E^{(\tau)}_\lambda u(x) = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \int_M \log(A_\lambda(\Xi(\tau,x) - \Xi(\tau,y))) \det(D_x\Xi(\tau,y))u(y)\,\mathrm{d}y \quad (4.1)$$

对于 $u \in C^\infty_c(M)$ 和 $x \in M$。在此公式中，我们使用$\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$ 上的全纯对数，它在 $\mathbb{R}_+$上取实值。事先并不清楚积分被积函数在 (4.1) 中是否有意义，也不清楚 $E^{(\tau)}_\lambda$ 是否将 $C^\infty_c(M)$ 映射到 $C^\infty(M)$。经过一些准备后，我们将在引理 4.6 中证明这一点。

在开始研究算子 $E^{(\tau)}_\lambda$ 之前，我们先说明其定义的动机。我们将 $E^{(\tau)}_\lambda$ 介绍为作用于 M上的算子，但将其视为作用于

[17]回想一下，对于接近 0 且满足 $y \in M$的 τ，我们用 $D_x\Xi(\tau,y)$表示映射 $\Xi(\tau,\cdot)$在 y处的导数。我们将该导数视为一个复系数 2×2 矩阵。

M_τ上的算子更为自然。设 $u \in C_c^\infty(M)$、 $v \in C_c^\infty(M_\tau)$和 $w \in C^\infty(M_\tau)$满足 $u = v \circ \Xi(\tau, \cdot)$以及 $E_\lambda^{(\tau)} u = w \circ \Xi(\tau, \cdot)$，那么对于 $x \in M_\tau$，我们有（根据变量替换公式）

$$w(x) = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \int_{M_\tau} \log(A_\lambda(x-y)) v(y)\, \mathrm{d}y. \tag{4.2}$$

在此公式中，2-形式 $\mathrm{d}y$ 表示坐标 $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$ 下 $\mathbb{C}^2$ 上（限制到 M_τ 的）$(\mathrm{d}x_1 + i\,\mathrm{d}y_1) \wedge (\mathrm{d}x_2 + i\mathrm{d}y_2)$。因此， $E_\lambda^{(\tau)}$ 就是按照与对 $E_{\lambda+i0}$ 进行卷积的卷积算子相同的公式定义的，只是将 M 替换为 M_τ。

让我们研究算子 $E_\lambda^{(\tau)}$ 。我们先给出两个纯技术性的结果。正是在第一个结果——引理 4.4——中，我们确定了 M 这一 Ω 的邻域。

引理 4.4。我们可以选择 M，使得以下结论成立。存在 $\tau_0 > 0$、一个常数 $C > 0$ 以及光滑函数 $v_\pm : \overline{M} \times \overline{M} \to \mathbb{R}_+^*$、$w_\pm : \overline{M} \times \overline{M} \to \mathbb{C}$ 和 $H_\pm : [0, \tau_0] \times \overline{M} \times \overline{M} \to \mathbb{C}$，使得对于 $(\tau, x, y) \in [0, \tau_0] \times \overline{M} \times \overline{M}$，我们有

$$\begin{aligned} \ell_\lambda^\pm(\Xi(\tau, x) - \Xi(\tau, y)) = \ell_\lambda^\pm(x-y) + i\tau v_\pm(x,y)\ell_\lambda^\mp(x-y) \\ + \tau w_\pm(x,y)\ell_\lambda^\pm(x-y) + \tau^2 H_\pm(\tau, x, y) \end{aligned} \tag{4.3}$$

以及 $|H_\pm(\tau, x, y)| \leq C|x-y|$。

证明。对于 $x \in \partial\Omega$，记 $\mathbf{n}(x)$ 为 $\partial\Omega$ 在 x 处的内指法向量。取一个足够小的 r_0，定义

$$N = \Omega \cup \{x + r\mathbf{n}(x) : x \in \partial\Omega, r \in (-r_0, r_0)\}.$$

因此， N 是具有光滑边界的区域，且 ∂N 是 $\partial\Omega$ 的一个小形变，因此 N 满足 λ-简单性条件（只需令 r_0 足够小）。我们还假设 r_0 足够小，使得 Ξ 在 $\overline{N} \times [0, \tau_0]$ 上存在实解析延拓，并且对于 $\overline{N}$ 的某个邻域中的每个 x，都有

$$\ell_\lambda^\pm \left(\frac{\partial L_\lambda^\mp \Xi}{\partial \tau}(0, x) \right) \in i\mathbb{R}_+^*. \tag{4.4}$$

这是命题 2.9 的推论，并且我们应用解析延拓原理，以确保（4.4）中不存在实部。

最后，取 M 为 Ω 的任意一个开邻域，使得 $\overline{M} \subseteq N$，并证明（4.3）。为简化记号，我们只证明“+”的情形。设 x， y 是 M 中的两个点。我们先考虑 $\ell_\lambda^-(x-y)$ 或 $\ell_\lambda^+(x-y)$ 较小的情形。我们有

$$x - y = \ell_\lambda^+(x-y)L_\lambda^+ + \ell_\lambda^-(x-y)L_\lambda^-.$$

由于 $\overline{M}$是 N的紧子集，若 $\ell_\lambda^-(x-y)$ 或 $\ell_\lambda^+(x-y)$ 足够小，则点$y + \ell_\lambda^+(x-y)L_\lambda^+$ 属于 N。根据 N的 λ-单连通性，我们推得线段

从 y到 $y+\ell_\lambda^+(x-y)L_\lambda^+$以及从 $y+\ell_\lambda^+(x-y)L_\lambda^+$到 x的线段都包含在 N内。因此，由微积分基本定理可得

$$\begin{aligned}&\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y)\\&\quad=\ell_\lambda^+(x-y)\int_0^1 L_\lambda^+\Xi(\tau,y+s\ell_\lambda^+(x-y)L_\lambda^+)\,\mathrm{d}s\\&\qquad+\ell_\lambda^-(x-y)\int_0^1 L_\lambda^-\Xi(\tau,y+\ell_\lambda^+(x-y)L_\lambda^+ +s\ell_\lambda^-(x-y)L_\lambda^-)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\ell_\lambda^+(\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y))\right)_{|\tau=0}\\&\quad=\ell_\lambda^+(x-y)\int_0^1 \ell_\lambda^+\left(\frac{\partial L_\lambda^+\Xi}{\partial\tau}(0,y+s\ell_\lambda^+(x-y)L_\lambda^+)\right)\mathrm{d}s\\&\qquad+\ell_\lambda^-(x-y)\int_0^1 \ell_\lambda^+\left(\frac{\partial L_\lambda^-\Xi}{\partial\tau}(0,y+\ell_\lambda^+(x-y)L_\lambda^+ +s\ell_\lambda^-(x-y)L_\lambda^-)\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

性质（4.3）于是由泰勒公式推出，其中值域的控制来自v_+ （4.4）。

剩下要证明（4.3）在 ℓ_λ^+ （$x-y$）和 ℓ_λ^- （$x-y$）均远离零时成立。根据泰勒公式，我们有

$$\ell_\lambda^+(\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y))=\ell_\lambda^+(x-y)+\tau h_+(x,y)+\tau^2H_+(\tau,x,y)$$

其中某些函数 h_+ 和 H_+是光滑函数。由于 x 和 y 彼此远离，对 H_+ 的上界约束为空条件。因此我们可以令

$$v_+(x,y)=1 \text{ and } w_+(x,y)=\frac{h_+(x,y)-i\ell_\lambda^-(x-y)}{\ell_\lambda^+(x-y)}$$

于是（4.3）得证。注意，我们只在（4.3）的局部范围内证明了x， $y)\in\overline{M}\times\overline{M}$。可以利用单位分解将这些局部表达式拼接起来。□

现在我们将引理 4.4 应用于量 $\log(A_\lambda(\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y)))$，它出现在定义 4.1 中的公式 $E_\lambda^{(\tau)}$ 。

引理 4.5。存在 $\tau_0>0$ 和光滑函数 $w:\overline{M}\times\overline{M}\to\mathbb{C}$ 以及 $g:[0,\tau_0]\times\overline{M}\times\overline{M}\to\mathbb{C}$，使得:

(i) 对每个 $(\tau,x,y)\in[0,\tau_0]\times M\times M$，我们有

$$A_\lambda(\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y))=(1+\tau w(x,y))(A_\lambda(x-y)+i\tau g(\tau,x,y)),\tag{4.5}$$

(ii) 存在一个常数 C，使得对于每个满足 $x\neq y$ 的 $(\tau,x,y)\in[0,\tau_0]\times M\times M$，都有

$$\frac{g(\tau,x,y)}{|x-y|^2}\in[C^{-1},C]+i[-C\tau,C\tau].$$

特别地，通过令 τ_0 更小，对于每个 $\tau \in (0,\tau_0)$，都存在一个常数 $\alpha_0 \in [0,\pi/2)$，使得对于每个满足 $x \neq y$ 的 $x,y \in M$，都有

$$A_\lambda(\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y)) \in \left\{re^{i\theta} : r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in [-\alpha_0, \pi+\alpha_0)\right\}.$$

证明。应用引理4.4 并展开 A_λ的定义，我们发现，只要设定 $w(x,\ y) = w_+(x,\ y) + w_-(x,\ y)$，公式（4.5）便成立，且

$$\begin{aligned}
&(1+\tau w(x,y))g(\tau,x,y)\\
&\quad = v_-(x,y)\ell_\lambda^+(x-y)^2 + v_+(x,y)\ell_\lambda^-(x-y)^2\\
&\qquad - i\tau H_+(\tau,x,y)\ell_\lambda^-(x-y) - i\tau H_-(\tau,x,y)\ell_\lambda^+(x-y)\\
&\qquad - i\tau(iv_+(x,y)\ell_\lambda^-(x-y) + w_+(x,y)\ell_\lambda^+(x-y) + \tau H_+(\tau,x,y))\\
&\qquad\quad \times (iv_-(x,y)\ell_\lambda^+(x-y) + w_-(x,y)\ell_\lambda^-(x-y) + \tau H_-(\tau,x,y)).
\end{aligned}$$

当 τ足够小时，第二个公式可用于定义 $g(\tau,x,y)$。另请注意，

$$g(\tau,x,y) = v_-(x,y)\ell_\lambda^+(x-y)^2 + v_+(x,y)\ell_\lambda^-(x-y)^2 + \mathcal{O}(\tau|x-y|^2)$$

并且(ii) 可由以下事实推出： v_+ 且 v_- 取正值。

由(i) 和(ii)，我们推知存在 $C>1$，使得对于 x，$y \in M$ 且 $\tau > 0$足够小时，有

$$|\operatorname{Re} A_\lambda(\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y))| \geq C^{-1}|A_\lambda(x-y)| - C\tau|x-y|^2$$

and

$$\operatorname{Im} A_\lambda(\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y)) \geq C^{-1}\tau|x-y|^2 - C\tau|A_\lambda(x-y)|.$$

因此，对于 $\tau \in (0,(2C^4)^{-1})$，有：

$$\operatorname{Im} A_\lambda(\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y)) + C^2\tau|\operatorname{Re} A_\lambda(\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y))| \geq \frac{\tau}{2C}|x-y|^2. \tag{4.6}$$

结果的第二部分得证。 □

现在我们可以证明， $E_\lambda^{(\tau)}$ 确实定义了一个从 $C_c^\infty(M)$到$C^\infty(M)$的算子。

引理4.6. 存在 $\tau_0 > 0$，使得对于每个 $\tau \in (0,\tau_0)$，函数 n

$$(x,y) \mapsto \log(A_\lambda(\Xi(\tau,x)-\Xi(\tau,y)))\det(D_x\Xi(\tau,y)) \tag{4.7}$$

在 $M\times M$上可积。因此， $E_\lambda^{(\tau)}$定义良好。此外， $E_\lambda^{(\tau)}$连续地将$C_c^\infty(M)$映射到 $C^\infty(M)$，并且可从 $\mathcal{E}'(M)$连续延拓到 $\mathcal{D}'(M)$。

证明。 设 τ_0 如引理 4.5 所述，并设 $\tau \in (0,\tau_0)$。根据引理 4.5 最后一部分，对数是良定义的（我们在 $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}_-$ 上使用对数的全纯分支，该分支在 $\mathbb{R}_+^*$上取实值）。回顾证明中给出的估计（4.6），

该引理表明，存在一个常数 $C > 0$ （取决于 τ），使得对于 $x, y \in M$，我们有

$$|\log(A_\lambda(\Xi(\tau, x) - \Xi(\tau, y)))| \leq C(1 + |\log|x - y||).$$

（4.7）的可积性成立，因此定义 $E_\lambda^{(\tau)}$ 为从C_c^∞（M）到 L^1（M）的算子。

现在我们证明， $E_\lambda^{(\tau)}$ 连续地将 $C_c^\infty(M)$ 映射到 $C^\infty(M)$。取一个函数$u \in C_c^\infty(M)$以及 $x_0 \in M$。我们将证明， $E_\lambda^{(\tau)}u$在 x_0附近是光滑的。为此，取一个函数 χ：$M \to [0, 1]$ 支集位于 x_0 附近，并将其拆分为

$$\begin{aligned} &-4i\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}E_\lambda^{(\tau)}u(x) \\ &\quad= \underbrace{\int_M \log(A_\lambda(\Xi(\tau, x) - \Xi(\tau, y)))\det(D_x\Xi(\tau, y))\chi(y)u(y)\,\mathrm{d}y}_{v(x):=} \\ &\qquad+ \underbrace{\int_M \log(A_\lambda(\Xi(\tau, x) - \Xi(\tau, y)))\det(D_x\Xi(\tau, y))(1-\chi(y))u(y)\,\mathrm{d}y}_{w(x):=}. \end{aligned}$$

显然， w 在 x_0 附近是光滑的（因为核在那里是光滑的）。为了研究 v，我们使用泰勒公式得到

$$A_\lambda(\Xi(\tau, x) - \Xi(\tau, y)) = B(\tau, x, y) \cdot (x - y)$$

其中， $B(\tau, x, y)$ 是一个二次型 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$，其系数光滑地依赖于 τ、x 和 y。然后，我们进行变量代换，对于某个足够小的 $\delta > 0$，得到:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{B(0,\delta)} \log(B(\tau, x, x+z) \cdot z)F(x, z)u(x+z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{B(0,\delta)} \log|z|F(x, z)u(x+z)\,\mathrm{d}z \\ &\qquad+ \frac{1}{2}\int_{B(0,\delta)} \log\left(B(\tau, x, x+z) \cdot \frac{z}{|z|}\right)F(x, z)u(x+z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

其中 F 是光滑函数。随后，我们可以对每一项在积分号下求导，从而得到 v 是光滑的。

按照上述方法，我们可以证明 $E_\lambda^{(\tau)}$ 的形式伴随是有界的， C_c^∞（M）$\to C^\infty$（M），由此可知 $E_\lambda^{(\tau)}$ 有连续延拓 $\mathcal{E}'$（M）$\to \mathcal{D}'$（M）。 □

下面陈述引理 4.5 的另一个推论，稍后将会用到。我们还将证明注 2.10 中的一项断言。

引理 4.7. 存在 $\tau_0 > 0$，使得对每个 $\tau \in (0, \tau_0)$，映射 ℓ_λ^+ 和 ℓ_λ^- 诱导出从 M_τ 到 $\mathbb{C}$ 的开子集的微分同胚 C^∞。此外，这些微分同胚

分别为保向和反向（ M_τ 的取向由 M 的取向推得）。

证明。令 $\tau > 0$ 足够小时，考虑映射 $F_\tau^\pm\colon M \to \mathbb{C}$，其定义为 $F_\tau^\pm(x) = \ell_\lambda^\pm(\Xi(\tau, x))$。对于 $x \in M$， $DF_\tau^+(x)$ 和 $DF_\tau^-(x)$ 的矩阵具有如下形式

$$\begin{bmatrix} 1+\mathcal{O}(\tau) & \mathcal{O}(\tau) \\ \mathcal{O}(\tau) & -i\tau\ell_\lambda^+(\frac{\partial L_\lambda^-\Xi}{\partial\tau}(0,x)) + \mathcal{O}(\tau^2) \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} \mathcal{O}(\tau) & 1+\mathcal{O}(\tau) \\ -i\tau\ell_\lambda^-(\frac{\partial L_\lambda^+\Xi}{\partial\tau}(0,x)) + \mathcal{O}(\tau^2) & \mathcal{O}(\tau) \end{bmatrix}.$$

这里，我们取 $(L_\lambda^+, L_\lambda^-)$ 作为 $\mathbb{R}^2$ 的一组基，并取 $(1, i)$ 作为 $\mathbb{C}$ 的一组基。因此，当 τ 足够小时，有 $\pm\det(DF_\tau^\pm(x)) > 0$。由此，当 τ 足够小时， $F_\tau^\pm$ 从 M 到 $\mathbb{C}$ 诱导一个局部微分同胚。特别地， $F_\tau^\pm(M)$ 是开集。由引理 4.5 可知， $F_\tau^\pm$ 在 M 上的限制是单射，结论得证。□

本小节最后证明 $E_\lambda^{(\tau)}$ 的主要性质：它是作用于紧支撑分布上的 $P_{\lambda\,0}^{(\tau)}$ 的左逆，。

命题 4.8. 存在 $\tau_0 > 0$，使得对于每个 $\tau \in (0, \tau_0)$ 以及每个 $u \in \mathcal{E}'(M)$，我们都有

$$E_\lambda^{(\tau)}(P_{\lambda,0}^{(\tau)}u) = u.$$

证明. 我们只需证明 $u \in C_c^\infty(M)$ 的情形（由稠密性论证即可推出结论）。我们将利用 $E_\lambda^{(\tau)}$ 的描述 (4.2)，调整 DWZ25 §4.3.2] 中证明 $E_{\lambda+i0}$ 是基本解的方法。取 $u \in C_c^\infty(M)$。定义一个光滑函数 v，其定义在 M_τ 上，并满足 $v(\Xi(\tau, x)) = u(x)$；再定义另一个函数 w，使得 $w(\Xi(\tau, x)) = -4i\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}E_\lambda^{(\tau)}(P_\lambda^{(\tau)}{}_0\, u)(x)$。由变量替换公式（如 (4.2) 中所示），对于 $x \in M_\tau$，我们有：

$$w(x) = \int_{M_\tau} \log(A_\lambda(x-y))P_{\lambda,0}v(y)\,\mathrm{d}y.$$

令 $x = \Xi(\tau, \tilde{x}) \in M_\tau$ 满足 $\tilde{x} \in M$。当 $\mu > 0$ 足够小时，记 $D_{\mu,\,\tau}$ 为 $\Xi(\tau, \cdot)$ 将 $\mathbb{R}^2$ 中以 $\tilde{x}$ 为圆心、 μ 为半径的圆盘映射所得的像。于是由控制收敛定理可得

$$w(x) = \lim_{\mu\to 0} 4\int_{M\setminus D_{\mu,\tau}} \log(A_\lambda(x-y))L_\lambda^+L_\lambda^-v(y)\,\mathrm{d}y.$$

注意到，我们有

$$\begin{aligned}
&\log(A_\lambda(x-y))L_\lambda^+L_\lambda^-v(y)\mathrm{d}y\\
&=\frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\log(A_\lambda(x-y))L_\lambda^+L_\lambda^-v(y)\mathrm{d}\ell_\lambda^+\wedge\mathrm{d}\ell_\lambda^-\\
&=\mathrm{d}_y\left(\frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\log(A_\lambda(x-y))L_\lambda^-v(y)\mathrm{d}\ell_\lambda^-\right)+\frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\frac{L_\lambda^-v(y)}{\ell_\lambda^+(x-y)}\mathrm{d}\ell_\lambda^+\wedge\mathrm{d}\ell_\lambda^-\\
&=\mathrm{d}_y\left(\frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\log(A_\lambda(x-y))L_\lambda^-v(y)\mathrm{d}\ell_\lambda^-\right)-\mathrm{d}_y\left(\frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\frac{v(y)}{\ell_\lambda^+(x-y)}\mathrm{d}\ell_\lambda^+\right).
\end{aligned}$$

应用斯托克斯公式，我们得到（带对数因子的边界项随 μ 趋于零）

$$\begin{aligned}
w(x)&=-2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\lim_{\mu\to0}\int_{\partial D_{\mu,\tau}}\frac{v(y)}{\ell_\lambda^+(x-y)}\,\mathrm{d}\ell_\lambda^+\\
&=2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\lim_{\mu\to0}\int_{\ell_\lambda^+(\partial D_{\mu,\tau})}\frac{v((\ell_\lambda^+)^{-1}(z))}{z-\ell_\lambda^+(x)}\,\mathrm{d}z\\
&=4i\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}v(x)
\end{aligned}$$

其中在第二行，$\ell_\lambda^+)^{-1}$ 表示微分同胚 $M_\tau\to\ell_\lambda^+(M_t$ 所诱导的逆算子 ℓ_λ^+ (见引理 4.7)。根据 v 和 w的定义，我们刚刚证明了$E_\lambda^{(\tau)}(P_\lambda^{(\tau)},{}_0u)(x)=u(x)$，结论得证。□

4.3. 约化到边界。 在本小节中，我们说明如何利用算子 $E_\lambda^{(\tau)}$ 来表示方程 $P_\lambda^{(\tau)},{}_0u=0$ （带狄利克雷边界条件）的一个解，其中使用 Ω 上的一个 1-形式 ∂。我们将考虑支撑在 Ω 边界上的分布，并仿照 [DWZ25], 引入算子[18] $\mathcal{I}$： $\mathcal{D}'(\partial\Omega\ T^*\partial\Omega\otimes\mathbb{C})\to\mathcal{E}'(M)$，定义如下

$$\mathcal{I}(v)(\varphi)=\int_{\partial\Omega}\varphi v\text{ for }v\in\mathcal{D}'(\partial\Omega,T^*\partial\Omega\otimes\mathbb{C})\text{ and }\varphi\in C^\infty(M).$$

我们首先给出一个引理，用于描述 $E_\lambda^{(\tau)}$ 对形如$\mathcal{I}(v)$ 的分布的作用。算子 $S_\lambda^{(\tau)}$ 在引理4.9 中引入，与 $S_{\lambda+i0}$ 来自 [DWZ25的单层位势算子§45]有关。

引理 4.9. 存在 $\tau_0>0$，使得对于每个 $\tau\in(0,\tau_0)$ 和每个 $v\in\Gamma(T^*\partial\Omega\otimes\mathbb{C})$，分布 $E_\lambda^{(\tau)}(\mathcal{I}(v))|_\Omega$ 在 Ω 上光滑，并且可光滑延拓 $S_\lambda^{(\tau)}v$ 至 Ω。此外， $S_\lambda^{(\tau)}$ 定义了一个从 $\Gamma(T^*\partial\Omega\otimes\mathbb{C})$ 到 $C^\infty(\Omega)$ 的有界算子。

[18]我们用 $\mathcal{D}'(\partial\Omega\ T^*\partial\Omega\otimes\mathbb{C})$ 表示向量丛 $T^*\partial\Omega\otimes\mathbb{C}$ 的广义截面空间。注意，它们正是 $\partial\Omega$ 上具有复系数的 1 次流。 $T^*\partial\Omega$ 的光滑截面空间记为 $\Gamma(T^*\partial\Omega\otimes\mathbb{C})$。

证明. 取 $v \in \Gamma(T^*\partial\Omega \otimes \mathbb{C})$。令 $\tilde{v}$ 为 $\partial\Omega_\tau$ 上满足 $\det(\Xi(\tau,\cdot))v = \Xi(\tau,\cdot)^*\tilde{v}$ 的 1-形式。令 w 为 Ω_τ 上由关系 $w(\Xi(\tau,x)) = S_\lambda^{(\tau)}v(x)$ 定义的分布，并注意到 w 是一个光滑函数（因为 $E_\lambda^{(\tau)}$ 的核在对角线之外光滑），其在 $x \in \Omega_\tau$ 上的表达式为

$$w(x) = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \int_{\partial\Omega_\tau} \log(A_\lambda(x-y))\tilde{v}(y).$$

利用积分号下求导，对于 $x \in \Omega_\tau$，有

$$L_\lambda^{\pm} w(x) = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{\tilde{v}(y)}{\ell_\lambda^{\pm}(x-y)}.$$

回顾引理 4.7，可知 $\ell_\lambda^{\pm}$ 在 M_τ 与 W（$\mathbb{C}$的一个开子集）之间诱导出一个微分同胚。令 $F\colon W \to M_\tau$ 表示其逆微分同胚。由变量替换公式，对于 $x \in F^{-1}(\Omega_\tau)$，有：

$$L_\lambda^{\pm} w(F(x)) = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \int_{\partial\ell_\lambda^{\pm}(\Omega_\tau)} \frac{F^*\tilde{v}(y)}{x-y}$$

根据 [DWZ25，引理 4.6]，可知 $L_\lambda^{\pm} w$ 可光滑延拓至 Ω_τ。因此 $\mathrm{d}w$以及 w均可光滑延拓至 Ω_τ （因为 L_λ^+ 和L_λ^- 张成$\mathbb{C}^2$）。因此， v 可光滑延拓至 Ω。□

利用引理 $S_\lambda^{(\tau)}$ 中的算子 4.9，我们给出满足 $P_\lambda^{(\tau)}{}_{,0}u = 0$ 且具有狄利克雷边界条件的解的表示公式。理论上，我们可以在下面的引理中给出该 1-形式 v 的显式公式（用 $\partial\Omega$ 上 u 的一阶导数表示），但我们并不需要这个公式。

引理 4.10. 存在 $\tau_0 > 0$，使得对于每个 $\tau \in (0,\tau_0)$ 和每个满足 $u_{|\partial\Omega} = 0$ 且 $P_{(\tau)\lambda,0}u = 0$ 的 $u \in C^\infty(\Omega)$，都存在 $v \in \Gamma(T^*\partial\Omega \otimes \mathbb{C})$，使得

$$u = S_\lambda^{(\tau)}v \text{ and } E_\lambda^{(\tau)}(\mathcal{I}(v))_{|M\setminus\overline{\Omega}} = 0.$$

证明. 令 $u \in C^\infty(\Omega)$ 满足 $u_{|\partial\Omega} = 0$ 和 $P_\lambda^{(\tau)}{}_{,0}u = 0$。令 U 为定义在 M 上的函数

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{if } x \in \overline{\Omega} \\ 0 & \text{if } w \in M \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

注意到 U定义了 $\mathcal{E}'(M)$ 中的一个元素，因此命题 4.8蕴含$E_\lambda^{(\tau)}P^{(\tau)\lambda,0}U = U$。因此，我们只需证明存在 $v \in \Gamma(T^*\partial\Omega \otimes \mathbb{C})$，使得$P_{(\tau)\lambda,0}U = \mathcal{I}(v)$。这可由斯托克斯公式得出，因为 $P_{\lambda\,0}^{(\tau)}{}_{,}$是一个二阶微分算子，且 $u_{|\partial\Omega} = 0$。□

我们以一个引理结束本小节，该引理将算子 $E_\lambda^{(\tau)}$ 在 τ 趋于 0 时与和 $E_{\lambda+i0}$ 的卷积算子联系起来。

引理 4.11. 设 $(\tau_n)_{n\geq 0}$ 是一个趋于 0 的严格正实数序列。对每个 $n \in \mathbb{N}$，设 $v_n \in \Gamma(T^*\partial\Omega \otimes \mathbb{C})$ 满足 $E^{(\tau_n)\,\lambda}(\mathcal{I}(v_n))_{|M\setminus\overline{\Omega}} = 0$。假设存在一个流 $v \in \mathcal{D}'(\partial\Omega\ T^*\partial\Omega \otimes \mathbb{C})$，使得 $(v_n)_{n\geq 0}$ 在 n 趋于$+\infty$ 时收敛到 v （作为一个流）。那么 $(E_{\lambda+i0} * \mathcal{I}(v))_{|M\setminus\overline{\Omega}} = 0$。

证明。设 $\varphi \in C_c^\infty(M \setminus \overline{\Omega})$。我们有

$$\langle E_{\lambda+i0} * \mathcal{I}(v), \varphi\rangle = \langle \mathcal{I}(v - v_n), E_{\lambda+i0} * \varphi\rangle + \langle \mathcal{I}(v_n), E_{\lambda+i0} * \varphi - (E_\lambda^{(\tau_n)})^*(\varphi)\rangle,$$

其中 $(E^{(\tau_n)\,\lambda})^*$ 表示 $E^{(\tau_n)\,\lambda}$ 的形式伴随。根据关于 $(v_n)_{n\geq 0}$ 的收敛假设，我们知道

$$\langle \mathcal{I}(v - v_n), E_{\lambda+i0} * \varphi\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

因此，我们只需证明

$$\langle \mathcal{I}(v_n), E_{\lambda+i0} * \varphi - (E_\lambda^{(\tau_n)})^*(\varphi)\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

由巴拿赫–施泰因豪斯定理（例如参见 [H¨or03，定理 2.1.8]）可知，$(v_n)_{n\geq 0}$ 在某个给定阶数的流空间中有界。因此，我们只需证明 $((E^{(\tau_n)\,\lambda})^*(\varphi))_{n\geq 0}$ 在 $\partial\Omega$ 的某个邻域内作为 C^∞ 函数收敛于 $E_{\lambda+i0}*\varphi$。

因此，我们固定一个点 $x_0 \in \partial\Omega$，并证明该点附近的收敛性。此外，通过引入单位分解，我们可以假设φ 的支集很小，且靠近点 $x_1 \in M \setminus\Omega$。对于每个 $n \geq 0$，引入光滑函数 ψ_n ，定义如下：

$$\psi_n(x) = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \int_M \log(A_\lambda(\Xi(\tau_n, x) - \Xi(\tau_n, y)))\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

注意，

$$(E_\lambda^{(\tau_n)})^*\varphi(x) = \psi_n(x)\det(D_x\Xi(\tau_n, x))$$

且函数 $\det(D_x\Xi(\tau_n, \cdot))$ 在 $C^\infty(M)$ 中趋于 1，当 n 趋于 $+\infty$时。因此，我们要证明 $(\psi_n)_{n\geq 0}$ 收敛到 $E_{\lambda+i0} * \varphi$。应用引理 4.5，得到

$$\psi_n(x) = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \int_M \log(1 + \tau_n w(x, y))\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \underbrace{\int_M \log(A_\lambda(x - y) + i\tau_n g(\tau_n, x, y))\varphi(y)\,\mathrm{d}y}_{\tilde{\psi}_n(x) :=}.$$

通过积分号下求导，我们发现该公式中的第一项作为光滑函数收敛到 0，因此我们将重点放在 ψ_n 上。利用以下假设：

φ 的支集位于 x_1 附近，我们作变量替换“$u = \ell_\lambda^+(y-x)$ $v = \ell_\lambda^-(y-x)$”，从而得到：对于某个任意小的 $\rho > 0$，以及对于 $\bar{x} = (\ell_\lambda^+(x_1 - x_0)\ \ell_\lambda^-(x_1 - x_0))$，

$$\tilde{\psi}_n(x) = \int_{B(\bar{x},\rho)} \log(uv + i\tau_n g(\tau_n, x, x + uL_\lambda^+ + vL_\lambda^-))\varphi(x + uL_\lambda^+ + vL_\lambda^-)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

设 $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ 满足 $\langle(\beta,\alpha)\ \bar{x}\rangle > 0$。由于 x_1 远离 x_0，因此 $\bar{x}$ 非零，我们可以找到 α 和 β。取足够小的 ρ，即可确保对于每个 $(u,v) \in B(\bar{x},\rho)$，都有 $\beta u + \alpha v > \rho$。于是令 $\tilde{g}_n(x,\cdot,\cdot)$ 和 $\tilde{\varphi}$ 为 $(u,v) \mapsto g(\tau_n, x, x + uL_\lambda^+ + vL_\lambda^-)$ 及 φ 的几乎解析延拓[19]。令 H：$B(\bar{x},\rho) \times [0,1] \to \mathbb{C}^2$ 表示从 $H(u,v,t)$ 到 $=(u + it\alpha, v + it\beta)$ 的同伦。

由引理 4.5 以及 α,β 的选取可知，存在 $C > 0$，使得当 $t \geq 0$ 足够小时、$n \geq 0$ 足够大且 x 接近 x_0 时，若 $(u,v) \in B(\bar{x},\rho) + it(\alpha,\beta)$，则 $\mathrm{Im}(uv + i\tau_n\tilde{g}_n(x,u,v)) \geq C^{-1}(t + \tau_n)$。特别地，对于某个足够小的 $t_0 > 0$，$(u,v) \mapsto \log(uv + i\tau_n\tilde{g}_n(x,u,v))$ 在 $B(\bar{x},\rho) + i[0,t_0](\alpha,\beta)$ 的某个邻域上光滑，其中 t_0 不依赖于 n。

因此，我们可以应用斯托克斯公式，得到

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_n(x) = &\int_{B(\bar{x},\rho)+it_0(\alpha,\beta)} \log(uv + i\tau_n\tilde{g}_n(x,u,v))\tilde{\varphi}(x + uL_\lambda^+ + vL_\lambda^-)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &- \int_{B(\bar{x},\rho)\times[0,t_0]} H^*(\bar{\partial}(\log(uv + i\tau_n\tilde{g}_n(x,u,v))\tilde{\varphi}(x + uL_\lambda^+ + vL_\lambda^-)) \wedge \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v).\end{aligned}$$

由估计 $\mathrm{Im}(uv + i\tau_n\tilde{g}_n(x,u,v)) \geq C^{-1}(t + \tau_n)$，可知第一个积分的被积函数在 n 趋于 $+\infty$ 时一致光滑，而第二个积分中微分形式的系数及其关于 x 的导数均一致为 $\mathcal{O}(t^\infty)$。因此，ψ_n 在 x_0 附近作为光滑函数收敛到函数 ψ_∞，其定义如下：

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_\infty(x) = &\int_{B(\bar{x},\rho)+it_0(\alpha,\beta)} \log(uv)\tilde{\varphi}(x + uL_\lambda^+ + vL_\lambda^-)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &- \int_{B(\bar{x},\rho)\times[0,t_0]} H^*(\bar{\partial}(\log(uv)\tilde{\varphi}(x + uL_\lambda^+ + vL_\lambda^-)) \wedge \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v).\end{aligned}$$

注意，按照上述定义，$\psi_\infty(x)$ 不依赖于 $t_0 > 0$ 取值较小时的具体选择（根据斯托克斯公式，或者仅凭极限的唯一性即可得出）。令 t_0 趋于 0，第二

[19]它们是函数u、v的光滑延拓，$\mapsto g$以及τ_n、x、$x + uL_\lambda^+ + vL_\lambda^-$，而 φ 则分别定义在 B、$\bar{x}$ 以及 ρ的复邻域上。x_0此外，这些延拓在 $\mathbb{R}^2$ 与其定义区域的交集上满足无限阶柯西–黎曼方程。解析延拓 $\tilde{g}_n$ 可以选取为满足一致 C^∞ 估计，估计范围为 $n \geq 0$。例如参见[Zwo12，定理 3。6]。

项趋于 0（被积函数为 $\mathcal{O}(t^\infty)$），因此根据控制收敛定理，我们有

$$\tilde{\psi}_\infty(x) = \int_{B(\bar{x},\rho)} \log(uv + i0)\varphi(x + uL_\lambda^+ + vL_\lambda^-)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

最后，变量变换“$y = x + uL_\lambda^+ + vL_\lambda^-$”得到

$$\tilde{\psi}_\infty = -4i\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}E_{\lambda+i0} * \varphi.$$

证明完毕。 □

4.4. 受限层势算子的微局部结构。 我们的目标是理解由引理 v给出的 1-形式 4.10，其中 u 满足 $P_\lambda^{(\tau)}, {}_0 u = 0$ 并满足狄利克雷边界条件。注意到 v 必须满足 $(S_\lambda^{(\tau)}v)_{|\partial\Omega} = 0$，这提示我们引入算子 $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}$： $\Gamma(T^*\partial\Omega\otimes\mathbb{C}) \to C^\infty(\partial\Omega)$，其定义为 $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}w = (S_\lambda^{(\tau)}w)|_{\partial\Omega}$。

算子 $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}$ 与 $\mathcal{C}_{\lambda+i0}$ 来自 [DWZ25，§46]的限制单层势有关。事实上，我们有：

引理 4.12。当 τ 趋于 0 时， $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}$ 的施瓦茨核作为分布收敛到 $\mathcal{C}_{\lambda+i0}$ 的施瓦茨核。

证明。应用引理 4.5，我们发现 $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}$ 的施瓦茨核为

$$\frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\log(A_\lambda(x-y) + i\tau g(\tau,x,y))\det D_x\Xi(\tau,y) + \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\log(1+\tau w(x,y))\det D_x\Xi(\tau,y).$$

当 τ趋于 0 时，第二项作为定义在 $\partial\Omega\times\partial\Omega$ 上的光滑函数收敛到 0，因此可以忽略。因子 $\det D_x\Xi(\tau,y)$ 作为光滑函数收敛到 1，也可以忽略。因此，我们需要证明以下收敛性

$$(x,y) \mapsto \log(A_\lambda(x-y) + i\tau g(\tau,x,y)) \tag{4.8}$$

to

$$(x,y) \mapsto \log(A_\lambda(x-y) + i0) \tag{4.9}$$

作为 $\partial\Omega\times\partial\Omega$ 上的分布。注意，(4.8) 是一个可积函数，并且几乎处处收敛于 (4.9)。因此，我们只需为 (τ-无关的控制函数建立 4.8。为此，我们写成

$$\log(A_\lambda(x-y) + i\tau g(\tau,x,y)) = \log|A_\lambda(x-y) + i\tau g(\tau,x,y)| + \log\left(\frac{A_\lambda(x-y) + i\tau g(\tau,x,y)}{|A_\lambda(x-y) + i\tau g(\tau,x,y)|}\right).$$

第二项由 $3\pi/2$ 控制。为了控制第一项，我们需要为 $|A_\lambda(x-y)+i\tau g(\tau,x,y)|$ 建立一个下界。对某个 $C>0$，回顾引理 4.5(ii)，我们有

$$\begin{aligned}&|A_\lambda(x-y)+i\tau g(\tau,x,y)|\\&\qquad\geq\frac{|\operatorname{Re}(A_\lambda(x-y)+i\tau g(\tau,x,y))|+|\operatorname{Im}(A_\lambda(x-y)+i\tau g(\tau,x,y))|}{2}\\&\qquad\geq\frac{|A_\lambda(x-y)|-C|x-y|^2\tau^2+C^{-1}\tau|x-y|^2}{2}\geq\frac{|A_\lambda(x-y)|}{2}\end{aligned}$$

当 τ 足够小时。由于 $\log|A_\lambda(x-y)|=\log|\ell_\lambda^+(x-y)|+\log|\ell_\lambda^-(x-y)|$ 在 $\partial\Omega\times\partial\Omega$ 上是可积的，结论即得。每一项的可积性可在 (x,y) 中局部检验：如果 $\ell_\lambda^\pm(x-y)\neq0$，则无需讨论；如果 $\ell_\lambda^\pm(x-y)=0$ 且 x 不是特征点，那么我们可以在局部反演 $\ell_\lambda^\pm$，并利用对数是可积的这一事实；最后，如果 $x=y$ 是特征点，我们可以对 $\ell_\lambda^\pm$ 使用莫尔斯坐标，再次利用对数是可积的这一事实（正如在 [DWZ25，引理 4.10] 的证明中所做的那样）。□

在本节的其余部分，我们将证明关于 $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}$ 当τ 趋于 0 时的行为的更精确估计。我们将证明与[DWZ25], 中的引理 4.11、4.12、4.13 和 4.14 类似的结论，$\epsilon=$用参数 ω 替换该参考文献中的参数 “ τ。最终目标是利用 [DWZ25] 中由引理 4.11 、4.12、4.13 和 4.14 得出的结果来反演 $P_{\lambda\,0}^{(\tau)}$，参见命题 4.18 及其上方的讨论。

对于较小的 $\tau>0$，我们在 M 上引入两个（复）1-形式，它们分别是 $\mathrm{d}(\ell^+_{\lambda|M_\tau})$ 和 $\mathrm{d}(\ell^-_{\lambda|M_\tau})$ 经 $\Xi(\tau,\cdot)$ 拉回所得。记为 $\mathrm{d}\ell^{+,(\tau)}_{\lambda}$ 和 $\mathrm{d}\ell^{-,(\tau)}_{\lambda}$。于是，对于 $v\in\Gamma(T^*\partial\Omega\otimes\mathbb{C})$，我们可以将其分解为：

$$\mathrm{d}\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}v=T_\lambda^{+,(\tau)}v+T_\lambda^{-,(\tau)}v,$$

其中

$$T_\lambda^{\pm,(\tau)}v=j^*(L_\lambda^{\pm,(\tau)}S_\lambda^{(\tau)}v\mathrm{d}\ell_\lambda^{\pm,(\tau)}).$$

这里 j 表示包含映射 $\partial\Omega\to\Omega$，且 $\mathcal{T}^{\,\tau}_{\,\lambda}$ 是按照§3中的过程定义的。

利用微分同胚 $z:\mathbb{S}^1\to\partial\Omega$，我们将 $T^{\pm,(\tau)}_{\lambda}$ 识别为一个从$C^\infty(\mathbb{S}^1$到其自身的算子。其施瓦茨核记为 $K_\pm^{(\tau)}(\theta,\theta')$。我们还将$\gamma_\lambda^+$ 和γ_λ^- 视为 $\mathbb{S}^1$ 上的微分同胚，使用参数化 z，如引理2.8的证明中所示。

我们从[20] 与 [DWZ25，引理 4.11], 所述的核开始$K_\pm^{(\tau)}$ 远离 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ 的对角线以及反射点（即 γ_λ^+ 和 γ_λ^- 的图）。

[20]按照 [DWZ25], ，我们用符号“$\pm$”和“$\mp$”陈述引理。我们的意思是，当所有“$\pm$”和“$\mp$”的实例分别替换为“$+$”和“$-$”，且所有“$\pm$”和“$\mp$”的实例分别替换为“$-$”和“$+$”时，这些结果仍然成立。

引理 4.13. 设 $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{S}^1$ 满足 $\theta_0 \neq \theta_1$ 和 $\gamma_\lambda^\pm(\theta_0) \neq \theta_1$。则存在 $(\theta_0, \theta_1) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 的邻域 U，使得 $K_\pm^{(\tau)}$ 在 U 上光滑，并且当 $\tau > 0$ 趋于 0 时一致成立。

证明。由于 $E_\lambda^{(\tau)}$ 在对角线之外具有光滑核，我们发现 $T^{\pm,\ (\tau)}_{\ \lambda}$ 在对角线之外具有光滑核，即对于 $\theta \neq \theta'$:

$$K_\pm^{(\tau)}(\theta, \theta') = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{\ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau, z(\theta)) \cdot z'(\theta))}{\ell_\lambda^\pm(\Xi(\tau, z(\theta)) - \Xi(\tau, z(\theta')))} \det(D_x\Xi(\tau, z(\theta')).$$

注意，引理 4.7 表明，当 $\theta \neq \theta'$ 且 $\tau > 0$ 时，分母非零。当 τ 趋于 0 时，如果 (θ, θ') 接近 (θ_0, θ_1)，分母始终远离零，结论由此得出。□

现在我们证明 [DWZ25，引理 4.12] 的类似结论，并描述 $K_\pm^{(\tau)}$ 在 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 对角线上对应于 $\partial\Omega$ 中非特征点的点附近的行为。

引理 4.14。设 $\theta_0 \in \mathbb{S}^1$ 满足 $\gamma_\lambda^\pm(\theta_0) \neq \theta_0$。存在 $\tau_0 > 0$、$\mathbb{S}^1$ 中 θ_0 的一个邻域 U 以及一个光滑函数 $R : [0, \tau_0) \times U \times U \to \mathbb{C}$，使得

$$K_\pm^{(\tau)}(\theta, \theta') = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} (\theta - \theta' \pm i0)^{-1} \det(D_x\Xi(\tau, z(\theta'))) + R(\tau, \theta, \theta')$$

对于 $\tau \in (0, \tau_0)$ 和 $\theta, \theta' \in U$。

证明。我们有

$$K_\pm^{(\tau)}(\theta, \theta') = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \lim_{\delta \to 0+} \frac{\ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau, z(\theta)) \cdot z'(\theta))}{\ell_\lambda^\pm(\Xi(\tau, z(\theta) + \delta\mathbf{n}(\theta)) - \Xi(\tau, z(\theta')))} \det(D_x\Xi(\tau, z(\theta')), \tag{4.10}$$

其中 $\mathbf{n}(\theta)$ 表示在 $z(\theta)$ 处的一个非零指向内部的向量。为证明 (4.10)，我们只需利用核 $E_\lambda^{(\tau)}$ 在对角线以外光滑这一事实以及 $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}$ 的定义。于是我们可以写成

$$\ell_\lambda^\pm(\Xi(\tau, z(\theta) + \delta\mathbf{n}(\theta)) - \Xi(\tau, z(\theta'))) = \ell_\lambda^\pm(\Xi(\tau, z(\theta)) - \Xi(\tau, z(\theta'))) + \delta k(\delta, \tau, \theta) \tag{4.11}$$

其中 k 是一个光滑函数，使得 $k(0, \tau, \theta) = \ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau, z(\theta)) \cdot \mathbf{n}(\theta))$。我们还有

$$\ell_\lambda^\pm(\Xi(\tau, z(\theta)) - \Xi(\tau, z(\theta'))) = G(\tau, \theta, \theta')(\theta - \theta')$$

其中 G 是一个光滑函数，满足 $G(\tau, \theta, \theta) = \ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau, z(\theta)) \cdot z'(\theta))$。因此，我们有

$$\frac{1}{\ell_\lambda^\pm(\Xi(\tau, z(\theta) + \delta\mathbf{n}(\theta)) - \Xi(\tau, z(\theta')))} = \frac{1}{G(\tau, \theta, \theta')} \frac{1}{\theta - \theta' + \delta\frac{k(\delta, \tau, \theta)}{G(\tau, \theta, \theta')}}.$$

于是注意到

$$\begin{aligned}\pm\operatorname{Im}\frac{k(0,\tau,\theta)}{G(\tau,\theta,\theta)} &= \pm\operatorname{Im}\frac{\ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau,z(\theta))\cdot\mathbf{n}(\theta))}{\ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau,z(\theta))\cdot z'(\theta))}\\ &= \pm\frac{\operatorname{Im}(\ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau,z(\theta))\cdot\mathbf{n}(\theta))\overline{\ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau,z(\theta))\cdot z'(\theta)))}}{|\ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau,z(\theta))\cdot z'(\theta))|^2} > 0.\end{aligned}$$

这里我们使用了以下事实：$(z'(\theta),\ \mathbf{n}(\theta))$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组直接基，以及引理 4.7。由连续性可知，当 $\pm\operatorname{Im} k(\delta,\ \tau,\ \theta)/G(\tau,\ \theta,\ \theta')$ 接近 0，且 δ 接近 0、 θ 和 θ' 接近 θ_0时，其值仍为正。

于是，根据 [DWZ25，引理 3.7] (另见第 32 页的注)可知，对于θ，θ' 接近 θ_0

$$K_\pm^{(\tau)}(\theta,\theta') = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{\ell_\lambda^+(D_x\Xi(\tau,z(\theta))\cdot z'(\theta))}{G(\tau,\theta,\theta')}\det(D_x\Xi(\tau,z(\theta')))\frac{1}{\theta-\theta'\pm i0}.$$

设 $R(\tau,\theta,\theta')$ 为满足以下条件的光滑函数

$$\begin{aligned}&\frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{\ell_\lambda^+(D_x\Xi(\tau,z(\theta))\cdot z'(\theta))}{G(\tau,\theta,\theta')}\det(D_x\Xi(\tau,z(\theta'))\\ &\qquad = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\det(D_x\Xi(\tau,z(\theta'))) + (\theta-\theta')R(\tau,\theta,\theta')\end{aligned}$$

从而结论成立。 □

现在我们描述 $K_\pm^{(\tau)}$ 在 $\gamma_\lambda^\pm$ 的图附近的情形，但不包括与对角线的交集，并证明 [DWZ25，引理 4.13] 的类似结论。

引理 4.15. 设 $\theta_0\in\mathbb{S}^1$ 满足 $\gamma_\lambda^\pm(\theta_0)\neq\theta_0$。存在 $\tau_0>0$、 θ_0 在 $\mathbb{S}^1$ 中的一个邻域 U，以及光滑函数 a,ψ：$[0,\tau_0)\times U\to\mathbb{C}$ 和 R：$[0,\tau_0)\times U\times\gamma_\lambda^\pm(U)\to\mathbb{C}$，使得对于 $(\tau,\theta,\theta')\in[0,\tau_0)\times U\times\gamma_\lambda^\pm(U)$，有

$$K_\pm^{(\tau)}(\theta,\theta') = a(\tau,\theta')(\gamma_\lambda^\pm(\theta)-\theta'\pm i\psi(\tau,\theta'))^{-1} + R(\tau,\theta,\theta').$$

此外，当 τ 足够小时，且 $a(0,\theta') = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{1}{\gamma_\lambda^{\pm\prime}()(\theta')}$ 时，Re $\psi(\tau,\theta')>0$。

证明。当 $\tau>0$ 足够小时，且 θ，θ' 分别充分接近 θ_0 和 $\gamma_\lambda^\pm(\theta_0)$，由引理 4.4，应用可得

$$\begin{aligned}&\ell_\lambda^\pm(\Xi(\tau,z(\theta))-\Xi(\tau,z(\theta')))\\ &\qquad = (1+\tau w_\pm(z(\theta),z(\theta')))\ell_\lambda^\pm(z(\theta)-z(\theta'))\\ &\qquad\qquad + i\tau v_\pm(z(\theta),z(\theta'))\ell_\lambda^\mp(z(\theta)-z(\theta')) + \tau^2 H(\tau,z(\theta),z(\theta')).\end{aligned}\tag{4.12}$$

我们还注意到

$$\ell_\lambda^\pm(z(\theta)-z(\theta')) = \ell_\lambda^\pm(z(\gamma_\lambda^+(\theta))-z(\theta')) = G(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^\pm(\theta)-\theta'),$$

其中， G 是在（θ_0， $\gamma_\lambda^\pm(\theta_0)$）附近的一个光滑函数，且 $G(\theta,\gamma_\lambda^\pm(\theta)) = \ell_\lambda^\pm(z'(\gamma_\lambda^\pm(\theta)))$。我们还令 $q_\pm(\tau,\theta,\theta') = 1+\tau w_\pm(z(\theta)\ z(\theta'))$，并注意到当 τ 趋于 0 时， $q_\pm(\tau,\cdot,\cdot)$ 作为光滑函数收敛到 1。对于足够小的 τ，我们有

$$K_\pm^{(\tau)}(\theta,\theta') = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{\ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau,z(\theta))\cdot z'(\theta))}{q_\pm(\tau,\theta,\theta')G(\theta,\theta')}\det(D_x\Xi(\tau,z(\theta')))$$
$$\times\left(\gamma_\lambda^+(\theta)-\theta'+i\tau\frac{v_\pm(z(\theta),z(\theta'))\ell_\lambda^\mp(z(\theta)-z(\theta'))-i\tau H(\tau,z(\theta),z(\theta'))}{q_\pm(\tau,\theta,\theta')G(\theta,\theta')}\right)^{-1}.$$

由引理 2.4 可知， $\pm\ell_\lambda^\pm(z(\theta)\ -z(\theta'))$ 与 $\ell_\lambda^\pm(z'(\gamma_\lambda^\pm(\theta)))$ 符号相同，只要 (θ,θ') 接近 $(\theta_0,\gamma_\lambda^\pm(\theta_0))$。因此，我们发现，当 足够小时，有

$$\pm\operatorname{Re}\frac{v_\pm(z(\theta),z(\theta'))\ell_\lambda^\mp(z(\theta)-z(\theta'))-i\tau H(\tau,z(\theta),z(\theta'))}{q_\pm(\tau,\theta,\theta')G(\theta,\theta')}>0.$$

利用 [DWZ25，引理 3.6] (另见该文献第 32 页的注)。□

接下来需要描述 $K_\pm^{(\tau)}$ 在对角线与 $\gamma_\lambda^\pm$ 的图的交集附近的情形，即 [DWZ25，引理 4.14]的对应情形。

引理 4.16. 设 $\theta_0\in\mathbb{S}^1$ 满足 $\gamma_\lambda^\pm(\theta_0)=\theta_0$。存在 $\tau_0>0$、 θ_0 在 $\mathbb{S}^1$ 中的一个邻域U以及光滑函数 a,ψ：$[0,\tau_0)\times U\to\mathbb{C}$和 R：$[0,\tau_0)\times U\times U\to\mathbb{C}$，使得对于 $\theta,\theta'\in U$和 $\tau\in(0,\tau_0)$，有

$$K_\pm^{(\tau)}(\theta,\theta') = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\det(D_x\Xi(\tau,z(\theta')))(\theta-\theta'\pm i0)^{-1}$$
$$+a(\tau,\theta')(\gamma_\lambda^\pm(\theta)-\theta'\pm i\psi(\tau,\theta'))^{-1}+R(\tau,\theta,\theta').$$

此外，对于足够小的 τ，我们有 $\operatorname{Re}\ \psi(\tau,\theta')>0$，且 $a(0,\theta') = \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{1}{\gamma_\lambda^{\pm\prime}(\theta')}$。

证明。 与引理的证明 4.15类似，我们应用引理 4.4 可知，(4.12) 对 $\tau>0$ 足够小且 θ, θ' 接近 θ_0时成立。使用莫尔斯坐标[21] 对 $\theta\mapsto\ell_\lambda^\pm(z(\theta))$ 在 θ_0附近，我们发现存在一个光滑函数 G_0，定义在θ_0， θ_0) 的一个邻域上，且该邻域位于$\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$，使得

$$\ell_\lambda^\pm(z(\theta)-z(\theta'))=G_0(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^\pm(\theta)-\theta')(\theta-\theta')$$

对于 G_0 的区域中的 (θ,θ')。此外， G_0 是实值的，且 $G_0(\theta_0,\theta_0) = -\ell_\lambda^\pm(z''(\theta_0))/2$。应用泰勒公式，我们发现存在光滑函数 G_1,G_2，使得（当 $\tau\geq0$ 足够小时，且 θ,θ' 接近 θ_0 时）

$$v_\pm(z(\theta),z(\theta'))\ell_\lambda^\mp(z(\theta)-z(\theta'))=G_1(\theta,\theta')(\theta-\theta')$$

[21]若 η表示将 $\theta\mapsto\ell_\lambda^\pm(z(\theta))$ 化为 $\eta\mapsto\ell_\lambda^\pm(z(\theta_0))+\frac{\ell_\lambda^\pm}{(z''(\theta_0))2}\eta^2$的莫尔斯坐标，则$\gamma_\lambda^\pm$ 在这些坐标下由 $\eta\mapsto-\eta$给出。量 $\ell_\lambda^\pm(z(\theta)-z(\theta'))$ 在这些坐标下由 $\ell_\lambda^\pm(z''(\theta_0))2(\eta-\eta')(\eta+\eta')$ 给出。

并且 $H(\tau, z(\theta)\ z(\theta'))\ = G_2(\tau,\theta,\theta')(\theta-\theta')$。此外， G_1 是实值的，且 $G_1(\theta_0,\theta_0)\ =v_\pm(z(\theta_0)\ z(\theta_0))\ell_\lambda^\mp(z'(\theta_0))$ 非零。与上文一样，我们将使用记号 $q_\pm(\tau,\theta,\theta')\ =1+\tau w_\pm(z(\theta)\ z(\theta'))$。

利用刚刚引入的辅助函数，(4.12) 变为

$$\begin{aligned}&\ell_\lambda^\pm(\Xi(\tau,z(\theta))-\Xi(\tau,z(\theta'))\\&\qquad=q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^\pm(\theta)-\theta')(\theta-\theta')\\&\qquad\qquad+i\tau G_1(\theta,\theta')(\theta-\theta')+\tau^2G_2(\tau,\theta,\theta')(\theta-\theta').\end{aligned}\tag{4.13}$$

于是我们声称，与引理 4.14 中一样，有

$$\begin{aligned}&K_\pm^{(\tau)}(\theta,\theta')\\&\quad=\frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\det(D_x\Xi(\tau,z(\theta')))(\theta-\theta'\pm i0)^{-1}\\&\qquad\times\frac{\ell_\lambda^\pm(D_x\Xi(\tau,z(\theta))\cdot z'(\theta))}{q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^\pm(\theta)-\theta')+i\tau G_1(\theta,\theta')+\tau^2G_2(\tau,\theta,\theta')}\end{aligned}\tag{4.14}$$

当 τ 足够小时（且 θ、 θ' 接近 θ_0时），分母非零，这是因为$G_1(\theta_0,\ \theta_0)\ \neq 0$。为得到这个公式，我们需要像引理 4.14 的证明中那样，证明

$$\pm\operatorname{Im}\frac{k(0,\tau,\theta)}{q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^\pm(\theta)-\theta')+i\tau G_1(\theta,\theta')+\tau^2G_2(\tau,\theta,\theta')}$$

严格为正（当 τ 足够小时，且 k 如（4.11）中所示）。等价地，我们可以证明

$$\mp\operatorname{Im}\frac{q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^\pm(\theta)-\theta')+i\tau G_1(\theta,\theta')+\tau^2G_2(\tau,\theta,\theta')}{k(0,\tau,\theta)}$$

严格为正。这个虚部在 $\tau=0$ 处为零。因此，我们只需证明它关于 τ 的导数在 $\tau=0$处具有正确的符号。根据连续性，只需在 $\theta=\theta'=\theta_0$处证明；此时关于 τ 的导数为

$$\mp\frac{G_1(\theta_0,\theta_0)}{k(0,0,\theta_0)}=\mp v_\pm(z(\theta_0),z(\theta_0))\frac{\ell_\lambda^\mp(z'(\theta_0))}{\ell_\lambda^\pm(\mathbf{n}(\theta_0))}.\tag{4.15}$$

注意，由 $x\ \mapsto(\pm\ell_\lambda^\pm(x)\ \ell_\lambda^\mp(x))$ 给出的 $\mathbb{R}^2$ 自同态是保向的（其行列式为 $2/(\lambda\sqrt{1-\lambda^2})$）。如果我们使用 $(z'(\theta_0),\mathbf{n}(\theta_0))$ 作为起始空间的基，并使用 $\mathbb{R}^2$ 的标准基作为像的基，那么这个线性映射的矩阵为

$$\begin{bmatrix}0 & \pm\ell_\lambda^\pm(\mathbf{n}(\theta_0))\\ \ell_\lambda^\mp(z'(\theta_0)) & \ell_\lambda^\mp(\mathbf{n}(\theta_0)\end{bmatrix}.$$

由于（z'（θ_0），$\mathbf{n}$（θ_0））是正向定向的，因此可知 $\mp\ell_\lambda^\mp$（z'（θ_0））$\ell_\lambda^\pm$（$\mathbf{n}$（θ_0））为正，因而（4.15）为正。因此，我们有（4.14）。

对（4.13）关于 θ 求导，可得

$$\begin{aligned}
&\ell_\lambda^{\pm}(D_x\Xi(\tau,z(\theta))\cdot z'(\theta))\\
&\quad= q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^{\pm}(\theta)-\theta')+i\tau G_1(\theta,\theta')+\tau^2G_2(\tau,\theta,\theta')\\
&\qquad+(\theta-\theta')\partial_\theta\Big(q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^{\pm}(\theta)-\theta')\\
&\qquad\qquad+i\tau G_1(\theta,\theta')+\tau^2G_2(\tau,\theta,\theta')\Big),
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
K_\pm^{(\tau)}(\theta,\theta') &= \frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\det(D_x\Xi(\tau,z(\theta')))(\theta-\theta'\pm i0)^{-1}\\
&\qquad+\frac{i}{4\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\det(D_x\Xi(\tau,z(\theta')))V(\tau,\theta,\theta'),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
V(\tau,\theta,\theta') &= \frac{\partial_\theta(q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^{\pm}(\theta)-\theta')+i\tau G_1(\theta,\theta')+\tau^2G_2(\tau,\theta,\theta'))}{q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^{\pm}(\theta)-\theta')+i\tau G_1(\theta,\theta')+\tau^2G_2(\tau,\theta,\theta')}\\
&= \frac{\partial_\theta(q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')(\gamma_\lambda^{\pm}(\theta)-\theta')+i\tau G_1(\theta,\theta')+\tau^2G_2(\tau,\theta,\theta'))}{q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')}\\
&\qquad\times\left(\gamma_\lambda^{\pm}(\theta)-\theta'+i\tau\frac{G_1(\theta,\theta')-i\tau G_2(\tau,\theta,\theta')}{q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

在 $V(\tau,\theta,\theta')$ 的最后一个表达式中，第一个因子关于 τ,θ,θ' 是光滑的（因为 $q_\pm(0,\theta,\theta')=1$，且 $G_0(\theta_0,\theta_0)$ 非零）。当 τ 足够小且 θ,θ' 接近 θ_0 时，$\pm^{G_1(\theta,\theta')-i\tau G_2(\tau,\theta,\theta')}q_\pm(\tau,\theta,\theta')G_0(\theta,\theta')$ 的实部与

$$\pm\frac{G_1(\theta_0,\theta_0)}{G_0(\theta_0,\theta_0)}=\mp2v_\pm(z(\theta_0),z(\theta_0))\frac{\ell_\lambda^{\mp}(z'(\theta_0))}{\ell_\lambda^{\pm}(z''(\theta_0))}. \tag{4.16}$$

由于 $\mu^{\pm}(z(\theta_0))=0$，由 [DWZ25，引理 2.2] 可知，对每个 $x\in\Omega$，都有 $\mp\mu^{\mp}(z(\theta_0))\ell_\lambda^{\pm}(x-z(\theta_0))>0$。由于 $z(\theta_0)$ 是 $\ell_\lambda^{\pm}$ 在 Ω 上的全局极值，对任意 $x\in\Omega$，$\ell_\lambda^{\pm}(x-z(\theta_0))$ 和 $\ell_\lambda^{\pm}(z''(\theta_0))$ 的符号相同。因此 $\mp\ell_\lambda^{\mp}(z'(\theta_0))\ell_\lambda^{\pm}(z''(\theta_0))>0$，从而 (4.16) 为正。因此，结论由 [DWZ25，引理 3.6] 得出（另见该文献第 32 页的注）。□

4.5. 命题 4.1 的证明。引理 4.13、4.14、4.15 和 4.16 是 [DWZ25]，中引理 4.11、4.12、4.13 和 4.14 的类似结果，其中将该参考文献中的参数“$\epsilon=\operatorname{Im}\omega$”替换为我们的变形参数 τ。因此，我们可以证明 [DWZ25] 中所有由这些引理推导出的结果。特别地，当 $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}$ 趋于 0 时，我们得到了 τ 的微局部描述，见 [DWZ25，命题 4.15]。结合引理 4.12，可得以下收敛结果（这类似于 [DWZ25，引理 4.16]，其中该参考文献中的参数 k 设为 0）。

引理 4.17。 对于任意 r， $s \in \mathbb{R}$ 满足 $r+1>s$，算子 $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}$ 当 τ 趋于 0 时收敛到 $\mathcal{C}_{\lambda+i0}$，关于算子范数[22] $H^r(\partial\Omega;\, T^*\partial\Omega \otimes \mathbb{C}) \to H^s(\partial\Omega)$。

[DWZ25，§5] 中的分析也适用于我们的情况。特别地，我们可以陈述“微局部 Lasota–Yorke 不等式”，其证明见 [DWZ25，命题 5.3 和 5.4]。

命题 4.18. 存在 $\tau_0 > 0$ 使得以下结论成立。设 $\beta > 0$ 和 $N \in \mathbb{R}$。存在 $N_0 \in \mathbb{R}$ 和常数 $C>0$，使得对于每个 $v \in \Gamma(T^*\partial\Omega \otimes \mathbb{C})$ 以及 $\tau \in (0,\tau_0)$，我们有

$$\|v\|_{H^{-\frac{1}{2}-\beta}} \le C \left\| \mathcal{C}_\lambda^{(\tau)} v \right\|_{H^{N_0}} + C\|v\|_{H^{-N}}.$$

此外，如果 p 是 [DWZ25, (3-20)], 中的一个半范数，则存在 $N_0 \in \mathbb{R}$ 和常数 $C>0$，使得对于每个 $v \in \Gamma(T^*\partial\Omega \otimes \mathbb{C})$ 以及 $\tau \in (0,\tau_0)$，我们有

$$p(v) \le C \left\| \mathcal{C}_\lambda^{(\tau)} v \right\|_{H^{N_0}} + C\|v\|_{H^{-N}}.$$

注 4.19. 注意，在引理 4.13、4.14、4.15 和 4.16 中，有一个因子 $D_x\Xi(\tau,\theta')$，而 [DWZ25] 中对应的陈述并未出现该因子。这个因子不影响微局部 Lasota–Yorke 不等式的证明。事实上，若令 m_τ 为乘以 $D_x\Xi(\tau,\cdot)$ 的算子，则可以将 $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}$ 分解为 $\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)} = \widetilde{\mathcal{C}}_\lambda^{(\tau)} m_\tau$，其中 $\widetilde{\mathcal{C}}_\lambda^{(\tau)}$ 满足引理 4.13、4.14、4.15 和 4.16，但不含因子 $D_x\Xi(\tau,\theta')$。[DWZ25, §5] 中的分析可以用来证明 $\widetilde{\mathcal{C}}_\lambda^{(\tau)}$ 满足微局部 Lasota–Yorke 不等式。由于当 τ 趋于 0 时，$D_x\Xi(\tau,\cdot)$ 作为光滑函数收敛于 1，因此算子 m_τ 是从 H^s 到其自身的同构，且当 τ 趋于 0 并且对任意 $s \in \mathbb{R}$时，这一结论是一致的。因此，$\mathcal{C}_\lambda^{(\tau)}$ 也满足微局部 Lasota–Yorke 不等式。

现在我们可以证明命题4.1。

命题 4.1 的证明。我们先证明存在 $\tau_0 > 0$，使得对于每个$\tau \in (0,\tau_0)$，算子 $P(\tau)_{\lambda,0}: H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 可逆。我们用反证法证明，并假设存在一个趋于 0 的序列 $(\tau_n)_{n\ge1}$，使得对于每个 $n \ge 1$，算子 $P(\tau_n)_{\lambda,0}: H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 都不可逆。根据引理 4.2，对于每个 $n \ge 1$，存在 $H^2(\Omega) \cap H_0^1$中的一个非零元素 u_n，使得 $P^{(\tau_n)}_{\lambda,0}\, u_n = 0$。由于 $P(\tau_n)_{\lambda,0}$ 是正规椭圆的（见引理 4.2 的证明），函数 u_n 在 Ω 上光滑，参见例如 [LM70，第 8 章，定理 1.2]。因此，引理 4.10 蕴含，对于每个 $n \ge 1$，存在 $v_n \in \Gamma(T^*\partial\Omega)$，使得 $u_n = S^{(\tau_n)}_\lambda v_n$ 且 $E^{(\tau_n)}_\lambda(\mathcal{I}(v_n))_{|M\setminus\overline{\Omega}} = 0$。

[22] $\partial\Omega$ 上流的 Sobolev空间范数可通过将 $\partial\Omega$ 上的流与分布相对应来定义，例如使用任意光滑非消失参考1-形式。

由 $u_n = S^{(\tau_n)}{}_\lambda \quad v_n$，我们推得 v_n 非零。因此，我们可以对 u_n进行归一化，使得 $\|v_n\|_{H^{-1}} = 1$。还要注意， $\mathcal{C}^{(\tau_n)}{}_\lambda \quad v_n = u_{n|\partial\Omega} = 0$。因此，应用命题 4.18 可知，对于每个$\beta > 0$，序列 $(v_n)_{n\geq 1}$在 $H^{-\frac{1}{2}-\beta}$中有界。经过抽取子序列后，我们可以假设，对于每个$\beta > 0$，$(v_n)_{n\geq 1}$在 $H^{-\frac{1}{2}-\beta}$中收敛到某个极限 v，且满足 $\|v\|_{H^{-1}} = 1$。此外，由命题 4.18 的第二部分可知， v属于来自 [DWZ25] 的共法分布空间 $I^{\frac{1}{4}+}(\partial\Omega \quad N_+^*\Sigma_- \cup N_-^*\Sigma_+)$。

由引理 4.11 可知 $(E_{\lambda+i0} * \mathcal{I}(v))_{|M\setminus\overline{\Omega}} = 0$，由引理 4.17 可知$\mathcal{C}_{\lambda+i0}v = 0$。这两个条件与 $v \in I^{\frac{1}{4}+}(\partial\Omega \quad N_+^*\Sigma_- \cup N_-^*\Sigma_+)$ 一起，使我们可以应用[DWZ25，引理 7.2]，从而得到 $v = 0$，这与假设矛盾。请注意，我们证明的支撑条件 $((E_{\lambda+i0} * \mathcal{I}(v))_{|M\setminus\overline{\Omega}} = 0)$ 略弱于 [DWZ25，引理 7.2] 中的条件（该条件要求 $(E_{\lambda+i0} * \mathcal{I}(v))_{|\mathbb{R}^2\setminus\Omega} = 0$）。不过，稍加检查证明即可发现，我们证明的条件已经足够。

我们证明了存在 $\tau_0 > 0$，使得对于每个 $\tau \in (0, \tau_0)$，算子 $P^{(\tau)}_{\lambda\,0}, : H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 都是可逆的。只要将 τ_0 取得更小，由引理 4.2 可知，存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$ 和 $\tau \in (0, \tau_0)$，算子 $P^{(\tau)}_{\omega\,0}$ 是正规椭圆的，且作为算子$H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$，它是 Fredholm 的且指标为零。取 $\tau_1 \in (0, \tau_0)$。由于 $P(\tau_1)_{\lambda,0}$ 可逆，我们可以假设，只要将 $\delta > 0$ 取得更小，对于每个 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$， $P^{(\tau_1)}{}_{\omega,0}$ 都可逆。接着，按照引理 4.3 的证明方法，我们可以证明，对于 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$， $P^{(\tau)}_{\omega\,0}$ 的核的维数是 $\tau \in (0, \tau_0)$ 的常函数。由于 $P^{(\tau_1)}{}_{\omega,0}$ 可逆，我们可知 $P^{(\tau)}_{\omega\,0}$ 也可逆。结合引理 4.3，即得命题 4.1 的证明。□

我们通过汇总定理 2 的证明的所有要点来结束本节。

定理 2 的证明。 回顾一下，Ω_τ 是在 τ 一开始取足够小时定义的，见§3，基于~§§2.2–2.3中的构造。我们将令 $\Omega = \Omega_\tau$，其中某个 $\tau > 0$足够小。根据~注 2.11，我们知道 $\partial\Omega \subseteq (\partial\Omega)_{\mathbb{C}}$。

根据命题 4.1，存在 $\delta > 0$，只要 $\tau > 0$ 足够小，算子 $P_{\omega,0}$： $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 对每个 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i[0, +\infty)$ 都是可逆的。一旦固定满足此性质的 τ，我们就可以进一步减小 $\delta > 0$，使得 $P_{\omega,0}$： $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 对每个 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i(-\delta, +\infty)$ 都可逆，因为可逆算子集合是开集。□

5. Vanishing viscosity limit

本节旨在证明定理 1。我们首先证明当 $\nu > 0$ 足够小时，算子 $P_{\omega}^{(\tau)},_{\nu}$ 的先验估计具有一致性，并采用 Frank [Fra79] 在 §5.1 中的工作。完成上述准备后，我们便可在 1 § 中证明定理 5.2。

5.1. 变形区域上的先验估计。 我们希望应用[Fra79] 中的结果来研究算子 $P_{\omega,\ \nu}$ 当 ν 趋于 0 时。为此，对于 r， $s \in \mathbb{R}$ 和$\nu > 0$ 一个新的范数[23] 在 H^{r+s}（$\mathbb{R}^2$）上：

$$\|u\|_{r,s,\nu}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \langle \xi \rangle^{2r} \langle \sqrt{\nu}\xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi, \ u \in H^{r+s}(\mathbb{R}^2). \tag{5.1}$$

我们主要使用 Ω 上的类似范数，即

$$\|u\|_{r,s,\nu} = \inf_{\substack{v \in H^{r+s}(\mathbb{R}^2) \\ v_{|\Omega} = u}} \|v\|_{r,s,\nu}, \ u \in H^{r+s}(\Omega).$$

注意，参数 r、 s 和 ν 在范数$\|\cdot\|_{r、\ s、\ \nu}$的定义中所起的作用截然不同。参数 r 和 s 衡量正则性（如 Sobolev空间上的通常范数），而 ν 是出现在算子$P_{\omega、\ \nu}$中的黏度参数。我们使用依赖于 ν 的范数，以便在以下估计中体现$P_{\omega、\ \nu}$ 的椭圆性丧失，因为 ν趋于 0:

命题 5.1. 存在 $\tau_0 > 0$，使得对于每个 $\tau \in (0, \tau_0)$ 以及每个满足 $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{2}$ 和 $r + s > \frac{3}{2}$ 的 r、 s、 $N \in \mathbb{R}$，存在 C、 $\nu_0 > 0$，使得对于每个 $\nu \in (0, \nu_0)$ $\omega \in \mathbb{D}(\lambda, C^{-1})$ 以及满足 $u_{|\partial\Omega} = 0$ 和 $\mathrm{d}u_{|\partial\Omega} = 0$ 的 $u \in H^{r+s}(\mathbb{R}^2)$，我们有

$$\|u\|_{r,s,\nu} \leq C \left\| P_{\omega,\nu}^{(\tau)} u \right\|_{r-2,s-2,\nu} + C \|u\|_{H^{-N}}. \tag{5.2}$$

命题5.1 首先将在以下情形下得到 $\omega = \lambda$ 通过应用 [Fra79中的定理 3.5。2]。为了应用该定理，我们需要验证边值问题（未知量为 u）

$$\begin{cases} P_{\lambda,\nu}^{(\tau)} u = f \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi_1 \\ \partial_{\mathbf{n}} u_{|\partial\Omega} = \varphi_2 \end{cases} \tag{5.3}$$

按照 [Fra79，§35]中的定义是椭圆的且强制的。这里， $\partial_{\mathbf{n}}$ 表示沿着 $\partial\Omega$ 的内指法向量方向的微分。对于 $\tau > 0$足够小的情形，令 $x \in \Omega$ $\nu \geq 0$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^2$

$$A_\tau(\nu, x, \xi) = p_{\lambda,0}^{(\tau)}(x, \xi) + i\lambda\nu q^{(\tau)}(x, \xi),$$

其中， $q^{(\tau)}$ 表示算子 Δ^2 作用于 Ω 上τ 、在由 $\Xi(\tau,\ \cdot)$给出的坐标中的符号，见§3。

[23]对于 $\xi \in \mathbb{R}^2$，日式括号按通常方式定义为 $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$。

注 5.2. 我们的符号与 Frank 在 [Fra79], 中的符号略有不同。我们在此强调这些差异，以帮助读者理解我们如何应用该参考文献中的结果。

趋于 0 的参数 [Fra79] 称为 ϵ。需要注意的是，在我们的设定中，与 ϵ 相对应的量并非 ν，而是 $\sqrt{\nu}$，这可由式（5.1）看出。Frank 并未直接使用范数（5.1），而是采用范数

$$\|u\|^2_{(s_1,s_2,s_3)} = \epsilon^{-2s_1} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s_2} \langle \epsilon \xi \rangle^{2s_3} |\hat{u}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi,$$

参见 [Fra79, （1.1.1）]。注意，小参数 ϵ 并未出现在范数的记号中，但仍有三个参数 s_1、s_2、s_3。数值 s_2 和 s_3 分别对应于式（r 和 s 中的 5.1）。我们决定去掉参数 s_1，因为它仅通过范数中的额外因子 ϵ^{-s_2} 产生影响。这个额外参数可用于去除式（$u_{|\partial\Omega} = 0$ 5.2）中的假设 d，并改为在右端纳入诺伊曼边界数据的范数，参见 [Fra79，定理 3.5。2]。

我们从椭圆性估计开始研究（5.3）。

引理 5.3。存在 $\tau_0 > 0$ 使得对每个 $\tau \in (0, \tau_0)$，问题 (5.3) 在 [Fra79]的意义下是椭圆的。也就是说，存在常数 $C > 0$ 使得对每个$x \in \Omega$ $\xi \in \mathbb{R}^2$ 以及 $\nu \geq 0$，我们有

$$|A_\tau(\nu, x, \xi)| \geq C^{-1} |\xi|^2 \langle \sqrt{\nu} \xi \rangle^2.$$

证明。根据引理 3.1，存在常数 $C > 0$ 使得当 $x \in \Omega$ $\xi \in \mathbb{R}^2$且 $\tau > 0$ 足够小时，我们有

$$\operatorname{Im} p^{(\tau)}_{\lambda,0}(x, \xi) + C\tau |\operatorname{Re} p^{(\tau)}_{\lambda,0}(x, \xi)| \geq C^{-1} \tau |\xi|^2.$$

由于 Δ^2 在 $\mathbb{R}^2$ 上的符号为正且是椭圆的，因此，只要将 C取得更大一些，对于 $x \in \Omega$ $\xi \in \mathbb{R}^2$ 且 $\tau > 0$ 足够小时，我们有

$$\operatorname{Im}(i\lambda q^{(\tau)}(x, \xi)) \geq C^{-1} |\xi|^4 \text{ and } |\operatorname{Re}(i\lambda q^{(\tau)}(x, \xi))| \leq C\tau |\xi|^4.$$

将所有这些估计相加，得到

$$\operatorname{Im} A_\tau(\nu, x, \xi) + C\tau |\operatorname{Re} A_\tau(\nu, x, \xi)| \geq C^{-1} \tau |\xi|^2 + (C^{-1} - C^2\tau^2) \nu |\xi|^4.$$

将 τ 取得足够小，并可能改变 C的值，我们得到

$$\operatorname{Im} A_\tau(\nu, x, \xi,) + C\tau |\operatorname{Re} A_\tau(\nu, x, \xi)| \geq C^{-1} |\xi|^2 (\tau + \nu |\xi|^2),$$

由此即可得出结果。 □

现在我们证明[Fra79第105]页中的强制性条件。注意，由于我们采用狄利克雷边界条件和诺伊曼边界条件，强制性条件的表述要简单得多。

引理 5.4。 存在 $\tau_0 > 0$ ，使得对于每个 $\tau \in (0, \tau_0)$ ，问题 (5.3) 满足 [Fra79]意义下的强制性。也就是说，若 $x \in \partial\Omega$,$\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ 是 Ω 的内共法向量，且 x 处，并且 $\xi \in \mathbb{R}^2$ 不与 $\mathbf{n}$ 成比例，则有以下结论：

(i) 多项式 $z \mapsto q^{(\tau)}(x, \xi + z\mathbf{n})$ 在实轴两侧各有两个根；(ii) 多项式 $z \mapsto A_\tau(0, x, \xi + z\mathbf{n})$ 在实轴两侧各有一个根；(iii) 对每个 $\nu \in \mathbb{R}_+^*$，多项式 $z \mapsto A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n})$ 在实轴两侧各有两个根；(iv) 多项式 $z \mapsto z^{-2}A_\tau(1, x, z\mathbf{n})$ 在实轴两侧各有一个根。

证明。 我们先证明 (i)。多项式 $q^{(\tau)}(x, \cdot)$ 在 τ 足够小时是椭圆的（即使在 $\tau = 0$时也是如此）。因此， $z \mapsto q^{(\tau)}(x, \xi + z\mathbf{n})$ 在实轴上没有根。由于其根随参数 τ连续变化，因此实轴两侧的根数不取决于 τ。因此，我们只需证明 $z \mapsto q^{(0)}(x, \xi + z\mathbf{n})$ 在实轴两侧各有两个根。由于该多项式的系数均为实数，因此实轴两侧的根数相同。

Th条件 (ii) 由 $P_{\lambda\,0}^{(\tau)}$ 的适定椭圆性可得，见引理 4.2。

为证明 (iii)，注意到由引理 5.3 可知，对于每个 $\nu \in (0, +\infty)$，多项式 $z \mapsto A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n})$ 在实轴上没有根。因此，该多项式在实轴两侧的根数不依赖于 ν。当 $+\infty$ 趋于 ν 时，多项式 $z \mapsto \nu^{-1}A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n})$ 的系数收敛到 $z \mapsto q^{(\tau)}(x, \xi + z\mathbf{n})$ 的系数。因此，由 (i) 可知，当 ν 足够大时，多项式 $z \mapsto A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n})$ 在实轴两侧各有两个根。

剩下要证明 (iv)。注意，当 ν趋于 0 时，多项式 $z \mapsto A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n})$ 的系数收敛到 $z \mapsto A_\tau(0, x, \xi + z\mathbf{n})$ 的系数。因此，由 Rouch´e 定理可知，存在一个包含 $z \mapsto A_\tau(0, x, \xi + z\mathbf{n})$ 的根的邻域 U，我们可以将其选为有界的，使得当 ν 充分小时，$z \mapsto A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n})$ 在 U 内恰有两个根。此外， $z \mapsto A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n})$ 在 U 内的根收敛到 $z \mapsto A_\tau(0, x, \xi + z\mathbf{n})$ 的根。因此，由 (ii) 可知，$z \mapsto A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n})$ 在 U 内的实轴两侧各恰有一个根。接着利用齐次性 $A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n}) = \nu^{-1}A_\tau(1, x, \sqrt{\nu}\xi + \sqrt{\nu}z\mathbf{n})$，可知存在一个包含 $z \mapsto A_\tau(1, x, z\mathbf{n})$ 的非零根的邻域 V，我们可以将其选为与零保持正距离的邻域，使得当 ν 充分小时，多项式 $z \mapsto A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n})$ 在 $\sqrt{\nu}^{-1}V$ 内恰有两个根（由引理 5.3 可知， $z \mapsto A_\tau(z, x, z\mathbf{n})$ 恰有两个非零根，且它们不在实轴上）。当 ν 充分小时， $U \cap \sqrt{\nu}^{-1}V = \emptyset$ ，并且由 (iii) 可知，$z \mapsto A_\tau(\nu, x, \xi + z\mathbf{n})$ 在$\sqrt{\nu}^{1}V$内的实轴两侧各恰有两个根。乘以 $\sqrt{\nu}$ 后，这些根收敛到$z \mapsto A_\tau(1, x, z\mathbf{n})$ 的非零根，由此证明该多项式在实轴两侧各恰有一个非零根，从而证明 (iv)。□

现在我们可以证明命题 5.1。

命题 *5.1* 的证明。 引理 5.3 和 5.4 使我们可以应用 [Fra79，定理 3.5。2],由此可证明 (5.2) 对 $\omega = \lambda$成立，见注 5.2。通过标准的扰动论证，要证明当 ω 接近 λ时，估计 (5.2) 仍然成立，只需注意到存在常数 $C > 0$，使得当 ω 接近 λ 且 $u \in H^{r+s}(\Omega)$ 时，有

$$\left\| \left(P_{\omega,\nu}^{(\tau)} - P_{\lambda,\nu}^{(\tau)} \right) u \right\|_{r-2,s-2,\nu} \leq C|\omega - \lambda| \, \|u\|_{r,s,\nu} . \tag{5.4}$$

要证明这样的估计，只需注意到

$$P_{\omega,\nu}^{(\tau)} - P_{\lambda,\nu}^{(\tau)} = (\lambda - \omega)(\lambda + \omega)\Delta^{(\tau)} + i(\omega - \lambda)\nu(\Delta^{(\tau)})^2.$$

估计 (5.4) 成立，因为容易验证 $\Delta^{(\tau)}$ 和 $\nu(\Delta^{(\tau)})^2$ 关于 $\nu > 0$一致有界，作为从 $H^{r+s}(\Omega)$ 到 $H^{r+s-4}(\Omega)$ 的算子，分别赋予范数$\|\cdot\|_{r,\, s,\, \nu}$ 和 $\|\cdot\|_{r-2,\, s-2,\, \nu}$ (见 [Fra79，命题 2.2。1])。□

5.2. 定理 **1** 的证明。 我们先准备定理 1 的证明，给出一条技术性结论。

引理 5.5. 存在 $\tau_0 > 0$，使得对每个 $\omega \in (0, 1)+i\mathbb{R}$、$\nu > 0$ 和 $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$，算子 $P_{(\tau)\omega,\nu}$: $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是指标为零的 Fredholm 算子。此外，若$\tau' \in (-\tau_0, \tau_0)$，则

$$\dim \ker P_{\lambda,\nu}^{(\tau)} = \dim \ker P_{\lambda,\nu}^{(\tau')}.$$

证明。注意，$(\Delta^{(\tau)})^2$ 是 Δ^2 的一个扰动。因此，取足够小的 τ_0，即可确保对每个 $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$，算子 $(\Delta^{(\tau)})^2$ 都是强椭圆的（见 LM68，第 2 章，定义 1.2]）。由于 $i\nu\omega(\Delta^{(\tau)})^2$ 是 $P(\tau)\omega,\nu$ 中的最高阶项，我们得出 $P_{\omega\, 0}^{(\tau)}$ 是强椭圆的，因而也是正规椭圆的；对每个 $\omega \in (0, 1) + i\mathbb{R}, \nu > 0$ 以及 $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$，均如此。由此可知， $P(\tau)\omega,\nu$: $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是指标为零的 Fredholm 算子，见 LM68，第 2 章，(8.14)]。

于是我们可以证明，如果 $\omega \in (0,\ 1) + i\mathbb{R}$ 且 $\nu > 0$，则函数 $\tau \mapsto \dim \ker P_{\lambda\, \nu}^{(\tau)}$, 在（$-\tau_0$，$\tau_0$）上为常数，正如我们在引理 4.3 的证明中所做的那样。在这里的证明中，我们同样使用以下事实：由于 $P_{\omega}^{(\tau),\ \nu}$ 是正规椭圆的，狄利克雷边界条件和诺伊曼边界条件覆盖了 $P_{\omega}^{(\tau),\ \nu}$ 在 $\partial\Omega$ 上。注意，我们在这里使用了如下事实：对于 $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$，$\Omega_{\tau_0}$ 的边界包含于（$\partial\Omega$）$_{\mathbb{C}}$ 中。□

现在我们准备证明定理 1。

定理*1*的证明。我们先证明存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $\nu > 0$ 和$\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i[0, +\infty)$，算子 $P_{\omega,\nu}$: $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是可逆的。

由于引理 5.5，我们只需证明该算子是单射。因此，假设 $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ 满足 $P_{\omega,\nu}u = 0$。分部积分得到：

$$0 = \operatorname{Im}\langle P_{\omega,\nu}u, u\rangle_{L^2} = \operatorname{Re}\omega(\nu \|\Delta u\|_{L^2}^2 + 2\operatorname{Im}\omega \|\nabla u\|_{L^2}^2).$$

通过令 δ 足够小，我们可以确保 $\operatorname{Re}\omega \neq 0$。由于 $\nu > 0$ 且 $\operatorname{Im}\omega \geq 0$，因此得到 $\Delta u = 0$；又因为 u 满足狄利克雷边界条件，所以可得 $u = 0$。

我们证明了当 $\omega \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) + i[0, +\infty)$ 且 $\nu > 0$ 时，$P_{\omega,\nu}$ 的可逆性。为了完成定理 1 的证明，我们只需证明存在 $\epsilon > 0$，使得对于任意 $\omega \in \mathbb{D}(\lambda, \epsilon)$ 和 $\nu \in (0, \epsilon)$，算子 $P_{\omega,\nu}$：$H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是单射。我们将用反证法证明这一点，因此假设存在复数序列 $(\omega_n)_{n\geq 0}$ 和正实数序列 $(\nu_n)_{n\geq 0}$，使得 $\omega_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda$ 且 $\nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$，并且对于每个 $n \geq 0$，P_{ω_n,ν_n}：$H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 的核均非平凡。

令 $\tau_0 > 0$ 足够小，使得命题 4.1 和 5.1 以及引理 4.2 和 5.5 成立。然后取 $\tau \in (0, \tau_0)$。根据序列 $(\omega_n)_{n\geq 0}$ 和 (ν_n) 的构造，由引理 5.5 可知，对每个 $n \geq 0$，存在非零的 $u_n \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$，使得 $P_{\omega_n,\nu_n}^{(\tau)} u_n = 0$。我们将 $L^2(\Omega)$ 中的 u_n 归一化。取 $r = 1, s = 2$ 和 $N = 0$，应用命题 5.1，可得序列 $(\|u_n\|_{1,3,\nu_n})_{n\geq 0}$ 一致有界，因此 $(u_n)_{n\geq 0}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中一致有界。经过抽取子列后，不妨设 $(u_n)_{n\geq 0}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛到某个函数 $u \in H_0^1(\Omega)$。由于在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛蕴含在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，我们得到 $\|u\|_{L^2} = 1$，特别是 u 非零。此外，分布收敛意味着 $P_{\lambda,0}^{(\tau)} u = 0$。于是由引理 4.2 和 A.1 可得 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，而命题 4.1 推出 $u = 0$，这就产生了矛盾。□

注 5.6. 令 τ 如定理 1 的证明中所示，利用命题 5.1 中的先验估计，我们可以证明，当 ν 趋于 0 时，逆算子 $(P_{\lambda,\nu}^{(\tau)})^{-1}$ 在从 $H^s(\Omega)$ 到 $H^{s+2}(\Omega)$ 的算子强算子拓扑下，对每个 $s \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ 收敛于 $(P_{\lambda,0}^{(\tau)})^{-1}$。

很有可能可以建立解 u_ν 的渐近展开，其中 $P_{\lambda,\nu}^{(\tau)} u_\nu = f$ 当 ν 趋于 0 时（其中 f 是 Ω 上的光滑函数）。该展开将包含光滑项和边界层，参见例如 [VL62, Vol06]。

注 5.7。定理 1 的证明可以加以调整，以处理六阶方程（1.2）。在这种情况下，我们考虑六阶算子族

$$Q_{\omega,\nu} = \partial_{x_2}^2 - \omega^2\Delta + 2i\omega\nu\Delta^2 + \nu^2\Delta^3, \quad \omega \in \mathbb{C}, \quad \nu \in \mathbb{R}_+.$$

这里，我们将 E 替换为 ν，以与论文其余部分保持一致。注意，$Q_{\omega,\nu}$ 和 $P_{\omega,\nu}$ 仅相差一项 $\nu^2\Delta^3$。

在定理 1 的假设下，我们可以证明存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $\omega \in (\lambda-\delta, \lambda+\delta) + i(-\delta, +\infty)$ 以及 $\nu \in (0, \delta)$，算子 $Q_{\omega,\nu}$：$H^6(\Omega) \cap H_0^3(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是可逆的。证明沿用定理 1 证明中的相同步骤，关键在于当 $\tau > 0$ 足够小时，为算子 $Q_\omega^{(\tau)},_\nu$ 得到一个先验估计。对 $Q_\omega^{(\tau)},_\nu$ 的估计与 (5.2) 类似，但现在右端包含范数 $\|\cdot\|_{r-2,s-4}$，并且对 r 和 s 的条件变为 $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{2}$ 和 $r + s > \frac{5}{2}$。如果我们证明引理 5.3 和 5.4 的类似结论，那么 $Q_\omega^{(\tau)},_\nu$ 的先验估计也可由 [Fra79, 定理 3.5.2] 推得。

为证明引理 5.3 的对应结论，现在我们必须考虑 $\tau > 0$ 足够小时，$x \in \Omega$ $\xi \in \mathbb{R}^2$ 以及 $\nu > 0$ 量

$$\widetilde{A}_\tau(\nu, x, \xi) = p_{\lambda,0}^{(\tau)}(x, \xi) + i\lambda\nu q^{(\tau)}(x, \xi) + \nu^2 r^{(\tau)}(x, \xi)$$

而不是 $A_\tau(\nu, x, \xi)$。这里，r 表示 Δ^3 的符号。需要证明，当 $\tau > 0$ 足够小时，存在常数 $C > 0$，使得对于每个 $x \in \Omega$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^2$，都有

$$|\widetilde{A}_\tau(\nu, x, \xi)| \geq C^{-1}|\xi|^2\langle\sqrt{\nu}\xi\rangle^4.$$

获得这一估计的一种有效方法是使用 [Fra79，注 2.4。2], 这意味着只需证明 $A_\tau(\nu, x, \xi) \neq 0$ 对于 $\nu \in \mathbb{R}_+^*$，$x \in \Omega$ $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 以及 $\tau > 0$ 足够小时成立。可以利用引理 3.1 和 5.3 证明中的估计来实现这一点。一旦得到引理 5.3 的对应结论，引理 5.4 的对应结论也可通过非常相似的证明得到。

Appendix A. Elliptic regularity for boundary value problems

本附录旨在证明一个椭圆边值问题的椭圆正则性结果（引理 A.1）。这一结果可能是标准的，但我们未能在文献中找到相关出处。以下引理的关键在于，我们只先验地假设函数 u 属于 $H_0^1(\Omega)$。

引理 A.1。设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中具有光滑（C^∞）边界的有界区域。设 P 是 Ω 上系数光滑的二阶微分算子。假设 P 在 Ω 上正规椭圆。设 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足 $Pu \in L^2(\Omega)$。则 $u \in H^2(\Omega)$。

引理 A.1 可由以下逼近引理推出。这类结果由来已久，至少可以追溯到 Friedrichs 的工作 [Fri44]。另请参见 [H¨or07，定理 17.3。2]，其中在证明一个与引理 A.1 类似的正则性结果时用到了这类结果。另请参见 [DZ19，引理 E。45]，其中证明了无边界情形下一个类似的逼近引理。

引理 A.2. 在引理 *A.1* 的假设下，存在一个序列 $(u_n)_{n\geq 0}$，其元素属于 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，使得 $(u_n)_{n\geq 0}$ 在 u 中收敛到 $\mathcal{D}'(\Omega)$，序列 $(u_n)_{n\geq 0}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中有界，且序列 $(Pu_n)_{n\geq 0}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中有界。

证明。注意，若 $\chi \in C^\infty(\Omega)$，则 $P(\chi u) = \chi P u + [P,\chi]u$ 属于 $L^2(\Omega)$，因为 $[P,\chi]$ 是一个一阶微分算子。因此，利用单位分解，我们可以将问题归结为 u 的支集任意接近 Ω 中某个给定点的情形。

如果 u 的支集远离 $\partial\Omega$，那么只需通过卷积来逼近 u（关键在于，P 与卷积算子的交换子是一阶的，且关于 n一致有界）。例如参见 [DZ19，引理 E。45]。

因此，我们可以假设 u 支撑在 $\partial\Omega$ 边界上的某一点附近。通过坐标变换，我们将问题化归为 $\Omega \cap B(0,1) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \cap B(0,1)$，且 u 支撑在 $\Omega \cap B(0,1/2)$ 的情形。于是，令 $\phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 为一个支撑在 $[-1/3,1/3]$ 中的 C^∞ 函数，满足 $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\mathrm{d}x = 1$。对于 $\epsilon \in (0,1],$，令 u_ϵ 为支撑在 $B(0,1)\cap\Omega$ 中且定义如下的函数

$$u_\epsilon(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \epsilon^{-1}\phi(\epsilon^{-1}x')u(x-x',y)\,\mathrm{d}x'$$

对于 $(x,y) \in B(0,1)\cap\Omega$。我们将 P明确写出

$$P = \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{N}\\ j+k\le 2}} a_{j,k}\partial_x^j\partial_y^k.$$

由于 P 是椭圆的，系数 $a_{0,\,2}$ 在 Ω 上不为零。对于 $\epsilon \in (0,1],$，我们令 f_ϵ 为支撑在 $B(0,1)\cap\Omega$ 上并由下式定义的函数

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x,y) &= a_{0,2}(x,y)\int_{\mathbb{R}} \epsilon^{-1}\phi(\epsilon^{-1}x')\frac{Pu(x-x',y)}{a_{0,2}(x-x',y)}\,\mathrm{d}x' \\ &= \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{N}\\ j+k\le 2}} \underbrace{a_{0,2}(x,y)\int_{\mathbb{R}} \epsilon^{-1}\phi(\epsilon^{-1}x')\frac{a_{j,k}(x-x',y)}{a_{0,2}(x-x',y)}\partial_x^j\partial_y^k u(x-x',y)\,\mathrm{d}x'}_{g_{j,k,\epsilon}(x,y):=}. \end{aligned}$$

对于 $(x,y) \in B(0,1)\cap\Omega$。我们断言，对于每个满足 $j+k\le 2$ 的 $j,k\in\mathbb{N}$，分布

$$a_{j,k}\partial_x^j\partial_y^k u_\epsilon - g_{j,k,\epsilon} \tag{A.1}$$

属于 L^2，且其范数在 ϵ 趋于 0 时一致有界。若 $j+k\le 1$，这仅仅是闵可夫斯基不等式的推论，因为 u 属于 H^1（此时两项在 L^2 中均有界）。若 $j+k=2$ 但 $k\neq 2$，则我们可以对 $\partial_x u \in L^2$ 应用弗里德里希斯引理[H¨or07, 引理 17.1.3]，并应用富比尼定理，从而得到 (A.1) 在 L^2 中一致有界。最后，若 $j=0$ 且 $k=2$，则量 (A.1) 为零。对 j 和 k 求和 (A.1)，可得 $Pu_\epsilon - f_\epsilon$ 属于 L^2，且在 ϵ 趋于 0 时一致有界。由闵可夫斯基不等式，由于 $Pu\in L^2(\Omega)$，函数 f_ϵ 在 ϵ 趋于 0 时一致属于 L^2。因此，$(Pu_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1]}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中有界。

由控制收敛定理可知，当 ϵ 趋于 0 时，u_ϵ 作为分布收敛到 u（事实上，众所周知，该收敛在 H^1中成立）。注意，u_ϵ在 $B(0,1)\cap\partial\Omega$ 上的值是通过对 u在 $B(0,1)\cap$ 上取平均得到的

$\partial\Omega$。因此，由 $u \in H_0^1(\Omega)$可推出 $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$。再次利用闵可夫斯基不等式和积分号下求导，可得 $(u_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1]}$ 在 $H^1(\Omega)$中有界。

剩下要证明 u_ϵ 属于 $H^2(\Omega)$。因此，我们需要证明：如果 j、$k \in \mathbb{N}$ 满足 $j+k \le 2$，那么 $\partial_x^j \partial_y^k u_\epsilon \in L^2(\Omega)$。若 $j+k \le 1$，则只需利用 u 是 H^1。我们可以对 $\partial_x u_\epsilon$ 的公式分部积分，使 ∂_x 在积分中作用于 ϕ。由于 u 是 H^1，当 $k \neq 2$ 时可得 $\partial_x^j \partial_y^k u_\epsilon \in L^2(\Omega)$。因此，

$$\partial_y^2 u_\epsilon = a_{0,2}^{-1}\left(Pu_\epsilon - \sum_{j,k\in\mathbb{N},\ j+k\le 2, k\neq 2} a_{j,k}\partial_x^j\partial_y^k u_\epsilon\right) \in L^2(\Omega),$$

从而 $u_\epsilon \in H^2(\Omega)$。 □

引理 *A.1* 的证明。 根据我们对 P 和 $\partial\Omega$ 的假设，存在常数 $C > 0$使得对每个 $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，都有

$$\|v\|_{H^2} \le C\|Pv\|_{L^2} + C\|v\|_{H^1}, \tag{A.2}$$

例如，参见 [LM68，第 2 章，定理˙5。1]。注意，对于正规椭圆算子，狄利克雷边界条件总是覆盖 $\partial\Omega$。由（A.2）可得（u_n）$_{n\ge0}$ 在 $H^2(\Omega)$ 中有界。由于（u_n）$_{n\ge0}$ 收敛到 u 在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中，因此可得$u \in H^2(\Omega)$。□

References

[Bro16] Christophe Brouzet。《内波吸引子：从几何聚焦到非线性能量级联与混合》。博士论文，里昂大学，2016年7月。[CdVL24] Yves Colin de Verdi`ere 和 Zhenhao Li。遍历经典动力学的二维区域中的内波。Probability and Mathematical Physics，5：735–751，2024年。[CdVSR20] Yves Colin de Verdi`ere 和 Laure Saint-Raymond。具有零次齐次哈密顿量的二维波的吸引子。Communications on Pure and Applied Mathematics，73(2)：421–462，2020年。[DBLR25] Nguyen Viet Dang、Yannick Guedes Bonthonneau、Matthieu L´eautaud 和 Gabriel Rivi`ere。解析凸体的庞加莱级数。arXiv:2509.11652，2025年。[DWZ25] Semyon Dyatlov、Jian Wang 和 Maciej Zworski。二维水族箱中的内波数学。Anal. PDE，18(1)：1–92，2025年。[DZ19] Semyon Dyatlov 和 Maciej Zworski。《散射共振的数学理论》，数学研究生教程第200卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2019年。[Fra79] L´eonid S. Frank。强制奇异摄动。一：先验估计。Ann. Mat. Pura Appl. (4)，119：41–113，1979年。[Fri44] K. O. Friedrichs。微分算子的弱延拓与强延拓的等同性。Trans. Amer. Math. Soc.，55：132–151，1944年。[FW25] Nicolas Frantz 和 Micha l Wrochna。低黏性区域中受迫波的长时间演化。arXiv:2508.00189，2025年。[GZ22] Jeffrey Galkowski 和 Maciej Zworski。零阶伪微分算子的黏性极限。Communications on Pure and Applied Mathematics，75(8)：1798–1869，2022年。

[HFRLD23] Jiyang He、Benjamin Favier、Michel Rieutord 和 St´ephane Le Diz`es。摆动球壳中的内部剪切层：吸引子的情形。《流体力学杂志》，974：A3，2023年。[H¨or03] Lars H¨ormander。《线性偏微分算子分析》，第一卷。数学经典。Springer-Verlag，柏林，2003年。分布理论与傅里叶分析，第二版（1990年）重印本。 [Springer，柏林；MR1065993 (91m:35001a)]。[H¨or07] Lars H¨ormander。《线性偏微分算子分析》，第三卷。数学经典。Springer，柏林，2007年。伪微分算子，1994年版重印本。[JW25] Malo J´ez´equel 和 Jian Wang。Orr-Sommerfeld 方程与复变形。arXiv:2503.22274，2025年。[LBC23] Marco Lenci、Claudio Bonanno 和 Giampaolo Cristadoro。梯形及类似台面中的内波台球。Nonlinearity，36(2)：1029–1052，2023年。[Li25] Zhenhao Li。具有特征角点的水族箱中的内波。Pure and Applied Analysis，7：445–534，2025年。[LM68] J.-L. Lions 和 E. Magenes。《非齐次边值问题及其应用》。第1卷，数学研究与论著第17卷。Dunod，巴黎，1968年。[LM70] J.-L. Lions 和 E. Magenes。《非齐次边值问题及其应用》。第3卷，数学研究与论著第20卷。Dunod，巴黎，1970年。[LWW24] Zhenhao Li、Jian Wang 和 Jared Wunsch。二维亚临界通道中的内波。arXiv:2411.14587，2024年。[LWW25] Zhenhao Li、Jian Wang 和 Jared Wunsch。二维亚临界通道中内波的演化。arXiv:2509.20327，2025年。[MJN57] C. B. Morrey Jr. 和 L. Nirenberg。关于线性椭圆偏微分方程组解的解析性。Communications on Pure and Applied Mathematics，10(2)：271–290，1957年。[Mos24] Aaron Moser。内波庞加莱算子的谱与动力学。硕士论文，ETH苏黎世，苏黎世，2024年1月。[Ogi05] Gordon I. Ogilvie。潮汐扰动的波吸引子与渐近耗散率。《流体力学杂志》，543：19–44，2005年。[Ral73] J. V. Ralston。无黏旋转流体中的定常模态。J. Math. Anal. Appl.，44：366–383，1973年。[RGV01] M. Rieutord、B. Georgeot 和 L. Valdettaro。旋转球壳中的惯性波：吸引子与渐近谱。《流体力学杂志》，435：103–144，2001年。[RV18] M. Rieutord 和 L. Valdettaro。低埃克曼数下球壳中的轴对称惯性模态。《流体力学杂志》，844：597–634，2018年。[RVG02] M. Rieutord、L. Valdettaro 和 B. Georgeot。球壳中奇异惯性模态的分析：细长环面壳模型。《流体力学杂志》，463：345–360，2002年。[Tes12] Gerald Teschl。常微分方程与动力系统，数学研究生教程第140卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2012年。[VL62] M. I. Viˇsik 和 L. A. Ljusternik。小参数线性微分方程的正规退化与边界层。Amer. Math. Soc. Transl. (2)，20：239–364，1962年。[Vol06] L. R. Volevich。椭圆型小参数问题中的 Vishik-Lyusternik 方法。Tr. Mosk. Mat. Obs.，67：104–147，2006年。

[Zwo12] Maciej Zworski。《半经典分析》，《数学研究生教程》第 138 卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2012 年。

电子邮箱：malo.jezequel@math.cnrs.fr

CNRS、 Univ. Brest、 UMR6205、
Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlan-tique、 France

电子邮箱：wangjian@ihes.fr

Institut des Hautes Etudes Scientifiques、 Bures-sur-Yvette、 France