C理想化米勒零集的基数不变量

ALEKSANDER CIEŚLAK、TAKEHIKO GAPPO、ARTURO MARTÍNEZ-CELIS 和 TAKASHI YAMAZOE

摘要。本文全面研究由可数集上的理想 $\mathscr{I}$ 参数化的 $\mathscr{I}$-米勒零理想 $M_{\mathscr{I}}$, σ——定义在贝尔空间上的理想。这些 σ-理想与米勒强迫的理想化版本相关联，其方式类似于疏集理想与科恩强迫的关联方式。我们计算了典型博雷尔理想 $\mathscr{I}$ 示例中 $M_{\mathscr{I}}$ 的基数不变量，并证明，对于不同的理想 $\mathscr{I}$，可以通过加入 $M_{\mathscr{I}}$ 的一致性和覆盖数，将 Cichoń 最大值加以扩展。

arXiv:2601.07428v1 [math.LO] 12 Jan 2026

目录

1. 引言 1 致谢 7 2. 预备知识 7 3. $\mathscr{I}$ 10 的基数不变量的 ω-变体 3.1. $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 的计算 11 3.2. $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 的计算 17 3.3. 关于 $\mathscr{I}$-Louveau 和 $\mathscr{I}^*$-Ramsey 零理想的评述 22 4. $M_{\mathscr{I}}$ 25 的基数不变量的计算 4.1. 可加性与共尾性 25 4.2. 一致性与覆盖 28 5. 相容性结果 38 5.1. 强迫理论 38 5.2. 分离为两个值 43 5.3. 扩展 Cichoń 最大值 49 6. 关于理想 $\mathscr{J}_L$ 和 $\mathscr{I}^f_L$ 55 的更多讨论 参考文献 62

1. 引言

Cichoń 图（图 1）展示了众所周知的连续统基数不变量之间的关系，我们将其称为 *Cichoń* 特征。

它们全都是与波兰空间上的 σ-理想相关的基数不变量；其中八个是针对勒贝格零理想 $\mathcal{N}$ 或疏集理想 $\mathcal{M}$定义的。有界数 $\mathfrak{b}$ 和支配数 $\mathfrak{d}$ 与贝尔空间中 σ-紧子集的理想 K_σ 有关：

$$\mathfrak{b} = \mathrm{add}(K_\sigma) = \mathrm{non}(K_\sigma) \text{ and } \mathfrak{d} = \mathrm{cov}(K_\sigma) = \mathrm{cof}(K_\sigma).$$

2020 数学主题分类。 03E05、03E17、03E35。关键词和短语。 σ-波兰空间上的理想、可数集上的理想、理想化米勒强迫、Cichoń 最大值、弗雷歇极限、超滤子极限。

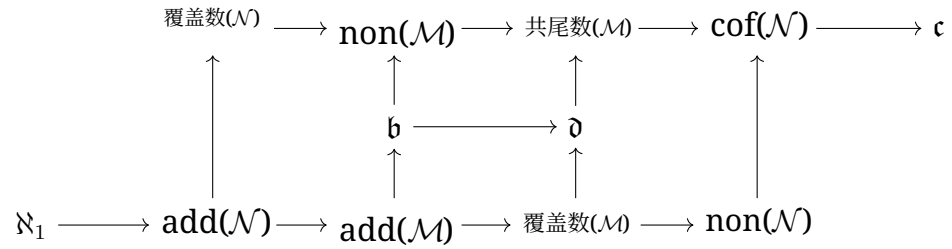

图 1. Cichoń 图。箭头 $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ 表示 $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{y}$ 成立。

此外， $\aleph_1$ 和 $\mathfrak{c}$ 分别对应于实数集上可数集的 σ-理想 $[\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}$：

$$\aleph_1 = \mathrm{add}([\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}) = \mathrm{non}([\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}) \text{ and } \mathfrak{c} = \mathrm{cov}([\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}) = \mathrm{cof}([\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}).$$

因此，Cichoń 特征是四个 σ-理想 $\mathcal{N}$、 $\mathcal{M}$、 K_σ和 $[\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}$的基数不变量，我们称它们为 *Cichoń* σ-理想。

***Cichoń* 最大值** 是 Cichoń 图的一个最大分离星座，其中所有 Cichoń 特征的取值都互不相同，唯有两个相关的数除外

$$\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\} \text{ and } \mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{non}(\mathcal{M})\}.$$

Goldstern、Kellner 和 Shelah [GKS19]在假设存在四个强紧基数的条件下构造了一个实现 Cichoń 最大值的模型。后来，Mejía [GKMS22], 参与后，大基数假设被消除了。从 σ-理想的角度看，他们的结果意味着，四个 Cichoń σ-理想彼此差异显著，其基数不变量可以同时取互不相同的值。此外，还可以迫使 Cichoń 最大值与其他两两取不同值的基数不变量同时成立。已知有若干这样的例子：Goldstern、Kellner、Mejía 和 Shelah 在 Cichoń 最大值的基础上加入了基数不变量 $\mathfrak{m}$， $\mathfrak{p}$， $\mathfrak{h}$，见 [GKMS21a]；以及 $\mathfrak{s}$， $\mathfrak{r}$，见 [GKMS21b]。第四作者在 [Yam25]中迫使 Cichoń 最大值与逃逸数和预测数同时成立。Cardona、Repický 和 Shelah [CRS25] 迫使 Cichoń 最大值与常数逃避数和常值预测数同时成立。第四作者在 [Yam24]中迫使 Cichoń 最大值与闭零理想的覆盖数和一致性数 $\mathcal{E}$ 同时成立。

我们的主要目标是系统地扩展 Cichoń 最大值，将与其他 σ理想相关的基数变体纳入其中。本文聚焦于以下一族由可数集上的理想参数化的波兰空间上的 σ理想：

定义 1.1. 设 $\mathscr{I}$ 是可数集 X上的一个理想。我们将 $\mathscr{I}$-**米勒零理想** $M_{\mathscr{I}}$ 定义为由形如以下集合生成的 σ理想：

$$M_\phi = \{x \in X^\omega : \forall^\infty n < \omega \; x(n) \in \phi(x \restriction n)\},$$

其中 ϕ: $X^{<\omega} \to \mathscr{I}$。

定义 1.2. 设 $\mathscr{I}$ 是可数集 X上的一个理想。我们将 $K_{\mathscr{I}}$ 定义为由形如以下集合生成的 σ理想：

$$K_\phi = \{x \in X^\omega : \forall^\infty n < \omega \; x(n) \in \phi(n)\},$$

其中 ϕ: $\omega \to \mathscr{I}$。

通过研究各种博雷尔理想 $\mathscr{I}$下 $M_{\mathscr{I}}$ 和 $K_{\mathscr{I}}$ 的基数不变量，我们将看到这些 σ理想 $M_{\mathscr{I}}$ 和 $K_{\mathscr{I}}$ 与 Cichońσ理想有多相似或不同。结果表明，对于某些理想 $\mathscr{I}$， $M_{\mathscr{I}}$ 和 $K_{\mathscr{I}}$ 的基数不变量完全可以用 Cichoń 特征来刻画；而对于其他一些理想 $\mathscr{I}$，

则可以将 Cichoń 最大值扩展至包含 $M_{\mathscr{I}}$和 $K_{\mathscr{I}}$的一些基数不变量。

回顾一下，所有非瘦博雷尔集构成的偏序集与科恩强迫强迫等价，而所有具有正勒贝格测度的博雷尔集构成的偏序集与随机强迫强迫等价。理想 $M_{\mathscr{I}}$ 以同样的方式与某种自然的树强迫相关：给定可数集合 X上的理想 $\mathscr{I}$，如果对于每个 $\sigma \in T$ 都存在 $\tau \in T$，使得 $\sigma \subseteq \tau$ 以及

$$\mathrm{succ}_T(\tau) := \{i \in X : \tau^\frown\langle i\rangle \in T\} \in \mathscr{I}^+.$$

$\mathscr{I}$-米勒强迫记作 $\mathbb{M}_{\mathscr{I}}$，是由所有 $\mathscr{I}$-米勒树组成、按包含关系排序的强迫偏序集。注意， $\mathbb{M}_{\mathrm{Fin}} = \mathbb{M}$ 是标准的米勒强迫，其中 Fin $= [\omega]^{<\omega}$表示弗雷歇理想。Sabok 和 Zapletal [SZ11],研究了强迫 $\mathbb{M}_{\mathscr{I}}$，并展示了 $\mathscr{I}$-米勒树与 $\mathscr{I}$-米勒零理想之间的关系。

引理 1.3 (Sabok–Zapletal [SZ11])。设 X 为一个可数集合。对于每个解析子集$A \subseteq X^\omega$，要么 $A \in M_{\mathscr{I}}$，要么存在 $T \in \mathbb{M}_{\mathscr{I}}$使得 $[T] \subseteq A$。

这个引理为我们的术语提供了依据。它还意味着， ω^ω 上所有 $M_{\mathscr{I}}$-正博雷尔子集构成的偏序集与 $\mathbb{M}_{\mathscr{I}}$强迫等价。理想 $K_{\mathscr{I}}$ 似乎并不对应任何标准的强迫概念。我们引入了一种树强迫 $\mathbb{K}_{\mathscr{I}}$，它与所有 $K_{\mathscr{I}}$-正博雷尔集构成的偏序集强迫等价；这种强迫概念似乎是新的。这就是我们没有为 $K_{\mathscr{I}}$取一个特定名称的原因；选择字母 K，是因为它直接推广了理想 K_σ。与 $\mathbb{M}_{\mathscr{I}}$相比，研究 $\mathbb{K}_{\mathscr{I}}$ 的强迫性质似乎更困难；有时，即使我们能够算出 $M_{\mathscr{I}}$的精确值，这一事实也会使我们无法算出 $K_{\mathscr{I}}$的精确值。

第一作者和第三作者在 [CM25] 中开启了对 $M_{\mathscr{I}}$的基数不变量的系统研究。然而，$M_{\mathscr{I}}$ 和 $K_{\mathscr{I}}$ 的基数不变量此前已在不同语境下的文献中隐约出现。Sabok–Zapletal 在上述论文 [SZ11] 中的强迫结果，直接推出了关于 $M_{\mathscr{I}}$的基数不变量的推论，例如：

$$\mathrm{non}(M_{\mathrm{nwd}}) = \mathrm{non}(\mathcal{M}) \text{ and } \mathrm{non}(M_{\mathcal{S}}) \geq \mathrm{cov}(\mathcal{N}),$$

其中 nwd 是无处稠密理想，而 $\mathcal{S}$ 是 Solecki理想（参见推论 4.34、推论 4.39）。在 [Paw00], Pawlikowski 研究了理想 $K_{\mathcal{Z}}$，其中 $\mathcal{Z}$ 是定义在 ω 上的渐近密度零理想，并证明，添加随机实数完美集的偏序集会迫使 $\omega^\omega \cap V \in K_{\mathcal{Z}}$。该论文中的另一项结果立即推出

$$\mathrm{non}(K_{\mathcal{Z}}) \leq \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}(\mathcal{E})\} \text{ and } \mathrm{cov}(K_{\mathcal{Z}}) \geq \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}(\mathcal{E})\},$$

其中 $\mathcal{E}$ 表示由闭零集生成的 σ- 2^ω 理想（参见推论 4.50）。此外，non($K_{\mathscr{I}}$) 和 cov($K_{\mathscr{I}}$) 作为斜槽数之一出现在 [Šup23] 和 [CGM+24] 中。按照 [CGM+24] 中的记号，我们有

$$\mathrm{non}(K_{\mathscr{I}}) = \mathfrak{sl}_{\mathrm{t}}^{\perp}(\mathscr{I}, \mathrm{Fin}) \text{ and } \mathrm{cov}(K_{\mathscr{I}}) = \mathfrak{sl}_{\mathrm{t}}(\mathscr{I}, \mathrm{Fin}).$$

斜槽数与拓扑选择原理有关。例如，在 [Šup23],Šupina 证明，cov($K_{\mathscr{I}}$) 是非-S_1($\mathscr{I}$-Γ, $\mathcal{O}$) 豪斯多夫空间的最小基数。他还证明

$$\mathrm{cov}(K_{\mathscr{I}}) \geq \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}^*(\mathscr{I})\}.$$

此外，可以将 $M_{\mathscr{I}}$ 和 $K_{\mathscr{I}}$ 的一致性与覆盖数视为逃逸数／预测数的理想化版本。Blass 在 [Bla10] 中研究了逃逸数 $\mathfrak{e}$ 的许多变体；按照他的术语，non($M_{\mathscr{I}}$) 是取值于 $\mathscr{I}$ 的全局自适应预测的逃逸数，而 non($K_{\mathscr{I}}$) 是取值于 $\mathscr{I}$ 的全局非自适应预测的逃逸数。

理想	$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$	$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$	共尾数$^*_\omega(\mathscr{I})$	$\mathrm{non}(K_\mathscr{I})$	$\mathrm{non}(M_\mathscr{I})$
$\mathcal{R}$	ω_1	ω_1	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$
$\mathcal{S}$	ω_1	覆盖数$_\omega(\mathcal{N})$	$\mathfrak{c}$	$\max\{\mathfrak{b}, 覆盖数_\omega(\mathcal{N})\}$	$\max\{\mathfrak{b}, 覆盖数_\omega(\mathcal{N})\}$
nwd	$\mathrm{add}(\mathcal{M})$	$\mathrm{non}(\mathcal{M})$	共尾数$(\mathcal{M})$	?	$\mathrm{non}(\mathcal{M})$
conv	ω_1	ω_1	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$
有限集理想 $\otimes$ 有限集理想	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$
$\mathcal{ED}$	ω_1	覆盖数$(\mathcal{M})$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}$	$\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2)\} \leq ?$
$\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$	ω_1	?	$\mathfrak{c}$	?	$\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_b(2)\} \leq ?$
$\mathscr{I}_L$	ω_1	?	$\mathfrak{c}$	?	?
$\mathscr{I}_P$	$\mathrm{add}_t(\mathcal{N}) \leq ?$	?	$\mathfrak{l} \leq ?$	?	?
$\mathcal{Z}$	$\mathrm{add}(\mathcal{N})$	$\mathrm{non}^*(\mathcal{Z})$	$\mathrm{cof}(\mathcal{N})$	?	$\max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}(\mathcal{E})\}$

表 1. 与博雷尔理想相关的基数不变量的值。

计算 σ-理想 $M_\mathscr{I}$ 和 $K_\mathscr{I}$ 的基数不变量，第一步是厘清它们与原始理想 $\mathscr{I}$ 的基数不变量之间的联系。 [CM25] 已经注意到这种联系，我们进一步完善其结果，得到如下结论。

定理 A (定理 4.9、引理 4.11、定理 4.14)。 设 $\mathscr{I}$ 是一个定义在可数集上的理想。则以下结论成立：

(1) $\mathrm{add}(M_\mathscr{I}) = \mathrm{add}(K_\mathscr{I}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})\}$。(2) $\mathfrak{b} \leq \mathrm{non}(K_\mathscr{I}) \leq \mathrm{non}(M_\mathscr{I}) \leq \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})\}$。(3) $\min\{\mathfrak{d}, 覆盖数^*(\mathscr{I})\} \leq 覆盖数(M_\mathscr{I}) \leq 覆盖数(K_\mathscr{I}) \leq \mathfrak{d}$。(4) $共尾数(M_\mathscr{I}) = 共尾数(K_\mathscr{I}) = \max\{\mathfrak{d}, 共尾数^*_\omega(\mathscr{I})\}$。

这里，$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$，$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 是 $\mathrm{add}^*(\mathscr{I})$、$\mathrm{non}^*(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{cof}^*(\mathscr{I})$ 的“ω-版本”。参见定义 3.1。这些（针对超滤子）的基数不变量由 Brendle–Shelah [BS99] 引入，用于计算与超滤子相关联的 Laver 型和 Mathias 型强迫的零理想的基数不变量。尽管通常的 $*$-数已得到广泛研究，相关综述见 [HH07]，但这些 ω-版本长期以来一直被忽视。讨论 Borel 理想的 ω-版本的论文只有 [CM25] 和 [FK25]。[1]在本文中，我们继续这项研究，并计算更多 Borel 理想例子中这些ω-版本的 $*$-数的其他取值，见表 1。

ω版本的 $*$数可以看作原有数的改进版本。回想一下，原有的 $*$数在非 P 理想上不一定表现良好：对于每个非 P 理想 $\mathscr{I}$，都有 $\mathrm{add}^*(\mathscr{I}) = \omega$；对于每个不能 Katětov 约化到 $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$ 的博雷尔理想 $\mathscr{I}$，都有 $\mathrm{non}^*(\mathscr{I}) = \omega$。虽然对所有 P 理想 $\mathscr{I}$，$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) = \mathrm{add}^*(\mathscr{I})$ 且 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}) = \mathrm{non}^*(\mathscr{I})$，但对于非 P 理想，$\omega$版本会取非平凡值。例如，我们证明，对某个 F_σ 非 P 理想 $\mathscr{I}$，$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) \geq \mathrm{add}_t(\mathcal{N})$，其中 $\mathrm{add}_t(\mathcal{N})$ 表示零测理想的传递可加性（命题 3.15，定理 3.16）。由此可推得，对于这样的理想 $\mathscr{I}$，$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) > \mathfrak{d}$ 是相容的。应将这一结果与以下事实相比较：迄今已知的 $\mathrm{add}^*(\mathscr{I})$ 取值只有三个，分别是 ω、$\mathrm{add}(\mathcal{N})$ 和 $\mathfrak{b}$。我们还注意到，对于某个 F_σ 非 P 理想 $\mathscr{I}$，$\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I}) < \mathfrak{b}$ 的相容性实际上已在 [HRZ14]中得到证明。尽管 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 并无对偶定义，我们的证明看起来与 [HRZ14]中的论证互为对偶。因此，考察 ω版本的 $*$数，可以自然地将可加性与共尾性之间的对偶关系推广到非 P 理想。我们计算 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{S})$ 和 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{ED})$ 时，$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 与 $\mathrm{cov}^*(\mathscr{I})$ 之间也出现了类似的对偶关系。

[1]在 [FK25], 中，他们研究了 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$，但没有研究 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$。4

虽然 $M_{\mathscr{I}}$ 和 $K_{\mathscr{I}}$ 的可加性与共尾性可以由 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 计算得出，但 $M_{\mathscr{I}}$和 $K_{\mathscr{I}}$的一致性与覆盖数呈现出非常复杂的模式。我们关于 $\mathrm{non}(M_{\mathscr{I}})$ 和 $\mathrm{non}(K_{\mathscr{I}})$ 的 ZFC 可证结果汇总于表 1； 下面列举其中的一些结果:

定理 B。

(1)（命题 4.23 和 4.29）$\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$ 以及 $\mathrm{cov}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$.
另一方面，$\mathrm{non}(K_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \mathfrak{b}$ 以及 $\mathrm{cov}(K_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \mathfrak{d}$。(2)（定理 4.40，定理 4.48）$\mathrm{non}(M_{\mathcal{S}}) = \mathrm{non}(K_{\mathcal{S}}) = \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})\}$ 以及$\mathrm{cov}(M_{\mathcal{S}}) = \mathrm{cov}(K_{\mathcal{S}}) = \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{non}(\mathcal{N})\}$。
(3)（定理 4.54）$\mathrm{non}(M_{\mathcal{Z}}) = \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}(\mathcal{E})\}$ 以及 $\mathrm{cov}(M_{\mathcal{Z}}) = \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}(\mathcal{E})\}$。

在定理 B(1) 中， $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$ 和 $\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$ 表示 Kamo [Kam00] 引入的常数逃逸数和预测数的变体。这类变体在 [CR25] 中有所研究。已知 $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$ 和 $\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$ 分别与 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{d}$ 相容地不同。因此，有限集理想 $\otimes$ Fin 是一类理想 $\mathscr{I}$，使得 $\mathrm{non}(M_{\mathscr{I}})$ 和 $\mathrm{non}(K_{\mathscr{I}})$ 相容地不同。由于我们还知道 non^*_ω(有限集理想 $\otimes$ Fin) $= \mathfrak{d}$，有限集理想 $\otimes$ Fin 也是一类理想 $\mathscr{I}$，使得 $\mathrm{non}(M_{\mathscr{I}}) < \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}^*(\mathscr{I})\}$ 相容，这一点应与定理 A(2) 对照。在定理 B(2) 中，$\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$ 表示这样一个由勒贝格零测集 $\mathcal{F}$ 构成的族的最小基数：任意实数的可数集 A 都包含于其中某个 $N \in \mathcal{F}$。事实证明，这个基数等于 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{S})$。因此， $\mathcal{S}$ 是一类理想 $\mathscr{I}$，使得 $\mathrm{non}(M_{\mathscr{I}}) = \mathrm{non}(K_{\mathscr{I}}) = \mathrm{non}\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})\}$ 可证。此外，结合定理 B(3) 与 Raghavan [Rag20], 的结果，我们得到 $\mathrm{non}^*(\mathcal{Z})$ 和 $\mathrm{cov}^*(\mathcal{Z})$ 的新界:

$$\mathrm{non}(\mathcal{E}) \leq \mathrm{non}^*(\mathcal{Z}), \mathrm{cov}^*(\mathcal{Z}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{E}) \text{ and } \mathrm{cov}^*(\mathcal{Z}) \leq \mathrm{non}^*(\mathcal{Z}).$$

参见定理 4.58。目前仍不清楚 $\mathrm{non}(K_{\mathcal{Z}}) = \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}(\mathcal{E})\}$ 和 $\mathrm{cov}(K_{\mathcal{Z}}) = \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}(\mathcal{E})\}$ 是否成立。

我们还得到了许多相容性结果，它们并非 ZFC 可证不等式的直接推论。类似于定理 B(1), 我们证明:

$$\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2)\} \leq \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}}) \text{ and } \max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_b(2)\} \leq \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$$

对任意递增函数 $b \in \omega^\omega$ （命题 4.20、命题 4.21）。以下结果表明，这些不等式的逆命题无法由 ZFC 证明。

定理 C. 以下结论（及其对偶）相容地成立:

(1)（定理 5.35）$\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2)\} < \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}})$。(2)（定理 5.41）$\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) < \mathrm{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$。(3)（定理 5.42）$\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_b(2)\} < \mathrm{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$ 对任意递增函数 $b \in \omega^\omega$。

这些结果表明，与 $\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$ 不同，$\mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}})$ 和 $\mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$ 不能通过常值躲避数来刻画。证明 (1) 的主要方法是由 Mejía [Mej19], 引入的 弗雷歇极限（*Fr-limit*）方法，该方法在强迫迭代过程中保持 $\mathfrak{b}$较小。为证明 (2)，我们引入了这种方法的一个变体，称为 闭弗雷歇极限（*closed-Fr-limit*）方法，该方法保持 $\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}})$ 较小。(3) 通过结合 (1) 和 (2) 的论证得到。

除了定理 C 中将数值分离为两类之外，我们还可以构造一个扩展的 Cichoń 极大值模型，使某个理想 $\mathscr{I}$ 的一致性和覆盖数分别为 $M_{\mathscr{I}}$ 和 $K_{\mathscr{I}}$。因此，我们会遇到以下这些与线性增长理想 $\mathscr{I}_L$ 密切相关的理想（参见 [Hru11，第 56], [BM14 页，第 3]）：

$$\mathscr{I}_L := \{A \subseteq \omega \times \omega : \exists k < \omega\ \forall^\infty n < \omega\ |\{m < \omega : \langle n, m\rangle \in A\}| \leq k \cdot i\},$$

以及对于 $f \in \omega^\omega$，若 $\lim_{n\to\infty} f(n)/2^n = 0$,

$$\mathscr{I}_L^f := \{A \subseteq \omega \colon \exists k < \omega\ \forall^\infty n < \omega\ |A \cap [2^n - 1, 2^{n+1} - 1)| \leq k \cdot f(n)\}.$$

这些理想给出了理想类 $\mathscr{I}_0$， $\mathscr{I}_1$，使得 $M_{\mathscr{I}_0}$ 和$K_{\mathscr{I}_1}$ 的基数不变量可以以不同的值添加到 Cichoń 最大值的模型中：

定理 D (定理 5.61)。设 $\aleph_1 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_{12}$ 是正则基数，$\theta_{\mathfrak{c}}$ 是一个无限基数，且满足 $\theta_{\mathfrak{c}} \geq \theta_{12}$ 和 $\theta_{\mathfrak{c}}^{\aleph_0} = \theta_{\mathfrak{c}}$。那么存在一个可数链条件偏序集，它强迫出图 *2* 所描述的分离星座。此外，在该强迫扩张中，对于定义在可数集上的理想 $\mathscr{I}_0$、$\mathscr{I}_1$，使得 $\mathscr{J}_L \leq_{\mathrm{K}} \mathscr{I}_0 \leq_{\mathrm{K}}$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想 且对于某个 $f \in \omega^\omega$有 $\mathscr{I}_L^f \leq_{\mathrm{K}} \mathscr{I}_1 \leq_{\mathrm{K}} \mathcal{Z}$，使得极限$_{n\to\infty} f(n) = \infty$且极限$_{n\to\infty} f(n)/2^n = 0$，我们有：

$$\mathrm{non}(M_{\mathscr{I}_0}) = \theta_4,\ \mathrm{cov}(M_{\mathscr{I}_0}) = \theta_9,$$
$$\mathrm{non}(K_{\mathscr{I}_1}) = \mathrm{non}(M_{\mathscr{I}_1}) = \theta_5,\ \mathrm{cov}(K_{\mathscr{I}_1}) = \mathrm{cov}(M_{\mathscr{I}_1}) = \theta_8.$$

这一结果表明，对于这类理想而言，σ-理想 $M_{\mathscr{I}_0}$ 和 $K_{\mathscr{I}_1}$ 之间存在显著差异$\mathscr{I}_0$，$\mathscr{I}_1$ 有别于 Cichoń σ-理想。定理 D 中构造扩展的 Cichoń 极大值模型的框架，基于第四作者的工作 [Yam25], [Yam24]。为构造这样的模型，我们需要使用一种比 Goldstern–Mejía–Shelah [GMS16],提出的 Fr-极限方法更强、称为超滤子极限（*UF*-极限）方法的方法，以更精细地控制 $\mathfrak{b}$。我们还需要第四作者 [Yam24], 提出的闭超滤子极限方法来控制 non$(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}})$。基于这些需求，我们在定理 D 中找到了理想 $\mathscr{J}_L$ 和 $\mathscr{I}_f^L$，以及关于 $\mathscr{I}_0$，$\mathscr{I}_1$ 的理想类。这些理想类本身似乎也很有趣。事实证明，$\mathscr{J}_L$ 和 $\mathscr{I}_L^f$ 对于某些选择性性质至关重要。文献 [DFGT21]研究了关于 $\mathscr{I}_0$ 的理想类，而每个高的非病态解析 P-理想都属于关于 $\mathscr{I}_1$的理想类。参见第 6 节。

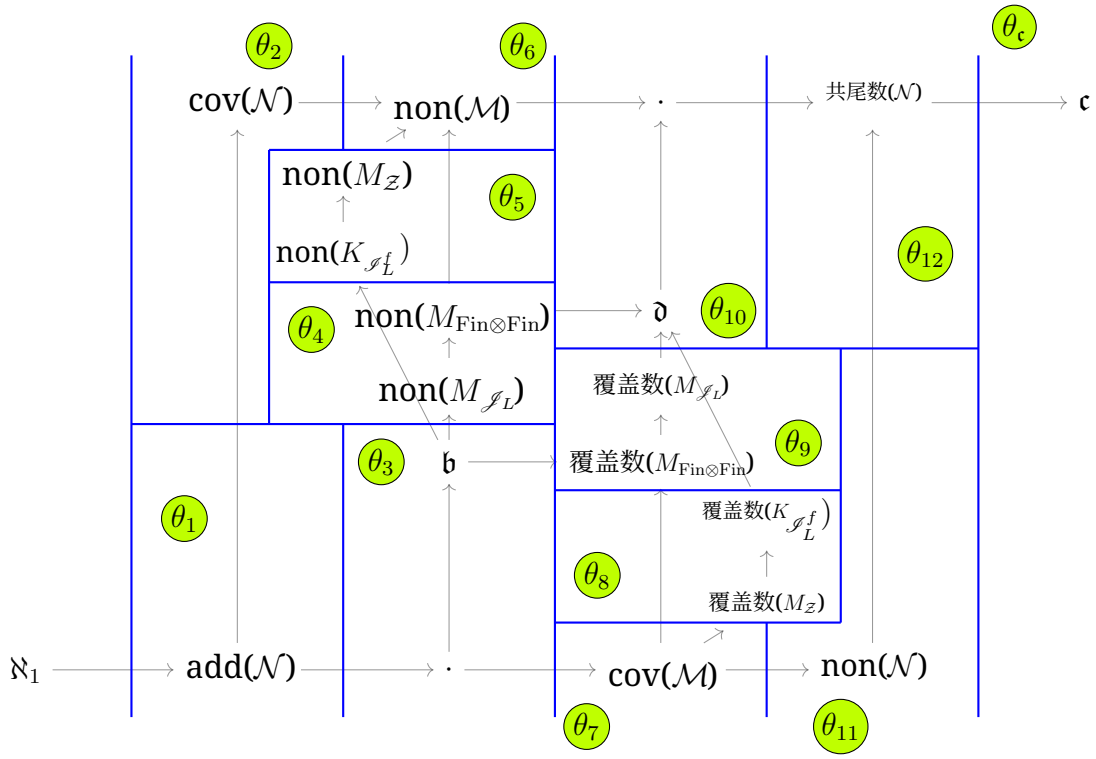

图 2. 扩展的 Cichoń 极大值。f 表示任意函数 $f \in \omega^\omega$，使得 $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$且 $\lim_{n\to\infty} f(n)/2^n = 0$。

致谢。第二作者的研究由奥地利科学基金（FWF）资助 [10.55776/I6087, 10.55776/ESP5842424]。他感谢 Piotr Borodulin-Nadzieja 邀请他前往弗罗茨瓦夫，并为他在当地的停留提供支持。第四作者感谢导师 Jörg Brendle 在整个研究过程中给予的支持。他还感谢提出并证明引理 2.10 的 Osvaldo Guzmán 和 Yurii Khomskii。他获得了 JSPS KAKENHI 资助，项目编号 JP25KJ1818。为实现开放获取，作者已对本次投稿产生的任何作者接受稿版本采用知识共享署名（CC BY）公共版权许可。

2. 预备知识

给定集合 X，$\mathscr{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是一个理想，如果它对有限并和取子集封闭。理想 $\mathscr{I}$ 称为一个 σ-理想，如果它对可数并封闭。我们总是假设，集合 X 上的理想 $\mathscr{I}$ 是真理想，即 $X \notin \mathscr{I}$，并且 $\mathscr{I}$ 包含 X的每个有限子集。集合 X 上的理想 $\mathscr{I}$ 是高理想，如果 X 的每个无限子集都包含一个属于 $\mathscr{I}$的无限集合。

设 $\mathscr{I}$ 是集合 X上的一个理想。如果 $A \notin \mathscr{I}$，我们称 $A \subseteq X$ 是 $\mathscr{I}$-正的。我们记作 $\mathscr{I}^+ = \mathcal{P}(X) \setminus \mathscr{I}$。$\mathscr{I}$的对偶滤子定义为 $\mathscr{I}^* := \{A \subseteq X\colon X \setminus A \in \mathscr{I}\}$。

以下是理想与偏序集之间众所周知的关系。

定义 2.1。设 $\mathscr{I}, \mathscr{J}$分别是集合 X, Y上的理想。

(1) 若存在函数 $f\colon Y \to X$，使得对所有 $A \in \mathscr{I}$，$f^{-1}[A] \in \mathscr{J}$，则称 $\mathscr{I}$是 Katětov 可约于 $\mathscr{J}$，记作 $\mathscr{I} \leq_{\mathrm{K}} \mathscr{J}$。(2) 若存在有限到一函数 $f\colon Y \to X$，使得对所有 $A \in \mathscr{I}$，$f^{-1}[A] \in \mathscr{J}$，则称 $\mathscr{I}$ 是 Katětov–Blass 可约于 $\mathscr{J}$，记作 $\mathscr{I} \leq_{\mathrm{KB}} \mathscr{J}$。

定义 2.2. 设 $\langle P, \leq\rangle$ 是一个偏序集。若存在 $a \in P$ 使得 $\forall x \in X (x \leq a)$ 成立，则子集 $X \subseteq P$ 是有界的。若存在一个可数子集 $A \subseteq P$ 使得 $\forall x \in X\, \exists a \in A (x \leq a)$ 成立，我们也称 X 是 σ-有界的。

设 P, Q 是偏序集。

(1) 若存在 $f\colon P \to Q$，使得对于任意无界子集 $X \subseteq P$，$f[X]$ 都是 Q 的无界子集，则称 P ***Tukey*** 可约于 Q，记作 $P \preceq_T Q$。(2) 若存在 $f\colon P \to Q$，使得对于任意 σ- 无界子集 $X \subseteq P$，$f[X]$ 都是 Q 的 σ-无界子集，则称 P ω-***Tukey*** 可约于 Q，记作 $P \preceq_{\omega T} Q$。

显然，$P \preceq_T Q$ 蕴含 $P \preceq_{\omega T} Q$。

对于任意可数集 X，其幂集 $\mathcal{P}(X)$在赋予乘积拓扑后，是一个与 2^ω同胚的波兰空间。因此，按照复杂性（即 F_σ、Borel 或解析）对理想 $\mathscr{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$进行分类是有意义的。现在我们列出表 1 中出现的博雷尔理想的定义。

- 随机图理想 $\mathcal{R}$ 是由 Rado 随机图中的齐次集生成的、定义在 ω 上的理想。
- Solecki 理想 $\mathcal{S}$ 是定义在可数集上的理想

$$\Omega\colon = \{U \in \text{闭开集}(2^\omega)\colon\ U \text{ 具有勒贝格测度 } 1/2\}$$

由与 $A \subseteq \Omega$有非空交集的子集生成。
- 无处稠密理想记作 nwd，是定义在有理数集$\mathbb{Q} \cong 2^{<\omega}$ 上的一个理想，其元素为 $2^{<\omega}$的无处稠密子集。
- 收敛理想记作 conv，是由 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ 中的收敛序列在 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ 上生成的理想。

• Fin $\otimes$ Fin 是两个 Fin 的富比尼积，其中 Fin 是有限集理想。一般而言，对于分别定义在 X, Y 和 $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ 上的理想，它们的富比尼积 $\mathscr{I} \otimes \mathscr{J}$ 是定义在 $X \times Y$ 上的理想，其定义如下:

$$\mathscr{I} \otimes \mathscr{J} = \{A \subseteq X \times Y : \{x \in X : (A)_x \notin \mathscr{J}\} \in \mathscr{I}\},$$

其中 $(A)_x := \{y \in Y : \langle x, y\rangle \in A\}$。

• 最终不同理想定义为

$$\mathcal{ED} := \{A \subseteq \omega \times \omega : \exists k < \omega \ \forall^\infty n < \omega \ |(A)_n| \leq k\}.$$

此外，我们定义 $\mathcal{ED}_{\text{fin}} := \mathcal{ED} \restriction \Delta$，其中 $\Delta := \{(n, m) \in \omega \times \omega : m \leq n\}$。

• 固定区间划分 $\bar{P}_{\exp} = (P_{\exp i})_{i<\omega}$，使得 ω 满足 $|P_{\exp i}| = 2^i$。线性增长理想 $\mathscr{I}_L$ 定义为

$$\mathscr{I}_L = \{A \subseteq \omega : \exists k < \omega \forall^\infty i < \omega \, (|A \cap P_i^{\exp}| \leq k \cdot i)\}$$

多项式增长理想 $\mathscr{I}_P$ 为

$$\mathscr{I}_P = \{A \subseteq \omega : \exists k < \omega \forall^\infty i < \omega \, (|A \cap P_i^{\exp}| \leq i^k)\}$$

• 渐近密度零理想 $\mathcal{Z}$ 定义为

$$\mathcal{Z} = \left\{A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0\right\}.$$

图3展示了上述博雷尔理想（包括有限集理想）之间的 Katětov-Blass 序。详情可参阅 [Hru17]（$\mathcal{ED}_{\text{fin}} \leq_{\text{KB}} \mathscr{I}_L$ 显而易见，而 KB 归约 $\mathscr{I}_L \leq_{\text{KB}} \mathscr{I}_P \leq_{\text{KB}} \mathcal{Z}$ 则由包含关系 $\mathscr{I}_L \subseteq \mathscr{I}_P \subseteq \mathcal{Z}$推出）。

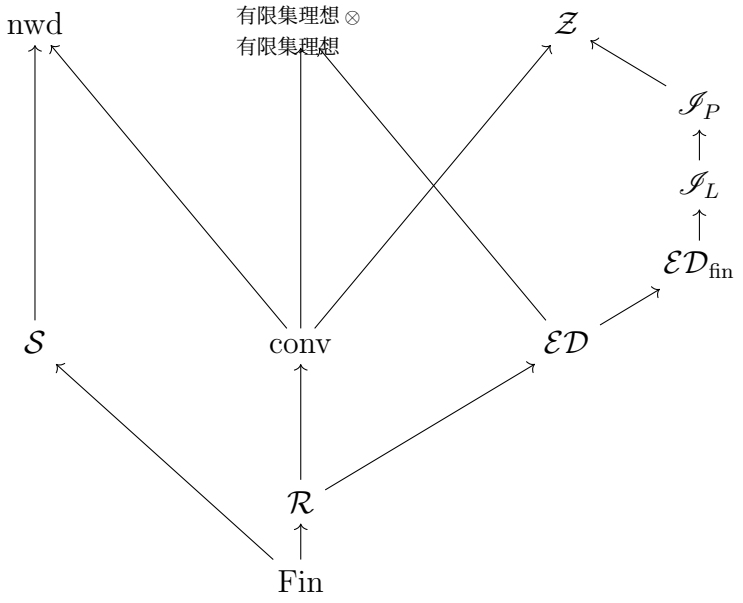

图3. 博雷尔理想及 Katětov-Blass 序示意图。箭头$\mathscr{I} \to \mathscr{J}$ 表示 $\mathscr{I} \leq_{\text{KB}} \mathscr{J}$ 成立。

回顾一下，若理想 $\mathscr{I}$ 满足：对任意 $A \in [\mathscr{I}]^\omega$，都存在一个 $B \in \mathscr{I}$，使得 $\forall A \in A(A \subseteq^* B)$，则称其为 *P*-理想 。 F_σ 理想类和解析 P-理想（定义在可数集上）是博雷尔理想中特别重要的子类，因此我们陈述相关定义和基本结果:

定义 2.3. 函数 φ: $\mathcal{P}(\omega) \to [0, \infty]$ 称为 ω 上的次测度 ，如果:

- $\varphi(\emptyset) = 0$,
- $A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$,
- $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$.

次测度 φ 是下半连续 的，当且仅当对于所有 $A \subseteq \omega$， $\varphi(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A \cap n)$。

事实 2.4。 设 $\mathscr{I}$ 是 ω上的一个理想。

- （Mazur [Maz91]） $\mathscr{I}$ 是一个解析理想，当且仅当存在一个下半连续次测度 φ 使得

$$\mathscr{I} = \mathrm{Fin}(\varphi) \coloneqq \{A \subseteq \omega : \varphi(A) < \infty\}.$$

- （Solecki [Sol99]） $\mathscr{I}$ 是一个解析 P-理想，当且仅当存在一个下半连续次测度 φ 使得

$$\mathscr{I} = \mathrm{Exh}(\varphi) \coloneqq \{A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \varphi(A \setminus n) = 0\}.$$

以下是 F_σ 非 P 理想的一个自然子类，由 [HRZ14]引入。

定义 2.5。 实数集 ω 上的理想 $\mathscr{I}$ 若存在实数集 ω 的一个划分 $\langle P_n\rangle_{n<\omega}$，将其划分为非空有限集，并存在一个序列 $\langle\varphi_n\rangle_{n<\omega}$，使得每个 φ_n 都是定义在 P_n上的次测度，则称该理想为碎片化理想。

$$X \in \mathscr{I} \iff \sup_{n<\omega} \varphi_n(X \cap P_n) < \infty.$$

与 $\langle P_n,\ \varphi_n\rangle_{n<\omega}$ 相关联的碎片化理想，若存在一个函数f: $\omega \to \omega$，使得对所有 $n < \omega$，以下条件均成立，则称其为渐进碎片化理想:

$$\forall i < \omega\, \forall^\infty j < \omega\, \forall \overline{B} \in [\mathcal{P}(P_j)]^{\leq i} \left(\forall B \in \overline{B}\, (\varphi_j(B) \leq n) \Rightarrow \varphi_j\left(\bigcup \overline{B}\right) \leq f(n)\right).$$

设 $\mathscr{I}$是实数集 ω 上与 $\langle P_n,\ \varphi_n\rangle_{n<\omega}$ 相关联的一个碎片化理想。那么，函数 φ: $\mathcal{P}(\omega) \to [0,\infty]$，定义为 $\varphi(A) = \sup_{n<\omega} \varphi_n(A \cap P_n)$，是定义在 ω 上的下半连续次测度，且满足 $\mathscr{I} = \mathrm{Fin}(\varphi)$。根据事实 2.4 (1)， $\mathscr{I}$ 是 F_σ。BM14 的推论 2.9]证明了，任何高（真）碎片化理想都不是 P-理想。关于碎片化理想的更多信息可参见 [BM14]。

接下来，我们介绍与理想相关的标准基数不变量。

定义 2.6. 设 $\mathcal{I}$ 是集合 X 上的一个 σ-理想。那么我们定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{add}(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}\} \\
\mathrm{non}(\mathcal{I}) &= \min\{|A| : A \subseteq X \wedge A \notin \mathcal{I}\} \\
\mathrm{cov}(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge \bigcup \mathcal{A} = X\} \\
\mathrm{cof}(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge \forall B \in \mathcal{I}\, \exists A \in \mathcal{A}\, (B \subseteq A)\}
\end{aligned}$$

定义 2.7. 设 $\mathscr{I}$ 是可数集 X 上的一个理想。那么我们定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{add}^*(\mathscr{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathscr{I} \wedge \forall B \in \mathscr{I}\, \exists A \in \mathcal{A}\, (A \not\subseteq^* B)\} \\
\mathrm{non}^*(\mathscr{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [X]^\omega \wedge \forall B \in \mathscr{I}\, \exists A \in \mathcal{A}\, (|A \cap B| < \omega)\} \\
\mathrm{cov}^*(\mathscr{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathscr{I} \wedge \forall B \in [X]^\omega\, \exists A \in \mathcal{A}\, (|A \cap B| = \omega)\} \\
\mathrm{cof}^*(\mathscr{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathscr{I} \wedge \forall B \in \mathscr{I}\, \exists A \in \mathcal{A}\, (B \subseteq^* A)\}
\end{aligned}$$

如果 $\mathscr{I}$不是高的，$\mathrm{cov}^*(\mathscr{I})$ 就没有明确定义。在这种情况下，为方便起见，我们令 $\mathrm{cov}^*(\mathscr{I}) = \infty$。[2]

[2]请记住，我们默认理想总是真理想。这保证了 $\mathrm{add}^*(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{non}^*(\mathscr{I})$ 都有定义。即使不满足真性，$\mathrm{cof}^*(\mathscr{I})$ 也有定义。

定义 2.7 中的记号源自 [HH07]。注意，如果 $\mathscr{I}$ 是高的，那么 $\mathrm{cov}^*(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{cof}^*(\mathscr{I})$ 总是不可数的，但 $\mathrm{add}^*(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{non}^*(\mathscr{I})$ 未必如此。以下给出了判定 $\mathrm{add}^*(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{non}^*(\mathscr{I})$ 是否可数的一个简单条件。

引理 2.8。设 $\mathscr{I}$ 是可数集合上的一个高理想。则以下结论成立：

(1) $\mathrm{add}^*(\mathscr{I}) > \omega \iff \mathscr{I}$ 是一个 *P*-理想。(2) ([HMM10]) 如果 $\mathscr{I}$ 是 *Borel*，那么 $\mathrm{non}^*(\mathscr{I}) > \omega \iff \mathscr{I} \geq_{\mathrm{KB}} \mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$。

我们回顾理想化强迫在计算基数不变量中的作用。设 $\mathcal{I}$ 是波兰空间 X 上的一个 σ-理想。按包含关系排序的 $\mathcal{I}$-正 Borel 集构成的偏序集记作 $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$。强迫 $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ 会添加一个典范实数 $\dot{r}^{\mathcal{I}}_{\mathrm{gen}}$，使得对于每个在基模型中编码的 Borel $B \subseteq X$，当且仅当 $\dot{r}^{\mathcal{I}}_{\mathrm{gen}} \in B$ [Zap08，命题 2.1.2] 时，B 属于泛滤子。

计算 $\mathrm{non}(\mathcal{I})$ 和 $\mathrm{cov}(\mathcal{I})$ 时，自然会考察强迫 $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$，因为基数不变量与 $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ 所添加的泛实数之间存在如下联系。

定义 2.9 ([Kho11，定义 2.3.1])。设 $\mathcal{I}$ 是波兰空间 X 上的一个 σ-理想，且 M 是集合论的一个传递模型。若对于每个 Borel 集合 $B \in \mathcal{I}$，其 Borel 代码属于 M，x 就称为在 M 上 $\mathcal{I}$-准通用的。

引理 2.10。设 $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ 是波兰空间 X 和 Y 上的 σ-理想，且由 *Borel* 集合生成。假设存在一个 *Borel* 函数 $f\colon Y \to X$，使得

$$\mathbb{P}_{\mathcal{J}} \Vdash f(\dot{r}^{\mathcal{J}}_{\mathrm{gen}}) \text{ is } \mathcal{I}\text{-quasi-generic.}$$

那么，对任意 $A \in \mathcal{I}$，$f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ 均成立（换言之，f 是 $\mathcal{I} \leq_{\mathrm{K}} \mathcal{J}$ 的见证）。特别地，$\mathrm{non}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{J})$ 以及 $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) \geq \mathrm{cov}(\mathcal{J})$ 均成立。

证明。设 $A \in \mathcal{I}$，并且我们可以假设 A 是 Borel 集合。假设 $f^{-1}[A] \notin \mathcal{J}$。那么 $f^{-1}[A]$ 是 Borel 集合，因此 $f^{-1}[A] \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}$。$f^{-1}[A]$ 蕴含 $\dot{r}^{\mathcal{J}}_{\mathrm{gen}} \in f^{-1}[A]$，从而 $f(\dot{r}^{\mathcal{J}}_{\mathrm{gen}}) \in A$，这与 $f(\dot{r}^{\mathcal{J}}_{\mathrm{gen}})$ 被迫为 $\mathcal{I}$-准通用的矛盾。□

3. ω-VERSIONS OF CARDINAL INVARIANTS OF $\mathscr{I}$

为了计算 $M_{\mathscr{I}}$ 的基数不变量，定义 2.7 中基数不变量的以下“ω-变体”将会很有用。

定义 3.1。设 $\mathscr{I}$ 是可数集 X 上的一个理想。定义

$$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathscr{I} \wedge \forall \overline{B} \in [\mathscr{I}]^\omega \, \exists A \in \mathcal{A} \forall B \in \overline{B} \, (A \not\subseteq^* B)\}$$

$$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [X]^\omega \wedge \forall \overline{B} \in [\mathscr{I}]^\omega \, \exists A \in \mathcal{A} \forall B \in \overline{B} \, (|A \cap B| < \omega)\}$$

$$\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\mathscr{I}]^\omega \wedge \forall \overline{B} \in [\mathscr{I}]^\omega \, \exists \overline{A} \in \mathcal{A} \forall B \in \overline{B} \, \exists A \in \overline{A} \, (B \subseteq^* A)\}$$

如果 $\mathscr{I}$ 是可数生成的，那么 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$ 没有明确定义。在这种情况下，为方便起见，我们令 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) = \infty$。[3]

人们可能会认为，可以自然地将 $\mathrm{cov}^*(\mathscr{I})$ 的 ω-变体定义为

$$\mathrm{cov}^*_\omega(\mathscr{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathscr{I} \wedge \forall \overline{B} \in [[X]^\omega]^\omega \, \exists A \in \mathcal{A} \forall B \in \overline{B} \, (|A \cap B| = \omega)\},$$

但显然，$\mathrm{cov}^*_\omega(\mathscr{I}) = \mathrm{cov}^*(\mathscr{I})$ 成立。

[3] $\mathscr{I}$ 的真性保证了 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 定义良好。即使没有真性，$\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 也定义良好。

除了 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 之外，定义 3.1 中的概念均源自 [CM25], ，但这些基数不变量本身最初是在 [BS99] 中针对超滤子引入的。采用 [BS99], 中的记号，我们有

$$\mathfrak{p}'(\mathcal{U}) = \mathrm{add}^*_\omega(\mathcal{U}^*), \pi\chi_\sigma(\mathcal{U}) = \mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{U}^*), \chi_\sigma(\mathcal{U}) = \mathrm{cof}^*_\omega(\mathcal{U}^*)$$

对 ω 上的任意超滤子 $\mathcal{U}$ 。在 [LV99], 中，针对偏序集定义了 $\mathrm{add}_\omega(P)$，并且 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) = \mathrm{add}_\omega(\langle\mathcal{I}, \subseteq^*\rangle)$。此外， [FK25], 研究了 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$，但记作 $\mathrm{add}_\omega(\mathscr{I})$。

自然会想到，这些 ω-版本的 $*$-基数何时会与原来的 $*$-基数不同。以下观察涵盖了 P-理想的情形。

引理 3.2。 设 $\mathscr{I}$ 是可数集上的一个高理想。则有以下结论：

(1) $\omega_1 \le add^*_\omega(\mathscr{I}) \le non^*_\omega(\mathscr{I}) \le cof^*_\omega(\mathscr{I})$。*(2)* 设 *inv* 表示 *add*、*non* 或 *cov* 之一。则 $inv^*(\mathscr{I}) \le inv^*_\omega(\mathscr{I})$；若 $\mathscr{I}$ 是 *P*-理想，则 $inv^*(\mathscr{I}) = inv^*_\omega(\mathscr{I})$。

这个引理意味着 $\mathrm{add}^*(\mathscr{I}) = \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) \iff \mathscr{I}$ 是一个 P-理想（若 $\mathrm{add}^*(\mathscr{I}) = \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$，则根据 (1)，$\mathrm{add}^*(\mathscr{I})$ 是不可数的，因此 $\mathscr{I}$必定是一个 P-理想。反方向由 (2) 得出）。根据引理 2.8(2)，存在许多高理想 $\mathscr{I}$ 使得 $\omega = \mathrm{non}^*(\mathscr{I}) < \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 成立（在 ZFC 中）。此外，不难找到一个博雷尔理想 $\mathscr{I}$使得 $\omega_1 \le \mathrm{non}^*(\mathscr{I}) < \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 是相容的（推论 3.27）。另外，对于某个理想 $\mathscr{I}$，$\mathrm{cof}^*(\mathscr{I}) < \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 是相容的（见注记 3.23）。

引理 3.3。 设 $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ 是 ω上的高理想。

(1) 如果 $\mathscr{I} \preceq_{\omega T} \mathscr{J}$ 那么$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) \ge \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{J})$ 且$\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I}) \le \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{J})$ 成立。

(2) ([CM25，命题 4.6]) $\mathscr{I} \le_{\mathrm{KB}} \mathscr{J}$ 推出$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}) \le \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{J})$。

证明。为证明 (1)，设 $f\colon \mathscr{I} \to \mathscr{J}$是 $\mathscr{I} \preceq_{\omega T} \mathscr{J}$ 的一个见证。

为说明 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) \ge \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{J})$，取满足 $|\mathcal{A}| < \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{J})$ 的 $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{I}$。于是 $f[\mathcal{A}]$ 在 $\mathscr{J}$ 中是 σ-有界的，因此 $\mathcal{A}$ 在 $\mathscr{I}$ 中是 σ-有界的。所以，$|\mathcal{A}| < \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$。

为说明 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I}) \le \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{J})$，取 $\mathcal{A} \subseteq [\mathscr{J}]^\omega$ 作为见证，使得 $|\mathcal{A}| = \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{J})$。不妨假设：

$$\forall \overline{X} \in [\mathscr{J}]^\omega \exists \overline{A} \in \mathcal{A} \forall X \in \overline{X} \exists A \in \overline{A}\,(X \subseteq A).$$

对于每个 $\overline{A} \in \mathcal{A}$，存在 $\mathcal{A}_{\overline{A}} \in [\mathscr{I}]^\omega$ 见证 $I_{\overline{A}} := \{X\colon f(X)$ 对某个 $A \in \overline{A}\} \subseteq \mathscr{I}$ 是 σ-有界的，因为 $\overline{A} \subseteq \mathscr{J}$ 是 σ-有界的。为说明 $\{I_{\overline{A}} : \overline{A} \in \mathcal{A}\}$ 见证了 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{J}) \le |\mathcal{A}|$，任取 $X \in [\mathscr{I}]^\omega$。取 $A \in \mathcal{A}$，使得对所有 $X \in X$，存在$A \in A$，使得 $f(X) \subseteq A$。于是 $X \in I_{\overline{A}}$，因此存在 $A' \in \mathcal{A}_{\overline{A}}$ 使得 $X \subseteq A'$，证明至此完成。□

3.1. 计算 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$。 我们计算各种博雷尔非 P 理想 $\mathscr{I}$的 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$。根据 [Hru11] （问题 6.21 之前的段落），对于解析理想 $\mathscr{I}$，已知的 $\mathrm{add}^*(\mathscr{I})$ 只有三种不同取值，分别为 ω、$\mathrm{add}(\mathcal{N})$ 和 $\mathfrak{b}$。相比之下，我们将看到，$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$ 可以取不同于 ω_1、$\mathrm{add}(\mathcal{N})$ 和$\mathfrak{b}$的值。事实上，对于某个 F_σ 非 P 理想$\mathscr{I}$，$\mathrm{add}^*_\omega(\mathrm{nwd}) = \mathrm{add}(\mathcal{M})$ 且 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) > \mathfrak{b}$ 是相容的。在 [CM25] 和 [FK25], 中，以下结果已得到证明。

命题 3.4 (Cieślak–Martínez-Celis [CM25] 和 Filipów–Kwela [FK25][4])。

(1) $\mathrm{add}^*_\omega(\text{有限集理想} \otimes \mathrm{Fin}) = \mathfrak{b}$。(2) $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) = \omega_1$ 对于 $\mathscr{I} = \mathcal{S}$， $\mathcal{R}$，conv $\mathcal{ED}$， $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$。

[FK25] 的定理 5.11(3) 可以改进如下：

[4]所有证明都可以在 [CM25]的第 4 节中找到。在 [FK25], 中，只有 add^*_ω(有限集理想 $\otimes$ Fin) 和 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathcal{S})$ 的计算结果作为例 5.12 和定理 5.13(7)给出。

命题 3.5。 对于定义在可数集上的任意理想 $\mathscr{I}, \mathscr{J}$，

$$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I} \otimes \mathscr{J}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}), \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{J})\}.$$

证明。 我们不妨假设理想 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{J}$ 都定义在 ω上。

($\leq$) 不等式 $\mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I} \otimes \mathscr{J}) \leq \min\{\mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I}), \mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{J})\}$ 已在 [FK25]中作为定理 5.11(3)证明，因此只需证明 $\mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I} \otimes \mathscr{J}) \leq \mathfrak{b}$。

Let $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\} \subseteq \omega^\omega$ 是一个由严格递增函数组成的无界族，并且 le t

$$A_\alpha = \{\langle i, j\rangle \in \omega \times \omega : j \leq f_\alpha(i)\}.$$

显然， $A_\alpha \in \mathsf{Fin} \otimes \mathsf{Fin} \subseteq \mathscr{I} \otimes \mathscr{J}$。我们声称 $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ 是 $\mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I} \otimes \mathscr{J})$的一个见证。为证明这一点，令 $\{B_n : n < \omega\} \subseteq \mathscr{I} \otimes \mathscr{J}$。对每个 $n < \omega$，存在一个函数 $g_n \in \omega^\omega$，使得对所有 $m < \omega$,

$$(\omega \setminus m \times g_n(m)) \setminus B_n \neq \emptyset,$$

否则 $(\omega \setminus m) \times \omega \subseteq B_n$ 对某个 $m < \omega$成立，这与 $B_n \in \mathscr{I} \otimes \mathscr{J}$矛盾。我们还选择 $\alpha < \mathfrak{b}$，使得对所有 $n < \omega$， $f_\alpha \not\leq^* g_n$ 成立。现在证明对所有$n < \omega$， $A_\alpha \not\subseteq^* B_n$ 成立：对每个 $n < \omega$，存在 $m < \omega$ 使得 $f_\alpha(m) > g_n(m)$。根据 g_n的选择，我们可以找到 $\langle i, j\rangle \in \omega \times \omega$，使得 $i \geq m$， $j \leq g_n(m)$，并且 $\langle i, j\rangle \notin B_n$。由于

$$f_\alpha(i) \geq f_\alpha(m) > g_n(m) \geq j,$$

因此 $\langle i, j\rangle \in A_\alpha \setminus B_n$。

($\geq$) 令 $\kappa < \min\{\mathfrak{b}, \mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I}), \mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{J})\}$，并令 $\mathcal{A} := \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathscr{I} \otimes \mathscr{J}$。我们要证明 $\mathcal{A}$ 不是 $\mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I} \otimes \mathscr{J})$ 的见证。

对于每个 $\alpha < \kappa$，令 $J_\alpha = \{n < \omega : (A_\alpha)_n \notin \mathscr{I}\}$。显然 $J_\alpha \in \mathscr{J}$。由于 $\kappa < \mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I})$，必存在 $\{I_n : n < \omega\} \subseteq \mathscr{I}$，使得对于任意 $\alpha < \kappa$ 和任意 $n \notin J_\alpha$，都存在 $m < \omega$，满足 $(A_\alpha)_n \subseteq I_m$。我们可以假设对于所有 $n < \omega$， $I_n \subseteq I_{n+1}$。对于每个 $\alpha < \kappa$，令$g_\alpha \in \omega^\omega$ 满足对于所有 $n < \omega$,

$$n \notin J_\alpha \Rightarrow (A_\alpha)_n \subseteq I_{g_\alpha(n)}.$$

由于 $\kappa < \mathfrak{b}$，存在一个函数 $f \in \omega^\omega$，使得对所有 $\alpha < \kappa$ 都有 $f \geq^* g_\alpha$。此外，由于$\kappa < \mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{J})$，存在 $\{J'_n : n < \omega\} \subseteq \mathscr{J}$，使得对每个 $\alpha < \kappa$，都存在 $n < \omega$，满足 $J_\alpha \subseteq J'_n$。我们还可以假设，对所有 $n < \omega$ 都有 $n \subseteq J'_n \subseteq J'_{n+1}$。

对于每个 $n < \omega$，我们定义 $B_n \subseteq \omega \times \omega$ 如下:

$$B_n = \{\langle i, j\rangle : i \in J'_n \vee j \in I_{f(i)}\}.$$

显然 $B_n \in \mathscr{I} \otimes \mathscr{J}$。我们声称，对于每个 $\alpha < \kappa$，都存在 $n < \omega$，使得 $A_\alpha \subseteq B_n$；这意味着 $\mathcal{A}$ 不是 $\mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I} \otimes \mathscr{J})$ 的见证。为证明这一点，固定 $\alpha < \kappa$。于是我们可以找到 $n < \omega$，使得对所有 $m \geq n$ 和 $J_\alpha \subseteq J'_n$，都有 $f(m) \geq g_\alpha(m)$。容易看出$A_\alpha \subseteq B_n$如下：令 $\langle i, j\rangle \in A_\alpha$。如果 $i \in J'_m$，那么根据定义有 $\langle i, j\rangle \in B_n$。否则，由于 $i \notin J_\alpha$ 且 $i \geq n$，我们有 $j \in (A_\alpha)_i \subseteq I_{g_\alpha(i)} \subseteq I_{f(i)}$，因此 $\langle i, j\rangle \in B_n$。□

以下命题由 Osvaldo Guzmán 和 Francisco Santiago Nieto de la Rosa 独立证明。它对 [CM25, Question 4.10]给出了肯定的回答。

命题 3.6 （Guzmán–Nieto de la Rosa 独立证明）。 $\mathsf{add}^*_\omega(\mathsf{nwd}) = \mathsf{add}(\mathcal{M})$。

证明。 在 [CM25 中，定理 4.9], $\mathsf{add}^*_\omega(\mathsf{nwd}) \leq \mathsf{add}(\mathcal{M})$ 已经得到证明。为证明反向不等式，令 $\kappa < \mathsf{add}(\mathcal{M})$，并假设 $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathsf{nwd}$。只需找到一个可数族 $\{D_k : k < \omega\}$，由 $2^{<\omega}$ 的开稠密子集组成，使得对于每个 $\alpha < \kappa$，都存在 $k < \omega$，满足 $A_\alpha \cap D_k = \emptyset$。由于 $\kappa < \mathsf{add}(\mathcal{M})$，存在一个可数族$\{T_n : n < \omega\}$，由 $2^{<\omega}$ 的无处稠密子树组成（即对于任意 $s \in 2^{<\omega}$，存在 $t \supseteq s$ 使得$t \notin T_n$），满足$\bigcup_{\alpha<\kappa}[A_\alpha] \subseteq \bigcup_{n<\omega}[T_n]$。

暂且固定 $t \in 2^{<\omega}$。由于每个 T_n 都是无处稠密的，我们可以归纳地取 $t \subsetneq s_0 \subsetneq s_1 \subsetneq \cdots \in 2^{<\omega}$，使得 $s_n \notin T_n$。令 $x_t = \bigcup_{n<\omega} s_n \in 2^\omega$。由于 $x_t \notin \bigcup_{n<\omega}[T_n]$，对于每个$\alpha < \kappa$，都存在 $m_{t,\,\alpha} < \omega$，使得 $t \subseteq x_t \restriction m_{t,\,\alpha} \notin A_\alpha$。由于 $\kappa < \mathsf{add}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{b}$，存在$m_t < \omega$，使得对所有 $\alpha < \kappa$ 以及除有限多个 $t \in 2^{<\omega}$ 外的情形，均有 $m_{t,\,\alpha} \leq m_t$。

固定一个双射 $e\colon \omega \to 2^{<\omega}$，并对每个 $k < \omega$，令

$$D_k = \{s \in 2^{<\omega} : \exists n \geq k\,(s \supseteq x_{e(n)} \restriction m_{e(n)})\}.$$

显然，D_k 是开稠密的。对每个 $\alpha < \kappa$，存在 $k < \omega$，使得对所有 $n \geq k$，$m_{e(n),\,\alpha} \leq m_{e(n)}$。为证明 $A_\alpha \cap D_k = \emptyset$，任取 $s \in D_k$。那么对于某个 $n \geq k$，有 $s \supseteq x_{e(n)} \restriction m_{e(n)}$。由于 $x_{e(n)} \restriction m_{e(n)} \supseteq x_{e(n)} \restriction m_{e(n),\,\alpha} \notin A_\alpha$，因此有 $s \notin A_\alpha$。□

现在我们的目标是找到博雷尔理想 $\mathscr{I}$，使得 $\mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I}) > \mathfrak{b}$ 相容。根据以下经典结果，这样的 $\mathscr{I}$ 必定是一个 non-P-理想。

定理 3.7 (Todorčević, [Tod96])。对每个高解析 *P*-理想 $\mathscr{I}$，

$$\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{add}^*(\mathscr{I}) \leq \mathfrak{b} \text{ and } \mathfrak{d} \leq \mathrm{cof}^*(\mathscr{I}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{N}).$$

定理 3.8 (Louveau–Velickovic, [LV99])。设 $\mathscr{I}$ 是 ω上的一个高解析理想。那么，$\mathscr{I}$要么是 F_σ，要么 $(\omega^\omega, \leq)$ ***Tukey*** 可约于 $(\mathcal{I}, \subseteq)$。

推论 3.9. 若 $\mathscr{I}$ 是定义在可数集上的高非-F_σ 理想，则

$$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) \leq \mathfrak{b} \text{ and } \mathrm{cof}^*(\mathscr{I}) \geq \mathfrak{d}.$$

即使对于 F_σ 非 P 理想 $\mathscr{I}$，通常也有 $\mathsf{add}^*(\mathscr{I}) = \omega_1$，这可由以下结果推出。

定义 3.10. 给定一个理想 $\mathscr{I}$，若 $X \subseteq \mathscr{I}$ 是 $\mathscr{I}$ 的子集，且对于每个可数的 $A \subseteq X$，都有 $\bigcup A \notin \mathscr{I}$，则称它为强无界。

One 可以轻易证明，$\mathscr{I}_L$ 有一个不可数的完美强无界集。

命题 3.11. 若理想 $\mathscr{I}$ 有一个强无界的不可数子集，则$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) = \omega_1$。

证明. 注意，若 X 是一个大小为 ω_1 的强无界子集，则每个 $I \in \mathscr{I}$ 最多只能包含 X 中有限多个元素。因此，若 $\{I_n : n \in \omega\} \subseteq \mathscr{I}$，则存在 $A \in X$ 不包含在任何一个 I_n 中，故 X 是 $\mathsf{add}_\omega(\mathscr{I})$ 的见证，即 $\mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I}) = \omega_1$。□

推论 3.12. $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}_L) = \omega_1$.

理想 $\mathscr{I}_P$ 是没有强无界子集的碎片化理想的典型例子（见 [HRZ14]）。我们将看到，$\mathsf{add}^*_\omega(\mathscr{I}_P) > \mathfrak{b}$ 是相容的。为证明这一点，我们需要回顾 Pawlikowski 引入的以下基数不变量 [Paw85]。

定义 3.13. 设 $\mathcal{I}$ 是 σ上的一个理想。注意，2^ω 可视为一个按坐标模 2 相加的拓扑群。于是，$\mathcal{I}$的传递可加性记作 $\mathsf{add}_t(\mathcal{I})$，定义为

$$\mathrm{add}_t(\mathcal{I}) = \min\{|A| : A \subseteq 2^\omega \wedge \exists X \in \mathcal{I}\,(A + X \notin \mathcal{I})\}.$$

我们使用 Pawlikowski 对 $\mathsf{add}_t(\mathcal{N})$ 的刻画，其中 $\mathcal{N}$ 是 2^ω 上的零测理想。[5]

[5]这里稍微滥用了记号，因为本文中 $\mathcal{N}$ 也表示 ω^ω 上的零测理想。

引理 3.14（Pawlikowski, [Paw85, 引理 2.2]）。

$$\mathrm{add}_t(\mathcal{N}) = \min\left\{|\mathcal{A}| : \exists g \in (\omega\setminus 1)^\omega \left(\mathcal{A} \subseteq \prod_{i<\omega} g(i) \wedge \forall S \in \prod_{i<\omega}[g(i)]^{\le i}\, \exists f \in \mathcal{A}\,(f \notin^* S)\right)\right\},$$

其中 $f \in^* S$ 表示 $\forall^\infty i < \omega\,(f(i) \in S(i))$ 成立。

在 [Paw85],Pawlikowski 还证明了

$$\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{add}_t(\mathcal{N})\}$$

成立，并且 $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{b} < \mathrm{add}_t(\mathcal{N})$ 是相容的。根据 Shelah [She92]（另见 [Bre95，第 3.4 节，定理 2]），我们还知道 $\mathfrak{d} < \mathrm{add}_t(\mathcal{N})$ 是相容的。关于 $\mathrm{add}_t(\mathcal{N})$ 的其他结果可见 [BJ95，第 2 节7]，以及近期的 [CMR25]。

命题 3.15。$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}_P) \ge \mathrm{add}_t(\mathcal{N})$。

证明。假设 $\kappa < \mathrm{add}_t(\mathcal{N})$，并设 $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{I}_P$ 的大小为 κ。只需找到$\{B_n : n < \omega\} \subseteq \mathscr{I}_P$，使得对每个 $A \in \mathcal{A}$，都存在 $n \in \omega$ 使得 $A \subseteq^* B_n$。对于每个 $n < \omega$，令

$$\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : \forall i \le \omega\,(|A \cap P_i^{\exp}| \le i^n)\}$$

显然，$\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n$。对于每个 $A \in \mathcal{A}_n$，我们定义一个函数 $f^n_A : \omega \to [P_{\exp i}]^{\le i^n}$，使得

$$f^n_A(i) = A \cap P_i^{\exp}.$$

由引理 3.14，对于每个 $n < \omega$，我们可以在 ω 上找到一个函数 S_n，使得

(1) $|S_n(i)| \le i$，(2) $S_n(i) \subseteq [P_i^{\exp}]^{\le i^n}$，并且 (3) 对每个 $A \in \mathcal{A}_n$，$\forall^\infty i < \omega\,(f^n_A(i) \in S_n(i))$ 均成立。

于是我们令 $B_n = \bigcup_{i<\omega} \bigcup S_n(i)$。由 (1) 和 (2)，可得

$$|B_n \cap P_i^{\exp}| = \left|\bigcup S_n(i)\right| \le i \cdot i^n = i^{n+1}$$

因此 $B_n \in \mathscr{I}_P$。由 (3)，对于任意 $A \in \mathcal{A}_n$，$A \subseteq^* B_n$ 成立。 □

上述证明可以推广，从而得到以下结论。

定理 3.16。对于实数集 ω 上的任意渐进碎片化理想 $\mathscr{I}$，$\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) \ge \mathrm{add}_t(\mathcal{N})$。

证明。假设 $\kappa < \mathrm{add}_t(\mathcal{N})$，并令 $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{I}_P$ 为大小为 κ 的集合。只需找到 $\{B_n : n <\omega\} \subseteq \mathscr{I}_P$，使得对于每个 $A \in \mathcal{A}$，都存在 $n \in \omega$，满足 $A \subseteq^* B_n$。

假设一个划分 $\langle P_i\rangle_{i<\omega}$ 将 ω 划分为若干部分，并且一个由 $\langle\varphi_i\rangle_{i<\omega}$ 组成的、定义在 P_i上的次测度序列见证了 $\mathscr{I}$是碎片化理想。令 φ 为定义在 ω 上的下半连续次测度，由 $\varphi(A) = \sup\{\varphi_i(A \cap P_i) : i < \omega\}$ 定义。注意，$\mathscr{I} = \mathrm{Fin}(\varphi)$。此外，令 $f \in \omega^\omega$ 为见证 $\mathscr{I}$是渐进碎片化理想的函数。我们可以假设 f 是递增的，并且 $f(0) = 0$。对于每个 $n < \omega$，令 $g_n \in \omega^\omega$ 满足对所有 $i < \omega$，

$$\forall j \ge g_n(i)\, \forall \overline{B} \in [\mathcal{P}(P_j)]^{\le i} \left(\forall B \in \overline{B}\,(\varphi_j(B) \le n) \Rightarrow \varphi_j\left(\bigcup \overline{B}\right) \le f(n)\right). \tag{3.1}$$

对每个 i，$n < \omega$，令 $P^n_i = \bigcup_{j\in[g_n(i)\, g_n(i+1))]} P_j$。对每个 $n < \omega$，令

$$\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : \varphi(A) \le n\}$$

由于 $\mathscr{I}$ = 有限集理想(φ)，我们有 $\mathcal{A} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{A}_n$。对每个 $A \in \mathcal{A}_n$，我们定义 $f^n_A : \omega \to \mathcal{P}(P^n_i)$，如下：

$$f^n_A(i) = A \cap P^n_i.$$

根据引理 3.14，对于每个 $n < \omega$，我们都可以找到一个定义在 ω 上的函数 S_n，使得

(1) $|S_n(i)| \le i$,

(2) $S_n(i) \subseteq \mathcal{P}(P_i^n)$, (3) 对每个 $B \in S_n(i)$, $\varphi(B) \leq n$, 并且 (4) 对每个 $A \in \mathcal{A}_n$, $\forall^\infty i < \omega\,(f_A^n(i) \in S_n(i))$ 都成立。

于是我们令 $B_n = \bigcup_{i<\omega} \bigcup S_n(i)$。利用（$*$），由（1）、（2）和（3）可得

$$\varphi(B_n \cap P_i^n) = \varphi(\bigcup S_n(i)) \leq f(n)$$

从而 $B_n \in$ 有限集理想$(\varphi) = \mathscr{I}$。根据（4），对于任意 $A \in \mathcal{A}_n$、$A \subseteq^* B_n$。 □

接下来我们考虑共尾数$^*_\omega(\mathscr{I})$。一个有趣的现象是，关于共尾数$^*_\omega(\mathscr{I})$，我们有若干论证可以看作是前面对 add$^*_\omega(\mathscr{I})$ 的论证的对偶，尽管 add$^*_\omega(\mathscr{I})$ 和共尾数$^*_\omega(\mathscr{I})$ 的定义并不真正对偶。

命题 3.17。

（1）共尾数$^*_\omega(\mathscr{I}) = \mathfrak{c}$ 在以下情况下 $\mathscr{I}$ 是 $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, conv $\mathcal{ED}$, $\mathcal{ED}_{fin}$, $\mathscr{I}_L$。（2）共尾数$^*_\omega$(有限集理想 $\otimes$ 有限集理想) $= \mathfrak{d}$。（3）共尾数$^*_\omega$(nwd) = 共尾数$(\mathcal{M})$。

证明。回忆一下，cof$^*(\mathscr{I}) \leq$ cof$^*_\omega(\mathscr{I})$ 总是成立。

(1) 对于那些理想 $\mathscr{I}$，已知 cof$^*(\mathscr{I}) = \mathfrak{c}$；对于 $\mathscr{I} = \mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, conv $\mathcal{ED}$，参见[Hru11，第 3]节。对于 $\mathscr{I} = \mathcal{ED}_{\text{fin}}$, $\mathscr{I}_L$，这可由 [HRZ14，定理 2.6], 得出，因为$\mathcal{ED}_{\text{fin}}$, $\mathscr{I}_L$ 是碎片化的，但不是渐进碎片化的（参见 [BM14]）。

(2) 已知 cof*(有限集理想 $\otimes$ 有限集) $= \mathfrak{d}$ （参见 [Hru11]），因此只需证明 cof$^*_\omega$(有限集理想 $\otimes$ 有限集) $\leq \mathfrak{d}$。对于任意 $n < \omega$ 和 $f \in \omega^\omega$，令

$$A_{n,f} = (n \times \omega) \cup \{\langle i, j\rangle \in \omega \times \omega : j \leq f(i)\}.$$

现在设 $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ 是一个大小为 $\mathfrak{d}$ 的支配族。容易看出，$\mathcal{A} := \{\{A_{n,f} : n < \omega\} : f \in \mathcal{F}\}$ 见证了 cof$^*_\omega$(有限集理想 $\otimes$ 有限集) $\leq \mathfrak{d}$。

(3) 已知 cof*(nwd) $=$ cof$(\mathcal{M})$（这归功于 Fremlin [Fre91], , 另见 [BHH04，定理 1.6(i)]），因此只需证明 cof$^*_\omega$(nwd) $\leq$ cof$(\mathcal{M})$。注意，下面的论证是命题 3.6 的对偶。设 $\{A_\alpha : \alpha <$ cof$(\mathcal{M})\} \subseteq \mathcal{M}$ 在 $\mathcal{M}$中共尾。我们不妨设 $A_\alpha = \bigcup_{n<\omega}[T_{\alpha,n}]$，其中 $T_{\alpha,\,n} \subseteq 2^{<\omega}$ 是一棵无处稠密树。对每个$t \in 2^{<\omega}$，取 $x_t^\alpha \in 2^\omega$ 使得 $t \subseteq x_t^\alpha \notin \bigcup_{n<\omega}[T_{\alpha,n}]$。令 $\{f_\beta : \beta < \mathfrak{d}\}$ 为从 $2^{<\omega}$ 到 ω 的一个支配函数族。固定一个双射 $e\colon \omega \to 2^{<\omega}$，并且对每个 $k < \omega$，令

$$D_{\alpha,\beta,k} = \{s \in 2^{<\omega} : \exists n \geq k\,(s \supseteq x^\alpha_{e(n)} \restriction f_\beta(e(n))\}.$$

显然，$D_{\alpha,\,\beta,\,k}$ 是开稠密的。容易看出，$\{\{2^{<\omega} \setminus D_{\alpha,\beta,k} : k < \omega\} : \alpha <cof(\mathcal{M})$ $\wedge\, \beta < \mathfrak{d}\}$ 见证了 cof$^*_\omega$(nwd) $\leq$ max{cof$(\mathcal{M})$ $\mathfrak{d}\} =$ cof$(\mathcal{M})$。□

我们通过证明命题 3.15 和定理 3.16 的对偶，说明对于某个理想 $\mathscr{I}$，cof$^*_\omega(\mathscr{I})$ $< \mathfrak{d}$ 是相容的。在 [Kad00], Kada 引入了以下与拉弗性质密切相关的基数不变量。

定义 3.18。

$$\mathfrak{l} = \min\{\kappa : \forall g \in \omega^\omega\, \exists \mathcal{S} \subseteq \prod_{i<\omega} [g(i)]^{\leq i}\,(|\mathcal{S}| = \kappa \wedge \forall f \leq^* g\, \exists S \in \mathcal{S}\,(f \in^* S))\}.$$

注意，$\mathfrak{l}$ 是 Pawlikowski 对 add$_t(\mathcal{N})$ 的组合刻画的对偶概念。在 [Kad00], 中提到，cof$(\mathcal{N})$ $=\min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{l}\}$，并且在 Laver 模型中，$\omega_1 = \mathfrak{l} < \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \omega_2$ 成立。

命题 3.19. 共尾数$^*_\omega(\mathscr{I}_P) \leq \mathfrak{l}$。

证明。对于每个 $i<\omega$，令

$$Q_i=\prod_{n\le i}[P_i^{\exp}]^{\le i^n}.$$

令 $\{S_\alpha:\ \alpha<\mathfrak{l}\}\subseteq\prod_{i<\omega}[Q_i]^{\le i}$，使得每个 $f\in\prod_{i<\omega}Q_i$ 都被某个 S_α 捕获，即对除有限多个 $i<\omega$ 之外的所有 $i<\omega$，$f(i)\in S_\alpha(i)$ 都成立。对于每个 $\alpha<\mathfrak{l}$ 和每个 $n<\omega$，我们定义

$$A_\alpha^n=\bigcup_{i\ge n}\bigcup\pi_n[S_\alpha(i)],$$

其中 π_n 是第 n 个投影映射，也就是说，对于每个满足 $n\in\mathrm{dom}(f)$ 的函数 f，都有 $\pi_n(f)=f(n)$。对于每个 $n<\omega$，$A_\alpha^n\in\mathscr{I}_P$，因为对所有 $i\ge n$，

$$|A_\alpha^n\cap P_i^{\exp}|=|\pi_n[S_\alpha(i)]|\le i\cdot i^n=i^{n+1}$$

成立。令 $A_\alpha=\{A_\alpha^n:\ n<\omega\}$，对每个 $\alpha<\mathfrak{l}$，我们断言 $\{A_\alpha:\ \alpha<\mathfrak{l}\}$ 是 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I}_P)$ 的见证；令 $\{B_n:\ n\in\omega\}\subseteq\mathscr{I}_P$。如有必要，通过向序列中添加更多元素，我们可以假设 $\varphi(B_n)\le n$。令 f 为定义在 ω 上的函数，其定义如下：

$$f(i)=\langle B_0\cap P_i^{\exp},B_1\cap P_i^{\exp},\dots,B_i\cap P_i^{\exp}\rangle.$$

由于对于除有限多个 $i<\omega$之外的所有 $i<\omega$，$f(i)\in Q_i$，因此 f 必定被某个 S_α捕获。这意味着对于所有 $n<\omega$，$B_n\subseteq^* A_\alpha^n$。□

更一般地，以下结论成立。

定理 3.20。共尾数$^*_\omega(\mathscr{I})\le\mathfrak{l}$对每个渐进碎片化理想 $\mathscr{I}$都成立。

证明。与定理 3.16 中一样，令 $\langle P_i,\varphi_i\rangle_{i<\omega}$ 为见证，表明 $\mathscr{I}$ 是碎片化的，并令 φ 为定义在 ω上的下半连续次测度，其定义为 $\varphi(A)=\sup\{\varphi_i(A\cap P_i):\ i<\omega\}$。此外，令 $f\in\omega^\omega$ 为见证 $\mathscr{I}$ 渐进碎片化的递增函数，并且对每个 $n<\omega$，令 $g_n\in\omega^\omega$ 满足对所有 $i<\omega$，(3.1)成立。对每个 $i,n<\omega$，令$P_i^n=\bigcup_{j\in[g_n(i)\ g_n(i+1))]}P_j$。对每个 $i<\omega$，令

$$Q_i=\prod_{n\le i}\{A\subseteq P_i^n:\varphi(A)\le n\}.$$

令 $\{S_\alpha:\ \alpha<\mathfrak{l}\}\subseteq\prod_{i<\omega}[Q_i]^{\le i}$，使得 $\prod_{i<\omega}Q_i$ 的每个元素都被某个 S_α捕获。对于每个 $\alpha<\mathfrak{l}$和每个 $n<\omega$，我们定义

$$A_\alpha^n=\bigcup_{i\ge n}\bigcup\pi_n[S_\alpha(i)],$$

其中 π_n 是第 n 个投影映射。利用 (3.1)，我们有 $A_\alpha^n\in\mathrm{Fin}(\varphi)=\mathscr{I}$。令$A_\alpha=\{A_\alpha^n:\ n<\omega\}$，对每个 $\alpha<\mathfrak{l}$，并且可以用命题 3.19 的相同论证证明，$\{A_\alpha:\ \alpha<\mathfrak{l}\}$ 是 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 的见证。□

这个结果可视为以下 [HRZ14 定理 2.2 和命题 2.3] 的“ω-版本”的重新表述：

定理 3.21. 设 $\mathscr{I}$ 是 ω 上的渐进碎片化理想，且 $\mathbb{P}$ 是具有 ***Laver*** 性质的强迫。那么 $[\mathscr{I}]^\omega\cap V$是$\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$的见证。因此，在 ***Laver*** 模型中，对于 ω上的所有渐进碎片化理想 $\mathscr{I}$，$\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})<\mathfrak{b}=\mathfrak{d}$ 成立。

证明。我们继续使用定理 3.20 的证明中引入的记号。设 .
$\{X_n:\ n<\omega\}$ 是 ω 的一个子集的 $\mathbb{P}$-名称，并假设 $\Vdash_{\mathbb{P}}\varphi(X_n)<\infty$。只需

找到 $\{A_n\colon\ n<\omega\}\in[\mathscr{I}]^\omega\cap V$，使得对所有 $n<\omega$，$\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{X}_n\subseteq^* A_n$ 都成立。对每个 $n<\omega$，找一个 ω 上函数 Y_n 的名称，使得以下内容被强迫成立

$$\dot{Y}_n(i)=\begin{cases}\dot{X}_n\cap P_i^n & \text{if } \varphi(\dot{X}_n)\le i,\\ \emptyset & \text{if } \varphi(\dot{X}_n)>i.\end{cases}$$

对每个 $n<\omega$，都强迫 $\forall i\in\omega(\varphi(\dot{Y}_n(i))\le i)$，并且强迫 $\dot{X}_n\subseteq^*\bigcup_{i<\omega}\dot{Y}_n(i)$。令 h 为定义在 ω 上的一个函数名称，使得以下命题被强迫成立：

$$h(i)=\langle\dot{Y}_0(i),\dot{Y}_1(i),\dots,\dot{Y}_i(i)\rangle.$$

由于 $\Vdash_{\mathbb{P}} h\in\prod_{i<\omega}Q_i$，拉弗性质蕴含存在一个函数 $S\in V$，使得对所有 $i<\omega$，$S(i)\in[Q_i]^{\le i}$ 且 $\Vdash_{\mathbb{P}}\forall i<\omega(h(i)\in S(i))$。对每个 $n<\omega$，我们定义

$$A_n=\bigcup_{i\ge n}\bigcup\pi_n[S(i)]\in V.$$

利用 (3.1)，$A_n\in$ 有限集理想$(\varphi)=\mathscr{I}$。此外，强迫 $\dot{X}_n\subseteq^*\bigcup_{i<\omega}\dot{Y}_n(i)\subseteq^* A_n$。证明至此完成。□

以下问题仍未解决。

问题 3.22。是否相容于：对于某个高的博雷尔理想 $\mathscr{I}$，有 $\mathrm{cof}^*(\mathscr{I})<\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})\ \omega$?

注记 3.23。这个问题存在一个非博雷尔的例子：首先，不难看出，对于 ZFC 中的任意理想 $\mathscr{J}$，$\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{J})$ 都具有不可数共尾性。加入 $\aleph_\omega$ 个科恩实数 $c_\alpha\in[\omega]^\omega$，并令 $\mathscr{I}$ 为由 $\{c_\alpha$ 生成的理想：$\alpha<\aleph_\omega\}$。于是，很容易看出 $\mathrm{cof}^*(\mathscr{I})=\aleph_\omega$。因此 $\mathrm{cof}^*(\mathscr{I})<\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$。

我们注意到，在 [BS99]，中，同样的问题曾作为第 8 章中的问题 1 针对超滤子提出。

3.2. **non() 的计算**。我们计算各种博雷尔非 P 理想$\mathscr{I}$的 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$。第一作者和第三作者在 [CM25] 中证明了以下结果。

命题 3.24 (Cieślak–Martínez-Celis [CM25, 命题 4.7])。

$$\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{R})=\mathrm{non}^*_\omega(\mathrm{conv})=\omega_1.$$

我们先研究理想的富比尼积。

命题 3.25。$\mathrm{non}^*_\omega($有限集理想$\otimes$有限集理想$)=\mathfrak{d}$。

证明。为了证明 $\mathfrak{d}\le\mathrm{non}^*_\omega($有限集理想$\otimes$有限集理想$)$，令 $\mathcal{A}\subseteq[\omega\times\omega]^\omega$ 的大小为 $<\mathfrak{d}$。我们断言，$\mathcal{A}$ 不可能是 $\mathrm{non}^*_\omega($有限集理想$\otimes$有限集理想$)$ 的见证。通过缩小 $\mathcal{A}$中的每个成员，我们可以假设每个 $A\in\mathcal{A}$ 都满足以下条件之一：

(1) $A\subseteq n\times\omega$ 对于某个 $n<\omega$成立，或者 (2) A 是某个函数 h_A:

$\omega\to\omega$ 的（图的）无限子集。

由于 $|\mathcal{A}|<\mathfrak{d}$，存在 $f\in\omega^\omega$，使得对所有 $A\in\mathcal{A}$，都有 $f\not\le^* h_A$（只要 h_A 有定义）。现在令

$$X_n=(n\times\omega)\cup\{\langle i,j\rangle : j\le f(i)\}.$$

那么，$\{X_n\colon\ n<\omega\}\in[$有限集理想$\otimes$有限集理想$]^\omega$ 见证了 $\mathcal{A}$ 不见证 $\mathrm{non}^*_\omega($有限集理想$\otimes$有限集理想$)$，正如所需。

为证明 $\mathrm{non}^*_\omega($有限集理想$\otimes$有限集理想$)\le\mathfrak{d}$，令 $\mathcal{D}$ 为一族严格递增函数组成的支配族，使得 $\forall g\in\omega^\omega\,\exists f\in\mathcal{D}(g<f)$。对每个 $f\in\mathcal{D}$，我们令

$$C_f=\{\langle n,f(n)\rangle : n<\omega\}.$$

于是很容易验证，$\mathcal{C}=\{C_f:\ f\in\mathcal{D}\}$ 见证了 non^*_ω(有限集理想 $\otimes$ 有限集理想)。下面给出一般情形的详细论证。□

命题 3.25 可以如下推广，但我们注意到，命题 3.26 和推论 3.27 已经在 [BS99] 中针对极大理想得到了证明。

命题 3.26 （参见 Brendle–Shelah [BS99, 命题 5.1(d)]）。对于任意理想 $\mathscr{I}$，$\mathscr{J}$定义在可数集上，

$$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}\otimes\mathscr{J})=\max\{\mathfrak{d},\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}),\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{J})\}.$$

证明。不妨设 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{J}$ 都是定义在 ω 上的理想。由于 $\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}\subseteq\mathscr{I}\otimes\mathscr{J}$，引理 3.3(2) 和命题 3.25 蕴含 $\mathfrak{d}=\mathrm{non}^*_\omega(\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin})\le\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}\otimes\mathscr{J})$。

注意，$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$，$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{J})\le\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}\otimes\mathscr{J})$ 并不能直接由引理 3.3(2) 得出，因为 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{J}$ 是 Katětov 可约于 $\mathscr{I}\otimes\mathscr{J}$ 的，但不一定是 Katětov–Blass 可约的。不过，这些不等式仍可由以下显然事实推出：如果 $\mathcal{A}\subseteq[\omega\times\omega]^\omega$ 是 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}\otimes\mathscr{J})$ 的一个见证，那么 $\{\pi_0[A]:\ A\in\mathcal{A}\}$ 和 $\{\pi_1[A]:\ A\in\mathcal{A}\}$ 分别是 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{J})$ 的见证。这里，$\pi_i:\ \omega\times\omega\to\omega$ 定义为 $\pi_i(\langle n_0,\ n_1\rangle)=n_i$。

现在我们证明 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}\otimes\mathscr{J})\le\max\{\mathfrak{d},\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}),\ \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{J})\}$。设 $\mathcal{D}\subseteq\omega^\omega$ 为由严格递增函数构成的支配族，且满足 $\forall g\in\omega^\omega\ \exists f\in\mathcal{D}\,(g<f)$。令$\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$分别为 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 和 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{J})$ 的见证。对于每个 $f\in\mathcal{D}$，$A\in\mathcal{A}$，$B\in\mathcal{B}$，记

$$C_{f,A,B}=\{\langle A(n),B(f(n))\rangle:n<\omega\},$$

其中 $A(k)$ $B(k)$ 分别表示 A、B 的递增枚举中的第 k 个元素。我们断言

$$\mathcal{C}:=\{C_{f,A,B}:f\in\mathcal{D},A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$$

是 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}\otimes\mathscr{J})$ 的见证。为证明这一点，任取 $\{X_n:\ n<\omega\}\in[\mathscr{I}\otimes\mathscr{J}]^\omega$。那么存在 $Y_n\in\mathscr{I}$ 和 $\phi_n:\ \omega\to\mathscr{J}$，使得

$$X_n\subseteq(Y_n\times\omega)\cup\{\langle i,j\rangle:j\in\phi_n(i)\}.$$

取 $A\in\mathcal{A}$，使得 $\forall n<\omega(|A\cap Y_n|<\omega)$。取 $B\in\mathcal{B}$，使得 $\forall n,\ i<\omega(|B\cap\phi_n(i)|<\omega)$。对于每个 $n<\omega$，取 $h_n\in\omega^\omega$，使得

$$\forall i<\omega\,(B\cap\phi_n(i)\subseteq B(h_n(i))).$$

现在令 $f\in\mathcal{D}$满足对所有的 $n<\omega$、$h_n\le^* f$都有。于是对所有的 $n<\omega$，都有$|C_{f,\ A,\ B}\cap X_n|<\omega$，因为 $\forall^\infty m<\omega\ A(m)\notin Y_n$ 成立，而 $h_n\le^* f$ 推出$|C_{f,\ A,\ B}\cap\{\langle i,j\rangle:\ j\in\phi_n(i)\}|<\omega$。□

推论 3.27 (参见 Brendle–Shelah [BS99，推论 5。3])。设 $\kappa<\lambda$ 为正则基数。那么以下情况相容：存在实数集上的一个博雷尔理想 $\mathscr{I}$，使得$\mathrm{non}^*(\mathscr{I})=\kappa$ 且$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})=\lambda$。

证明。若 $\kappa=\omega$，则可取 $\mathscr{I}$ 为有限集理想 $\otimes$ 有限集理想，并假设 $\mathfrak{d}=\lambda$。若 κ 不可数，则可取 $\mathscr{I}$为有限集理想$\otimes\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$，并假设覆盖数$(\mathcal{M})=\kappa$且 $\mathfrak{d}=\lambda$。（根据[HMM10，命题 3.6]，覆盖数$(\mathcal{M})$ =最小值$\{\mathfrak{d},\mathrm{non}^*(\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}})\}$。）注意，$\mathrm{non}^*(\mathscr{I}\otimes\mathscr{J})$ =$\mathrm{non}^*(\mathscr{J})$。□

命题 3.28. $\mathrm{non}^*_\omega(\mathrm{nwd})=\mathrm{non}(\mathcal{M})$.

证明。为了证明 non^*_ω(nwd) $\le\mathrm{non}(\mathcal{M})$，取满足 $X\notin\mathcal{M}$的 $X\subseteq2^\omega$。对于 $x\in X$，令 $Y_x:=\{x\restriction n:\ n\in\omega\}\in[2^{<\omega}]^\omega$。为了说明 $\{Y_x:\ x\in X\}$ 是non^*_ω(nwd) $\le|X|$的见证，取$\{T_n:n\in\omega\}$，它是 $2^{<\omega}$中由无处稠密树组成的可数族。取满足$x\notin\bigcup_{n\in\omega}[T_n]$的 $x\in X$。那么 Y_x 与所有 T_n 几乎不交。

为了证明 $\mathrm{non}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}^*_\omega(\mathrm{nwd})$，取 $\kappa < \mathrm{non}(\mathcal{M})$，并令 $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [2^{<\omega}]^\omega$。只需找到一个可数族 $\{T_n : n < \omega\}$，其中的元素是无处稠密树，且对每个 $\alpha < \kappa$，都存在 $n < \omega$ 使得 $|A_\alpha \cap T_n| = \omega$。我们可以假设，对每个 $\alpha < \kappa$，A_α 构成一个反链，并且存在 $x_\alpha \in 2^\omega$，使得对每个 $i < \omega$，A_α 中除有限多个以外的所有成员都延伸 $x_\alpha \restriction i$。令 $\{\sigma^n_\alpha : n < \omega\}$ 为 A_α 的一个枚举，并为方便起见设$\sigma^{-1}_\alpha = \emptyset$。我们定义一个序列 $\{a^n_\alpha : n < \omega\}$，使得

$$a^n_\alpha = \min\{i < |\sigma^n_\alpha| : \sigma^n_\alpha(i) \neq x_\alpha(i)\}.$$

不失一般性，我们假设对每个 $n < \omega$，$|\sigma^{n-1}_\alpha| < a^n_\alpha < |\sigma^n_\alpha|$ 都成立。令$y_\alpha \in 2^\omega$ 定义如下:

$$y_\alpha(i) = \begin{cases} x_\alpha(i) & \text{if } i \in [|\sigma^{n-1}_\alpha|, a^n_\alpha) \text{ for some } n < \omega, \\ \sigma^n_\alpha(i) & \text{if } i \in [a^n_\alpha, |\sigma^n_\alpha|) \text{ for some } n < \omega. \end{cases}$$

由于 $\kappa < \mathrm{non}(\mathcal{M})$，集合 $\{x_\alpha, y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是贫的。因此，存在实数 $z \in 2^\omega$ 和 ω 的区间划分 $\langle I_n \rangle_{n\in\omega}$，使得

$$\{x_\alpha, y_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \{x \in 2^\omega : \forall^\infty n \in \omega\, (x \restriction I_n \neq z \restriction I_n)\}$$

成立（参见 [Bla10，定理 5.2]）。对每个 $n < \omega$，令 $T_n \subseteq 2^{<\omega}$ 为一棵满足以下条件的树:

$$[T_n] = \{x \in 2^\omega : \forall m \geq n\, (x \restriction I_m \neq z \restriction I_m)\}.$$

It 容易看出，对每个 $\alpha < \kappa$，都存在 $n \in \omega$ 使得 $A_\alpha \cap T_n$ 是无限的 te. □

现在我们考虑非$^*_\omega(\mathscr{I})$，其中 F_σ 是非 P 理想。在 [CM25 的问题 4.11], 中，第一作者和第三作者询问了在 $\mathscr{I} = \mathcal{S}$，$\mathcal{ED}$，$\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$的情形下，非$^*_\omega(\mathscr{I})$的取值。我们将在下文给出 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{ED}$ 的完整答案。为了刻画非$^*_\omega(\mathcal{S})$，我们引入零测理想覆盖数的以下变体。

定义 3.29. 覆盖数$_\omega(\mathcal{N})$: $=$最小值$\{|\mathcal{A}| :\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \wedge \forall B \in [\mathbb{R}]^\omega\, \exists A \in \mathcal{A}\, (B \subseteq A)\}$。

使用 [BJ95, 定义 2.1.3], 覆盖数$_\omega(\mathcal{N})$ $=$有限集理想的共尾数$([\mathbb{R}]^\omega,\ \mathcal{N})$ 中的记号。下文中，$\mathfrak{r}_\sigma$ 是由以下方式定义的分割数的“ω-变体” $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{r}_\sigma = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \omega^\omega \wedge \forall \overline{B} \in [\mathcal{P}(\omega)]^\omega\ \exists A \in \mathcal{A}\ \forall B \in \overline{B}\ (A \subseteq^* B \vee A \cap B =^* \emptyset)\}.$$

关于 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_\sigma$ 的问题最初发布在 [Voj92], , 据我们所知，至今仍未解决。对这一基数不变量感兴趣的读者可参阅 [Bla10], 了解更多信息。

命题 3.30.

(1) 覆盖数$(\mathcal{N})$ $\leq$覆盖数$_\omega(\mathcal{N})$ $\leq$最小值$\{$

non$(\mathcal{M})$ $\mathfrak{r}_\sigma\}$。(2) cf(覆盖数$_\omega(\mathcal{N})$) $\geq \omega_1$。

证明。（1）根据定义，cov$(\mathcal{N})$ $\leq$cov$_\omega(\mathcal{N})$。为了证明 cov$_\omega(\mathcal{N})$ $\leq$non$(\mathcal{M})$，设 $X \subseteq \mathbb{R}$是一个非第一范畴集。将 $\mathbb{R}$ 划分为零测集 A 和第一范畴集 B。给定 $Y \in [\mathbb{R}]^\omega$，只需证明存在 $x \in X$ 使得 $Y \subseteq x + A := \{x + a : a \in A\}$。反设不然。那么对所有 $x \in X$，都存在 $y \in Y$ 使得 $y - x \notin A$，即 $y - x \in B$。因此我们有 $-X := \{-x : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \bigcup_{y\in Y}(-y + B)$，这意味着一个非第一范畴集包含于一个第一范畴集，这与定义矛盾。cov$(\mathcal{N})$ $\leq \mathfrak{r}_\sigma$ 的证明与 cov$(\mathcal{N})$ $\leq \mathfrak{r}$ 的标准证明类似: 令 $\kappa <$ cov$_\omega(\mathcal{N})$，并令 $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \omega^\omega$，我们将证明 $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 不是 $\mathfrak{r}_\sigma$的见证。对所有 $\alpha < \kappa$，令 $N_\alpha = \{B \in \omega^\omega : A_\alpha \subseteq^* B \vee A_\alpha \cap B =^* \emptyset\}$。容易证明每个 N_α 在 ω^ω 中都是勒贝格零测集；又由于 $\kappa <$ cov$_\omega(\mathcal{N})$，必定存在一个序列 $\langle B_n : n < \omega\rangle$，使得对每个 $\alpha < \kappa$，都存在 $n < \omega$ 使得 $B_n \notin N_\alpha$。但这样一来，对每个 $\alpha < \kappa$，都存在 $n < \omega$ 使得$|A_\alpha \cap B_n| = |A_\alpha \cap (\omega \setminus B_n))| = \omega$，因此 $\kappa < \mathfrak{r}_\sigma$。

（2）反设存在严格递增基数 $\langle\lambda_i\rangle_{i<\omega}$，使得 $\lambda:=\sup_{i<\omega}\lambda_i=\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$。令 $\{A_\alpha:\alpha<\lambda\}\subseteq\mathcal{N}$为 $\lambda=\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$的见证。对于 $i<\omega$，存在 $B_i\in[\mathbb{R}]^\omega$ 使得对所有 $\alpha<\lambda_i$，都有 $B_i\not\subseteq N_\alpha$。那么 $B:=\bigcup_{i<\omega}B_i\in[\mathbb{R}]^\omega$ 无法被任何 A_α 覆盖，其中 $\alpha<\lambda$，这就产生了矛盾。□

由于 $\mathrm{cf}(\mathrm{cov}(\mathcal{N}))=\omega$ 由 [She00]，相容，我们特别得到：

推论 3.31。$\mathrm{cov}(\mathcal{N})<\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$ 是相容的。

命题 3.32。$\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{S})=\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$。

为证明这一点，我们使用以下引理：

引理 3.33 ([HMM10，引理 5。5])。对于任意 $X\subseteq 2^\omega$，若满足 $\mu^*(X)<\frac{1}{2}$，则存在 $Y\in[\Omega]^\omega$，使得对于任意 $x\in X$ 以及除有限多个 $V\in Y$之外的所有情形，$x\notin V$。

命题 *3.32* 的证明。($\leq$) 令 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{N}$ 为 $|\mathcal{F}|=\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$ 的见证。对每个 $N\in\mathcal{F}$，当 $X:=N$ 时，令$Y_N\in[\Omega]^\omega$如引理 3.33 所述。为证明 $\{Y_N:N\in\mathcal{F}\}$ 是$|\mathcal{F}|\geq\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{S})=\min\{|\mathcal{A}|:\mathcal{A}\subseteq[\Omega]^\omega,(\forall X\in[2^\omega]^\omega)(\exists Y\in\mathcal{A})(\forall x\in X)(\forall^\infty V\in Y)(x\notin V)\}$的见证，令 $X\in[2^\omega]^\omega$，并取满足 $X\subseteq N$ 的 $N\in\mathcal{F}$。那么，对任意 $x\in X\subseteq N$ 以及除有限多个 $V\in Y_N$ 之外的所有情形，根据引理 3.33，有 $x\notin V$，因此 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{S})\leq|\mathcal{F}|$。

($\geq$) 对于 $F\in[2^\omega]^{<\omega}$，令 $S_F=\{C\in\Omega:F\cap C\neq\emptyset\}$。令 $\kappa<\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$，并令 $\{X_\alpha:\alpha<\kappa\}\subseteq[\Omega]^\omega$。定义 Y_α 为满足以下条件的 $\{x\in 2^\omega:x$ 属于 $X_\alpha\}$中的无穷多个元素。我们有 Y_α 的测度大于$\frac{1}{2}$。还需注意，若 $x\in Y_\alpha$，则 $|S_{\{x\}}\cap X_\alpha|=\omega$。令$Z_\alpha=Y_\alpha+\mathbb{Q}$。显然，$Z_\alpha$ 是满测度的。现在，由于 $\kappa<\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$，存在 $A\in[\mathbb{R}]^\omega$使得对所有 $\alpha<\kappa$，都有 $A\cap Z_\alpha\neq\emptyset$。于是，集合族 $\{S_{\{x+q\}}:x\in A,q\in\mathbb{Q}\}$ 满足：对每个 $\alpha<\kappa$，存在 $x\in A$ 和 $q\in\mathbb{Q}$，使得 $X_\alpha\cap S_{\{x+q\}}$ 是无限的。□

接下来，我们考虑最终不同理想。

命题3.34。$\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{ED})=$覆盖数$(\mathcal{M})$。

为证明这一点，我们将使用以下引理：

引理 3.35 ([BJ95，引理 2.4。2], [Mil82], [Bar87], [CM23，定理 5。1])。对于任意基数 κ，以下条件等价：

- $\kappa<$覆盖数$(\mathcal{M})$。
- $\forall F\in[\omega^\omega]^\kappa\ \forall G\in[[\omega]^\omega]^\kappa\ \exists g\in\omega^\omega\ \forall f\in F\ \forall X\in G\ \exists^\infty n\in X\,(f(n)=g(n))$。
- $\forall F\in[\omega^\omega]^\kappa\ \forall h\in\omega^\omega:$ 递增的 $\exists S\in\prod_{n<\omega}[\omega]^{\leq h(n)}\ \forall f\in F\ \exists^\infty n<\omega\ (f(n)\in S(n))$。

命题*3.34*的证明。为证明 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})\leq\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{ED})$，取大小为$<\mathrm{cov}(\mathcal{M})$的 $\mathcal{A}\subseteq[\omega\times\omega]^\omega$。只需证明 $\mathcal{A}$ 不是 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{ED})$的见证。对于每个 $A\in\mathcal{A}$,

(1) A 包含 $n\times\omega$的一个无限子集，或者(2) A 包含某个无限集 X_A上的函数 $f_A:X_A\to\omega$ 的图。

由引理 3.35，存在某个 $g\in\omega^\omega$，使得每当 $A\in\mathcal{A}$ 满足(2)时，对无限多个 $n\in X_A$，$f_A(n)=g(n)$ 成立。对于每个 $n<\omega$，令

$$B_n=(n\times\omega)\cup\{\langle i,g(i)\rangle:i<\omega\}\in\mathcal{ED}.$$

无论 $A\in\mathcal{A}$ 满足 (1) 还是 (2)，$|A\cap B_n|=\omega$ 对某个 $n<\omega$成立。因此，$|\mathcal{A}|<\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{ED})$。为证明 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{ED})\leq\mathrm{cov}(\mathcal{M})$，取一个大小为 $<$ 的 $F\subseteq\omega^\omega\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{ED})$。对于 $f\in F$，令 $A_f\subseteq\omega\times\omega$ 为 f 的图。由于 $|F|<\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{ED})$，存在 $\{B_i:i<\omega\}\subseteq\mathcal{ED}$，使得对每个 $f\in F$，都有 $|A_f\cap B_i|=\omega$ 对某个 $i<\omega$ 成立。我们不妨假设 B_i 的每个垂直截面都是有限的。对每个 $i<\omega$，我们定义 $S_i\in([\omega]^{<\omega})^\omega$，使得 $S_i(n)=(B_i)_n$ 对 $n<\omega$ 成立。由于 $B_i\in\mathcal{ED}$，对某个 $k_i<\omega$ 有 $S_i\in([\omega]^{\leq k_i})^\omega$。注意，对任意 $f\in F$，存在 $i<\omega$

使得 $\exists^\infty n<\omega\ f(n)\in S_i(n)$。现在令 $h\geq^* 1$ 为任意对象。我们选取一个增长足够缓慢的函数 $g\in\omega^\omega$，使得对所有 $n<\omega$，$\sum_{i\leq g(n)}k_i\leq h(n)$。然后我们定义 $S\in\prod_{n<\omega}[\omega]^{\leq h(n)}$，使得 $S(n)=\bigcup_{i\leq g(n)}S_i(n)$。由于对所有 $f\in F$，$\exists^\infty n<\omega\ f(n)\in S(n)$，由引理 3.35 可得 $|F|<\mathrm{cov}(\mathcal{M})$。□

关于其他理想 $\mathscr{I}$（例如 $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$，$\mathscr{I}_L$和 $\mathscr{I}_P$）的 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 的值，我们没有更多观察:

引理 3.36。令 $f\in\omega^\omega$趋于无穷，并考虑定义在集合 $\{(n,m)$ 上的：，它与原来的 等价。那么，对于任意： $i<\omega\}\subseteq\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$，存在 $I\in\mathscr{I}_L$，使得对所有 $i<\omega$ 都有 $I_i\subseteq^* I$。

推论 3.37。$\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}})\leq\mathrm{non}^*(\mathscr{I}_L)$。

证明。令 $\mathcal{A}\subseteq[\{(n,\ m)\colon\ m\leq 2^n\}]^\omega$ 为 $\mathrm{non}^*(\mathscr{I}_L)$ 的见证。给定 $\{I_i:\ i<\omega\}\subseteq\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$，取引理 3.36 中的 $I\in\mathscr{I}_L$。取一个与 I 几乎不交的 $A\in\mathcal{A}$。那么 A 与所有 I_i 都几乎不交，因此我们有 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}})\leq|\mathcal{A}|=\mathrm{non}^*(\mathscr{I}_L)$。□

注 3.38. 类似的论证表明，$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}_L)\leq\mathrm{non}^*(\mathscr{I}_P)$。对于可求和理想 $\mathscr{I}_{1/n}$，已知 $\mathscr{I}_P\leq_{\mathrm{KB}}\mathscr{I}_{1/n}$ 且 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}_{1/n})=\mathrm{non}^*(\mathscr{I}_{1/n})\leq\mathrm{non}(\mathcal{N})$（参见 [HH07，定理 3.7(2)]），因此 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}_P)\leq\mathrm{non}(\mathcal{N})$ 也成立。

问题 3.39. 是否存在一个 F_σ 理想 $\mathscr{I}$，使得 $\omega_1\leq\mathrm{non}^*(\mathscr{I})<\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 是相容的? 是否有 $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$，$\mathscr{I}_L$，$\mathscr{I}_P$这样的例子?

对于 F_σ 理想，我们有以下一般性结果，它是 [HMM10，推论 4.6(1)] 的“ω-版本”。

定理 3.40. 对于 ω 上的每个 F_σ 理想 $\mathscr{I}$，$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})\leq\mathfrak{l}$。因此，相容的是：对于 ω 上的所有 F_σ 理想 $\mathscr{I}$，$\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})<\mathfrak{b}$ 成立（例如，它在 *Laver* 模型中成立）。

证明。设 φ 是一个下半连续次测度，满足 $\mathrm{Fin}(\varphi)=\mathscr{I}$。固定一个 ω 的区间划分 $\langle P_n\rangle_{n<\omega}$，使得 $\varphi(P_n)>n^3$。对于每个 $n<\omega$，我们令 $Q_n=\{A\subseteq P_n\colon\varphi(A)\leq n^2\}$。令 $\{S_\alpha:\ \alpha<\mathfrak{l}\}\subseteq\prod_{n<\omega}[Q_n]^{\leq n}$，使得对于任意 $H\in\prod_{n<\omega}Q_n$，存在 $\alpha<\mathfrak{l}$ 使得 $\forall^\infty n<\omega(H(n)\in S_\alpha(n))$。对于每个 $\alpha<\mathfrak{l}$ 和 $n<\omega$，我们可以选取$a^n_\alpha\in P_n\setminus\bigcup S_\alpha(n)$，因为 $\varphi(P_n)>\varphi(\bigcup S_\alpha(n))$。令 $A_\alpha=\{a^n_\alpha\colon n<\omega\}$。

我们断言，$\mathcal{A}=\{A_\alpha:\ \alpha<\mathfrak{l}\}$ 是 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$的一个见证。为证明这一点，任取 $\{X_n:\ n<\omega\}\subseteq\mathscr{I}$。对于每个 $n<\omega$，令 H_n 为一个定义在 ω 上的函数，其定义为

$$H_n(k)=\begin{cases}P_k\cap X_n & \text{if } \varphi(X_n)\leq k,\\ \emptyset & \text{if } \varphi(X_n)>k.\end{cases}$$

此外，令 H 为定义在 ω 上的函数，定义为 $H(k)=\bigcup_{n<k}H_n(k)$。于是 $H\in\prod_{n<\omega}Q_n$。因此，存在 $\alpha<\mathfrak{l}$，使得 $\forall^\infty n<\omega(H(n)\in S_\alpha(n))$。注意，对所有 $n<\omega$，$X_n\subseteq^*\bigcup_{k<\omega}H(k)$，因为 $\varphi(X_n)<\infty$。由此可知，对所有 $n<\omega$，$|A_\alpha\cap X_n|<\omega$。□

这可以看作是 HMM10 的定理4.3 和引理 4.4] 的“ω-版本”的重新表述。回顾一下，若强迫偏序集 $\mathbb{P}$ 满足拉弗性质，则对于任意 $H\in\omega^{\dot\omega}$ 以及任意一个 $\prod_{n<\omega}H(n)$ 中元素的 $\mathbb{P}$-名称 f，

$$\Vdash_{\mathbb{P}}\exists A\in\prod_{n<\omega}[H(n)]^{\leq 2^n}\cap V\ \forall n<\omega\ (f(n)\in A(n)).$$

定理 3.41. 设 $\mathscr{I}$ 是 ω 上的一个 F_σ 理想，并设 $\mathbb{P}$ 是具有 *Laver* 性质的偏序集。那么

$$\Vdash_{\mathbb{P}}\forall\langle\dot X_n:n\in\omega\rangle\subseteq\mathscr{I}\ \exists X\in[\omega]^\omega\cap V\ \forall n\in\omega\ (|\dot X_n\cap X|<\omega).\tag{3.2}$$

证明。设 φ 是一个下半连续次测度，满足 $\mathrm{Fin}(\varphi) = \mathscr{I}$，并设 $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ 是一列名称，使得 $\Vdash \forall n \in \omega (\varphi(X_n)$ 是有限的）。找到 $\omega = \bigcup_{n<\omega} P_n$ 的一个区间划分，使得 $\varphi(P_n) > n^2 \cdot 2^n$。对每个 $n \in \omega$，找到 $\dot{H}_n$ 这个函数的名称，使得可以强迫以下结论成立：

$$\dot{H}_n(k) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } \varphi(\dot{X}_n) > k, \\ P_k \cap \dot{X}_n & \text{if } \varphi(\dot{X}_n) \leq k. \end{cases}$$

注意到 $\Vdash \forall n \in \omega (\varphi(\dot{H}_n(k)) \leq k)$。设 H 为一个函数的名称，使得 $H(k) = \bigcup_{i<k} \dot{H}_i(k)$。我们将看到，对于所有 $k \in \omega$，

(1) $\Vdash \varphi(\dot{H}(k)) \leq k^2$，(2) $\Vdash \dot{H}(k) \subseteq P_k$，

(3) $\Vdash \dot{X}_k \subseteq^* \bigcup_{i \in \omega} \dot{H}(i)$.

1 和 2 可直接由 H 的定义得到。为证明 3，设 $p \in \mathbb{P}$，并设 $q \leq p$ 和 $\ell \in \omega$ 满足 $k < \ell$ 且 $q \Vdash \varphi(\dot{X}_k) \leq \ell$。那么，对于每个 $i \geq \ell$，都有 $q \Vdash \dot{H}_k(i) = P_i \cap \dot{X}_k$，因此，若 $n = \max P_\ell$，则有 $q \Vdash \dot{X}_k \setminus n \subseteq \bigcup_{i>\ell} \dot{H}(i)$。

现在我们继续证明：由于 H 是一个有界函数的名称，根据拉弗性质，必定存在一个函数 G，使得对于所有 $k \in \omega$

(a) $G(k)$ 是 P_k 的测度为 $\leq k^2$ 的子集列表，

(b) $|G(k)| \leq 2^k$，(c) $\Vdash \dot{H}(k) \in G(k)$。

因此，对于每个 $k \in \omega$，(1)、(2)、(a) 和 (b) 蕴含 $\bigcup G(k) \subseteq P_k$，且 $\varphi(\bigcup G(k)) \leq k^2 \cdot 2^k$，所以存在 $x_k \in P_k \setminus \bigcup G(k)$。若 $X = \{x_k : k \in \omega\}$，则 $X \cap \bigcup_{k \in \omega} \bigcup G(k) = \emptyset$，并且因此，根据 (3) 和 (c)，我们有，对于所有 $k \in \omega$，$\Vdash \dot{X} \cap \dot{X}_k$ 都是有限的。□

通过精心选择函数 f，$g \in \omega^\omega$ 使其依赖于与 $\mathscr{I}$相关联的次测度，我们可以证明，对于 $\langle f, g \rangle$-有界强迫，定理 3.41 成立（见 [BJ95，定义 7.2.13] 和 [BJ95，定理 7.2.19]）。因此，如果考虑强迫$\mathbb{PT}_{f,\, g}$（见 [BJ95，定义 7.3.3] 和 [BJ95，定理 7.3.9]），则可得以下结果：

推论 3.42。设 $\mathscr{I}$ 是一个高理想。则 $\mathfrak{b} = \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ $<\mathrm{non}(\mathcal{M})$相容。

证明。见 [BJ95，模型 7.6.6]。□

注意，函数 f，g的选择取决于 $\mathscr{I}$，因此该论证无法证明“对所有 F_σ 理想 $\mathscr{I}$，$\mathfrak{b} = \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}) < \mathrm{non}(\mathcal{M})$”的相容性。

3.3. 关于 $\mathscr{I}$-Louveau 和 $\mathscr{I}^*$-Ramsey 零理想。

作为对理想的 ω-版本 $*$-数的直接应用，我们注意到，Brendle–Shelah[BS99] 关于超滤子的某些结果实际上也适用于任意理想。Brendle–Shelah [BS99] 研究了与超滤子相关的 Laver 强迫的零理想，并将其称为 Louveau 理想，还计算了它们的基数不变量。在 [CM25], 中，第一作者和第三作者也考察了与任意理想相关的 Laver 强迫的零理想。

定义 3.43。对于定义在 $\mathscr{I}$ 一个可数集 X上的理想，$\mathscr{I}$-*Louveau* 零理想 $L_\mathscr{I}$ 定义为由以下形式的集合生成的 σ-理想：

$$L_\phi = \{x \in X^\omega : \exists^\infty n < \omega \, (x(n) \in \phi(x \restriction n))\},$$

其中 ϕ: $\omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$。

给定可数集 X 上的理想 $\mathscr{I}$，若树 $T \subseteq X^{<\omega}$ 满足以下条件，则称其为 $\mathscr{I}$-*Laver* 树：令 σ 为 T 的茎，对每个满足 $\sigma \subseteq \tau$ 的 $\tau \in T$，都有 $\mathrm{succ}_T(\tau) \in \mathscr{I}^+$。$\mathscr{I}$-*Laver* 强迫记为 $\mathbb{L}_{\mathscr{I}}$，它是由所有 $\mathscr{I}$-Laver 树组成、按包含关系排序的强迫偏序集。注意，$\mathbb{L}_{\mathrm{Fin}}$ 是标准的 Laver 强迫。于是 $\mathbb{L}_{\mathscr{I}}$ 与 $\mathbb{P}_{L_{\mathscr{I}}}$ 强迫等价（见 [Mil12]）。还可以如下定义 $L_{\mathscr{I}}$ 的一个变体。

定义 3.44. 对于可数集合 X 上的理想 $\mathscr{I}$，$J_{\mathscr{I}}$ 定义为由形如以下形式的集合生成的 X^ω 上的 σ-理想

$$J_\phi = \{x \in X^\omega : \exists^\infty n < \omega\, (x(n) \in \phi(n))\},$$

其中 $\phi\colon\ \omega \to \mathscr{I}$。

结果表明，[BS99] 中的计算适用于任意理想，并且 $L_{\mathscr{I}}$ 和 $J_{\mathscr{I}}$ 的基数不变量没有差别。

定理 3.45 (Brendle–Shelah [BS99，定理 2])。对于可数集合上的任意理想 $\mathscr{I}$，以下结论成立：

(1) $\mathrm{add}(L_{\mathscr{I}}) = \mathrm{add}(J_{\mathscr{I}}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})\}$.(2) $\mathrm{non}(L_{\mathscr{I}}) = \mathrm{non}(J_{\mathscr{I}}) = \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})\}$.(3) 覆盖数$(L_{\mathscr{I}}) =$ 覆盖数$(J_{\mathscr{I}}) = \min\{\mathfrak{b}$, 覆盖数$^*(\mathscr{I})\}$.(4) 共尾数$(L_{\mathscr{I}}) =$ 共尾数$(J_{\mathscr{I}}) = \max\{\mathfrak{d}$, 共尾数$^*_\omega(\mathscr{I})\}$.

证明。(1) CM25 的命题 3.6 和定理 4.2] 已经证明了 $\min\{\mathfrak{b}, \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})\} \le \mathrm{add}(L_{\mathscr{I}}) \le \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$。该证明很容易推广到$J_{\mathscr{I}}$。因此，只需证明 $\mathrm{add}(L_{\mathscr{I}}) \le \mathfrak{b}$ 且 $\mathrm{add}(J_{\mathscr{I}}) \le \mathfrak{b}$。这由更强的不等式 $(\mathrm{cov}(L_{\mathscr{I}}) \le)\mathrm{cov}(J_{\mathscr{I}}) \le \mathfrak{b}$ 得出，该不等式将在 (3) 中证明。

(2) 由于 $J_{\mathscr{I}} \subseteq L_{\mathscr{I}}$ 成立，$\mathrm{non}(J_{\mathscr{I}}) \le \mathrm{non}(L_{\mathscr{I}})$。因此，只需证明 (i)$\mathfrak{d} \le \mathrm{non}(J_{\mathscr{I}})$、(ii) $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}) \le \mathrm{non}(J_{\mathscr{I}})$，以及 (iii) $\mathrm{non}(L_{\mathscr{I}}) \le \max\{\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}), \mathfrak{d}\}$。

(i) 设 $A \notin J_{\mathscr{I}}$。那么对任意 $f \in \omega^\omega$，都存在 $g \in A \setminus J_f$，由此可得 $f \le^* g$。因此，A 是一个支配族，故 $|A| \ge \mathfrak{d}$。(ii) 设 $A \notin J_{\mathscr{I}}$。我们断言 $\mathcal{A} := \{\mathrm{ran}(f) : f \in A\}$ 见证 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$：给定 $X = \{X_n : n < \omega\} \in [\mathscr{I}]^\omega$，任意满足 $\phi\colon\ \omega \to \mathscr{I}$ 由 $\phi(n) = \bigcup_{m \le n} X_m$定义的 $f \in A \setminus J_\phi$，都有 $|\mathrm{ran}(f) \cap X_n| < \omega$。(iii) 为证明 $\mathrm{non}(L_{\mathscr{I}}) \le \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})\}$，设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})$ 的一个见证，并设 $\mathcal{D}$ 是从 $\omega^{<\omega}$ 到 ω的函数所构成的支配族。对每个 $A \in \mathcal{A}$ 和$f \in \mathcal{D}$，选取 $x_{A,f} \in \omega^\omega$，使得对所有 $\sigma \in \omega^{<\omega}$, $x_{A,f}(\sigma) \in A \setminus f(\sigma)$。我们断言 $\{x_{A,f} : A \in \mathcal{A} \wedge f \in \mathcal{D}\} \notin L_{\mathscr{I}}$。为证明这一点，任取 $\phi\colon\ \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$。接着取 $A \in \mathcal{A}$，使得对所有 $\sigma \in \omega^{<\omega}$, $|A \cap \phi(\sigma)| < \omega$。然后取 $f \in \mathcal{D}$，使得对所有 $\sigma \in \omega^{<\omega}$, $A \cap \phi(\sigma) \subseteq f(\sigma)$。于是 $x_{A,f} \notin L_{\phi_0}$

(3) 由于 $J_{\mathscr{I}} \subseteq L_{\mathscr{I}}$ 成立，$\mathrm{cov}(J_{\mathscr{I}}) \ge \mathrm{cov}(L_{\mathscr{I}})$。因此，只需证明：(i)$\mathfrak{b} \ge \mathrm{cov}(J_{\mathscr{I}})$，(ii) $\mathrm{cov}^*(\mathscr{I}) \ge \mathrm{cov}(J_{\mathscr{I}})$，以及 (iii) $\mathrm{cov}(L_{\mathscr{I}}) \ge \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}^*(\mathscr{I})\}$。

(i) 若 $\mathcal{B}$ 是一个无界族，则 $\omega^\omega = \bigcup_{f \in \mathcal{B}} J_f$。(ii) 若 $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{I}$ 是 $\mathrm{cov}^*(\mathscr{I})$ 的一个见证，则 $\omega^\omega = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} J_A$。

(iii) 设 $\kappa < \min\{\mathrm{cov}^*(\mathscr{I}), \mathfrak{b}\}$，并设 $\mathcal{A} \subseteq L_{\mathscr{I}}$ 的大小为 κ。我们要证明 $\omega^\omega \ne \bigcup \mathcal{A}$。对每个 $A \in \mathcal{A}$，令 $\phi_A\colon\ \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$，使得 $A \subseteq L_{\phi_A}$。由于 $\kappa < \mathrm{cov}^*(\mathscr{I})$，我们可以找到 $X \in [\omega]^\omega$，使得对所有 $A \in \mathcal{A}$ 和$\sigma \in \omega^{<\omega}$，$|\phi_A(\sigma) \cap X| < \omega$。于是，对每个 $A \in \mathcal{A}$，我们定义 $f_A \in \omega^\omega$ 为 $f_A(\sigma) = \min\{m < \omega :\ \phi_A(\sigma) \cap X \subseteq m\}$。由于 $\kappa < \mathfrak{b}$，存在一个函数 $g\colon\ \omega^{<\omega} \to \omega$ 支配所有的 f_A。现在取一个实数 $x \in \omega^\omega$，使得对所有 $n < \omega$，$x(n) \in X \setminus g(x \restriction n)$。于是，对所有 $A \in \mathcal{A}$，都有 $x \notin L_{\phi_A}$，因此 $x \notin \bigcup \mathcal{A}$。

(4) 我们需要证明：(i) $\mathrm{cof}(L_{\mathscr{I}}) \leq \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})\}$，(ii) $\mathrm{cof}(L_{\mathscr{I}}) \geq \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$，以及 (iii) $\mathrm{cof}(L_{\mathscr{I}}) \geq \mathfrak{d}$。下面的证明很容易改写为针对 $J_{\mathscr{I}}$ 的证明。(i) 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 的一个见证，并设 $\mathcal{D}$ 是一个从 $\omega^{<\omega}$ 到 ω 的函数支配族。对每个 $A := \{A_n : n < \omega\} \in \mathcal{A}$ 以及 $f \in \mathcal{D}$，令 $\phi_{A,f} : \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$ 由 $\phi_{A,f}(\sigma) = \bigcup_{i \leq f(\sigma)} A_i \cup f(\sigma)$ 定义。为验证 $\{L_{\phi_{A,f}} : A \in \mathcal{A} \wedge f \in \mathcal{D}\}$ 是 $L_{\mathscr{I}}$ 的一个基，任取 $\psi : \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$。取 $A := \{A_n : n < \omega\} \in \mathcal{A}$，使得对每个 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，存在 $g(\sigma) < \omega$，满足 $\psi(\sigma) \subseteq^* A_{g(\sigma)}$。令 $h : \omega^{<\omega} \to \omega$，使得对每个 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，$\psi(\sigma) \subseteq A_{g(\sigma)} \cup h(\sigma)$。取支配 g、h 的 $f \in \mathcal{D}$。为验证 $L_\psi \subseteq L_{\phi_{A,f}}$，任取 $x \in L_\psi$。于是，对无限多个 $n < \omega$，$x(n) \in \psi(x\restriction n) \subseteq A_{g(x\restriction n)} \cup h(x\restriction n) \subseteq \bigcup_{i \leq f(x\restriction n)} A_i \cup f(x\restriction n) = \phi_{A,f}(x\restriction n)$，这意味着 $x \in L_{\phi_{A,f}}$。

(ii) 设 $\mathcal{A} \subseteq L_{\mathscr{I}}$ 是 $L_{\mathscr{I}}$ 的基。对于任意 $A \in \mathcal{A}$，令 $\phi_A : \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$ 满足 $A \subseteq L_{\phi_A}$。我们断言，$\mathcal{A} = \{\mathrm{ran}(\phi_A) : A \in \mathcal{A}\}$ 是 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 的见证。任取 $B := \{B_n : n < \omega\} \in [\mathscr{I}]^\omega$。利用某个函数 $f : \omega \to \omega$，使得对所有 $n < \omega$ 都有 $|f^{-1}[\{n\}]| = \omega$，定义 $\phi : \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$，使 $\phi(\sigma) = B_{f(|\sigma|)}$。取满足 $L_\phi \subseteq A$ 的 $A \in \mathcal{A}$。假设存在 $B \in B$，使得对所有 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，$B \not\subseteq^* \phi_A(\sigma)$。那么我们可以找到 $x \in \omega^\omega$，使得对所有 $n < \omega$，$x(n) \in B \setminus \phi_A(x\restriction n)$，这意味着 $x \in L_\phi \setminus A$。这与 A 的选取矛盾。

(iii) $\mathrm{cof}(L_{\mathscr{I}}) \geq \mathfrak{d}$ 由 $\mathrm{cof}(L_{\mathscr{I}}) \geq \mathrm{non}(L_{\mathscr{I}}) \geq \mathfrak{d}$得出。

□

Brendle–Shelah [BS99] 也研究了与超滤子相关的 Mathias 强迫的零理想，他们将其称为 Ramsey 理想，并计算了它们的基数不变量。

定义 3.46. 设 $\mathscr{I}$ 是可数集 X上的一个理想。我们如下定义 $\mathscr{I}^*$-*Mathias* 强迫 $\mathbb{R}_{\mathscr{I}^*}$：条件是满足 $\max(s) < \min(A)$ 的有序对 $\langle s, A\rangle \in [X]^{<\omega} \times \mathscr{I}^*$。序定义为

$$\langle t, B\rangle \leq \langle s, A\rangle \iff t \supseteq s \wedge B \subseteq A \wedge t \setminus s \subseteq A.$$

对于 $\langle s, A\rangle \in \mathbb{R}_{\mathscr{I}^*}$，我们记作

$$[s, A] = \{Y \in [X]^\omega : s \subseteq Y \subseteq s \cup A\}.$$

$\mathscr{I}^*$-*Ramsey* 零理想 $R_{\mathscr{I}^*}$ 由满足以下条件的 $Y \subseteq [X]^\omega$ 组成

$$\forall \langle s, A\rangle \in \mathbb{R}_{\mathscr{I}} \, \exists \langle t, B\rangle \leq \langle s, A\rangle \, (Y \cap [t, B] = \emptyset).$$

根据定义可以看出，$\mathbb{R}_{\mathscr{I}^*}$与 $\mathbb{P}_{R_{\mathscr{I}^*}}$强迫等价。Brendle–Shelah[BS99] 只针对超滤子证明了下面的定理，但他们的证明实际上适用于任意滤子。细节留给细心的读者。

定理 3.47 (Brendle–Shelah [BS99，定理 1])。对于定义在可数集上的任意高理想 $\mathscr{I}$，以下结论成立：

$$\mathrm{add}(R_{\mathscr{I}^*}) = \mathrm{add}^*(\mathscr{I}), \mathrm{non}(R_{\mathscr{I}^*}) = \mathrm{non}^*(\mathscr{I}), \mathrm{cov}(R_{\mathscr{I}^*}) = \mathrm{cov}^*(\mathscr{I}), \mathrm{cof}(R_{\mathscr{I}^*}) = \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I}).$$

与定理 3.45 和定理 3.47 相比，我们将看到，与 $\mathscr{I}$-米勒零理想相关的基数不变量的计算更为复杂。值得注意的是，$\mathscr{I}$-米勒零理想的一致性和覆盖数无法由 $*$-数决定。并且，相容的是，对于某个理想 $\mathscr{I}$，$M_{\mathscr{I}}$和 $K_{\mathscr{I}}$的一致性和覆盖数不同，例如 Fin $\otimes$ Fin 和 $\mathcal{ED}$。

4. $M_{\mathscr{I}}$的基数不变量计算

本节讨论关于 σ-理想$M_{\mathscr{I}}$和 $K_{\mathscr{I}}$的基数不变量的 ZFC 可证结果。

4.1. 可加性与共尾性。结果表明， $M_{\mathscr{I}}$和 $K_{\mathscr{I}}$ 的可加性与共尾性分别与 $L_{\mathscr{I}}$ 和 $J_{\mathscr{I}}$相同；这些量可借助该理想的 ω变体来刻画
$*$-原始理想 $\mathscr{I}$的可加性与共尾性，如定理 3.45 所示。具体而言，对于任意理想 $\mathscr{I}$，我们得到以下等式：

$$\operatorname{add}(M_{\mathscr{I}}) = \operatorname{add}(K_{\mathscr{I}}) = \min\{\mathfrak{b}, \operatorname{add}^*_\omega(\mathscr{I})\},$$
$$\operatorname{cof}(M_{\mathscr{I}}) = \operatorname{cof}(K_{\mathscr{I}}) = \max\{\mathfrak{d}, \operatorname{cof}^*_\omega(\mathscr{I})\}.$$

我们先给出 add($M_{\mathscr{I}}$) 和 cof($M_{\mathscr{I}}$) 的以下界，其中一些界曾由第一作者和第三作者在 [CM25]中提及：

引理 4.1. 设 $\mathscr{I}$ 是定义在一个可数集上的理想。

(1) (Cieślak–Martínez-Celis [CM25，命题 3.6，定理 4.2]) $\min\{\mathfrak{b},\operatorname{add}^*_\omega(\mathscr{I})\} \le \operatorname{add}(M_{\mathscr{I}}) \le \operatorname{add}^*_\omega(\mathscr{I})$。(2) $\operatorname{cof}^*_\omega(\mathscr{I}) \le \operatorname{cof}(M_{\mathscr{I}}) \le \max\{\mathfrak{d},\operatorname{cof}^*_\omega(\mathscr{I})\}$。同样的不等式对 $K_{\mathscr{I}}$ 也成立。

证明。我们可以假设 $\mathscr{I}$ 是 ω上的一个理想。我们只给出关于 $M_{\mathscr{I}}$ 的证明，因为基本相同的论证也能证明关于 $K_{\mathscr{I}}$的引理。

(1) 该不等式在 [CM25 的命题 3.6 和定理 4.2]中给出，但未附证明。为证明 $\min\{\mathfrak{b},\operatorname{add}^*_\omega(\mathscr{I})\} \le \operatorname{add}(M_{\mathscr{I}})$，设 Φ 是从 $\omega^{<\omega}$ 到 $\mathscr{I}$的函数族，使得 $|\Phi| < \min\{\operatorname{add}^*_\omega(\mathscr{I}), \mathfrak{b}\}$，并证明 $\{M_\phi\colon \phi \in \Phi\}$ 不是 add($M_{\mathscr{I}}$)的见证。由于 $\{\phi(s)\colon \phi \in \Phi \wedge s \in \omega^{<\omega}\}$ 的大小为 $< \operatorname{add}^*_\omega(\mathscr{I})$，存在 $\{B_n\colon n < \omega\} \subseteq \mathscr{I}$，使得对所有 $\phi \in \Phi$ 和 $s \in \omega^{<\omega}$，都存在 $n < \omega$ 使得 $\phi(s) \subseteq^* B_n$。我们可以假设 $\langle B_n : n < \omega\rangle$ 是 $\subseteq$-递增的，并且对每个 $n < \omega$都有 $n \subseteq B_n$。于是，对每个 $\phi \in \Phi$，我们都可以定义 $f_\phi\colon \omega^{<\omega} \to \omega$，令 $f_\phi(s)$为满足 $\phi(s) \subseteq B_n$的最小 $n < \omega$。由于$|\Phi| < \mathfrak{b}$，存在 $f\colon \omega^{<\omega} \to \omega$，使得对所有 $x \in \omega^\omega$，

$$\forall^\infty n < \omega\ f_\phi(x \restriction n) \le f(x \restriction n).$$

定义 $\psi\colon \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$，令 $\psi(s) := B_{f(s)}$。那么，对所有 $\phi \in \Phi$，都有 $M_\phi \subseteq M_\psi$；因为若 $x \in M_\phi$，则对除有限多个 $n < \omega$之外的所有情形，

$$x(n) \in \phi(x \restriction n) \subseteq B_{f_\phi(x\restriction n)} \subseteq B_{f(x\restriction n)} = \psi(x \restriction n)$$

都成立，因此 $x \in M_\psi$。

为了证明 add($M_{\mathscr{I}}$) $\le \operatorname{add}^*_\omega(\mathscr{I})$，取大小为 $<$ 的 $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{I}$，其中 add($M_{\mathscr{I}}$)，并证明 $\mathcal{A}$ 不是 $\operatorname{add}^*_\omega(\mathscr{I})$ 的见证。对于 $A \in \mathcal{A}$，令 $\phi_A\colon \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$ 表示取值为 A 的常值函数。由于 $|\mathcal{A}| <$ add($M_{\mathscr{I}}$)，存在 $\psi\colon \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$，使得对所有$A \in \mathcal{A}$，$M_{\phi_A} \subseteq M_\psi$。我们断言，对任意 $A \in \mathcal{A}$，对所有 $s \in \omega^{<\omega}$都有 $A \subseteq^* \psi(s)$。反之，若不然，则对某个 $A \in \mathcal{A}$，可以找到 $x \in \omega^\omega$，使得当 $n < \omega$时， $x(n) \in A \setminus \psi(x \restriction n)$。于是 x是 $M_{\phi_A} \not\subseteq M_\psi$的见证，这就产生了矛盾。

(2) 为证明 $\operatorname{cof}^*_\omega(\mathscr{I}) \le \operatorname{cof}(M_{\mathscr{I}})$，令$\{M_{\phi_\alpha}\colon \alpha < \kappa\}$为 $M_{\mathscr{I}}$ 的一个基。我们断言 $\{\operatorname{ran}(\phi_\alpha)\colon \alpha < \kappa\}$ 是 $\operatorname{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 的一个见证；反之，存在$\{B_i\colon i < \omega\} \subseteq \mathscr{I}$使得

$$\forall \alpha < \kappa\, \exists i_\alpha < \omega\, \forall s \in \omega^{<\omega}\ |B_{i_\alpha} \setminus \phi_\alpha(s)| = \omega.$$

于是，对每个 $\alpha < \kappa$，都可以找到 $x \in \omega^\omega$，使得对所有 $n < \omega$, $x(n) \in B_{i_\alpha} \setminus \phi_\alpha(x \restriction n)$，从而 $x \in M_{B_{i_\alpha}} \setminus M_{\phi_\alpha}$。因此，没有任何 M_{ϕ_α} 覆盖 $\bigcup_{i<\omega} M_{B_i}$，这与 M_{ϕ_α}们的选取相矛盾。

现在证明 $\mathrm{cof}(M_{\mathscr{I}}) \leq \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})\}$。令 $\{A_\alpha : \alpha < \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})\}$ 为 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 的一个见证。对每个 $\alpha < \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$，记 $A_\alpha = \{A^i_\alpha : i < \omega\}$。此外，令 $\{f_\beta : \beta < \mathfrak{d}\}$ 为从 $\omega^{<\omega}$ 到 ω的一个函数支配族。不妨假设每个 f_β 都沿分支递增，即 $s \subseteq t$ 意味着 $f_\beta(s) \leq f_\beta(t)$。对每个 $\alpha < \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 和 $\beta < \mathfrak{d}$，定义 $\phi_{\alpha,\beta} : \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$ 如下：

$$\phi_{\alpha,\beta}(s) = \bigcup_{i=0}^{f_\beta(s)} A^i_\alpha \cup f_\beta(s)$$

对所有 $s \in \omega^{<\omega}$。我们声称，集合族 $\{M_{\phi_{\alpha,\beta}} : \alpha < \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I}) \wedge \beta < \mathfrak{d}\}$ 是 $M_{\mathscr{I}}$ 的基；任取集合 M_ψ，其中 $\psi : \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$。令 $\alpha < \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$ 满足：对每个 $s \in \omega^{<\omega}$，都存在 $i < \omega$ 使得 $\psi(s) \subseteq^* A^i_\alpha$。接着令 g，$h : \omega^{<\omega} \to \omega$ 为函数，使得对于 $s \in \omega^{<\omega}$，

$$\psi(s) \subseteq A^{g(s)}_\alpha \cup h(s).$$

存在一个 $\beta < \mathfrak{d}$，使得 f_β 同时支配 g 和 h。于是有 $M_\psi \subseteq M_{\phi_{\alpha,\beta}}$，因为若 $x \in M_\psi$，则对除有限多个 n 之外的所有情况，

$$x(n) \in \psi(x \restriction n) \subseteq A^{g(x\restriction n)}_\alpha \cup h(x \restriction n) \subseteq \bigcup_{i=0}^{f_\beta(x\restriction n)} A^i_\alpha \cup f_\beta(x \restriction n) = \phi_{\alpha,\beta}(x \restriction n)$$

成立，因此 $x \in M_{\phi_{\alpha,\beta}}$。这就完成了对 $M_{\mathscr{I}}$ 的证明，不过同样的论证也适用于 $K_{\mathscr{I}}$。□

下面的引理用于证明 $\mathrm{add}(K_{\mathscr{I}}) \leq \mathfrak{b}$ 和 $\mathrm{cof}(K_{\mathscr{I}}) \geq \mathfrak{d}$：

引理 4.2。设 ϕ, ψ：$\omega \to \mathscr{I}$并假设 ϕ 不取空值。那么$K_\phi \subseteq K_\psi$ 蕴含 $\forall^\infty n < \omega\ \phi(n) \subseteq \psi(n)$。

证明。假设存在 $D \in [\omega]^\omega$，使得对每个 $n \in D$都有 $\phi(n) \not\subseteq \psi(n)$。取某个 $x \in \omega^\omega$，使得对于 $n \in D$，$x(n) \in \phi(n) \setminus \psi(n)$，并且对于 $n \notin D$，$x(n) \in \phi(n)$。于是$x \notin K_\phi \setminus K_\psi$。□

引理 4.3。$\mathrm{add}(K_{\mathscr{I}}) \leq \mathfrak{b}$且 共尾数$(K_{\mathscr{I}}) \geq \mathfrak{d}$。

证明。为证明 $\mathrm{add}(K_{\mathscr{I}}) \leq \mathfrak{b}$，取大小为 $<$的 $F \subseteq \omega^\omega$，满足 $\mathrm{add}(K_{\mathscr{I}})$，只需证明$F$ 不是无界族。不妨设对所有 $f \in F$ 和 $n < \omega$，$f(n) > 0$。由于 $\omega \subseteq$有限集理想 $\subseteq \mathscr{I}$，$F \subseteq \mathscr{I}^\omega$，因此存在 $\psi \in \mathscr{I}^\omega$，使得对所有$f \in F$都有 $K_f \subseteq K_\psi$。由引理 4.2，对所有 $f \in F$，$\forall^\infty n < \omega\ f(n) \subseteq \psi(n)$成立。于是，定义函数$g \in \omega^\omega$ 如下：$g(n) := \min(\omega \setminus \psi(n))$，它支配 F，证明得证。对偶方式可以证明共尾数$(K_{\mathscr{I}}) \geq \mathfrak{d}$。□

对于 $M_{\mathscr{I}}$ 的情形，思路相同，但我们需要更加谨慎。

定义 4.4. 对于 $\sigma, \tau \in \omega^{<\omega}$和 $\phi : \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$，如果 $\sigma \subseteq \tau$且对所有$n \in |\tau| \setminus |\sigma|$，都有 $\tau(n) \in \phi(\tau \restriction n)$，我们记作 $\sigma \subseteq_\phi \tau$。

引理 4.5. 设 $\phi, \psi : \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$，并假设 ϕ 不取空值。那么$M_\phi \subseteq M_\psi$ 蕴含 $\forall \sigma \in \omega^{<\omega} \exists \tau \supseteq_\phi \sigma \forall \rho \supseteq_\phi \tau\ \phi(\rho) \subseteq \psi(\rho)$。

证明。反设结论不成立。由归纳构造，我们可以找到 $x \in M_\phi$，使得$x(n) \in \phi(x \restriction n) \setminus \psi(x \restriction n)$ 对无限多个 $n < \omega$成立，因此 $x \in M_\phi \setminus M_\psi$。□

定义 4.6。对于 $x \in \omega^\omega$ 和 g：$\omega^{<\omega} \to \omega$，如果对除有限多个 $n < \omega$之外的所有情况，$x(n) \leq g(x \restriction n)$，则称 x 被 g自适应支配，记作 $x \trianglelefteq^* g$。

引理 4.7 (例如参见 [Bla10，表 1，第 463])。 每个无界族都是 $\trianglelefteq^*$-无界的。也就是说，对于任意（$\leq^*$-）无界族 $B \subseteq \omega^\omega$ 以及 $g\colon\ \omega^{<\omega} \to \omega$，存在 $x \in B$ 使得 $\neg(x \trianglelefteq^* g)$。此外，$\trianglelefteq^*$-无界族和 $\trianglelefteq^*$-支配族的最小基数分别为 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{d}$。

证明。设 $B \subseteq \omega^\omega$ 是一个无界族，且 $g\colon\ \omega^{<\omega} \to \omega$。固定 $\omega^{<\omega}$ 的一个枚举$\{\sigma_i : i < \omega\}$，并对每个 $i < \omega$，令 $T^i \subseteq \omega^{<\omega}$ 为由下式给出的树

$$\tau \in T^i \iff (\tau \subseteq \sigma_i) \vee (\sigma_i \subseteq \tau \wedge \forall n \in |\tau| \setminus |\sigma_i|\ \tau(n) \leq g(\tau \restriction n))$$

并令 $f^i \in \omega^\omega$由 $f^i(n) = \max\{t(n) : t \in T^i \cap \omega^{n+1}\}$给出。此外，我们定义 $f\colon\ \omega \to \omega$，使得 $f(n) = \max\{f^i(n) : i \leq n\}$。由于 $B \subseteq \omega^\omega$是一个无界族，存在 $x \in B$，使得对无穷多个 $n < \omega$，都有 $x(n) > f(n)$。反设存在 $m < \omega$，使得对所有 $n \geq m$，都有 $x(n) \leq g(x \restriction n)$。取满足$x \restriction m = \sigma_i$的 $i < \omega$。那么 x是 T^i的一条分支，因此对所有 $n \geq \max\{m, i\}$，都有 $x(n) \leq f(n)$，矛盾。后一陈述显然。□

引理 4.8。 $\mathrm{add}(M_\mathscr{I}) \leq \mathfrak{b}$且 $\mathrm{cof}(M_\mathscr{I}) \geq \mathfrak{d}$。

证明。为证明 $\mathrm{add}(M_\mathscr{I}) \leq \mathfrak{b}$，取大小为 $<$ 的 $F \subseteq \omega^\omega$ $\mathrm{add}(M_\mathscr{I})$。只需找到 $g\colon\ \omega^{<\omega} \to \omega$，使得对于所有 $f \in F$ 都有 $f \trianglelefteq^* g$，这由引理 4.7 得出。对于 $f \in F$，我们定义 $\phi_f\colon\ \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$ by$\phi_f(\sigma) = f(|\sigma|) + 1$。由于 $|F| <$ $\mathrm{add}(M_\mathscr{I})$，存在 $\psi\colon\ \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$，使得对于所有 $f \in F$ 都有 $M_{\phi_f} \subseteq M_\psi$。固定 $\omega^{<\omega}$ 的一个枚举 $\{\tau_i : i < \omega\}$。对于每个 $x \in \omega^{\leq\omega}$ 和 $i < \omega$，我们通过 $\mathrm{dom}(x^i) = \mathrm{dom}(x)$ $x^i(n) = \tau_i(n)$ 定义 $x^i \in \omega^{\leq\omega}$，其中 $n < |\tau_i|$，并通过 $x^i(n) = x(n)$ 定义 $n \geq |\tau_i|$。我们还定义 $\psi'\colon\ \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$ 以及 $g\colon\ \omega^{<\omega} \to \omega$，令

$$\psi'(\sigma) = \bigcup\{\psi(\sigma^i) : i \leq |\sigma|\},$$
$$g(\sigma) = \min(\omega \setminus \psi'(\sigma)).$$

对于每个 $f \in F$，由引理 4.5（令 $\sigma := \emptyset$），存在 $i_f < \omega$ 使得

$$\forall \rho \supseteq_{\phi_f} \tau_{i_f}\ (\phi_f(\rho) \subseteq \psi(\rho)). \tag{4.1}$$

暂且固定 $f \in F$，并记 $i := i_f$ 和 $\phi := \phi_f$。对于 $n \geq |\tau_i|$，由于 $f^i(n) = f(n) \in f(n) + 1 = \phi(f^i \restriction n)$，我们有 $f^i \restriction n \supseteq_\phi f^i \restriction |\tau_i| = \tau_i$。于是由 (4.1)，对于 $n \geq \max\{|\tau_i|, i\}$，

$$f(n) + 1 = \phi(f^i \restriction n) \subseteq \psi(f^i \restriction n) \subseteq \psi'(f \restriction n),$$

这意味着 $f(n) \leq g(f \restriction n)$。由于 $f \in F$ 是任意的，对于所有 $f \in F$，我们都有 $f \trianglelefteq^* g$。以对偶方式可以证明 $\mathrm{cof}(M_\mathscr{I}) \geq \mathfrak{d}$。□

结合引理 4.1，我们得到：

定理 4.9。 对于定义在可数集上的任意理想 $\mathscr{I}$，以下结论成立：

$$\mathrm{add}(K_\mathscr{I}) = \mathrm{add}(M_\mathscr{I}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})\}$$
$$\mathrm{cof}(K_\mathscr{I}) = \mathrm{cof}(M_\mathscr{I}) = \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})\}.$$

表 1 中的大多数理想 $\mathscr{I}$满足 $\mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I}) \leq \mathfrak{b}$ 以及 $\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I}) \geq \mathfrak{d}$，因此对于这样的 $\mathscr{I}$，$\mathrm{add}(K_\mathscr{I}) = \mathrm{add}(M_\mathscr{I}) = \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$，且 $\mathrm{cof}(K_\mathscr{I}) = \mathrm{cof}(M_\mathscr{I}) = \mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I})$。然而，对于任意理想 $\mathscr{I}$，情况并非总是如此：

推论 4.10。 (1) 相容的是，对于任意渐进碎片化理想 $\mathscr{I}$，$\mathrm{add}(K_\mathscr{I}) = \mathrm{add}(M_\mathscr{I}) = \mathfrak{b} < \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$ 成立。(2) 相容的是，对于任意渐进碎片化理想 $\mathscr{I}$，$\mathfrak{共尾数}^*_\omega(\mathscr{I}) < \mathfrak{d} = \mathrm{cof}(K_\mathscr{I}) = \mathrm{cof}(M_\mathscr{I})$ 成立。

证明。 (1) 在 [Paw85] 构造的模型中工作，其中 $\mathfrak{b} < \mathrm{add}_t(\mathcal{N})$ 成立。设$\mathscr{I}$是一个渐进碎片化理想。于是，根据定理 3.16，$\mathrm{add}_t(\mathcal{N}) \leq \mathrm{add}^*_\omega(\mathscr{I})$。(2) 在 Laver 模型中工作，并设 $\mathscr{I}$ 是一个渐进碎片化理想。于是，根据定理 3.21，$\mathrm{cof}^*_\omega(\mathscr{I}) < \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ 。

□

4.2. **一致性与覆盖**。我们首先注意到， $K_\mathscr{I}$ 和 $M_\mathscr{I}$的一致性与覆盖数存在自然的界。

引理 4.11。对于可数集上的任意理想 $\mathscr{I}$ ，

$$\mathfrak{b} \leq \mathrm{non}(K_\mathscr{I}) \leq \mathrm{non}(M_\mathscr{I}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$$
$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{cov}(M_\mathscr{I}) \leq \mathrm{cov}(K_\mathscr{I}) \leq \mathfrak{d}.$$

证明。不妨设 $\mathscr{I}$ 是 ω上的一个理想。于是有

$$K_\sigma \subseteq K_\mathscr{I} \subseteq M_\mathscr{I} \subseteq \mathcal{M},$$

其中， K_σ 是贝尔空间中 σ-紧集所构成的理想。这就推出了所述结论，因为 $\mathrm{non}(K_\sigma) = \mathfrak{b}$ 且 $\mathrm{cov}(K_\sigma) = \mathfrak{d}$。□

命题 4.12。 $K_\mathscr{I} = M_\mathscr{I}$ 当且仅当 $\mathscr{I} =$ 有限集理想。

证明。 $K_{\mathrm{Fin}} = M_{\mathrm{Fin}} = K_\sigma$ 很容易。当 $\mathscr{I} \neq$有限集理想时，取一个无限集 $A = \{a_0 < a_1 < \cdots\} \in \mathscr{I}$并归纳地构造一棵 $\mathscr{I}$ 分支树 $T \subseteq \omega^{<\omega}$如下：对于每个$k < \omega$和 $\sigma \in \omega^{2k}$，$\mathrm{succ}_T(\sigma) := A$ 且 $\mathrm{succ}_T(\sigma^\frown\langle a_i\rangle) := \{i\}$。显然 $T \in M_\mathscr{I}$，因此我们证明 $T \notin K_\mathscr{I}$。令 $\phi\colon \omega \to \mathscr{I}$任意。对于每个 $k < \omega$，取一个自然数$i_k \notin \phi(2k+1)$，并通过 $x(2k) := a_{i_k}$和 $x(2k+1) := i_k$定义 $x \in \omega^\omega$ 。于是，$x \in T$，但对于任意 $k < \omega$， $x(2k+1) \notin \phi(2k+1)$。由于 ϕ 是任意的，我们有 $T \notin K_\mathscr{I}$。□

引理 4.13 ([CM25，命题 4.16], [CGM+24，引理 4.3])。 设 $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ 是 ω 上满足 $\mathscr{I} \leq_{\mathrm{K}} \mathscr{J}$ 的理想。那么 $\mathrm{non}(M_\mathscr{I}) \leq \mathrm{non}(M_\mathscr{J})$ 且 $\mathrm{cov}(M_\mathscr{I}) \geq \mathrm{cov}(M_\mathscr{J})$ 成立。对于 $K_\mathscr{I}$ 和 $K_\mathscr{J}$，同样成立。

证明。 我们只证明 $\mathrm{non}(M_\mathscr{I}) \leq \mathrm{non}(M_\mathscr{J})$。设 $f \in \omega^\omega$是 $\mathscr{I} \leq_{\mathrm{K}} \mathscr{J}$的见证。假设给定了一个大小为 $< \mathrm{non}(M_\mathscr{I})$ 的$F \subseteq \omega^\omega$。对于 $y \in \omega^\omega$，定义 $y' \in \omega^\omega$如下：对 $n < \omega$，令 $y'(n) = f(y(n))$。由于 $F' := \{y'\colon y \in F\}$的大小为 $< \mathrm{non}(M_\mathscr{I})$，因此存在 $\phi\colon \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$使得 $F' \subseteq M_\phi$。定义 $\psi\colon \omega^{<\omega} \to \mathscr{J}$如下：对 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，令 $\psi(\sigma) := f^{-1}(\phi(\sigma))$。于是我们有$F \subseteq M_\psi$。□

定理 4.14。 对于定义在可数集上的每个理想 $\mathscr{I}$ ，

$$\mathrm{non}(M_\mathscr{I}) \leq \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I})\},$$
$$\mathrm{cov}(M_\mathscr{I}) \geq \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}^*(\mathscr{I})\}.$$

证明。 我们可以假设 $\mathscr{I}$ 是定义在 ω上的理想。我们只证明前一个陈述，因为后一个更容易。设 $B \subseteq \omega^\omega$ 和 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 分别是 $\mathfrak{b} = |B|$ 和 $\mathrm{non}^*_\omega(\mathscr{I}) = |\mathcal{A}|$的见证。对于 $A \in [\omega]^\omega$和 $f \in \omega^\omega$，我们定义 $h(A, f) \in \omega^\omega$如下：

$$h(A, f)(n) = \min(A \setminus f(n)).$$

我们断言， $F := \{h(A, f)\colon A \in \mathcal{A}, f \in B\}$不属于 $M_\mathscr{I}$。给定 $\phi\colon \omega^{<\omega} \to \mathscr{I}$，存在 $A \in \mathcal{A}$，使得对所有 $\sigma \in \omega^{<\omega}$， $|A \cap \phi(\sigma)| < \omega$。令 $g\colon \omega^{<\omega} \to \omega$，使得对所有 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，$A \cap \phi(\sigma) \subseteq g(\sigma)$。注意， $\{h(A, f)\colon f \in B\}$ 也是一个无界族，因为对于 $f \in B$和 $n < \omega$， $h(A, f)(n) \geq f(n)$。根据引理 4.7，存在 $f \in B$，使得对于无穷多个 $n < \omega$， $h(n) > g(h\restriction n)$，其中 $h := h(A, f)$。于是，对于这样的 $n < \omega$， $h(n) \in A \setminus \varphi(h\restriction n)$，因此 $h \in F \setminus M_\phi$。□

注 4.15。定理 4.14 的逆不等式一般无法证明，$\mathscr{I}$ = 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想提供了见证：根据引理 4.11，non($M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}$) $\leq$ non($\mathcal{M}$)，但根据命题 3.25，max{$\mathfrak{b}$,non$^*_\omega$(有限集理想 $\otimes$ 有限集理想)} = $\mathfrak{d}$。

由命题 3.24，我们得到：

推论 4.16。若 $\mathscr{I}$ 是 $\mathcal{R}$ 或 conv，non($M_{\mathscr{I}}$) = non($K_{\mathscr{I}}$) = $\mathfrak{b}$ 且 cov($M_{\mathscr{I}}$) =cov($K_{\mathscr{I}}$) = $\mathfrak{d}$。

由推论 3.42，我们得到：

推论 4.17。设 $\mathscr{I}$ 是一个 F_σ 理想。那么，相容地有 $\mathfrak{b} = \mathrm{non}(M_{\mathscr{I}}) < \mathrm{non}(\mathcal{M})$。

4.2.1. 与常数逃逸和预测数的关系。我们将 $\mathscr{I} = \mathcal{ED}$，$\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$，有限集理想 $\otimes$ 有限集理想的 non($M_{\mathscr{I}}$)（分别为 cov($M_{\mathscr{I}}$)）与常数逃逸数（分别为预测数）联系起来，这些概念源自 Kamo 的工作（[Kam00；Kam01]）。其推论之一是，我们对 CM25 的问题 4.19], 给出了肯定回答：第一作者和第三作者曾询问 cov($M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}$) < $\mathfrak{d}$ 是否相容。我们从一些定义开始，沿用 Cardona 和 Repický 在近期工作中引入的记号 [CR25]。

定义 4.18。

- 一个预测器 是函数 π: $\omega^{<\omega} \to \omega$。令 Pred 表示所有预测器组成的集合。
- 设 $f \in \omega^\omega$ 和 $\pi \in$ Pred。对于 $k \geq 2$，我们称 π k-常数预测 f，记作 $f \sqsubset_{\mathrm{pc}}{}^k \pi$，如果：

$$\forall^\infty i < \omega\ \exists j \in [i, i+k)\ \ f(j) = \pi(f\restriction j).$$

  我们称 π 常数预测 f，记作 $f \sqsubset^{\mathrm{pc}} \pi$，如果对于某个 $k \geq 2$，π k-常数预测 f。

- 定义以下基数不变量：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(k) &:= \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, \forall \pi \in \mathrm{Pred}\ \exists f \in F\ \neg(f \sqsubset^{\mathrm{pc},k} \pi)\},\\
\mathfrak{e}^{\mathrm{const}} &:= \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, \forall \pi \in \mathrm{Pred}\ \exists f \in F\ \neg(f \sqsubset^{\mathrm{pc}} \pi)\},\\
\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}(k) &:= \min\{|\Pi| : \Pi \subseteq \mathrm{Pred}, \forall f \in \omega^\omega\ \exists \pi \in \Pi\ f \sqsubset^{\mathrm{pc},k} \pi\},\\
\mathfrak{v}^{\mathrm{const}} &:= \min\{|\Pi| : \Pi \subseteq \mathrm{Pred}, \forall f \in \omega^\omega\ \exists \pi \in \Pi\ f \sqsubset^{\mathrm{pc}} \pi\}.
\end{aligned}$$

- 对于 $b \in (\omega \setminus 2)^\omega$，我们在受限空间$\prod b := \prod_{n<\omega} b(n)$上定义常数逃逸/预测如下：Pred$_b$ 表示所有满足 dom(π) = $\bigcup_{n<\omega} \prod_{i<n} b(i)$ 且对每个 $\sigma \in$ dom(π) 均有 $\pi(\sigma) \in b(|\sigma|)$ 的函数 π 所组成的集合。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_b^{\mathrm{const}}(k) &:= \min\{|F| : F \subseteq \textstyle\prod b, \forall \pi \in \mathrm{Pred}_b\ \exists f \in F\ \neg(f \sqsubset^{\mathrm{pc},k} \pi)\},\\
\mathfrak{e}_b^{\mathrm{const}} &:= \min\{|F| : F \subseteq \textstyle\prod b, \forall \pi \in \mathrm{Pred}_b\ \exists f \in F\ \neg(f \sqsubset^{\mathrm{pc}} \pi)\},\\
\mathfrak{v}_b^{\mathrm{const}}(k) &:= \min\{|\Pi| : \Pi \subseteq \mathrm{Pred}_b, \forall f \in \textstyle\prod b\ \exists \pi \in \Pi\ f \sqsubset^{\mathrm{pc},k} \pi\},\\
\mathfrak{v}_b^{\mathrm{const}} &:= \min\{|\Pi| : \Pi \subseteq \mathrm{Pred}_b, \forall f \in \textstyle\prod b\ \exists \pi \in \Pi\ f \sqsubset^{\mathrm{pc}} \pi\}.
\end{aligned}$$

  当 b 是取值为 $n < \omega$ 的常值函数时，也就是说，当 $b = \omega \times \{n\}$ 对某个 $n < \omega$ 成立时，我们使用 n 作为下标，而不使用函数 b 本身。

显然：

事实 4.19。

(1) 如果 $2 \leq k \leq l$，则

$$\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(k) \leq \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(l) \leq \mathfrak{e}^{\mathrm{const}} \ and \ \mathfrak{v}^{\mathrm{const}} \leq \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}(l) \leq \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}(k).$$

对于任意 $b \in (\omega \setminus 2)^\omega$， $\prod b$ 上的常数逃避/预测也满足相同的不等式。

(2) 如果 $b \leq^* b'$，那么

$$\mathfrak{e}^{\mathrm{const}} \leq \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{b'} \leq \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{b} \leq \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{2},$$
$$\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{2} \leq \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{b} \leq \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{b'} \leq \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}.$$

此外，对于 $k \geq 2$,

$$\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(k) \leq \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{b'}(k) \leq \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{b}(k) \leq \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{2}(k),$$
$$\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{2}(k) \leq \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{b}(k) \leq \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{b'}(k) \leq \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}(k).$$

命题 4.20. $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2) \leq \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}})$ 且 $\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}(2) \geq$覆盖数$(M_{\mathcal{ED}})$。

证明。为了证明 $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2) \leq \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}})$，取大小为 $< \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2)$ 的 $F \subseteq (\omega \times \omega)^\omega$。对于 $(f, g) \in F$, $f * g \in \omega^\omega$ 由 $f * g(2n) := f(n)$ 和 $f * g(2n+1) := g(n)$ 给出。令 $F^* := \{f * g : (f, g) \in F\} \subseteq \omega^\omega$。由于 F^* 的大小为 $< \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2)$，存在一个预测器 $\pi : \omega^{<\omega} \to \omega$，使得对于所有 $(f, g) \in F$，都有 $f * g \sqsubset^{\mathrm{pc},\ k} \pi$。特别地,

$$\forall (f,g) \in F \ \forall^\infty n < \omega \text{ either } \begin{cases} f(n) = \pi((f*g) \restriction 2n), & \text{or} \\ g(n) = \pi((f*g) \restriction 2n+1). \end{cases}$$

定义 $\sigma : (\omega \times \omega)^{<\omega} \to \omega$ 由 $\sigma(u, v) := \pi(u * v)$。对于 $(u, v) \in (\omega \times \omega)^{<\omega}$，定义 $s(u, v) : \omega \to \omega$ 由 $s(u, v)(a) := \pi((u * v)^\frown a)$。同样，对于 $(u, v) \in (\omega \times \omega)^{<\omega}$，令 $\phi(u, v) := \{(a, b) \in \omega \times \omega : a \leq \sigma(u, v)$ 或 $b = s(u, v)(a)\}$。注意 $\phi(u, v) \in \mathcal{ED}$。于是，容易验证对于所有 $(f, g) \in F$，都有 $(f, g) \in M_\phi$。后一个不等式用对偶方式证明。□

通过与上述基本相同的证明，我们得到:

命题 4.21。对于任意递增的 $b \in \omega^\omega$, $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_b(2) \leq \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$ 以及 $\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_b(2) \geq \mathrm{cov}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$。

此外，我们甚至可以利用以下常数逃避和预测的变体来刻画 $\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}})$ 和 $\mathrm{cov}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}})$:

定义 4.22. 设 $f \in \omega^\omega$ 和 $\pi \in \mathrm{Pred}$。对于每个 $k \geq 2$，我们称 π k-常数有界预测 f，记作 $f \sqsubset^{\mathrm{pc}}_{\leq}{}^{k} \pi$，如果

$$\forall^\infty i < \omega \, \exists j \in [i, i+k) \, (f(j) \leq \pi(f \restriction j)).$$

定义:

$$\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(k) := \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, \forall \pi \in \mathrm{Pred} \ \exists f \in F \ \neg(f \sqsubset^{\mathrm{pc},k}_{\leq} \pi)\},$$
$$\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{\leq}(k) := \min\{|\Pi| : \Pi \subseteq \mathrm{Pred}, \forall f \in \omega^\omega \ \exists \pi \in \Pi \ f \sqsubset^{\mathrm{pc},k}_{\leq} \pi\}.$$

命题 4.23. $\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$ 且 $\mathrm{cov}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$。

为说明这一点，引入一种看似较弱的恒定界预测版本会很方便:

定义 4.24. 设 $f \in \omega^\omega$ 和 $\pi \in$ 属于 Pred。对于每个 $k \geq 2$，若 π 弱 k-恒定界预测 f，记作 $f \sqsubset^{\mathrm{wpc}}_{\leq^k} \pi$，则

$$\forall^\infty m < \omega \, \exists j \in [km, km+k) \, (f(j) \leq \pi(f \restriction j)).$$

定义：

$$\mathfrak{e}^{\mathrm{wconst}}_{\leq}(k) := \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, \forall \pi \in \mathrm{Pred} \ \exists f \in F \ \neg(f \sqsubset^{\mathrm{wpc},k}_{\leq} \pi)\},$$
$$\mathfrak{v}^{\mathrm{wconst}}_{\leq}(k) := \min\{|\Pi| : \Pi \subseteq \mathrm{Pred}, \forall f \in \omega^\omega \ \exists \pi \in \Pi \ f \sqsubset^{\mathrm{wpc},k}_{\leq} \pi\}.$$

引理 4.25. $\mathfrak{e}^{\mathrm{wconst}}_{\leq}(k) = \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(k)$ 且 $\mathfrak{v}^{\mathrm{wconst}}_{\leq}(k) = \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{\leq}(k)$。

证明。 $\mathfrak{e}^{\mathrm{wconst}}_{\leq}(k) \geq \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(k)$显然。为证明反向不等式，设 $F \subseteq \omega^\omega$ 的大小为$< \mathfrak{e}^{\mathrm{wconst}}_{\leq}(k)$。对于 $f \in \omega^\omega$ 和 $l < k$，定义 f 的 l-平移 $f^l \in \omega^\omega$ 如下：

$$f^l(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n < l \\ f(n-l) & \text{if } n \geq l \end{cases}$$

对于 $t \in \omega^{<\omega}$，类似地定义 t^l（因此 $\mathrm{dom}(t^l) = l + |t|$）。设 $F' := \{f^l : f \in F, l < k\}$。由于 F'的大小为 $< \mathfrak{e}^{\mathrm{wconst}}_{\leq}(k)$，存在 $\pi' : \omega^{<\omega} \to \omega$使得 $f^l \sqsubset^{\mathrm{wpc}}_{\leq^k} \pi'$对所有 $f \in F$和 $l < k$均成立。定义 $\pi : \omega^{<\omega} \to \omega$，使得对于 $\pi(t)$， $=$ 等于$\{\pi'(t^l)$的最大值：$l < k\}$。任取 $f \in F$。由于对所有 $l < k$都有 $f^l \sqsubset^{\mathrm{wpc}}_{\leq^k} \pi'$，存在 $m_0 > 0$ 使得：

$$\forall l < k \ \forall m \geq m_0 \, \exists j \in [km, km+k) \, (f^l(j) \leq \pi'(f^l \restriction j)).$$

为了看出 $f \sqsubset^{\mathrm{pc}}_{\leq^k} \pi$，令 $i \geq km_0 + k$ 任意。令 $m \geq m_0$ 和 $l < k$ 满足 $i = km - l$。取 $j \in [km, km+k)$ 使得 $f^l(j) \leq \pi'(f^l \restriction j)$。于是 $f(j-l) = f^l(j) \leq \pi'(f^l \restriction j) = \pi'((f \restriction (j-l))^l) \leq \pi(f \restriction (j-l))$。由于 $j - l \in [km - l, km + k - l) = [i, i+k)$ 且 $i \geq km_0 + k$ 是任意的，我们有 $f \sqsubset^{\mathrm{pc}}_{\leq^k} \pi$。□

证明 命题 *4.23*。由引理 4.25，我们证明 $\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \mathfrak{e}^{\mathrm{wconst}}_{\leq}(2)$，而不是 .

($\geq$) 令 $F \subseteq (\omega \times \omega)^\omega$ 的大小为 $< \mathfrak{e}^{\mathrm{wconst}}_{\leq}(2)$。对于 $(f, g) \in (\omega \times \omega)^\omega$， $f * g \in \omega^\omega$ 由 $f * g(2n) = f(n)$ 和 $f * g(2n+1) = g(n)$ 给出。对于 $(u, v) \in (\omega \times \omega)^{<\omega}$，类似地定义 $u * v \in \omega^{<\omega}$。置 $F^* = \{f * g : (f, g) \in F\} \subseteq \omega^\omega$。由于 F^* 的大小为 $< \mathfrak{e}^{\mathrm{wconst}}_{\leq}(2)$，存在一个预测器 $\pi : \omega^{<\omega} \to \omega$，使得对所有 $(f, g) \in F$，都有 $f * g \sqsubset^{\mathrm{wpc}}_{\leq^2} \pi$。因此，我们有

$$\forall (f, g) \in F \ \forall^\infty n < \omega \text{ either } \begin{cases} f(n) \leq \pi((f * g) \restriction 2n), & \text{or} \\ g(n) \leq \pi((f * g) \restriction 2n+1). \end{cases}$$

定义 $\sigma : (\omega \times \omega)^{<\omega} \to \omega$由 $\sigma(u, v) = \pi(u * v)$。对于 $(u, v) \in (\omega \times \omega)^{<\omega}$，定义 $s(u, v) : \omega \to \omega$由 $s(u, v)(a) = \pi((u * v)^\frown a)$。同样，对于 $(u, v) \in (\omega \times \omega)^{<\omega}$，令 $\phi(u, v) = \{(a, b) \in \omega \times \omega : a \leq \sigma(u, v)$ 或 $b \leq s(u, v)(a)\}$。注意， $\phi(u, v) \in$有限集理想 $\otimes$有限集理想。接下来很容易验证$F \subseteq M_\phi$。

($\leq$) 设 $F \subseteq \omega^\omega$的大小为 $< \mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}})$。对每个 $f \in F$，定义 $f_{\mathrm{even}}, f_{\mathrm{odd}} \in \omega^\omega$如下：$f_{\mathrm{even}}(n) = f(2n)$ 且 $f_{\mathrm{odd}}(n) = f(2n+1)$。令 $F_* = \{\langle f_{\mathrm{even}}, f_{\mathrm{odd}} \rangle : f \in F\}$。由于 F_*的大小为 $< \mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}})$，存在 $\phi : \omega^{<\omega} \to$有限集理想 $\otimes$有限集理想，使得 $F_* \subseteq M_\phi$。我们不妨假设存在 $\sigma : (\omega \times \omega)^{<\omega} \to \omega$ 和 $s : (\omega \times \omega)^{<\omega} \to \omega^\omega$，使得 $\phi(u, v) = \{(a, b) : a \leq \sigma(u, v) \vee v \leq s(u, v)(a)\}$。那么对每个 $f \in F$，

$$\forall^\infty n < \omega \text{ either } \begin{cases} f_{\mathrm{even}}(n) \leq \sigma(f_{\mathrm{even}} \restriction n, f_{\mathrm{odd}} \restriction n), & \text{or} \\ f_{\mathrm{odd}}(n) \leq s(f_{\mathrm{even}} \restriction n, f_{\mathrm{odd}} \restriction n)(f_{\mathrm{even}}(n)). \end{cases}$$

现在定义 $\pi\colon \omega^{<\omega}\to\omega$ 如下：

$$\pi(t)=\sigma(t_{\mathrm{even}},t_{\mathrm{odd}})$$
$$\pi(t^\frown\langle n\rangle)=s(t_{\mathrm{even}},t_{\mathrm{odd}})(n)$$

对于所有偶数长度的 $t\in\omega^{<\omega}$ 以及所有 $n<\omega$，其中 t_{even}，t_{even} 以类似方式定义。于是对于所有 $f\in F$，都有 $f\sqsubset^{\mathrm{wpc}}_{\leq^2}\pi$。$\mathfrak{v}_b^{\mathrm{const}}(2)\geq\mathrm{cov}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$ 的证明采用对偶方式。□

上述证明很容易推广到更高维。令 $\mathsf{Fin}^{\otimes 2}=\mathsf{Fin}\otimes\mathsf{Fin}$。对于每个 $2\leq k<\omega$，我们通过归纳法定义 $\mathsf{Fin}^{\otimes k+1}=\mathsf{Fin}\otimes\mathsf{Fin}^{\otimes k}$。

命题 4.26. 对于每个 $2\leq k<\omega$，$\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}^{\otimes k}})=\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(k)$ 且 $\mathrm{cov}(M_{\mathrm{Fin}^{\otimes k}})=\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_{\leq}(k)$。

Brendle [Bre03，定理 3.6(b)] 证明了 $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}>\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}<\mathfrak{d}$的相容性（连续统很大），但实际上证明了更多内容：

定理 4.27 (Brendle [Bre03])。

(1) 给定 $\kappa<\lambda=\lambda^{<\lambda}$ 正则不可数，存在一个偏序集强迫 $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2)=\lambda=\mathfrak{c}$和 $\mathfrak{b}=\kappa$。

(2) 给定 κ 正则不可数且 $\lambda=\lambda^{<\omega}>\kappa$，存在一个偏序集强迫 $\mathfrak{v}^{\mathrm{const}}(2)=\kappa$ 和 $\mathfrak{d}=\lambda=\mathfrak{c}$。

因此，我们特别得到：

推论 4.28。 $\mathfrak{b}<\mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}})$ 和$\mathrm{cov}(M_{\mathcal{ED}})<\mathfrak{d}$ 都是相容的。

结合以下结果，我们证明 $K_{\mathscr{I}}$和 $M_{\mathscr{I}}$的一致性与覆盖数对于 $\mathscr{I}=$有限集理想$^{\otimes k},\mathcal{ED}$而言可以彼此不同。

命题 4.29。对于每个 $2\leq k<\omega,\mathrm{non}(K_{\mathrm{Fin}^{\otimes k}})=\mathfrak{b}$和$\mathrm{cov}(M_{\mathrm{Fin}^{\otimes k}})=\mathfrak{d}$。

证明。我们只证明 $k=2$ 的前一个等式，因为我们的证明很容易推广到更高维情形，而后一个等式可以通过对偶方式证明。

只需证明 $\mathsf{non}(K_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}})\leq\mathfrak{b}$。设 $B\subseteq\omega^\omega$ 是一个无界族，并假设所有 $f\in B$ 都严格递增。我们将证明 $F:=\{f\times g\colon f,g\in B\}\subseteq(\omega\times\omega)^\omega$ 不属于 $K_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}$。任取 $\phi\colon\omega\to$有限集理想$\otimes$有限集理想。对于每个 $n<\omega$，存在$k_n<\omega$和 $h_n\in\omega^\omega$，使得 $\phi(n)\subseteq(k_n\times\omega)\cup\{(i,j)\colon i<\omega,j<h_n(i)\}$。由于 B 无界，存在 $f\in B$ 和 $D\in[\omega]^\omega$，使得对 $n\in D$，$k_n<f(n)$。对于 $n<\omega$，令$h(n):=h_n(f(n))$，并令 $h'(n):=h(d_n)$，其中 d_n 表示 D 的第 n 个元素。由于 B 无界，存在 $g\in B$ 和 $E\in[\omega]^\omega$，使得对于 $n\in E$，$h'(n)<g(n)$。于是，对于任意 $n\in E$，$g(d_n)\geq g(n)>h'(n)=h(d_n)=h_{d_n}(f(d_n))$。因此，对所有 $m\in\{d_n\colon n\in E\}$，都有 $(f(m),g(m))\notin\phi(m)$，所以 F 不属于 $K_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}$。□

由引理 4.11 和引理 4.13，我们有：

推论 4.30。对于定义在可数集上的任意理想 $\mathscr{I}$，若对某个$2\leq k<\omega$有 $\mathscr{I}\leq_{\mathrm{K}}$有限集理想$^{\otimes k}$，则$K_{\mathscr{I}}\mathrm{non}(K_{\mathscr{I}})=\mathfrak{b}$且$K_{\mathscr{I}}\mathrm{cov}(K_{\mathscr{I}})=\mathfrak{d}$。特别地，这些等式对$\mathscr{I}=\mathcal{R}$，$\mathrm{conv}$ $\mathcal{ED}$成立。

由定理 4.27，我们得到以下相容性结论。

推论 4.31。对于定义在可数集上的任意理想 $\mathscr{I}$，若对某个$2\leq k<\omega$有 $\mathscr{I}\leq_{\mathrm{K}}$有限集理想$^{\otimes k}$，则$K_{\mathscr{I}}\mathrm{non}(K_{\mathscr{I}})<\mathrm{non}(M_{\mathscr{I}})$与$K_{\mathscr{I}}\mathrm{cov}(K_{\mathscr{I}})>\mathrm{cov}(M_{\mathscr{I}})$都具有相容性。

我们不知道还有其他理想 $\mathscr{I}$，使得 $\mathsf{non}(K_{\mathscr{I}})$ 和 $\mathsf{non}(M_{\mathscr{I}})$ 相容地不同。尤其是，$\mathsf{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})<\mathsf{non}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$ 的相容性尚不清楚（相反，我们将在第 5.2.2 节看到 $\mathsf{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})>\mathfrak{b}$ 的相容性）。

4.2.2. 无处稠密理想与 *Solecki*理想。 通过重新表述 Sabok–Zapletal 关于 $\mathbb{M}_{\mathrm{nwd}}$ 和 $\mathbb{M}_{\mathcal{S}}$ 在 [SZ11], 中的强迫性质的结果，我们计算出 M_{nwd} 和 $M_{\mathcal{S}}$ 的一致性与覆盖数。回顾引理 2.10。

定义 4.32. 令 concat: $(2^{<\omega})^{\omega} \to 2^{\omega}$ 为如下定义的连接函数：$\mathrm{concat}(x) = x(0)^\frown x(1)^\frown x(2)^\frown \cdots \in 2^{\omega}$。我们也以类似方式定义 $\mathrm{concat} : (2^{<\omega})^{<\omega} \to 2^{<\omega}$，并混用这些记号。

引理 4.33 (Sabok–Zapletal, [SZ11])。 令 $\Vdash_{\mathbb{M}_{\mathrm{nwd}}} \dot{r} := \bigcup\{\mathrm{stem}(T) : T \in G\} \in (2^{<\omega})^{\omega}$为一个（规范的 $\mathbb{M}_{\mathrm{nwd}}$-名称） $\mathbb{M}_{\mathrm{nwd}}$-泛型实数。那么

$$\Vdash_{\mathbb{M}_{\mathrm{nwd}}} \mathrm{concat}(\dot{r}) \in 2^{\omega} \text{ is Cohen generic.}$$

证明。 令 $N \subseteq 2^{\omega}$ 为闭处处稠密集，并令 $S \subseteq 2^{<\omega}$ 为一棵满足 $[S] = N$的树。令 $T \in \mathbb{M}_{\mathrm{nwd}}$。现在我们可以将其细化为一棵树 $T' \in \mathbb{M}_{\mathrm{nwd}}$，使得对所有 $\sigma \in T'$，$\mathrm{succ}_{T'}(\sigma)$ 或为单点集，或为与 $S \cap \{\tau \in 2^{<\omega} : \mathrm{concat}(\sigma) \subseteq \tau\}$不相交的处处稠密正集。

我们断言，如果 $x \in [T']$那么 $\mathrm{concat}(x) \notin N$；令 σ为 T'的茎。则 $\mathrm{concat}(\sigma)^\frown\langle x(|\sigma|)\rangle \notin S$。这意味着，对于所有 $n > |\sigma|$，$\mathrm{concat}(x \restriction n) \notin S$，因此 $\mathrm{concat}(x) \notin [S] = N$。□

由引理 4.11 和引理 2.10，我们有：

推论 4.34。 $\mathrm{non}(\mathcal{M}) = \mathrm{non}(M_{\mathrm{nwd}})$ 且 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{cov}(M_{\mathrm{nwd}})$。

在 [SZ11], 中已经证明， $\mathbb{M}_{\mathcal{S}}$ 坍缩了Lebesgue外测度。推论 4.39 是这一结果的重新表述。首先，我们回顾一下， $\mathcal{S}_{\varepsilon}$ 由形如以下形式的集合生成

$$I_y = \{C \in \Omega_{\varepsilon} : y \in C\},$$

其中 Ω_{ε} 是 2^{ω} 中测度为 ε的闭开子集的集合。注意，对于每个$A \subseteq \Omega_{\varepsilon}$,

$$A \in \mathcal{S}_{\varepsilon}^{+} \iff \forall y \in 2^{\omega}\ \exists C \in A\ (y \notin C).$$

标准Solecki理想 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}_{1/2}$。 注意， 2^{ω} 配备标准Haar测度 λ与配备乘积测度 λ_k的$(2^{\omega})^k$ 同构，因此我们可以改为考察$(2^{\omega})^k$ 上的开闭集，这样相应的Solecki理想将是Katětov等价的。对于每个 $k \in \omega$，我们定义 $h_k: \Omega \to \Omega_{\varepsilon}$ ，使得

$$h_k(C) = (2^{\omega})^k \setminus \prod_{i<k} (2^{\omega} \setminus C)$$

对任意 $C \subseteq 2^{\omega}$。

引理 4.35. h_k 是一个*Katětov* 归约，见证了 $\mathcal{S} \geq_K \mathcal{S}_{1-2^{-k}}$。

证明。 令 $y := \langle y_i\rangle_{i<k} \in (2^{\omega})^k$ ，并设 $C \in \Omega_{\varepsilon}$ 满足 $y \in h_k(C)$。那么必定存在一个 $i < k$ 使得 $y_i \notin 2^{\omega} \setminus C$，因此 $y_i \in C$。换言之， $h_k^{-1}[I_y] \subseteq \bigcup_{i<k} I_{y_i} \in \mathcal{S}$。□

从现在起，我们认为 h_k 是 2^{ω} 中具有相应测度的开闭集之间的函数（而不是定义在$2^{\omega k}$的开闭集上的函数）。给定 $x \in \Omega^{\omega}$，定义

$$B_x = \{y \in 2^{\omega} : \exists^{\infty} n < \omega\ (y \notin h_n(x(n)))\}.$$

注意， B_x 的测度为零，因为每个 $h_n(x(n))$ 的测度都是 $1 - 2^{-n}$。

引理 4.36. 设 $y \in 2^{\omega}$，并设 $T \in \mathbb{M}_{\mathcal{S}}$，则存在一棵树 $T' \in \mathbb{M}_{\mathcal{S}}$，使得 $T' \leq T$，且对所有 $x \in [T']$，都有 $y \in B_x$。

证明。 论证与引理 4.33 的证明类似。我们可以将 T 细化为一棵树$T' \in \mathbb{M}_{\mathcal{S}}$，使得对所有 $\sigma \in T'$，$\mathrm{succ}_{T'}(\sigma)$ 要么是单元素集，要么是与 $h^{-1}_{|\sigma|}[I_y]$不相交的 $\mathcal{S}$-正集。为证明 T' 具有所需性质，设 $x \in [T']$。对于任意满足 $\mathrm{succ}_{T'}(x \restriction n) \in \mathcal{S}^+$ 的$n < \omega$，我们有 $x(n) \notin h^{-1}_{|\sigma|}[I_y]$，因此 $y \notin h_n(x(n))$。这样的 $n < \omega$ 有无限多个，所以 $y \in B_x$。□

组合 结合标准的融合论证，我们可以如下加强此引理 s.

引理 4.37. 设 $\{y_n \colon n \in \omega\} \subseteq 2^\omega$且设 $T \in \mathbb{M}_{\mathcal{S}}$，则存在一棵树 $T' \in \mathbb{M}_{\mathcal{S}}$,$T' \leq T$，使得对于所有 $x \in [T']$ 以及所有 $n \in \omega$, $y_n \in B_x$。

证明。 对于一棵树 T，我们记作

$$\mathrm{lv}_n(T) = \{t \in T \colon t \text{ 至多经过 } n \text{ 个分裂节点}\}.$$

若 $T' \leq T$ 且 $\mathrm{lv}_n(T) = \mathrm{lv}_n(T')$，我们也记作 $T' \leq_n T$。

断言 4.38。 设 $T \in \mathbb{M}_{\mathcal{S}}$和 $n \in \omega$，则存在一棵树 $T' \in \mathbb{M}_{\mathcal{S}}$，使得 $T' \leq_n T$，并且对所有 $x \in [T']$，都有 $y_n \in B_x$。

断言的证明。 对于 $\mathrm{lv}_n(T)$ 的每个终节点 s，我们对 T_s 应用引理 4.36，得到一棵树 $T'_s \in \mathbb{M}_{\mathcal{S}}$，使得 $T'_s \leq T_s$，并且对所有 $x \in [T'_s]$，都有 $y_n \in B_x$。树 $T' = \bigcup\{T'_s{:}s \text{ 是 } \mathrm{lv}_n(T) \text{ 的一个终节点；}\}$ 就是我们要找的树。□

我们反复应用该断言，得到一个树序列 $T = T_0 \geq_0 T_1 \geq_1 T_2 \geq_2 \cdots$，使得对所有 $n < \omega$，若 $x \in [T_n]$，则 $y_n \in B_x$。那么树 $T' := \bigcap_{n\in\omega} T_n$ 满足要求。□

推论 4.39. $\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N}) \leq \mathrm{non}(M_{\mathcal{S}})$ 且 $\mathrm{cov}(M_{\mathcal{S}}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{N})$。

证明。 若 $X \notin M_{\mathcal{S}}$，则存在一棵树 $T \in \mathbb{M}_{\mathcal{S}}$，使得每个满足 $T' \leq T$ 的 $T' \in \mathbb{M}_{\mathcal{S}}$ 都具有性质 $[T'] \cap X \neq \emptyset$。于是，引理 4.37 蕴含 $\{B_x \colon x \in X\}$ 是 $\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N}) \leq |X|$ 的见证。另一个不等式可通过对偶论证得到：令 $\kappa < \mathrm{cov}(M_{\mathcal{S}})$ 且$\{y_\alpha \colon \alpha \in \kappa\} \in 2^\omega$。定义 $Y_\alpha := \{x \in \Omega^\omega : y_\alpha \notin B_x\}$。根据前一个引理，$Y_\alpha \in M_{\mathcal{S}}$，并且由于 $\kappa < \mathrm{cov}(M_{\mathcal{S}})$，必定有 $x \notin \bigcup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$。由此可知，对每个$\alpha < \kappa$，都有 $y_\alpha \in B_x$。□

由命题 3.32 和定理 4.14，我们得到 $\mathrm{non}(M_{\mathcal{S}})$ 和 $\mathrm{cov}(M_{\mathcal{S}})$ 的精确值：

定理 4.40. $\mathrm{non}(M_{\mathcal{S}}) = \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})\}$ 且 $\mathrm{cov}(M_{\mathcal{S}}) = \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{non}(\mathcal{N})\}$。

注记 4.41. 这说明定理 4.14 中的不等式是最佳的：事实上，当 $\mathscr{I} = \mathcal{S}$ 时，由命题 3.32 可得 $\mathrm{non}(M_{\mathcal{S}}) = \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{S})\}$。

注记 4.42. $\mathfrak{b} < \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$ 在随机模型中成立，而且不难看出，$\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N}) < \mathfrak{b}$ 在 Laver 模型中成立（例如参见 [BJ95, 引理 7.2.3]）。因此$\mathfrak{b}$ 和 $\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$ 具有独立值。与 Laver 模型的情形一样，可以看出在 $\mathbb{PT}_{f,g}$-模型中，$\mathfrak{b} = \mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N}) < \mathrm{non}(\mathcal{M})$ 成立（例如参见 [BJ95, 引理 7.2.15]）。因此，$\mathrm{non}(M_{\mathcal{S}}) = \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})\}$ 与 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathrm{non}(\mathcal{M})$ 相容地不同。

对于 $K_{\mathcal{S}}$，定理 4.40 可以得到加强，我们将利用引理 2.10 证明这一点。我们来引入与 σ-理想 $K_{\mathscr{I}}$ 相对应的强迫概念 $\mathbb{K}_{\mathscr{I}}$：

定义 4.43. 令 $\mathbb{K}_{\mathscr{I}}$ 表示所有满足以下条件的 $T \subseteq \omega^\omega$ 的集合：对于每个 $\sigma \in T$，都存在 $N > |\sigma|$，使得谱

$$\mathrm{Spec}_T(\tau, N) := \{\tau(N) : \tau \in T, \sigma \subseteq \tau, |\tau| = N + 1\}$$

是 $\mathscr{I}$-正的。

以下二分法成立:

引理 4.44. 对于任意解析集 $A \subseteq \omega^\omega$，要么 $A \in K_{\mathscr{I}}$，要么存在 $T \in \mathbb{K}_{\mathscr{I}}$ 使得$[T] \subseteq A$。因此，$\mathbb{K}_{\mathscr{I}}$与 $\mathbb{P}_{K_{\mathscr{I}}}$强迫等价。

证明.我们只证明闭集的情形。标准的展开技巧可以给出解析集情形的证明。设 $D \subseteq \omega^\omega$ 是闭集，并设 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ 是满足$D = [T]$的树。我们按如下方式定义 T的导数:

$$T' = \{\sigma \in T : \exists N > |\sigma| \text{ such that } \{\tau(N) : \tau \in T, \sigma \subseteq \tau, |\tau| = N+1\} \in \mathscr{I}^+\}$$

定义 $T_0 = T$、$T_{\alpha+1} = T'_\alpha$，并且对于极限 $\alpha < \omega_1$，令 $T_\alpha = \bigcap_{\gamma<\alpha} T_\gamma$。设 $\alpha^* < \omega_1$ 是满足 $T_{\alpha^*+1} = T_{\alpha^*}$的最小序数。考虑两种情形:

首先，$T_{\alpha^*} \neq \emptyset$。根据导数的定义，很容易构造出所需的树。其次，$T_{\alpha^*} = \emptyset$。那么 $[T] = \bigcup_{\alpha<\alpha^*}([T_\alpha] \setminus [T_{\alpha+1}])$。根据导数的定义，我们有 $[T_\alpha] \setminus [T_{\alpha+1}] \in K_{\mathscr{I}}$。因此，$[T]$ 被可数个$K_{\mathscr{I}}$-集合的并覆盖。□

定义 4.45. 对于 $y \in 2^\omega$，令 $N_y := \{x \in \Omega^\omega : y \notin B_x\}$。令 $N_{\mathcal{S}}$ 为 Ω^ω 上由 N_y's 生成的 σ-理想。

引理 4.46. $\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N}) \leq \mathrm{non}(N_{\mathcal{S}})$ 以及 $\mathrm{cov}(N_{\mathcal{S}}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{N})$。

证明。为证明 $\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N}) \leq \mathrm{non}(N_{\mathcal{S}})$，取满足 $X \notin N_{\mathcal{S}}$ 的 $X \subseteq \Omega^\omega$。我们断言，$\{B_x : x \in X\} \subseteq \mathcal{N}$ 是 $\mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})$ 的一个见证。为此，取 $Y \in [2^\omega]^\omega$。由于 $N := \bigcup_{y\in Y} N_y \in N_{\mathcal{S}}$ 且 $X \notin N_{\mathcal{S}}$，存在 $x \in X \setminus \bigcup_{y\in Y} N_y$。于是我们得到 $Y \subseteq B_x$。

另一个不等式 $\mathrm{cov}(N_{\mathcal{S}}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{N})$ 可以用对偶方式证明。 □

引理 4.47. 令 $\Vdash_{\mathbb{K}_{\mathcal{S}}} \dot{r} := \bigcup\{\text{茎}(T) : T \in G\} \in \Omega^\omega$ 为（规范的 $\mathbb{K}_{\mathcal{S}}$-名称）一个 $\mathbb{K}_{\mathcal{S}}$-泛型实数。于是

$$\Vdash_{\mathbb{K}_{\mathcal{S}}} \dot{r} \text{ is } N_{\mathcal{S}}\text{-quasi-generic.}$$

证明。证明与引理 4.36 基本相同。给定 $y \in 2^\omega$ 和 $T \in \mathbb{K}_{\mathcal{S}}$，将$T$细化为 T'，使得对于所有 $s \in T'$，都存在 $N \geq |\sigma|$，使得 $\mathrm{Spec}_{T'}(\sigma, N)$ 是 $\mathcal{S}$-正的，且与 $h^{-1}_{|\sigma|}[I_y]$不相交。于是 $x \in [T']$ 蕴含 $y \in B_x$。这意味着 $\Vdash_{\mathbb{K}_{\mathcal{S}}} \dot{r} \in \Omega^\omega$是$N_{\mathcal{S}}$-准通用的。□

由引理 2.10，我们有:

定理 4.48。$\mathrm{non}(K_{\mathcal{S}}) = \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}_\omega(\mathcal{N})\}$ 且 $\mathrm{cov}(K_{\mathcal{S}}) = \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{non}(\mathcal{N})\}$。

4.2.3. 渐近密度零理想。Pawlikowski [Paw00] 研究了 $K_{\mathcal{Z}}$ 并证明 :

引理 4.49 ([Paw00, 引理 2.3])。存在一个（连续）函数 $f: \omega^\omega \times 2^\omega \to \omega^\omega$，使得对于任意 $F \in K_{\mathcal{Z}}$，都存在 $g \in \omega^\omega$，使得对于任意从 g无界的 $x \in \omega^\omega$，$\{y \in 2^\omega : f(x, y) \in F\} \in \mathcal{E}$。

推论 4.50. $\mathrm{non}(K_{\mathcal{Z}}) \leq \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}(\mathcal{E})\}$ 且$\mathrm{cov}(K_{\mathcal{Z}}) \geq \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}(\mathcal{E})\}$.

证明.我们只证明前一个不等式，另一个不等式由对偶性可得。令$B \subseteq \omega^\omega$和 $E \subseteq 2^\omega$分别为 $\mathfrak{b}$和 $\mathrm{non}(\mathcal{E})$的见证。我们将证明 $f[B \times E] \notin K_{\mathcal{Z}}$，其中 f 如上所述。若不然，取 $g \in \omega^\omega$ 如引理 4.49 中所述。由于 B 无界，存在某个$x \in B$满足 $\mathcal{E} \ni \{y \in 2^\omega : f(x, y) \in f[B \times E]\} \supseteq E \notin \mathcal{E}$，矛盾。□

我们以下述形式证明引理 4.49 的 $M_{\mathcal{Z}}$-版本:

引理 4.51. 存在一个（连续）函数 $f: \omega^\omega \times 2^\omega \to \omega^\omega$，使得对于任意$F \in M_{\mathcal{Z}}$，都存在 $g: \omega^{<\omega} \to \omega$，使得对于任意 $x \in \omega^\omega$，x 要么被 g自适应支配，要么 $\{y \in 2^\omega : f(x, y) \in F\} \in \mathcal{E}$。

在下面的证明中，请注意，对于任意 $A \in \mathcal{Z}$，都存在 $k_0 < \omega$，使得对于任意$k \geq k_0$,

$$\frac{|A \cap \left[k, k+2^k\right)|}{2^k} \leq \frac{1}{2}.$$

此外，对于一个从 ω 到 2 的偏函数集合 u，定义

$$[u] \coloneqq \bigcup \{[\sigma] : \sigma \in u\} = \bigcup \{x \in 2^\omega : \exists \sigma \in u\, (\sigma \subseteq x)\}.$$

证明。固定一个函数 $e\colon \bigcup\{2^K\colon K \in [\omega]^{<\omega}\} \to \omega$，使得对每个 $K \in [\omega]^{<\omega}$，e 在 2^K 上与 $\left[|K|, |K| + 2^{|K|}\right)$ 一一对应。对于 $x \in \omega^\omega$，令 $\langle I_{x,i}\colon i \in \omega\rangle$ 表示 ω 的区间划分，其中每个区间的长度为 $x(i)+1$。定义

$$f(x,y) \coloneqq \langle e(y\restriction I_{x,i}) : i \in \omega\rangle.$$

注意，$f(x,y) = e(y\restriction I_{x,i}) \geq |I_{x,i}| = x(i)+1$。为说明这满足条件，任取 $F \in M_{\mathcal{Z}}$，并取 $\phi\colon \omega^{<\omega} \to \mathcal{Z}$，使得 $F \subseteq M_\phi$。由于 $\mathcal{Z}$ 是一个 P-理想，存在$S\colon \omega \to \mathcal{Z}$，使得对于任意 $i \in \omega$ 和 $t \in \omega^i$，$\phi(t) \subseteq^* S(i)$；再取 $h\colon \omega^{<\omega} \to \omega$，使得对于这样的 i 和 t，$\phi(t) \subseteq S(i) \cup h(t)$。选取 $z \in \omega^\omega$，使得对于任意 $i \in \omega$ 和$k \geq z(i)$,

$$\frac{|S(i) \cap \left[k, k+2^k\right)|}{2^k} \leq \frac{1}{2}.$$

令 $m\colon \omega^{<\omega} \to \omega$ 满足：对于任意 $x \in \omega^\omega$ 和 $y \in 2^\omega$,

$$m(x\restriction i) = \max\{h(f(x,y)\restriction i) : y \in 2^\omega\},$$

这是可行的，因为这里只涉及 $x\restriction i$ 和有限多个 y。

定义 $g\colon \omega^{<\omega} \to \omega$，使得 $g(t) \coloneqq \max\{z(i)\ m(t)\}$，其中 $i \in \omega$ 和 $t \in \omega^i$。假设 $x \in \omega^\omega$ 不被 g 自适应支配，也就是说，存在 $D \in [\omega]^\omega$，使得对于任意 $i \in D$，$x(i) > g(x\restriction i)$。对于 $i \in \omega$，令

$$S^*_{x,i} \coloneqq \{\sigma \in 2^{I_{x,i}} : e(\sigma) \in S(i)\}.$$

由于 e 在 $2^{I_{x,i}}$ 与 $\left[x(i)+1,\ x(i)+1+2^{x(i)+1}\right)$ 双射，

$$\text{if } i \in D,\ \frac{|S^*_{x,i}|}{2^{|I_{x,i}|}} \leq \frac{|S(i) \cap \left[x(i)+1, x(i)+1+2^{x(i)+1}\right)|}{2^{x(i)+1}} \leq \frac{1}{2}, \tag{4.2}$$

由于 $x(i)+1 > x(i) > g(x\restriction i) \geq z(i)$。因此，只需证明：

$$\{y \in 2^\omega : f(x,y) \in M_\phi\} \subseteq \bigcup_{j \in \omega} \bigcap_{j \leq i \in D} [S^*_{x,i}], \tag{4.3}$$

因为根据 (4.2)，后一个集合在 2^ω 中是 F_σ 零测的。为证明 (4.3)，取满足$f(x,\ y) \in M_\phi$ 的 $y \in 2^\omega$。取 $j \in \omega$，使得对于 $i \geq j$,

$$f(x,y)(i) \in \phi(f(x,y)\restriction i) \subseteq S(i) \cup h(f(x,y)\restriction i).$$

根据 m 的选择，对于这样的 i，要么 $f(x,y)(i) \in S(i)$，要么 $f(x,y)(i) \in m(x\restriction i)$。如果 $j \leq i \in D$，那么

$$f(x,y)(i) \geq x(i)+1 > g(x\restriction i) \geq m(x\restriction i),$$

因此，前一种情形 $f(x,y)(i) \in S(i)$ 成立，这意味着 $f(x,y)(i) = e(y\restriction I_{x,i}) \in S(i)$。于是，$y\restriction I_{x,i} \in S^*_{x,i}$，从而 $y \in [S^*_{x,i}]$。因此，我们得到 (4.3)。□

推论 4.52. $\mathrm{non}(M_{\mathcal{Z}}) \leq \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}(\mathcal{E})\}$ 且 $\mathrm{cov}(M_{\mathcal{Z}}) \geq \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}(\mathcal{E})\}$.

证明. 我们只证明第一个不等式。设 $B \subseteq \omega^\omega$ 和 $E \subseteq 2^\omega$ 分别是 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathrm{non}(\mathcal{E})$ 的见证。我们将证明 $F := f(B \times E) \notin M_{\mathcal{Z}}$，其中 f 如上所述。若非如此，设 $g\colon \omega^{<\omega} \to \omega$ 如引理 4.51 中所述。根据引理 4.7，存在某个 $x \in B$ 不被 g 自适应支配。然而，由此可得 $\mathcal{E} \ni \{y \in 2^\omega\colon f(x, y) \in F = f(B \times E)\} \supseteq E \notin \mathcal{E}$，矛盾。□

在下面的引理中，我们将 $\mathcal{Z}$ 视为 $2^{<\omega}$ 上的一个理想，因此对于任意 $A \subseteq 2^{<\omega}$，

$$A \in \mathcal{Z} \iff \lim_{k\to\infty} \frac{|A \cap 2^k|}{2^k} = 0.$$

回顾定义 4.32 中的连接函数 concat。

引理 4.53。 设 $\Vdash_{\mathbb{M}_{\mathcal{Z}}} \dot{r} := \bigcup\{\mathrm{stem}(T)\colon T \in G\} \in (2^{<\omega})^\omega$ 是一个（规范的 $\mathbb{M}_{\mathcal{Z}}$-名称）$\mathbb{M}_{\mathcal{Z}}$-泛型实数。那么 $\Vdash_{\mathbb{M}_{\mathcal{Z}}} \mathrm{concat}(\dot{r}) \in 2^\omega$ 是 $\mathcal{E}$-拟泛型的。

证明。 我们证明，对于任意满足 $[T] \subseteq 2^\omega$ 为零测的树 $T \subseteq 2^{<\omega}$，都有 $\Vdash \mathrm{concat}(\dot{r}) \notin [T]$。为此，任取 $p \in \mathbb{M}_{\mathcal{Z}}$，并且不妨设 p 的每个节点要么不分裂，要么是 $\mathcal{Z}^+$-分裂的。令 σ 为 p 的茎，并且 $A := \mathrm{succ}_p(\sigma) \subseteq 2^{<\omega}$。由于 $A \in \mathcal{Z}^+$，存在 $\varepsilon \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$，使得对无穷多个 $k < \omega$：

$$\frac{|A \cap 2^k|}{2^k} \geq \varepsilon. \tag{4.4}$$

令 $s := \mathrm{concat}(\sigma) \in 2^{<\omega}$。反设对于无限多个 $k < \omega$：

$$\frac{|T \cap [s] \cap 2^{|s|+k}|}{2^k} \geq \varepsilon. \tag{4.5}$$

由于左边关于 k 单调不增，(4.5) 对所有 $k < \omega$ 都成立。然而，这意味着 $\mu([T]) \geq \varepsilon > 0$，其中 μ 表示 2^ω 上的勒贝格测度，这与 $[T]$ 是零测集矛盾。因此，存在 $k_0 < \omega$，使得对所有 $k \geq k_0$，

$$\frac{|T \cap [s] \cap 2^{|s|+k}|}{2^k} < \varepsilon. \tag{4.6}$$

取满足 (4.4) 的 $k \geq k_0$，并令 $\Sigma := \{\sigma^\frown a\colon a \in A \cap 2^k\}$。注意，concat 在 Σ 和 $\mathrm{concat}[\Sigma] \subseteq [s] \cap 2^{|s|+k}$ 上是一一对应的。由 (4.4) 和 (4.6)，

$$|T \cap [s] \cap 2^{|s|+k}| < \varepsilon \cdot 2^k \leq |A \cap 2^k| = |\mathrm{concat}[\Sigma]|,$$

因此我们有 $\mathrm{concat}[\Sigma] \not\subseteq T \cap [s] \cap 2^{|s|+k}$。取满足下式的 $a \in A \cap 2^k$

$$\mathrm{concat}(\sigma^\frown a) \notin T \cap [s] \cap 2^{|s|+k}$$

并令 $p' := p \cap [\sigma^\frown a]$。于是，我们有 $p' \Vdash \mathrm{concat}(\dot{r}) \notin [T]$，因为 $p' \Vdash \mathrm{concat}(\dot{r}) \restriction (|s|+k) = \mathrm{concat}(\sigma^\frown a) \notin T$。□

定理 4.54。 $\mathrm{non}(M_{\mathcal{Z}}) \geq \mathrm{non}(\mathcal{E})$ 以及 $\mathrm{cov}(M_{\mathcal{Z}}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{E})$。因此，

$$\mathrm{non}(M_{\mathcal{Z}}) = \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}(\mathcal{E})\} \text{ and } \mathrm{cov}(M_{\mathcal{Z}}) = \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}(\mathcal{E})\}.$$

证明。 这由推论 4.52、引理 4.53 和引理 2.10 得出。 □

作为定理 4.54 的推论，我们得到 $\mathrm{non}^*(\mathcal{Z})$ 和 $\mathrm{cov}^*(\mathcal{Z})$ 的新界。我们简要回顾这些基数不变量的已有结果。

定理 4.55 (Hernández-Hernández–Hrušák [HH07])。

$$\min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}(\mathcal{N})\} \leq \mathrm{non}^*(\mathcal{Z}) \leq \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{non}(\mathcal{N})\},$$
$$\min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{N})\} \leq \mathrm{cov}^*(\mathcal{Z}) \leq \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}(\mathcal{N})\}.$$

定理 4.56 (Raghavan–Shelah [RS17])。 $\mathfrak{b} \leq \mathrm{non}^*(\mathcal{Z})$ 和 $\mathrm{cov}^*(\mathcal{Z}) \leq \mathfrak{d}$。

Raghavan 改进了上述 $\mathrm{non}^*(\mathcal{Z})$ 的下界和 $\mathrm{cov}^*(\mathcal{Z})$ 的上界:

定理 4.57 (Raghavan [Rag20])。

$$\min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{u}\} \leq \mathrm{non}^*(\mathcal{Z}) \text{ and } \mathrm{cov}^*(\mathcal{Z}) \leq \max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}(\mathfrak{pr})\},$$

其中 $\mathfrak{u}$ 表示超滤子数，而 $\mathfrak{s}(\mathfrak{pr})$ 是 *[Rag20]*中引入的分裂数 $\mathfrak{s}$的一种变体。[6]

Theo注 4.58。 $\mathrm{non}(\mathcal{E}) \leq \mathrm{non}^*(\mathcal{Z})$ 和 $\mathrm{cov}^*(\mathcal{Z}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{E})$。此外，$\mathrm{cov}^*(\mathcal{Z}) \leq \mathrm{non}^*(\mathcal{Z}$).

证明。 由于 $\mathcal{Z}$ 是一个 P-理想，$\mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{Z}) = \mathrm{non}^*(\mathcal{Z})$。由定理 4.54、定理 4.14 和定理 4.56 可得

$$\mathrm{non}(\mathcal{E}) \leq \mathrm{non}(M_{\mathcal{Z}}) \leq \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}^*_\omega(\mathcal{Z})\} = \max\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}^*(\mathcal{Z})\} = \mathrm{non}^*(\mathcal{Z}).$$

类似地,

$$\mathrm{cov}(\mathcal{E}) \geq \mathrm{cov}(M_{\mathcal{Z}}) \geq \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}^*(\mathcal{Z})\} = \mathrm{cov}^*(\mathcal{Z}).$$

由于 $\mathrm{cov}(\mathcal{E}) \leq \mathfrak{r} \leq \mathfrak{u}$，结合定理 4.56，我们得到

$$\mathrm{cov}^*(\mathcal{Z}) \leq \min\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}(\mathcal{E})\} \leq \min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{u}\} \leq \mathrm{non}^*(\mathcal{Z}).$$

□

我们以如下说明结束本节：基数不变量 $\min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{u}\}$ 和 $\mathrm{non}(\mathcal{E})$ 相互独立，$\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}(\mathfrak{pr})\}$ 和 $\mathrm{cov}(\mathcal{E})$ 也是如此:

- $\min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{u}\} > \mathrm{non}(\mathcal{E})$ 在 Cohen 模型中成立。
- $\min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{u}\} \leq \mathfrak{u} < \mathfrak{s} \leq \mathrm{non}(\mathcal{E})$ 在 Blass-Shelah模型中成立（[BS87]）。（或者：$\min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{u}\} \leq \mathfrak{d} < \mathrm{non}(\mathcal{E})$ 在 Shelah 构造的模型中成立（ [She92]；另见[Bre95，第 3.4 节，定理 1]，，容易看出 $\mathfrak{e}_{ubd} \leq \mathfrak{e}_{fin} = \mathfrak{e}_2 \leq \mathrm{non}(\mathcal{E})$ 。）
- $\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}(\mathfrak{pr})\} \geq \mathfrak{b} > \mathrm{cov}(\mathcal{E})$ 在 Laver 模型中成立。
- $\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}(\mathfrak{pr})\} \leq \mathfrak{d} < \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{E})$ 在随机模型中成立。

5. 相容性结果

在本节中，我们研究与σ-理想 $M_{\mathscr{I}}$ 和 $K_{\mathscr{I}}$相关的基数不变量的相容性结果。最后，我们将在定理 D 中构造一个 Cichoń 最大值的模型。

5.1. 强迫理论。 我们先列出关系系统的必要事实，以及一些将用于证明相容性结果的保性质定理。

定义 5.1。 三元组$\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ 称为一个关系系统，如果 X和 Y是非空集合，且 $\sqsubset$ 是从 X 到 Y的关系。 X 中的元素称为挑战， Y中的元素称为响应。如果 $x \sqsubset y$，我们称 x 被 y 满足。

- 子集 $F \subseteq X$ 是**R**-无界的，如果没有响应能够满足 F中的所有挑战，即 $\neg\exists y \in Y\ \forall x \in F\, (x \sqsubset y)$。
- 子集 $F \subseteq Y$ 若满足以下条件，则称为**R**-支配的： 每个挑战都能由F中的某个响应应对，即 $\forall x \in X\ \exists y \in F\, (x \sqsubset y)$。
- 我们称**实数集** 是非平凡的，如果 X 是**实数集**-无界的，并且 Y 是**实数集**-支配的。

[6]根据定义， $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{s}(\mathfrak{pr})$，但尚不清楚它是否能与 $\mathfrak{s}$区分开来。

- 现引入与**实数集** 相关的两个基数不变量:

$$\mathfrak{b}(\mathbf{R}) = \min\{|F|\colon F \subseteq X \text{ is } \mathbf{R}\text{-unbounded}\},$$
$$\mathfrak{d}(\mathbf{R}) = \min\{|F|\colon F \subseteq Y \text{ is } \mathbf{R}\text{-dominating}\}.$$

下文中，我们始终假设关系系统是非平凡的。

定义 5.2。 设$\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset\rangle$是一个关系系统。$R$ 的对偶 是关系系统$\mathbf{R}^\perp := \langle Y, X, \sqsubset^\perp\rangle$，其中 $y \sqsubset^\perp x$ 当且仅当 $\neg(x \sqsubset y)$。

定义 5.3。 设$\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset\rangle, \mathbf{R}' = \langle X', Y', \sqsubset'\rangle$是两个关系系统。若$(\Phi_-, \Phi_+) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$，且 $\Phi_-\colon X \to X'$和$\Phi_+\colon Y' \to Y$是满足以下条件的函数，则称其为从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}'$的图基连接

$$\forall x \in X\ \forall y' \in Y'\ \Phi_-(x) \sqsubset' y' \Rightarrow x \sqsubset \Phi_+(y').$$

若存在从$\mathbf{R}$ 到$\mathbf{R}'$ 的图基连接，我们记$\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{R}'$，并称 $\preceq_T$ 为图基序。图基等价定义为:
$\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{R}' \wedge$当且仅当$\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{R}' \wedge \mathbf{R}' \preceq_T \mathbf{R}$。

事实 5.4. 设 $\mathbf{R}$,$\mathbf{R}'$ 是关系系统。

(1) $R \preceq_T R'$ 蕴含 $(R')^\perp \preceq_T R^\perp$。*(2)* $R \preceq_T R'$ 蕴含 $\mathfrak{b}(R') \leq \mathfrak{b}$ *(*R*)* 且 $\mathfrak{d}(R) \leq \mathfrak{d}(R')$。*(3)* $\mathfrak{b}(R^\perp) = \mathfrak{d}(R)$ 且 $\mathfrak{d}(R^\perp) = \mathfrak{b}(R)$。

我们将列出 [CM22], 中的几个基本引理，阐明图基连接在强迫 Cichoń 最大值中的作用。

定义 5.5. 对于集合 X上的理想 I，我们定义两个关系系统 :

$$\bar{I} = \langle I, I, \subseteq\rangle$$
$$C_I = \langle X, I, \in\rangle.$$

我们用 $\mathbf{R} \preceq_T I$ 表示 $\mathbf{R} \preceq_T I$（对 $\succeq_T$ 和 $\cong_T$ 也同样处理）。注意，我们有
$\mathfrak{b}(I) = \mathsf{add}(I)$ $\mathfrak{d}(I) = \mathsf{cof}(I)$，且 $\mathfrak{b}(C_I) = \mathsf{non}(I)$ $\mathfrak{d}(C_I) = \mathsf{cov}(I)$。

在本节中， θ 始终是一个正则不可数基数。

事实 5.6。 设 A 是一个大小为 $\geq \theta$ 的集合。此外，设 $\mathbf{R}$ 是一个关系系统。

(1) 如果 $\mathbf{R} \preceq_T C_{[A]^{<\theta}}$，那么 $\theta \leq \mathfrak{b}(\mathbf{R})$ 以及 $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) \leq |A|$。

(2) 如果 $C_{[A]^{<\theta}} \preceq_T \mathbf{R}$，那么 $\mathfrak{b}(\mathbf{R}) \leq \theta$ 以及 $|A| \leq \mathfrak{d}(\mathbf{R})$。

在第 5.3 节中，要使用子模型方法从定理 5.60 得到定理 5.61，“$\mathbf{R} \cong_T C_{[A]^{<\theta}}$”并不可行，但“$\mathbf{R} \cong_T [A]^{<\theta}$”可行（见 [GKMS22]）。下面的事实给出了一个蕴含 $C_{[A]^{<\theta}} \cong_T [A]^{<\theta}$ 的充分条件。

事实 5.7 ([CM22，引理 1。15])。 如果 A 是一个满足 $|A|^{<\theta} = |A|$ 的集合，那么 $C_{[A]^{<\theta}} \cong_T [A]^{<\theta}$。

事实 5.8 ([CM22，引理 2。11])。 设 A 是一个大小为 $\geq \theta$的集合。每个可数链条件偏序集都会强迫 $[A]^{<\theta} \cong_T [A]^{<\theta} \cap V$和 $C_{[A]^{<\theta}} \cong_T C_{[A]^{<\theta}} \cap V$。此外，它还会强迫 $\mathfrak{x}([A]^{<\theta}) = \mathfrak{x}^V([A]^{<\theta})$，其中 $\mathfrak{x}$ 表示“add”、“cov”、“non”或“cof”。

以下事实将用于在第 5.3 节中进行的强迫迭代期间，保持 Cichoń 图中的若干基数不变量较小。

事实 5.9 ([Yam25，推论 2.16，也见例 2。15])。 设 $\mathbb{P}$ 是一个长度为 $\gamma \geq \theta$的可数链条件偏序集的有限支撑迭代。

(1) 假设每个迭代因子都是以下之一:

- 大小为 $< \theta$,

- 随机强迫的子代数，或
- σ-中心。于是，$\mathbb{P}$ 强制 $C_{[\gamma]^{<\theta}} \preceq_T \mathcal{N}$，特别是$\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \theta$。(2) 假设每个迭代因子要么是：
  - 大小为 $<\theta$，要么是
  - σ-中心。于是，$\mathbb{P}$ 强制 $C_{[\gamma]^{<\theta}} \preceq_T C_{\mathcal{N}}^{\perp}$，特别是$\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \theta$。(3) 假设每个迭代因子都是：
    - 大小为 $<\theta$。于是，$\mathbb{P}$ 强制 $C_{[\gamma]^{<\theta}} \preceq_T C_{\mathcal{M}}$，特别是 $\mathrm{non}(\mathcal{M}) \leq \theta$.

我们引入与 $\mathrm{non}(M_{\mathscr{I}})$、$\mathrm{non}(K_{\mathscr{I}})$ 及其对偶相关的关系系统：

定义 5.10。对于可数集 X上的理想 $\mathscr{I}$，我们定义以下关系系统：

- $\mathbf{M}_{\mathscr{I}} := \langle X^{\omega}, \mathscr{I}^{(X^{<\omega})}, \lhd^* \rangle$，其中 $x \lhd^* \phi :\Leftrightarrow \forall^{\infty} n < \omega\ x(n) \in \phi(x\restriction n)$。
- $\mathbf{K}_{\mathscr{I}} := \langle X^{\omega}, \mathscr{I}^{\omega}, \in^* \rangle$，其中 $x \in^* \phi :\Leftrightarrow \forall^{\infty} n < \omega\ x(n) \in \phi(n)$。

注意，$\mathfrak{b}(\mathbf{M}_{\mathscr{I}}) = \mathrm{non}(M_{\mathscr{I}})$，$\mathfrak{d}(\mathbf{M}_{\mathscr{I}}) = \mathrm{cov}(M_{\mathscr{I}})$，$\mathfrak{b}(\mathbf{K}_{\mathscr{I}}) = \mathrm{non}(K_{\mathscr{I}})$，$\mathfrak{d}(\mathbf{K}_{\mathscr{I}}) = \mathrm{cov}(K_{\mathscr{I}})$。

我们将使用 [CM19], 中提出的保留理论，该理论是 [JS90] 和 [Bre91] 中经典保留理论的概括。

定义 5.11（[CM19，定义 4.1]）。关系系统 $\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ 称为波兰关系系统，如果满足以下条件：

(1) X 是一个完美波兰空间。(2) Y 是波兰空间 Z的解析子集。(3) $\sqsubset = \bigcup_{n<\omega} \sqsubset_n$ 对于某个由闭子集 $n < \omega\rangle : X \times Z$ 组成的（$\subseteq$-）递增序列 $\langle \sqsubset_n$，使得对于任意 $n < \omega$和任意 $y \in Y$，$\{x \in X : x \sqsubset_n y\}$ 都是 X的闭处处稠密子集。

处理波兰关系系统时，我们会根据所处的模型来解释它。

定义 5.12 ([JS90]**)**。设 **实数集** $= \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ 是一个波兰关系系统。若对于任意属于 Y的元素的 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{y}$，都存在一个非空集合 $Y_0 \subseteq Y$，其大小为 $<\theta$，使得对于任意 $x \in X$，若没有任何 $y \in Y_0$ 与 x 相交，则 $\mathbb{P}$ 迫使 x 与 $\dot{y}$不相交，那么偏序集 $\mathbb{P}$称为 θ-**实数集**-良好的。若 $\theta = \aleph_1$，则我们说 **"实数集**-良好的"，而不说"$\aleph_1$-**实数集**-良好的"。

事实 5.13 ([Mej13，引理 4], [BJ95，定理 6.4。7])。设**实数集** $= \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ 是一个波兰关系系统。任何大小为 $<\theta$ 的偏序集都是 θ-**实数集**-良好的。特别地，科恩强迫是**实数集**-良好的。

事实 5.14 ([JS90], [CM19，推论 4。13], [BCM25，推论 4。10])。设**实数集** $= \langle X, Y, \sqsubset \rangle$是一个波兰关系系统。那么，任意有限支撑迭代的可数链条件 θ-**实数集**-良偏序集都是θ-**实数集**-良的。

下面将说明**实数集**-良性如何有助于控制与**实数集**相关的基数不变量。

事实 5.15 ([CM22，引理 2。15], [BCM25，定理 4。11])。设 **实数集** $= \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ 是一个波兰关系系统，且 θ 是一个不可数正则基数。设 $\mathbb{P}$ 是长度为 $\gamma \geq \theta$的非平凡可数链条件 θ-**实数集**-好的偏序集的有限支撑迭代。那么 $\mathbb{P}$ 强迫 $C_{[\gamma]^{<\theta}} \preceq_T$ **实数集**。

我们需要针对两个特定波兰关系系统的良好性结果。其中一个与第 4.2.1 节讨论的常数逃避数/预测数有关，另一个与通常的有界数/支配数有关。回顾定义 4.18 中引入的概念。

定义 5.16. 令 $k \geq 2$。

$$\mathbf{CPR}_2(k) \coloneqq \langle 2^\omega, \mathrm{Pred}_2, \sqsubset^{\mathrm{pc},k} \rangle.$$
$$\mathbf{CPR}_2 \coloneqq \langle 2^\omega, \mathrm{Pred}_2, \sqsubset^{\mathrm{pc}} \rangle.$$

这些都是波兰关系系统。另外，请注意，$\mathfrak{b}(\mathbf{CPR}_2(k)) = \mathfrak{e}_2^{\mathrm{const}}(k)$，$\mathfrak{d}(\mathbf{CPR}_2(k)) = \mathfrak{v}_2^{\mathrm{const}}(k)$，$\mathfrak{b}(\mathbf{CPR}_2) = \mathfrak{e}_2^{\mathrm{const}}$以及 $\mathfrak{b}(\mathbf{CPR}_2) = \mathfrak{v}_2^{\mathrm{const}}$。

Brendle 和 Shelah 在 $\mu = \omega$ 的情况下证明了以下引理，但他们的证明很容易推广。

引理 5.17 ([BS03], 另见 [CR25, 引理 5。29])。设 $2 \leq k < \omega$ 和 μ 为无限基数。那么，每个 μ-2^k-连通的[7] 偏序集都是 μ^+-$\mathbf{CPR}_2(k)$-优良的。

此引理可如下推出 $\mathbf{CPR}_2$-优良性：

推论 5.18. 假设 μ 是无限基数，且偏序集 $\mathbb{P}$ 对任意 $l < \omega$ 都是 μ-l-连通的。那么 $\mathbb{P}$ 是 μ^+-$\mathbf{CPR}_2$- 优良的。

证明。设 $\dot{\pi}$ 是 Pred_2中一个成员的 $\mathbb{P}$-名称。对每个 $k \geq 2$，由引理 5.17 可知，由于 $\mathbb{P}$ 是 μ-2^k-相连的，存在一个大小为 $\leq \mu$、由 $\Pi(k) \subseteq \mathrm{Pred}_2$ 诱导的集合。为说明 $\Pi \coloneqq \bigcup_{k\geq 2} \Pi(k)$ 是 $\mathbb{P}$ 为 μ^+-$\mathbf{CPR}_2$-良好的见证，取 $x \in 2^\omega$，使得对任意 $\pi \in \Pi$，都有 $\neg(x \sqsubset^{\mathrm{pc}} \pi)$。反设对某个 $p \in \mathbb{P}$，有 $p \Vdash x \sqsubset^{\mathrm{pc}} \dot{\pi}$。那么存在 $q \leq p$ 和 $k \geq 2$，使得 $q \Vdash x \sqsubset^{\mathrm{pc},k} \dot{\pi}$，这与 $\Pi(k)$ 是 $\mathbb{P}$ 为 μ^+-$\mathbf{CPR}_2(k)$-良好的见证相矛盾。□

现在我们为 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{d}$引入关系系统。

定义 5.19。定义关系系统 $\mathbf{D} \coloneqq \langle \omega^\omega, \omega^\omega, \leq^* \rangle$。注意，这是一个波兰关系系统，并且 $\mathfrak{b}(\mathbf{D}) = \mathfrak{b}, \mathfrak{d}(\mathbf{D}) = \mathfrak{d}$。

为了处理**D**-优良性，我们将使用***Fr***-极限的概念，该概念由 Mejía[Mej19]引入。

定义 5.20. 令 $\mathbb{P}$ 为一个偏序集。

(1) 对于一个可数序列 $\bar{p} = \langle p_m : m < \omega \rangle \in \mathbb{P}^\omega$，我们如下定义 $W(\bar{p})$，将其作为该序列 $\bar{p}$ 的指标集的 $\mathbb{P}$- 名称：

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{W}(\bar{p}) \coloneqq \{m < \omega : p_m \in \dot{G}\}$$

其中 G 表示泛滤子的典范 $\mathbb{P}$-名称。

(2) $Q \subseteq \mathbb{P}$ 若存在一个函数 $\lim : Q^\omega \to \mathbb{P}$，使得对于任意可数序列 $\bar{q} \in Q^\omega$，则称其为 ***Fr***-相连。

$$\lim \bar{q} \Vdash |\dot{W}(\bar{q})| = \omega. \tag{5.1}$$

此外，若 $\mathrm{ran}(\lim) \subseteq Q$，则称 Q 为闭 Fr-链接。

(3) 对于无限基数 μ，若 $\mathbb{P}$ 是由 μ 个（闭）Fr-相连分量的并，则称其为 μ-（闭）***Fr***-相连。当 $\mu = \aleph_0$ 时，按惯例改用 σ。对于不可数的 μ，以同样方式定义 $< \mu$-（闭）Fr-连结性。

我们常说“$\mathbb{P}$ 具有（闭）Fr-极限”，而不说“$\mathbb{P}$ 是 σ-（闭）Fr-相连”。

[7] 对于 $n \geq 2$，偏序集 $\mathbb{P}$ 的子集 Q 若任意 n-多个 Q 中的条件都有一个公共扩展，则称其为 n-相连。$\mathbb{P}$ 若它是 μ-多个 n-相连分量的并，则称其为 μ-n-相连。

引理 5.21。 每个偏序集 $\mathbb{P}$ 都是闭$|\mathbb{P}|$-*Fr*-相连的。特别地，科恩强迫 $\mathbb{C}$ 具有闭 *Fr*-极限。

事实 5.22 ([Mej19])。 对任意无限基数 μ，任何 μ-*Fr*-相连偏序集都是 μ^+-**D**-好的。特别地，对任意不可数基数 μ，任何 $<\mu$-*Fr*-相连偏序集都是 μ-**D**-好的。

现在我们将介绍一种利用（非主）超滤子定义的更强性质，该性质由[GMS16], 提出，并将在第 5.3 节中用于构造我们所需的 Cichoń 最大值模型。

定义 5.23。 设 D 是一个超滤子，$\mathbb{P}$ 是一个偏序集。

(1) 子集 $Q \subseteq \mathbb{P}$ 是 D-*lim-linked* 的，若存在一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{D}'$，它是扩张 D 的超滤子，以及一个函数 $\lim^D$: $Q^\omega \to \mathbb{P}$，使得对于任意可数序列$\bar{q} \in Q^\omega$,

$$\lim^D \bar{q} \Vdash \dot{W}(\bar{q}) \in \dot{D}'. \tag{5.2}$$

此外，若 ran($\lim^D$) $\subseteq Q$，则称 Q 为闭D-*lim-linked*。

(2) 子集 $Q \subseteq \mathbb{P}$ 是（闭）*UF-lim-linked* 的，若它对任意超滤子 D 都是（闭）D-lim-linked 的。(3) 对于一个无限基数 μ，若 $\mathbb{P}$ 是 μ 个（闭）UF-lim-linked 分支的并，则称其为 μ-（闭）*UF-lim-linked*。当 $\mu = \aleph_0$ 时，按惯例我们改用 σ。对于不可数的 μ，以相同方式定义 $<\mu$-（闭）UF-lim-linked 性质。

We 通常会说“$\mathbb{P}$ 具有（闭）UF-极限”，而不是“$\mathbb{P}$ 是 σ-(闭)UF-极限相连的”。 .

第四位作者给出的以下关于 D-极限相连性的无强迫刻画将会很有用。

引理 5.24 ([Yam25，引理 3。28])。 设 D 是一个超滤子，$\mathbb{P}$ 是一个偏序集，$Q \subseteq \mathbb{P}$，极限^D: $Q^\omega \to \mathbb{P}$。则以下条件等价:

(1) 极限^D 见证 Q是 D-极限相连的。(2)

极限^D 对所有 $k < \omega$都满足$(\star)_k$，其中

$(\star)_k$: “给定 $\bar{q}^j = \langle q^j_m : m < \omega\rangle \in Q^\omega$，对于 $j < k$ 以及对所有 $j < k$成立的 $r \leq$ 极限$^D \bar{q}^j$，那么 $\{m < \omega : r$ 以及所有 q^j_m 对于 $j < k$ 都有一个公共扩展$\} \in D$”。

这一刻画对于证明 Fr-连结性也很有用:

引理 5.25。 设 D 为一个超滤子，$\mathbb{P}$ 为一个偏序集，$Q \subseteq \mathbb{P}$ 且 极限^D: $Q^\omega \to \mathbb{P}$。如果极限 ^{D} 满足引理 *5.24* 中的 $(\star)_1$，那么极限 ^{D} 见证了 Q 是 *Fr*- 相连的。

证明。 由 $(\star)_1$ 且由于 D 是非主的,

如果 $\bar{q} = \langle q_m : m < \omega\rangle \in Q^\omega$ 且 $r \leq$ 极限$^D \bar{q}$，那么我们有 $\exists^\infty m < \omega\ \exists s \leq r$, q_m.因此 极限$^D \bar{q} \Vdash \exists^\infty m < \omega\ q_m \in \dot{G}$。 □

我们将使用闭 Fr-连结性来控制 non($M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}$) 和 覆盖数($M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}$) 的值，而不是借助良好性性质，而是直接使用闭 Fr-极限（引理 5.40）。为此，我们构造一个 $<\kappa$-闭 Fr-相连强迫的有限支撑迭代。形式化处理基于 [Mej19], [CGHY24]。

定义 5.26。 令 κ 为不可数正则基数。

- 一个有限支撑迭代 $\mathbb{P}_\gamma = \langle(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi) : \xi < \gamma\rangle$ 的 ccc 强迫是一个 $<\kappa$-闭的-带见证的 *Fr*-迭代 $\langle\theta_\xi : \xi < \gamma\rangle$ 且 $\langle Q_{\xi,\zeta} : \zeta < \theta_\xi, \xi < \gamma\rangle$ 如果对于任意 $\xi < \gamma$,θ_ξ 是一个基数 $< \kappa$，并且 $\langle Q_{\xi,\zeta} : \zeta < \theta_\xi\rangle$ 是满足以下条件的 $\mathbb{P}_\xi$-名称:

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \dot{Q}_{\xi,\zeta} \subseteq \dot{\mathbb{Q}}_\xi \text{ is closed-Fr-linked for } \zeta < \theta_\xi \text{ and } \bigcup_{\zeta<\theta_\xi} \dot{Q}_{\xi,\zeta} = \dot{\mathbb{Q}}_\xi.$$

- 如果对于每个 $\xi \in \mathrm{dom}(p)$，都存在这样的 $\zeta_\xi < \theta_\xi$，使得 $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} p(\xi) \in Q_{\xi,\zeta_\xi}$，那么条件 $p \in \mathbb{P}_\gamma$ 就是已确定的。注意，稠密的已确定条件有很多（通过对 γ应用归纳法证明）。

闭 -Fr-极限适用于迭代条件 $\mathbb{P}_\gamma$，其定义针对“精化”序列 :

定义 5.27. 设 $\mathbb{P}_\gamma$ 是一个 $<\kappa$-闭 Fr 迭代，δ 是一个序数。我们称$\bar{p} = \langle p_m : m < \delta\rangle \in (\mathbb{P}_\gamma)^\delta$ 为一个一致的 Δ-系统，如果：

(1) 每个 p_m 都是确定的，其见证为 $\langle \zeta^m_\xi : \xi \in \mathrm{dom}(p_m)\rangle$；(2) 族 $\{\mathrm{dom}(p_m) : m < \delta\}$ 是一个以 ∇为根的 Δ-系统；(3) 存在一个序列 $\langle \zeta^*_\xi : \xi \in \nabla\rangle$，使得对于 $\xi \in \nabla$，对所有 $m < \omega$都有 $\zeta^*_\xi = \zeta^m_\xi$，也就是说，所有 $p_m(\xi)$ 都被迫属于一个共同的闭 Fr-相连分量，其中 $\xi \in \nabla$；(4) 所有 $\mathrm{dom}(p_m)$ 都有 n' 个元素，并且 $\mathrm{dom}(p_m) = \{\alpha_{n,m} : n < n'\}$ 是递增枚举；(5) 存在 $r' \subseteq n'$，使得 $n \in r' \Leftrightarrow \alpha_{n,m} \in \nabla$ 对于 $n < n'$；(6) 对于 $n \in n' \setminus r'$，$\langle \alpha_{n,m} : m < \delta\rangle$ 严格递增。

定义 5.28. 设 $\mathbb{P}_\gamma$ 是一个 $<\kappa$-闭 Fr 迭代，且 $\bar{p} = \langle p_m : m < \omega\rangle \in (\mathbb{P}_\gamma)^\omega$ 是一个以 ∇ 为根的均匀 Δ-系统。我们（归纳地）如下定义 $p^\infty =$ 极限$\bar{p}$：

(1) $\mathrm{dom}(p^\infty) := \nabla$，(2) $p^\infty{\restriction}\xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} p^\infty(\xi) :=$ 极限$\langle p_m(\xi) : m \in W(\bar{p}{\restriction}\xi)\rangle$ 对于 $\xi \in \nabla$，其中 $\bar{p}{\restriction}\xi := \langle p_m{\restriction}\xi : m < \omega\rangle \in (\mathbb{P}_\xi)^\omega$。

要看出第二项是有效的，$W(\bar{p}{\restriction}\xi)$ 必须是无限的，而这确实成立：

引理 5.29 ([Mej19], [CGHY24, 引理 3。6])。设 $\mathbb{P}_\gamma$ 是一个 $<\kappa$-闭 *Fr* 迭代。设$\bar{p} = \langle p_m : m < \omega\rangle \in (\mathbb{P}_\gamma)^\omega$ 是一个均匀 Δ-系统，且 $p^\infty :=$ 极限$\bar{p}$。那么 $p^\infty \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} |W(\bar{p})| = \omega$。

以下是闭性所特有的：

引理 5.30. 设 $\mathbb{P}_\gamma$ 是一个 $<\kappa$-闭 *Fr* 迭代。设 $\bar{p} = \langle p_m : m < \omega\rangle \in (\mathbb{P}_\gamma)^\omega$ 是一个具有定义 *5.27* 中参数的统一 Δ-系统。那么，极限$\bar{p}$ 是确定的，见证为 $\langle \zeta^*_\xi : \xi \in \nabla\rangle$。

证明。这直接来自 $\lim \bar{p}$ 和闭性的定义。 □

5.2. **分离为两个值**。在本小节中，我们研究将基数不变量分离为两个值。

5.2.1. 偏序集 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$ 与 *Fr*-极限。我们在第 4.2 节中看到了 $\mathrm{non}(M_{\not\in})$（以及 $\mathrm{cov}(M_{\not\in})$）与常数逃避（以及预测）数之间的联系。在命题 4.23 中，我们证明了 $\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_{\leq}(2)$，而在命题 4.20 中，我们证明了 $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2) \leq \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}})$，因此 $\max\{\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2)\ \mathfrak{b}\} \leq \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}})$。我们将证明无法证明等式成立。

我们引入强迫概念 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$，它会通过泛型方式添加一个$\mathbf{M}_{\mathcal{ED}}$-支配函数 $\phi_G : (\omega\times\omega)^{<\omega} \to \mathcal{ED}$。

定义 5.31. 偏序集 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$定义如下：其条件为 $p = (\sigma^p,\ s^p,\ n^p,\ F^p)$，其中

- $\sigma^p : (\omega\times\omega)^{<n^p} \to \omega$ 是一个有限部分函数，
- $s^p : \{(u^\frown a,\ v) : (u,\ v) \in (\omega\times\omega)^{<n^p},\ a \in \omega\} \to \omega$ 是一个有限部分函数，
- $n^p \in \omega$
- $F^p \subseteq \omega^\omega$ 是有限的。

序 $q \leq p$ 由下式给出

- $\sigma^q \supseteq \sigma^p$, $s^q \supseteq s^p$, $n^q \geq n^p$ and $F^q \supseteq F^p$,
- $\forall i \in [n^p, n^q)\, \forall x, y \in F^p$, either:
  - $(x{\restriction} i, y{\restriction} i) \in \mathrm{dom}(\sigma^q)$ and $x(i) \leq \sigma^q(x{\restriction} i, y{\restriction} i)$, or
  - $(x{\restriction}(i+1), y{\restriction} i) \in \mathrm{dom}(s^q)$ and $y(i) = s^q(x{\restriction}(i+1), y{\restriction} i)$.

设 $G \subseteq \mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$ 是一个泛滤子。在 $V[G]$, ϕ_G 中：$(\omega \times \omega)^{<\omega} \to \omega \times \omega$ 由 b 给出 y:

$$\phi_G(u, v) := \bigcup_{p \in G} \{(a, b) \in \omega \times \omega : a \leq \sigma^p(u, v) \text{ or } b = s^p(u^\frown a, v)\}.$$

容易证明如下结论。

引理 5.32。

- 对于 $n < \omega$, $\{p : \ n_p \geq n\}$ 是稠密的。因此 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}} \Vdash \mathrm{dom}(\phi_G) = (\omega \times \omega)^{<\omega}$。
- 对于 $(u, v) \in (\omega \times \omega)^{<\omega}$, $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}} \Vdash \forall^\infty n < \omega \ |(\phi_G(u, v))_n| = 1$, 因此 $\mathrm{ran}(\phi_G) \subseteq \mathcal{ED}$。
- 对于 $f, g \in \omega^\omega$, $\{p : \ f, g \in F^p\}$ 是稠密的。因此 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}} \Vdash \forall (f, g) \in (\omega \times \omega)^\omega \cap V$, $(f, g) \in M_{\phi_G}$, 即 $(\omega \times \omega)^\omega \cap V \subseteq M_{\phi_G}$。

$\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$ 是 σ-中心的，且是 σ-Fr-相连的。

引理 5.33。 固定 $n \in \omega$, $\sigma : (\omega \times \omega)^{<n} \to \omega$ 有限部分函数，以及 s: $\{(u^\frown a, v) : (u, v) \in (\omega \times \omega)^{<n}, a \in \omega\} \to \omega$ 有限部分函数。设 $L < \omega$ 和 $\bar{x}^* = \{x^*_l : \ l < L\} \subseteq \omega^n$ ，使得所有 x^*_l 两两不同。那么

$$Q := \{p \in \mathbb{P}^{\mathcal{ED}} : \sigma^p = \sigma, s^p = s, n^p = n, \{x{\restriction} n : x \in F^p\} = \bar{x}^*\}$$

是中心的，且是 *Fr*-相连的。特别地， $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$ 是 σ-中心的，且是 σ-*Fr*-相连的。

证明。 中心性显然。为证明 Q 是 Fr-相连的，取某个超滤子 D，我们将证明 $(\star)_1$ ，如引理 5.25 所示。对于 $\bar{x} = \langle x^m \in \omega^\omega : \ m < \omega \rangle$，定义偏函数 $\bar{x}^\infty$: $\omega \to \omega$ 如下：对于每个 $i < \omega$，如果存在唯一的 $a_i < \omega$ 使得 $\{m < \omega : \ x^i(m) = a_i\} \in D$，则令 $i \in \mathrm{dom}(\bar{x}^\infty)$，且 $\bar{x}^\infty(i) := a_i$。否则令 $i \notin \mathrm{dom}(\bar{x}^\infty)$。

对于 $\bar{q} = \langle q_m = (\sigma, \ s, \ n, \ F_m = \{x^m_l : \ l < L\}) : \ m < \omega \rangle \in Q^\omega$，我们将 $\lim^D \bar{q} := q^\infty := (\sigma^\infty, \ s^\infty, \ n^\infty, \ F^\infty)$ 定义如下：

- $\bar{x}_l := \langle x^m_l : \ m < \omega \rangle$, $A := \{l < k : \mathrm{dom}(\bar{x}^\infty_l) = \omega\}, B := L \setminus A$.
- $F^\infty := \{\bar{x}^\infty_l : \ l \in A\}$。
- 对于 $l \in B$, $n_l := \min(\omega \setminus \mathrm{dom}(\bar{x}^\infty_l))$（因此 $n_l \geq n$）。对于 $l \in A$，为方便起见，令 $n_l := \omega$。
- $n^\infty := n \cup \max\{n_l + 1 : \ l \in B\}$。
- 对于每个 $l \in B$，令 $t_l \in \omega^{n_l}$ 使得

  $$X^l_0 := \{m < \omega : x^m_l {\restriction} n_l = t_l\} \in D.$$

  令 $X_0 := \bigcap_{l \in B} X^l_0 \in D$。
- 对于 $i < \omega$，令

  $$W_i := \{\bar{x}^\infty_l {\restriction} i : l \in A\} \cup \{t_l {\restriction} i : l \in B, i \leq n_l\}.$$

  注意， W_i 是 ω^i 的有限子集。
- 取一个有限部分函数 σ^∞: $(\omega \times \omega)^{<n^p} \to \omega$，使得：
  (1) $\sigma^\infty \supseteq \sigma$。(2) 对于任意 $i \in [n, n^\infty)$ 以及任意 $u \in W_{i+1}$ 和 $v \in W_i$, $(u{\restriction} i, \ v) \in \mathrm{dom}(\sigma^\infty)$ 并且 $u(i) \leq \sigma^\infty(u{\restriction} i, \ v)$。
- $s^\infty := s$。

显然，q^∞ 是一个有效条件，因此只需证明$\mathbf{lim}^D$ 满足（$\star$）$_1$。设 $r \le q^\infty =$（σ^∞，s^∞，n^∞，F^∞）。令 $r :=$（σ^r，s^r，n^r，F^r）。对于 $l \in A$，令

$$X_1^l := \{m < \omega : x_l^m \restriction (n^r + 1) = x_l^\infty \restriction (n^r + 1)\} \in D.$$

令 $X_1 := \bigcap\{X_1^l : l \in A\} \in D$。对于 $l \in B$ 和 $l' < L$，令

$$X_2^{l,l'} := \{m < \omega : (x_l^m \restriction (n_l + 1), x_{l'}^m \restriction n_l) \notin \mathrm{dom}(s^r)\} \in D.$$

设 $X_2 := \bigcap\{X_2^l : l \in B,\ l' < L\} \in D$。对于 $l \in B$ 和 $i > n_l$，令

$$X_3^{l,i} := \{m < \omega : x_l^m \restriction i \notin \mathrm{proj}_1(\mathrm{dom}(\sigma^r)) \cup \mathrm{proj}_2(\mathrm{dom}(\sigma^r))\} \in D,$$

其中 $\mathrm{proj}_1(\mathrm{dom}(\sigma^r)) := \mathrm{dom}(\mathrm{dom}(\sigma^r))$，且 $\mathrm{proj}_2(\mathrm{dom}(\sigma^r)) := \mathrm{ran}(\mathrm{dom}(\sigma^r))$。设 $X_3 := \bigcap\{X_3^{l,i} : l \in B,\ i \in (n_l,\ n^r)\} \in D$。设 $X := X_0 \cap X_1 \cap X_2 \cap X_3 \in D$。

只需证明，对于所有 $m \in X$，q_m 和 r 都相容。固定这样一个 m。注意 $\sigma^r \supseteq \sigma^\infty \supseteq \sigma$ 和 $s^r \supseteq s^\infty \supseteq s$。取一个条件 $q' := (\sigma',\ s',\ n',\ F')$（作为 q_m 和 r的公共扩展），使得：

- $F' := F^r \cup F_m$。
- $n' := n^r$。
- $\sigma' \supseteq \sigma^r$并且，对于所有形如（$u$，$v$）的 $\in (\omega \times \omega)^{<\omega} \setminus \mathrm{dom}(\sigma^r)$，其中$l$，$l' < L$和 $i < n^r$，令（u，v）$\in \mathrm{dom}(\sigma')$，并且：

$$\sigma'(u, v) := \max\{x_{l^*}^m(i) : l^* < L\}. \tag{5.3}$$

注意，这样的（u，v）只有有限多个。

- $s' \supseteq s^r$并且，对于所有形如（$x_l^m \restriction (n_l + 1)$ $x_{l'}^m \restriction n_l$）的（$u'$，$v$）$\in \omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega} \setminus \mathrm{dom}(s^r)$，其中有 $l \in B$ 和 $l' < L$，令（u'，v）$\in \mathrm{dom}(s')$，并且：

$$s'(u', v) := x_{l'}^m(n_l), \tag{5.4}$$

这是可行的，因为所有 x_l^*两两不同。注意，这样的（u'，v）只有有限多个。

根据 X_3 的选择，对于任意 $l \in B, i \in (n_l,\ n^r)$ 和 $l' < L$，有 $(x_l^m \restriction i,\ x_{l'}^m \restriction i)$，$(x_{l'}^m \restriction i,\ x_l^m \restriction i) \notin \mathrm{dom}(\sigma^r)$，因此

$$x_l^m(i) \le \sigma'(x_l^m \restriction i, x_{l'}^m \restriction i) \text{ and } x_{l'}^m(i) \le \sigma'(x_{l'}^m \restriction i, x_l^m \restriction i). \tag{5.5}$$

根据 X_2 的选择，对于任意 $l \in B$ 和 $l' < L$，有 $(x_l^m \restriction (n_l + 1)$ $x_{l'}^m \restriction n_l) \notin \mathrm{dom}(s^r)$，因此

$$x_{l'}^m(n_l) = s'(x_l^m \restriction (n_l + 1), x_{l'}^m \restriction n_l). \tag{5.6}$$

$q' \le r$ 显然成立。为证明 $q' \le q_m$，令 l，$l' < L$ 和 $i \in [n, n')$。我们证明：

$$\text{either } x_l^m(i) \le \sigma'(x_l^m \restriction i, x_{l'}^m \restriction i) \text{ or } x_{l'}^m(i) = s'(x_l^m \restriction (i + 1), x_{l'}^m \restriction i). \tag{5.7}$$

首先假设 l，$l' \in A$。若 $i \in [n, n^\infty)$，根据 X_1的选择，$x_l^m \restriction (i + 1) = \bar{x}_l^\infty \restriction (i + 1) \in W_{i+1}$ 和 $x_{l'}^m \restriction i = \bar{x}_{l'}^\infty \restriction i \in W_i$。因此 $x_l^m(i) \le \sigma^\infty(x_l^m \restriction i,\ x_{l'}^m \restriction i) = \sigma'(x_l^m \restriction i,\ x_{l'}^m \restriction i)$。若$i \in [n^\infty, n^r)$，则由 $r \le q^\infty$ 和 X_1 的选择可得 (5.7)。

因此，我们可以假设 $l \in B$ 或 $l' \in B$。如果 $i \in (n_l,\ n^r)$ 或 $i \in (n_{l'},\ n^r)$，则由 (5.5) 可知结论成立。如果 $i \notin (n_l,\ n^r)$ 且 $i \notin (n_{l'},\ n^r)$，那么特别地有 $i \in [n, n^\infty)$。令$u := x_l^m \restriction (i + 1)$，并令 $v := x_{l'}^m \restriction i$。分三种情况讨论。

(i) 如果 $u \in W_{i+1}$且 $v \in W_i$，那么根据 σ^∞ 的选择，有 $(u \restriction i,\ v) \in \mathrm{dom}(\sigma^\infty)$，并且 $u(i) \le \sigma^\infty(u \restriction i,\ v) = \sigma'(u \restriction i,\ v)$，因此 (5.7) 成立。(ii) 如果 $v \notin W_i$，那么 $l' \in B$ 成立，因为否则根据 X_1 的选择，$v = x_{l'}^m \restriction i = \bar{x}_{l'}^\infty \restriction i \in W_i$。由于 $i \notin (n_{l'},\ n^r)$，我们有 $i \le n_{l'}$。根据 X_0 的选择，$v = x_{l'}^m \restriction i = t_{l'} \restriction i \in W_i$，矛盾。

(iii) 如果 $u \notin W_{i+1}$，理由与前一种情况相同，$l \in B$ 且 $i+1 > n_l$，因为否则我们将得到 $u \in W_{i+1}$。由于 $i \notin (n_l,\ n')$，我们有 $i = n_l$。在这种情况下，根据 (5.6)，$x^m_{l'}(n_l) = s'(x^m_l \restriction (n_l+1)\, x^m_{l'} \restriction n_l)$，因此 (5.7) 成立。

因此，无论如何 (5.7) 都成立，从而 $q' \leq q_m$。 □

Brendle 引入了一种强迫概念 $\mathbb{P}^\omega$，它在 2-常数预测上添加一个泛型预测器：

事实 5.34 ([Bre03])。对于 $2 \leq k < \omega$，存在一个 σ-链偏序集 $\mathbb{P}^\omega$，使得：

$$\Vdash_{\mathbb{P}^\omega} \exists \dot\pi \in \mathrm{Pred}\ \forall x \in \omega^\omega \cap V\ (x \sqsubset^{\mathrm{pc},k} \dot\pi).$$

现在我们证明 $\mathsf{max}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2)\} < \mathsf{non}(M_{\mathcal{ED}})$ 的相容性（以及其对偶）。

定理 5.35。

(1) 给定 $\kappa < \lambda = \lambda^{<\kappa}$ 正则不可数，存在一个可数链条件偏序集，强迫 $\mathfrak{b} = \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2) = \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_2 = \kappa$ 且 $\mathsf{non}(M_{\mathcal{ED}}) = \mathfrak{c} = \lambda$。特别地，$\mathsf{max}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2)\} < \mathsf{non}(M_{\mathcal{ED}})$ 是相容的。(2) 给定 κ 正则不可数且 $\lambda = \lambda^\omega > \kappa$，存在一个可数链条件偏序集，强迫 $\mathsf{cov}(M_{\mathcal{ED}}) = \kappa$ 且 $\mathfrak{d} = \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_2 = \lambda = \mathfrak{c}$。特别地，$\mathsf{cov}(M_{\mathcal{ED}}) < \mathsf{min}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}(2)\}$ 是相容的。证明。(1) 使用记账论证，构造 $\mathbb{P}$ 一个长度为 λ 的有限支撑迭代，其迭代因子为以下之一：(a) $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$，(b) 大小为 $< \kappa$ 的 Hechler 强迫子力迫，或 (c) 大小为 $< \kappa$ 的 $\mathbb{P}^\omega$ 子力迫。使得 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$ 共尾出现，并且所有大小为 $< \kappa$ 、关于 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2)$ 的可能见证都被消除。在 $V^{\mathbb{P}}$-扩张中，显然 $\lambda \leq \mathsf{non}(M_{\mathcal{ED}}) \leq \mathfrak{c}$，且 $\mathfrak{b}, \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2) \geq \kappa$。由引理 5.21 和引理 5.33，每个迭代因子都是 $< \kappa$-Fr- 链的，因此由事实 5.22 可知它是 κ-D良好的。因此，根据事实 5.14，$\mathbb{P}$ 也是 κ-D良好的，于是由事实 5.15 得到 $\mathfrak{b} \leq \kappa$。类似地，由引理 5.33，对于任意 $l < \omega$，每个迭代因子都是 $< \kappa$-l-链的；由推论 5.18，$\mathbb{P}$ 是 κ-CPR$_2$-良好的，因此 $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2) \leq \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}_2 \leq \kappa$。(2) 令 $\mathbb{P}$ 为一个长度为 $\lambda + \kappa$ 的有限支撑迭代，其中前 λ 个迭代因子是科恩强迫，其余的每个迭代因子都是 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$。容易看出，$\mathbb{P}$ 强迫 $\kappa \leq \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathsf{cov}(M_{\mathcal{ED}}) \leq \kappa$ 且 $\mathfrak{c} \leq \lambda$。由于每个迭代因子都是 D良好且 CPR$_2$-良好的，由事实 5.15 可得 $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathfrak{d}, \mathfrak{v}^{\mathrm{const}}_2 \geq \lambda$。

□

5.2.2. 偏序集 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$ 与闭 *Fr*-极限。令 $\langle I_i = [M_i, M_{i+1})\rangle_{i<\omega}$ 为 ω 的区间划分，其中 $|I_i| = i$，并考虑该区间划分上的 $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$。我们引入强迫概念 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$，它会泛型地添加一个 $\mathbf{K}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$-支配函数 $\phi_G\colon \omega \to \mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$。

定义 5.36。强迫概念 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$ 定义如下：

- 条件为 $p = (i,\ k,\ s,\ \varphi) = (i_p,\ k_p,\ s_p,\ \varphi_p)$，其中 $i,\ k < \omega$, $s \in ([M_i]^{\leq k})^{<\omega}$ 且 $\varphi\colon \omega \to [\omega]^{\leq k}$ 满足 $\varphi \restriction |s| = s$。
- 序 $(i',\ k',\ s',\ \varphi') \leq (i,\ k,\ s,\ \varphi)$ 定义如下：$i' \geq i$，$k' \geq k$，$\varphi'(n) \supseteq \varphi(n)$ 对所有 $n < \omega$，$|s'| \geq |s|$ 以及对 $n < |s|$，

$$s'(n) \cap M_i = s(n),\ \text{and} \tag{5.8}$$

$$\text{if } i \leq j < i',\ \text{then } |s'(n) \cap I_j| \leq n. \tag{5.9}$$

- 对于泛滤子 G，定义 ϕ_G： $\omega \to \mathcal{P}(\omega)$ 如下：

$$\phi_G(n) \coloneqq \bigcup \{s_p(n) : p \in G \text{ and } n < |s|\}.$$

很容易看出：

引理 5.37. 以下集合是开稠密的：

(1) 对于 $x \in \omega^\omega$, $\{p : \ x(n) \in \varphi_p(n)$ 对于所有 $n \geq |s_p|\}$,

(2) 对于 $i < \omega$, $\{p : \ i_p \geq i\}$,(3) 对于 $n < \omega$, $\{p :$ $|s_p| \geq n\}$.

由引理 5.37(3)，我们总可以假设 $|s_p| \geq k_p$。由 (5.9) 以及引理 5.37 (1)，可得如下结论：

引理 5.38. 设 G 是一个泛滤子。以下结论在 $V[G]$ 中成立：

(1) $\forall n < \omega \ \forall^\infty i < \omega \ |\phi_G(n) \cap I_i| \leq n$。特别地， $\phi_G(n) \in \mathcal{ED}_{\text{fin}}$.(2) $\forall x \in \omega^\omega \cap V \ \forall^\infty n < \omega \ x(n) \in \phi_G(n)$。换言之， $\omega^\omega \cap V \subseteq K_{\phi_G}$。

$\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\text{fin}}}$ 是 σ-中心的，并且是 σ-Fr-相连的：

引理 5.39。 对于 i、$k < \omega$ 和 $s \in ([M_i]^{\leq k})^{<\omega}$，其中 $|s| \geq k$,

$$Q = \{p \in \mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\text{fin}}} : i_p = i, k_p = k, s_p = s\}$$

是中心 的，并且是闭 *Fr*-相连的。特别地， $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\text{fin}}}$ 是 σ-中心的，并且是 σ-闭 *Fr*-相连 d.

证明。中心性是显然的。为证明引理 5.25 中的 $(\star)_1$，取 ω 上的某个非主超滤子 D，并令 and $\bar{q} = \langle (i, \ k, \ s, \ \varphi_m) \rangle_{m<\omega} \in Q^\omega$。定义 φ_∞： $\omega \to [\omega]^{\leq k}$ 如下：

$$a \in \varphi_\infty(n) :\Leftrightarrow \{m < \omega : a \in \varphi_m(n)\} \in D, \tag{5.10}$$

对于 n, $a < \omega$。令 $\lim^D \bar{q} \coloneqq q_\infty \coloneqq (i, \ k, \ s, \ \varphi_\infty)$（因此 $\text{ran}(\lim^D) \subseteq Q$）。为证明 $(\star)_1$,，假设$q' = (i', \ k', \ s', \ \varphi') \leq q_\infty$。令 $M \coloneqq M_i$ 以及 $M' \coloneqq M_{i'}$。根据 (5.10)，存在 $X \in D$使得：

$$\text{For all } m \in X \text{ and } n \in |s'| \setminus |s|, \ \varphi_m(n) \cap M' = \varphi_\infty(n), \tag{5.11}$$

因为对于这样的 n，由 $q' \leq q_\infty$可知 $\varphi_\infty(n) \subseteq M'$。固定 $m \in X$，我们将定义 q'和 q_m的一个公共扩展 r。定义 ψ： $\omega \to [\omega]^{\leq k'+k}$，使得 $\psi(n) \coloneqq \varphi'(n) \cup \varphi_m(n)$，并且 $t \coloneqq \psi \restriction |s'|$。注意：

$$\text{for } n < |s|, \ t(n) = \varphi'(n) \cup \varphi_m(n) = s'(n) \cup s(n) = s'(n). \tag{5.12}$$

令 $r \coloneqq (i'', \ k' + k, \ t, \ \psi)$，其中 $i'' \geq i'$ 足够大，使得 r 是一个有效条件。要证明$r \leq q'$，只需验证对于 $n < |t|$:

(1) $t(n) \cap M' = s'(n)$，并且 (2) 若 $i' \leq j < i''$，则 $|t(n) \cap I_j| \leq n$。

我们证明 (1)。若 $n < |s|$，由 (5.12) 可得

$$t(n) \cap M' = s'(n) \cap M' = s'(n).$$

若 $n \in |t| \setminus |s|$，由 (5.11) 可得

$$t(n) \cap M' = (\varphi'(n) \cap M') \cup (\varphi_m(n) \cap M') = \varphi'(n) \cup \varphi_\infty(n) = \varphi'(n) = s'(n)$$

由 $\varphi'(n) \supseteq \varphi_\infty(n)$ 可得，而这由 $q' \leq q_\infty$ 推出。

我们证明（2）。若 $n < |s|$，则

$$t(n) \cap I_j = s'(n) \cap I_j = \emptyset$$

根据（5.12）。若 $n \in |t| \setminus |s|$，则

$$t(n) \cap I_j = (\varphi'(n) \cup \varphi_m(n)) \cap I_j = \varphi_m(n) \cap I_j \subseteq \varphi_m(n)$$

大小为 $\leq k \leq |s| \leq n$。

要证明 $r \leq q_m$，只需验证对于 $n < |s|$:

(3) $t(n) \cap M = s(n)$，并且：(4) 若 $i \leq j < i''$，则 $|t(n) \cap I_j| \leq n$。

由 (5.12) 和 $q' \leq q_\infty$，(3) 可由 $t(n) \cap M = s'(n) \cap M = s(n)$ 得出。

为证明 (4)，令 $i \leq j < i''$，并且由 (2) 可假设 $i \leq j < i'$。由 (5.12) 和 $|s'$，$t(n) \cap I_j = s'(n) \cap I_j$ 以及 $n(\cap I_j| \leq n)$ $q' \leq q_\infty$ 可得。

因此，r 扩展了 q' 和 q_m。 □

闭 Fr-极限可以利用科恩实数控制 $\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}})$ 和 $\mathrm{cov}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}})$ 的值:

引理 5.40。设 κ 是一个不可数正则基数，$\mathbb{P}_\gamma$ 是一个 $<\kappa$-闭 *Fr*-迭代，并且前 κ 个迭代因子是科恩强迫。设 $\{\dot{c}_\beta : \beta < \kappa\}$ 是 $\dot{}$ 中作为 $(\omega \times \omega)^\omega$ 元素的新增科恩实数。那么，对任意函数 $(\omega \times \omega)^{<\omega} \to$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想 的 $\mathbb{P}_\gamma$-名称 ϕ，$\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} |\{\beta < \kappa : \dot{c}_\beta \in M_{\dot{\phi}}\}| < \kappa$。

证明。对于 $x \in (\omega \times \omega)^\omega$, ϕ: $(\omega \times \omega)^{<\omega} \to$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想和 $n < \omega$, 令 $x \in^*_n \phi$ 表示 $\forall m \geq n\ x(m) \in \phi(x\restriction m)$。反设存在一个条件$p \in \mathbb{P}_\gamma$，使得 $p \Vdash |\{\beta < \kappa : \dot{c}_\beta \in M_{\dot{\phi}}\}| = \kappa$。对每个 $i < \kappa$，归纳地选取 $p_i \leq p$,$\beta_i < \lambda$ 和 $n_i < \omega$，使得 $\beta_i \notin \{\beta_{i'} : i' < i\}$ 且 $p_i \Vdash \dot{c}_{\beta_i} \in^*_{n_i} \phi$。通过扩展并稀疏化，我们可以假设:

(1) $\beta_i \in \mathrm{dom}(p_i)$。（通过扩展 p_i。）(2) $\{p_i : i < \kappa\}$ 构成一个以 ∇ 为根的统一 Δ-系统。(3) 所有 n_i 都等于 n^*。

(4) 所有 $p_i(\beta_i)$ 都是相同的科恩条件 $s \in (\omega \times \omega)^{<\omega}$。(5) $|s| = n^*$。（通过扩展 s 或增大 n^*。）

特别地，我们有:

$$\text{For each } i < \kappa, p_i \text{ forces } \dot{c}_{\beta_i}\restriction n^* = s \text{ and } \dot{c}_{\beta_i} \in^*_{n^*} \dot{\phi}. \tag{5.13}$$

注意，由于所有 β_i 都各不相同，对于 $i < \kappa$ 有 $\beta_i \notin \nabla$。取前 ω 个 p_i，并固定一个双射 i: $\omega \times \omega \to \omega$。对于每个 $(a, b) \in \omega \times \omega$，通过扩展第 $\beta_{i(a,b)}$ 个位置 $q_\sigma(\beta_{i(a,b)}) := s^\frown (a, b)$，定义 $q_{a,b} \leq p_{i(a,b)}$。根据 (5.13)，对于每个 $(a, b) \in \omega \times\omega$, $q_{a,b}$ 强制 $\dot{c}_{\beta_{i(a,b)}}\restriction(n^* + 1) = s^\frown (a, b)$ 以及 $\dot{c}_{\beta_{i(a,b)}} \in^*_{n^*} \phi$，因此

$$q_{a,b} \Vdash \dot{c}_{\beta_{i(a,b)}}(n^*) = (a, b) \in \dot{\phi}(s) = \dot{\phi}(\dot{c}_{\beta_{i(a,b)}}\restriction n^*). \tag{5.14}$$

固定 $a < \omega$，并考虑序列 $\bar{q}_a := \langle q_{a,\,b} : b < \omega\rangle$。定义 $q_{a,\,b}$时，我们改变了超出 ∇ 的第 $\beta_{i(a,b)}$ 个位置，因此 $\{q_{a,b} : b < \omega\}$ 构成一个以 ∇ 为根的统一Δ-系统。于是我们可以取它们的极限 $q^\infty_a := \lim \bar{q}_a$。由 (5.14) 和引理 5.29，我们得到:

$$q^\infty_a \Vdash \exists^\infty b < \omega\ (a, b) \in \dot{\phi}(s). \tag{5.15}$$

解除对 a 的固定，并考虑序列 $\bar{q} := \langle q^\infty_a : a < \omega\rangle$。根据引理 5.30，所有 q^∞_a 的定义域都是 ∇，并且它们构成一个以 ∇ 为根的统一 Δ-系统。取它们的极限 $q^\infty := \lim \bar{q}$。由 (5.15),

$$q^\infty \Vdash \exists^\infty a < \omega \exists^\infty b < \omega\ (a, b) \in \dot{\phi}(s), \tag{5.16}$$

这与 $\phi(s) \in$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想矛盾。 □

现在我们证明 $\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) < \mathrm{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$ 的相容性（及其对偶）.

定理 5.41。(1) 给定 $\kappa < \lambda = \lambda^{<\kappa}$ 正则不可数，存在一个可数链条件偏序集，强迫 $\mathfrak{b} = \mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \kappa$ 且 $\mathrm{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) = \mathfrak{c} = \lambda$。特别地，$\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) < \mathrm{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$是相容的。(2)给定 κ 正则不可数和 $\lambda = \lambda^{\omega} > \kappa$，存在一个可数链条件偏序集，强迫$\mathrm{cov}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) = \kappa$ 且 $\mathrm{cov}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) = \lambda = \mathfrak{c}$。

证明。(1) 使用记账论证，构造 $\mathbb{P}$ 一个 κ-闭 Fr 迭代，使得前 κ 个迭代因子是科恩强迫，其余部分是 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$ 的组合，或者是大小为 $< \kappa$ 的 Hechler 强迫的子力迫，从而消灭所有大小为 $< \kappa$ 的 $\mathfrak{b}$ 见证；根据引理 5.21 和引理 5.39，这是可能的。容易看出，$\mathbb{P}_\gamma$ 强迫 $\mathrm{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) = \mathfrak{c} = \lambda$ 且 $\mathfrak{b} \geq \kappa$。引理 5.40 表明，前 κ 个科恩实数见证了 $\mathrm{non}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) \leq \kappa$。

(2) 令 $\gamma = \lambda + \kappa$ 和 $\mathbb{P}_\gamma$ 为一个 $< \aleph_1$-闭 Fr 迭代，使得前 λ 个迭代因子是科恩强迫，其余每个都是 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$；根据引理 5.21 和引理 5.39，这是可能的。容易看出，$\mathbb{P}$ 强迫 $\kappa \leq \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{cov}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) = \kappa$ 和 $\mathfrak{c} \leq \lambda$。为了证明 $\mathrm{cov}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) \geq \lambda$，令 $\mu < \lambda$ 为一个无限基数，且 $\{\phi_\alpha : \alpha < \mu\}$ 为函数 $(\omega \times \omega)^{<\omega} \to \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$ 的 $\mathbb{P}_\gamma$-名称。令$\{\dot{c}_\beta : \beta < \lambda\}$ 为在前 λ 个阶段添加的、属于 $(\omega \times \omega)^\omega$ 的科恩实数。根据引理 5.40，$\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} |\bigcup_{\alpha<\mu}\{\beta < \lambda : \dot{c}_\beta \in M_{\dot{\phi}_\alpha}\}| \leq \mu < \lambda$，这意味着$\{M_{\dot{\phi}_\alpha} : \alpha < \mu\}$ 无法覆盖 $(\omega \times \omega)^\omega$。因此 $\mathrm{cov}(M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}) \geq \lambda$。

□

回想一下，根据命题 4.21，对于任意递增函数 $b \in \omega^\omega$，都有 $\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}_b^{\mathrm{const}}(2)\} \leq \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$。通过与前一定理类似的论证可知，无法证明等式成立。此外，我们还得到以下更强的定理：

定理 5.42. (1) 给定正则不可数 $\kappa < \lambda = \lambda^{<\kappa}$，存在一个可数链条件偏序集，使得强迫后有 $\mathfrak{b} = \mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2) = \mathfrak{e}_2^{\mathrm{const}} = \kappa$ 且 $\mathrm{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) = \mathfrak{c} = \lambda$。特别地，对于任意递增函数 $b \in \omega^\omega$，$\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}_b^{\mathrm{const}}(2)\} < \mathrm{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) = \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$ 是相容的。(2) 给定正则不可数 κ 和 $\lambda = \lambda^\omega > \kappa$，存在一个可数链条件偏序集，使得强迫后有 $\mathrm{cov}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) = \kappa$ 且 $\mathfrak{d} = \mathfrak{v}_2^{\mathrm{const}} = \lambda = \mathfrak{c}$。特别地，对于任意递增函数$b \in \omega^\omega$，$\mathrm{cov}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) = \mathrm{cov}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) < \max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{v}_b^{\mathrm{const}}(2)\}$ 是相容的。证明。(1) 注意，对于任意递增函数 $b \in \omega^\omega$，都有 $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2) \leq \mathfrak{e}_b^{\mathrm{const}}(2) \leq \mathfrak{e}_2^{\mathrm{const}}(2) \leq \mathfrak{e}_2^{\mathrm{const}}$。进行与定理 5.41 (1) 中相同的迭代 $\mathbb{P}_\gamma$，但在其中交错加入大小为 $< \kappa$ 的 $\mathbb{P}^\omega$ 子强迫（见事实 5.34）。类似地，$\mathbb{P}_\gamma$ 强迫得到 $\mathfrak{b} = \kappa$、$\mathrm{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) = \mathfrak{c} = \lambda$，以及 $\mathfrak{e}^{\mathrm{const}}(2) \geq \kappa$。出于与定理 5.35 相同的原因，$\mathbb{P}_\gamma$ 强迫得到 $\mathfrak{e}_2^{\mathrm{const}} \leq \kappa$。(2) 使用定理 5.41 (2) 中相同的 $\mathbb{P}_\gamma$。出于与定理 5.35 相同的原因，$\mathbb{P}_\gamma$ 强迫得到 $\mathfrak{v}_2^{\mathrm{const}} = \lambda$，证毕。

□

我们不知道 $\mathrm{non}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) < \mathrm{non}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$ 和 $\mathrm{cov}(K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}) > \mathrm{cov}(M_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}})$ 是否相容。

5.3. **扩展 Cichoń 最大值**。在本节中，我们按照定理 D 的描述构造 Cichoń 最大值的一个模型。沿用 [GKS19],[GKMS22], 中构造 Cichoń 最大值的原始模型的方法，我们将先分离图表左侧（图 4），再分离右侧（图 5）。右侧的分离

只需应用 [GKMS22] 中的方法即可得到（ [GKS19] 中的方法需要大基数），因此我们的核心目标是分离图表左侧，以得到图 4。

让我们回顾 Goldstern–Mejía–Shelah [GMS16] 对（未扩展的）Cichoń 图左侧的分离。主要工作是在强迫迭代过程中保持有界数 $\mathfrak{b}$ 较小，因为用于增大左侧基数不变量的朴素记账迭代只能保证其他数较小，却无法保证 $\mathfrak{b}$较小。正如我们在第5.2节中所见，Fr-极限能使 $\mathfrak{b}$保持较小，但这些极限在这里行不通。在记账迭代中，会迭代特定强迫概念的子强迫；然而，具有 Fr-极限的偏序集的子强迫未必具有 Fr-极限，因此无法保证 $\mathfrak{b}$ 较小。不过，我们可以采用更强的极限——*UF*-极限来克服这个问题。利用这种 UF-极限方法，我们可以在保持 $\mathfrak{b}$较小的同时选取合适的子强迫（详情见 [GMS16] ）。因此，这里需要 UF-极限，而不能使用 Fr-极限。

让我们回到扩展的 Cichoń 图（图 4）左侧的分离问题。主要工作是在强迫迭代过程中保持有界数 $\mathfrak{b}$ 和 non($M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}$) 较小（已知存在一种记作 $\mathbb{LE}$ 的强迫概念，能在迭代过程中保持 non($\mathcal{E}$) 较小，见 [Yam24]）。虽然我们知道 Fr-极限和闭 Fr-极限分别能保持 $\mathfrak{b}$ 和 non($M_{\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}}$) 较小（引理 5.40），但我们需要如上所述的 UF-极限和闭 UF-极限。在第5.2节中，我们引入了偏序集 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$ 和 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$，它们具有 Fr-极限和闭 Fr-极限，并分别增大 non($M_{\mathcal{ED}}$) 和 non($K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$)（表2）。然而，这些偏序集是否具有（闭）UF-极限尚不清楚。更具体地说，在证明这些偏序集具有（闭）Fr-极限时，我们在引理 5.24 中证明了 $(\star)_1$，但要证明它们具有（闭）UF-极限，我们需要证明对于 $k \geq 2$，$(\star)_k$ 成立，而这并不清楚（见注 5.47 和注 5.56）。

相反，我们通过略微修改 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$ 和 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$ 的定义，引入具有（闭）UF-极限的新偏序集。因此，我们改变了所研究的理想，并遇到了两个理想：$\mathscr{J}_L$ 和 $\mathscr{I}_L^f$（表3）。这些理想本身具有一些有趣的性质，与（闭）UF-极限并无直接关系（我们将在第 6 节研究它们的性质），因此使用这些理想似乎并非权宜之计。本节中，我们引入理想 $\mathscr{J}_L$ 和 $\mathscr{I}_L^f$，以及偏序集 $\mathbb{P}^{\mathscr{J}_L}$ 和 $\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$；它们分别增大 non($M_{\mathscr{J}_L}$) 和 non($K_{\mathscr{I}_L^f}$)，并具有 UF-极限和闭 UF-极限。最后，我们将在定理 5.61 中利用这些偏序集构造所需的 Cichoń 最大值模型。

表 2. 偏序集 with （闭）Fr-极限

偏序集	增大	极限
$\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$	non($M_{\mathcal{ED}}$)	Fr-极限
$\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$	non($K_{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$)	闭 Fr-极限

表 3. 偏序集 with （闭）UF-极限

偏序集	增加	极限
$\mathbb{P}^{\mathscr{J}_L}$	non($M_{\mathscr{J}_L}$)	UF-极限
$\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$	non($K_{\mathscr{I}_L^f}$)	闭 UF-极限

5.3.1. 理想 $\mathscr{J}_L$ 和偏序集 $\mathbb{P}^{\mathscr{J}_L}$。我们改变强迫概念 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$，使其具有 UF-极限。以下理想已在引言中出现，我们还在第 3 节计算了它的一些相关基数不变量。

定义 5.43。理想 $\mathscr{J}_L$ 在 $\omega\times\omega$ 上的定义为

$$\mathscr{J}_L = \{A \subseteq \omega\times\omega : \exists k < \omega\ \forall^\infty i < \omega\ |(A)_i| \leq k\cdot i\}.$$

根据定义，$\mathcal{ED} \subseteq \mathscr{J}_L \subseteq$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想。理想 $\mathscr{J}_L$ 相对于线性增长理想 $\mathscr{I}_L$，就如同最终不同理想 $\mathcal{ED}$ 相对于 $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$。也就是说，$\mathscr{J}_L \restriction \Delta_{\mathrm{exp}}$，其中

$\Delta_{\exp} = \{\langle i, j\rangle : \ j \le \exp(i)\}$，与 $\mathscr{I}_L$ 同构。由此可得 $\mathscr{I}_L \le_{\mathrm{KB}} \mathscr{I}_L$。在 Katětov 序意义下介于 $\mathcal{ED}$ 与有限集理想 $\otimes$ 有限集理想之间的理想（包括 $\mathscr{I}_L$）已在 [DFGT21] 中得到广泛研究。

我们引入强迫概念 $\mathbb{P}_{\mathscr{I}_L}$，它会泛型地添加一个 $\mathbf{M}_{\mathscr{I}_L}$-支配函数 $\phi_G\colon (\omega\times\omega)^{<\omega}\to\mathscr{I}_L$。该偏序集是通过对 $\mathbb{P}_{\mathcal{ED}}$ 的定义稍作修改得到的。

定义5.44。偏序集 $\mathbb{P}_{\mathscr{I}_L}$ 定义如下：其条件是 $p=(\sigma^p,\ s^p,\ n^p,\ F^p)$，满足

- $\sigma^p\colon (\omega\times\omega)^{<n^p}\to\omega$ 是一个有限部分函数，
- $s^p\colon \{(u^\frown a,\ v)\colon (u,\ v)\in(\omega\times\omega)^{<n^p},\ a\in\omega\}\to[\omega]^{<\omega}$ 是一个有限部分函数，使得对于 $(u^\frown a,\ v)\in\operatorname{dom}(s^p)$，$|s^p(u^\frown a,\ v)|\le a$
- $n^p\in\omega$，
- $F^p\subseteq\omega^\omega$ 是有限的。

序 $q\le p$ 由下式给出

- $\sigma^q\supseteq\sigma^p$, $s^q\supseteq s^p$, $n^q\ge n^p$ and $F^q\supseteq F^p$,
- $\forall i\in[n^p,n^q)\,\forall x,y\in F^p$, either:
  - $(x{\restriction}i, y{\restriction}i)\in\operatorname{dom}(\sigma^q)$ and $x(i)\le\sigma^q(x{\restriction}i, y{\restriction}i)$, or
  - $(x{\restriction}(i+1), y{\restriction}i)\in\operatorname{dom}(s^q)$ and $y(i)\in s^q(x{\restriction}(i+1), y{\restriction}i)$.

设 G 为一个泛滤子。在 $V[G]$, ϕ_G 中：$(\omega\times\omega)^{<\omega}\to\omega\times\omega$ 由下式给出

$$\phi_G(u,v)\coloneqq\bigcup_{p\in G}\{(a,b)\in\omega\times\omega : a\le\sigma^p(u,v)\text{ or }b\in s^p(u^\frown a,v)\}.$$

与引理 5.32 的情形一样，

L引理 *5.45*。*(1)* 对于 $n<\omega$, $\{p:\ n_p\ge n\}$ 是稠密的。因此 $\mathbb{P}_{\mathscr{I}_L}\Vdash \mathit{dom}(\phi_G)=(\omega\times\omega)^{<\omega}$。*(2)* 对于 $(u,v)\in(\omega\times\omega)^{<\omega}$, $\mathbb{P}_{\mathscr{I}_L}\Vdash\forall^\infty n<\omega\ |(\phi_G(u,v))_n|\le n$，所以 $\mathit{ran}(\phi_G)\subseteq\mathscr{I}_L$。*(3)* 对于 $f,g\in\omega^\omega$, $\{p:\ f,g\in F^p\}$ 是稠密的。因此 $\mathbb{P}_{\mathscr{I}_L}\Vdash(\omega\times\omega)^\omega\cap V\subseteq M_{\phi_G}$。

$\mathbb{P}_{\mathscr{I}_L}$ 是 σ-中心的，并且具有 UF-极限：

引理 *5.46*. 固定 $n\in\omega$, $\sigma\colon(\omega\times\omega)^{<n}\to\omega$ 一个有限部分函数，以及 $s\colon\{(u^\frown a,v)\colon(u,v)\in(\omega\times\omega)^{<n},\ a\in\omega\}\to\omega$ 一个有限部分函数。令 $L<\omega$ 和 $\bar{x}^*=\{x^*_l\colon\ l<L\}\subseteq\omega^n$，使得所有 x^*_l 两两不同。那么，对于任意超滤子 D，$Q\coloneqq\{p\colon\ \sigma^p=\sigma, s^p=s, n^p=n, \{x{\restriction}n\colon\ x\in F^p\}=\bar{x}^*\}$ 是中心的，且是支配数 D-极限链接的。

证明。我们证明引理 5.24 中 $k\ge1$ 的 $(\star)_k$。我们沿用引理 5.33 的证明，因此：

(1) 定义极限函数 $\lim^D\colon Q^\omega\to\mathbb{P}_{\mathscr{I}_L}$，(2) 对给定的 $\bar{q}\in Q^\omega$ 和 $r\le\lim^D\bar{q}$ 取 $X\in D$，以及 (3) X 见证 $(\star)_1$ 得以满足。

我们将在假设 $(\star)_1$ 的情况下证明 $(\star)_k$ 对于 $k\ge2$ 成立。令 $X(\bar{q},r)$ 表示根据 $\bar{q},r$ 在 (2) 中构造的集合 $X\in D$。设：

- $\bar{q}^j=\langle q^j_m : m<\omega\rangle\in Q^\omega$ for $j<k$,
- $r\le\lim^D\bar{q}^j$ for all $j<k$.

由 $(\star)_1$, $X'\coloneqq\bigcap_{j<k}X(\bar{q}^j,r)\in D$。对于 $m<\omega$ 和 $j<k$，令 $q^j_m=(\sigma,s,n,F^j_m)$ 和 $F^j_m=\{x^{m,j}_l\colon\ l<L\}$。对于每个 $j<k$，令 $B_j\subseteq L$ 和 $n_{j,l}<\omega$ 对于 $l\in B_j$ 分别为引理 5.33 的证明中将 $\bar{q}$ 替换为 $\bar{q}_j$ 所得的 B 和 n_l。对于 $j<k$ 和 $l\in B_l$，令 $X^j_{4^l}\coloneqq\{m<\omega\colon\ x^{m,j}_l(n_{j,l})\ge k\cdot L\}\in D$。令 $X_4\coloneqq\bigcap\{X^{j,l}_4\colon\ j<k, l\in B_l\}\in D$。

令 $X := X' \cap X_4$。为了证明 X 是 $(\star)_k$ 的见证，令 $m \in X$，我们将找到 q'，使其成为 r 和所有 q_m^j 的公共扩展。令 $r = (\sigma^r,\ s^r,\ n^r,\ F^r)$，并按如下方式定义 $q' := (\sigma',\ s',\ n^r,\ F^r \cup \bigcup_{j<k} F_m^j)$：

$\sigma' \supseteq \sigma^r$ 并且对所有形式为 $(x^{m,\ }_{\ l}{}^{\ j}{\restriction} i,\ x^{m,\ }_{\ l'}{}^{\ j}{\restriction} i)$ 的 $(u,\ v) \in (\omega \times \omega)^{<\omega} \setminus \mathrm{dom}(\sigma^r)$，其中某些 $j < k$、$l,\ l' < L$、$i < n_r$ 满足条件，令 $(u,\ v) \in \mathrm{dom}(\sigma')$，并且：

$$\sigma'(u,v) := \max\{x_{l^*}^{m,j^*}(i) : j^* < k, l^* < L\}. \tag{5.17}$$

$s' \supseteq s^r$ 并且对所有形式为 $(x^{m,\ }_{\ l}{}^{\ j}{\restriction} (n_{j,\ l}+1)\ \ x^{m,\ }_{\ l'}{}^{\ j}{\restriction} n_{j,\ l})$ 的 $(u',\ v) \in \omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega} \setminus \mathrm{dom}(s^r)$，其中某些 $j < k$、$l \in B_j$ 和 $l' < L$ 满足条件，令 $(u',\ v) \in \mathrm{dom}(s')$，并且：

$$s'(u',v) := \bigcup\{x_{l^*}^{m,j^*}(n_{j,l}) : j^* < k, l^* < L\}. \tag{5.18}$$

对于这样的 $(u',\ v) = (x^{m,\ }_{\ l}{}^{\ j}{\restriction} (n_{j,\ l}+1)\ \ x^{m,\ }_{\ l'}{}^{\ j}{\restriction} n_{j,\ l})$，根据 X_4 的选取，我们有 $x^{m,\ }_{\ l}{}^{\ j}(n_{j,\ l}) \geq k \cdot L \geq |s'(u',\ v)|$ 因此（5.18）是 s' 的一个有效定义。

那么，引理 5.33 证明中情形 $(\star)_1$ 的论证表明，q' 扩张 r，且所有 q_m^j。唯一的区别出现在该证明的最后一种情形；在这种情况下，根据我们当前对 s' 的选择，有 $x^{m,\ }_{\ l'}{}^{\ j}(i) \leq s'(x^{m,\ }_{\ l}{}^{\ j}{\restriction}(i+1)\ x^{m,\ }_{\ l'}{}^{\ j}{\restriction} i)$，因此由 $\leq_{\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L}}$ 的定义可得 $q' \leq q_m^j$。□

注 5.47。在前面的论证中，当我们在 (5.18) 中定义 $s'(u',v)$ 时，即使对于某些 j、$j^* < k$、$l_0 \in B_j$、$l_2 \in B_{j^*}$ 和 l_1、$l_3 < L$，有 $(x^{m,}_{\ l_0}{}^{\ j}{\restriction}(n_{j,l}+1)\ x^{m,}_{\ l_1}{}^{\ j}{\restriction} n_{j,l}) = (x^{m,}_{\ l_2}{}^{\ j^*}{\restriction}(n_{j^*,l}+1)\ x^{m,}_{\ l_3}{}^{\ j^*}{\restriction} n_{j^*,l})$，也可能出现 $x^{m,}_{\ l_1}{}^{\ j}(n_{j,l})$ 与 $x^{m,}_{\ l_3}{}^{\ j^*}(n_{j^*,l})$ 不同的情况。因此，我们不确定 $(\star)_k$ 对 $k \geq 2$ 是否适用于 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}}$。

5.3.2. *f线性增长理想 $\mathscr{I}_L^f$与偏序集 $\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$。* 现在我们将修改强迫 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$，使其具有闭 UF-极限。我们引入 *$f$线性增长理想 $\mathscr{I}_L^f$* 及其关联偏序集，以增大 $\mathrm{non}(K_{\mathscr{I}_L^f})$。

定义 5.48。对于 $g,\ h \in \omega^\omega$，记作 $g \ll h$，如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$。令 $\mathrm{exp} \in \omega^\omega$ 表示指数函数，即 $\mathrm{exp}(n) = 2^n$。

定义 5.49。固定一个区间划分 $P^{\mathrm{exp}} = (P_i^{\mathrm{exp}})_{i<\omega}$，使得 $|P_i^{\mathrm{exp}}| = \mathrm{exp}(i)$。令 $f \in \omega^\omega$ 为满足 $f \ll \mathrm{exp}$ 的函数。*f线性增长理想 $\mathscr{I}_L^f$* 定义为：

$$\mathscr{I}_L^f := \{A \subseteq \omega : \exists k < \omega\ \forall^\infty i < \omega\ \ |A \cap P_i^{\mathrm{exp}}| \leq k \cdot f(i)\}.$$

特别地，当 f 为恒等函数时，$\mathscr{I}_L^f$ 是线性增长理想（参见 [Hru11，第 56], [BM14 页，第 3]页），下标 L 也由此而来。注意，$f \leq^* g$ 蕴含 $\mathscr{I}_L^f \subseteq \mathscr{I}_L^g$，并且如果 f 有界，则 $\mathscr{I}_L^f \cong_{\mathrm{KB}} \mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$。此外，如果 $f \ll \mathrm{exp}$，则 $\mathscr{I}_L^f \leq_{\mathrm{KB}} \mathcal{Z}$；这几乎可以直接由定义得到。

固定具有 $f \ll \mathrm{exp}$ 的 $f \in \omega^\omega$。我们引入强迫概念 $\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$，它可以泛型地添加一个 $\mathbf{K}^{\mathscr{I}_L^f}$-支配函数 $\phi_G\colon\ \omega \to \mathscr{I}_L^f$。我们可以假设 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$ 定义在 $(P_i^{\mathrm{exp}})_{i<\omega}$ 上，而不是具有 $|P_i| = i$ 的区间划分 $(P_i)_{i<\omega}$。在此假设下，$\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$ 的条件与 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$ 完全相同，但其序更弱。令每个 $i < \omega$ 对应 $P_{\mathrm{exp}\,i} := I_i := [M_i, M_{i+1})$。

定义 5.50。偏序集 $\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$ 定义如下：

- Conditions are $p = (i,k,s,\varphi) = (i_p, k_p, s_p, \varphi_p)$ where $i,k < \omega$, $s \in ([M_i]^{\leq k})^{<\omega}$ and $\varphi\colon \omega \to [\omega]^{\leq k}$ such that $\varphi{\restriction}|s| = s$.

- 序 $(i',k',s',\varphi') \leq (i,k,s,\varphi)$ 定义为：对所有 $n<\omega$、$|s'|\geq|s|$ 以及 $n<|s|$，$i'\geq i$、$k'\geq k$、$\varphi'(n)\supseteq\varphi(n)$，

$$s'(n)\cap M_i = s(n),\ \text{and} \tag{5.19}$$

$$\text{if } i\leq j<i',\ \text{then } |s'(n)\cap I_j|\leq n\cdot f(j). \tag{5.20}$$

- 对于泛滤子 G，定义 ϕ_G：$\omega\to\mathcal{P}(\omega)$ 如下：

$$\phi_G(n) := \bigcup\{s_p(n) : p\in G \text{ and } n<|s|\}.$$

容易证明：

引理 5.51. 以下集合是开稠密的：

(1) 对于 $x\in\omega^\omega$，$\{p:\ x(n)\in\varphi_p(n)$ 对所有 $n\geq|s_p|\}$，

(2) 对于 $i<\omega$，$\{p:\ i_p\geq i\}$，(3) 对于 $n<\omega$，$\{p:\ |s_p|\geq n\}$。

由 (5.20) 和引理 5.51 (1)，可得：

引理 5.52. 在 $V[G],\mathrm{ran}(\phi_G)\subseteq\mathscr{I}_L^f$ 以及 $\omega^\omega\cap V\subseteq K_{\phi_G}$。

定义 5.53. 对于 $i,k<\omega$ 和 $s\in([M_i]^{\leq k})^{<\omega}$，定义 $Q=Q_{i,k,s} := \{p\in\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}:\ i_p=i, k_p=k, s_p=s\}$。

引理 5.54. Q 是中心的。特别地，$\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$ 是 σ-中心的。

当 f 无界时，$\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$ 具有闭 UF-极限。

引理 5.55. 假设 $f\gg 1$。令 $i,k<\omega$，$s\in([M_i]^{\leq k})^{<\omega}$ 满足 $|s|\geq 1$，且 D 是一个超滤子。那么，$Q=Q_{i,k,s}$ 是闭-D-极限相连的。特别地，$\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$ 具有闭 *UF*-极限。

证明。论证基于引理 5.39 的证明。假设 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$ 定义在 $(P_i^{\exp})_{i<\omega}$ 上，我们使用引理 5.39 证明中相同的极限函数 $\lim^D$。令 $0<L<\omega$，我们将证明引理 5.24 中所要求的 $(\star)_L$：假设 $\bar{q}^l=\langle(i,k,s,\varphi_m^l)\rangle_{m<\omega}\in Q^\omega$，且对于 $l<L$ 和所有 $l<L$，$q_\infty^l=\lim^D\bar{q}_l=(i,k,s,\varphi_\infty^l)$，并且 $q'=(i',k',s',\varphi')\leq q_\infty^l$。由于 $f\gg 1$，我们可以假设：

$$kL\leq|s|\cdot f(j)\ \text{for any } j\geq i', \tag{5.21}$$

通过增加 i'。取 $X\in D$ 使得：

$$\text{For all } m\in X, n\in|s'|\setminus|s| \text{ and } l<L,\ \varphi_m^l(n)\cap M_{i'}=\varphi_\infty^l(n). \tag{5.22}$$

固定 $m\in X$，我们将定义 q' 以及所有 q_m^l（$l<L$）的一个公共扩展 r。定义 ψ：$\omega\to[\omega]^{\leq k'+kL}$，使得 $\psi(n):=\varphi'(n)\cup\bigcup_{l<L}\varphi_m^l(n)$，且 $t:=\psi\restriction|s'|$。令 $r:=(i'',\ k'+kL,\ t,\ \psi)$，其中 $i''\geq i'$ 足够大，使得 r 是一个有效条件。于是，引理 5.39 的证明论证表明，对于 $l<L$，有 $r\leq q'$，q_m^l。唯一的区别出现在我们为了证明 $r\leq q'$ 而证明以下内容时：

$$\text{for } n\in|t|\setminus|s|,\ \text{if } i'\leq j\leq i'', \text{then } |t(n)\cap I_j|\leq n\cdot f(j).$$

由 (5.21) 可得 $|t(n)\cap I_j|\leq|\bigcup_{l<L}\varphi_m^l(n)|\leq kL\leq|s|\cdot f(j)\leq n\cdot f(j)$。

□

注 5.56. 在证明 $(\star)_L$ 关于 $L>1$的结论时，似乎必须满足 $f\gg 1$ 才能得到 (5.21)。因此，我们不确定是否可以去掉假设 $f\gg 1$。基于这个原因，我们不确定 $(\star)_k$ 关于 $k\geq 2$ 的结论对 $\mathbb{P}^{\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}}$是否成立。

5.3.3. 扩展的 *Cichoń* 极大值。 现在我们准备构造一个实现扩展的 Cichoń 极大值的模型。正如本节开头所解释的，迫迫构造分为两个步骤：第一步是分离图表左侧（定理 5.60，图 4），并满足一些附加性质（定理 5.60 中的 **实数集**$_i$ $\cong_T$ $[\lambda_7]^{<\lambda_i}$ ）；第二步是利用这些性质分离右侧（定理 5.61，图 5）。迫迫构造的框架基于 [Yam25], [Yam24] （以及相应的记号）。本文不详细介绍该框架（详情见 [Yam25],[Yam24] ），而是列出陈述并证明定理 5.60、5.61 所需的要点。

局部最终不同迫迫 $\mathbb{LE}$ 由 [Yam24] 提出，用于增大 non($\mathcal{M}$)，同时保持 non($\mathcal{E}$)较小。

定义 5.57. 偏序集 $\mathbb{LE}$ 定义如下：

(1) 条件是三元组 (d, s, φ)，其中 $d \in 2^{<\omega}$，$s \in \prod_{n<|d|} \exp(n)$ 且 $\varphi \in \prod_{n<\omega} \mathcal{P}(\exp(n))$，满足对某个 $k < \omega$：

$$\frac{|\varphi(n)|}{\exp(n)} \leq \exp\left(-\frac{n}{2^k}\right) \text{ for all } n \geq |d|.$$

(2) $(d', s', \varphi') \leq (d, s, \varphi)$，如果 $d' \supseteq d$，$s' \supseteq s, \varphi'(n) \supseteq \varphi(n)$ 对于 $n < \omega$ 且：

$$\text{for all } n \in (d')^{-1}(\{1\}) \setminus d^{-1}(\{1\}), s'(n) \notin \varphi(n).$$

引理 5.58 ([Yam24，引理 4.27，4.29])．$\mathbb{LE}$ 是 σ-中心的，并且是 σ-闭-*UF-lim*-链接的（由同一组可数分量见证）。

定义 5.59. 给出以下关系系统和强迫概念：

- $\mathbf{R}_1 := \mathcal{N}$ 和 $\mathbb{R}_1 := \mathbb{A}$，即变形虫迫迫。
- $\mathbf{R}_2 := C_{\mathcal{N}}^{\perp}$ 和 $\mathbb{R}_2 := \mathbb{B}$，即随机强迫。
- $\mathbf{R}_3 := \mathbf{D}$ 和 $\mathbb{R}_3 := \mathbb{D}$，即 Hechler 强迫。
- $\mathbf{R}_4 := \mathbf{M}_{\mathscr{I}_L}$，$\mathbf{R}_4^* := \mathbf{M}_{\text{有限集理想}\otimes\text{有限集理想}}$ 和 $\mathbb{R}_4 := \mathbb{P}_{\mathscr{I}_{\mathbb{L}}}$。
- $\mathbf{R}_5 := C_{\mathcal{E}}$，$\mathbf{R}_5^{\mathcal{Z}} := \mathbf{M}_{\mathcal{Z}}$，$\mathbf{R}_5^f := \mathbf{K}^{\mathscr{I}_L^f}$，以及 $\mathbb{R}_5^f := \mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$，其中 $f \in \omega^\omega$ 带有 $1 \ll f \ll \exp$。
- **实数集**$_6$ $:= C_{\mathcal{M}}$，且 $\mathbb{R}_6 := \mathbb{LE}$。

令 $I^+ := \{1, 2, \ldots, 6\}$ 为指标集。

定理 5.60。假设：

- $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_6$ 是不可数正则基数，且 $\lambda_7 \geq \lambda_6$ 是基数。
- $\lambda_3 = \mu_3^+$、 $\lambda_4 = \mu_4^+$ 和 $\lambda_5 = \mu_5^+$ 是后继基数，且 μ_3 是正则的。

对于所有 $i \in I^+$，• $\kappa < \lambda_i$ 蕴含 $\kappa^{\aleph_0} < \lambda_i$。

- $\lambda_7^{<\lambda_6} = \lambda_7$，因此对所有 $i \in I^+$， $\lambda_7^{<\lambda_i} = \lambda_7$。
- $\lambda_7 \leq 2^{\mu_3}$。

那么，存在一个可数链条件偏序集，它强制对每个 $i \in I^+$，**实数集**$_i \cong_T C_{[\lambda_7]^{<\lambda_i}} \cong [\lambda_7]^{<\lambda_i}$，特别是，$\mathfrak{b}($**实数集**$_i) = \lambda_i$ 以及 $\mathfrak{d}($**实数集**$_i) = \mathfrak{c} = \lambda_7$ （见图 *4*；对于 **实数集**$_4^*$、**实数集**$_5^{\mathcal{Z}}$和 **实数集**$_5^f$，当 $f \in \omega^\omega$ 满足 $1 \ll f \ll \exp$时，同样成立）。

证明。 以下强迫迭代的构造基于 [Yam24] ，并通过在 [Yam24，构造 5.6]中用 $\mathbb{P}_{\mathscr{I}_L}$ 替换 $\mathbb{PR}$ 、用 $\mathbb{P}^{\mathscr{I}_L^f}$ 替换 $\mathbb{PR}_g$ 而得到。更具体地说，进行一个长度为 $\gamma := \lambda_7 + \lambda_7$ 的有限支撑迭代 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\xi : \alpha \leq \gamma, \xi < \gamma \rangle$，使得对每个 $\xi < \lambda_7$， $\mathbb{Q}_\xi$ 都是科恩强迫；对每个 $\xi \in \gamma \setminus \lambda_7$， $\mathbb{Q}_\xi$ 都是 $\mathbb{R}_i$ 的一个大小为 $< \lambda_i$ 的子力迫，其中 $\xi \equiv i \in I^+$ 模 6。通过记账法，我们可以使 $\mathbf{R}_i \preceq_T C_{[\lambda_7]^{<\lambda_i}}$ 对 $i \in I^+$ 成立（对 $i = 4$ 使用引理 5.45 (3)，对 $i = 5$使用引理 5.52）。由事实 5.9 以及引理 5.46、5.54、5.58，可得 $C_{[\lambda_7]^{<\lambda_i}} \preceq_T \mathbf{R}_i$ 对 $i = 1,2,6$成立。与 [Yam24中一样，

构造 5.6], 我们可以沿着迭代构造，归纳地定义 UF-极限和闭 UF-极限的超滤子名称; 根据引理 5.46、5.55、5.58（以及引理 5.54），这是可行的。 $C_{[\lambda_7]^{<\lambda_i}} \preceq_T \mathbf{R}_i$ 对 $i = 3$, 5成立，这一点可仿照 [Yam24，构造 5.6]证明。通过修改引理 5.40 的证明，我们得到 $C_{[\lambda_7]^{<\lambda_i}} \preceq_T \mathbf{R}_4$ （另见 [Yam25，主要引理 3.26]）。□

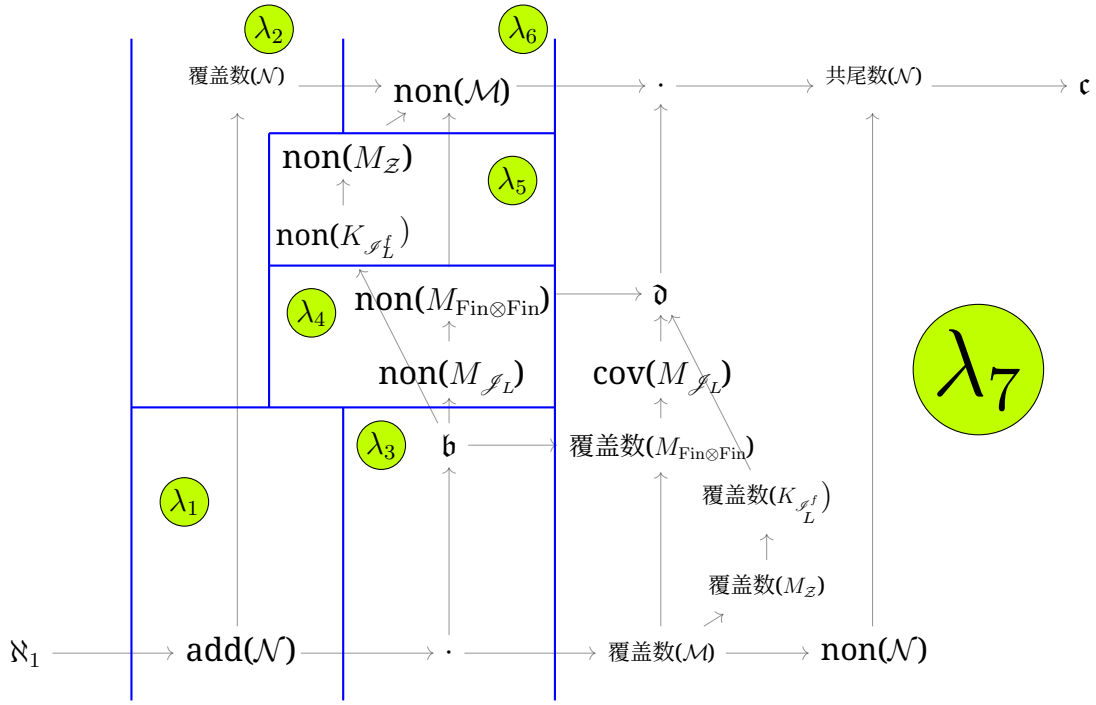

图 4. 定理 5.60 的分离星座。注意，根据定理 4.54，non($M_{\mathcal{Z}}$) =max{$\mathfrak{b}$, non($\mathcal{E}$)}。

定理 5.61. 设 $\aleph_1 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_{12}$ 为正则基数， $\theta_{\mathfrak{c}}$ 为一个无限基数，且满足 $\theta_{\mathfrak{c}} \geq \theta_{12}$ 和 $\theta_{\mathfrak{c}}^{\aleph_0} = \theta_{\mathfrak{c}}$。那么，存在一个可数链条件偏序集，它强迫 $\mathfrak{b}$(**实数集**$_i$) $= \theta_i$ 以及$\mathfrak{d}$(**实数集**$_i$) $= \theta_{13-i}$ 对每个 $i \in I^+$ 都成立（对于 **实数集**$_4^*$、**实数集**$_5^{\mathcal{Z}}$、**实数集**$_5^f$，当 $f \in \omega^\omega$ 满足$1 \ll f \ll \exp$ 时也同样成立），并且 $\mathfrak{c} = \theta_{\mathfrak{c}}$ （见图 *5*）。特别地，在该强迫扩张中，对于可数集上的理想 $\mathscr{I}_0$、$\mathscr{I}_1$，满足 $\mathscr{I}_L \leq_{\mathrm{K}} \mathscr{I}_0 \leq_{\mathrm{K}}$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想 且对于某个 $1 \ll f \ll \exp$有 $\mathscr{I}_L^f \leq_{\mathrm{K}} \mathscr{I}_1 \leq_{\mathrm{K}} \mathcal{Z}$，我们有：

$$\mathrm{non}(M_{\mathscr{I}_0}) = \theta_4,\ \mathrm{cov}(M_{\mathscr{I}_0}) = \theta_9,$$
$$\mathrm{non}(K_{\mathscr{I}_1}) = \mathrm{non}(M_{\mathscr{I}_1}) = \theta_5,\ \mathrm{cov}(K_{\mathscr{I}_1}) = \mathrm{cov}(M_{\mathscr{I}_1}) = \theta_8.$$

*Pro*参见。 [GKMS22] （以及 [Yam24，定理 5.9]，其中给出了不使用广义连续统假设的证明）. □

6. More on the ideals $\mathscr{J}_L$ and $\mathscr{I}_L^f$

在最后这一节中，我们汇集了若干与 $\mathscr{J}_L$ 以及第 5.3 节中引入的 f-线性增长理想 $\mathscr{I}_L^f$ 相关的结果。首先，我们考虑 $\mathscr{J}_L$ 的以下变体。

定义6.1。对于任意满足 $f \gg 1$ 的函数 $f \in \omega^\omega$，在 $\omega \times \omega$ 上定义理想 $\mathscr{J}_L^f$ 如下：

$$\mathscr{J}_L^f = \{A \subseteq \omega \times \omega : \exists k < \omega\, \forall^\infty i < \omega\, (|(A)_i| \leq k \cdot f(i))\}.$$

当 f 是恒等函数时，我们简单地将 $\mathscr{J}_L$ 写作 $\mathscr{J}_L$。

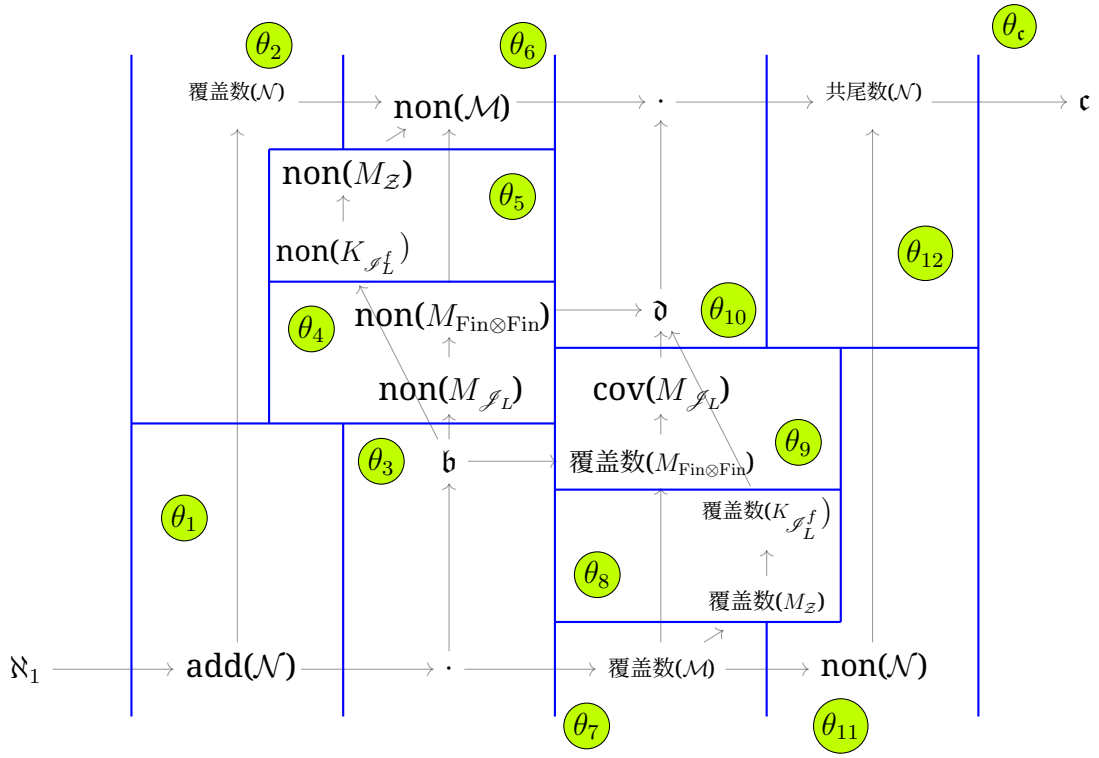

图 5. 定理 5.61 的分离星座。

这些理想首次出现于 [DFGT21]。按照他们的记号，$\mathcal{I}_L^f = I(\mathcal{F}_f)$。根据定义，对于任何满足 $f \gg 1$的 $f \in \omega^\omega$，都有 $\mathcal{ED} \subseteq \mathcal{I}_L^f \subseteq \mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin}$。此外，请注意，若 $f \ll \exp$，则 $\mathcal{I}_L^f \restriction \Delta_{\exp}$，其中 $\Delta_{\exp} = \{\langle i,j\rangle : j \le \exp(i)\}$，与 $\mathcal{I}_L^f$ 同构。

现在回想一下，$\mathcal{ED}$ 在以下意义上是局部选择性的临界理想。

定义 6.2 ([BTW82])。设 $P = (P_i)_{i<\omega}$ 是 ω的一个划分。若满足 $|A \cap P_i| \le 1$ 对所有 $i < \omega$均成立，我们称 $A \subseteq \omega$ 为选择子 P。若对于 ω 的每个由 $\mathcal{I}$ 中的集合构成的划分 P，都存在一个 $\mathcal{I}$-正选择子 P，则称定义在 ω 上的理想 $\mathcal{I}$为局部选择性的 。

事实 6.3 ([Hru11，命题 3。2])。对于定义在 ω上的任意理想 $\mathcal{I}$，当且仅当 $\mathcal{I}$不是局部选择性的。

类似地，$\mathcal{I}_L^f$ 对于“局部线性选择性”是关键的。

定义 6.4. 设 $P = (P_i)_{i<\omega}$ 是 ω的一个划分。若对所有 $i < \omega$都有 $|A \cap P_i| \le i$，则称 $A \subseteq \omega$ 为 P的线性选择子。若对于 ω 的每个划分 P，其中各集合属于 $\mathcal{I}$，都存在 P的一个 $\mathcal{I}$-正线性选择子，则称实数集 ω 上的理想 $\mathcal{I}$是局部线性选择的。

命题 6.5. 设 $\mathcal{I}$ 是 ω上的一个理想。那么以下各项等价：

(1) 对所有满足 $f \gg 1$的 $f \in \omega^\omega$，$\mathcal{I}_L^f \le_{\mathrm{K}} \mathcal{I}$。

(2) 存在某个满足 $f \gg 1$的 $f \in \omega^\omega$，使得 $\mathcal{I}_L^f \le_{\mathrm{K}} \mathcal{I}$。(3) $\mathcal{I}$ 不是局部线性选择的。

证明。(1)显然蕴含(2)。为证明(2)蕴含(3)，设 $\mathcal{I}_L^f \le_{\mathrm{K}} \mathcal{I}$ 由 π见证：$\omega \to \omega\times\omega$。令

$$P_i = \bigcup\{\pi^{-1}[\{j\}\times\omega] : f(j) = i\}.$$

于是，$\mathcal{P} = \langle P_i\rangle_{i<\omega}$ 是将 ω 划分为 $\mathcal{I}$中的集合的一个划分，因为每个 $\{j\}\times\omega$ 都属于 $\mathcal{I}_L^f$，并且对于每个 i，只有有限多个 j 使得 $f(j) = i$ 根据 $f \gg 1$。现在令 $A \subseteq \omega$

为 P的线性选择子。则对于所有 $i<\omega$,

$$|(\pi[A])_i| \le |\pi[A\cap P_{f(i)}]| \le |A\cap P_{f(i)}| \le f(i)$$

因此 $\pi[A]\in \mathscr{J}_L^f$。所以 $A\subseteq \pi^{-1}[\pi[A]]\in\mathscr{I}$。

为证明 (3) 蕴含 (1)，取 $f\in\omega^\omega$，使得 $f\gg 1$，并令 $P=\langle P_i\rangle_{i<\omega}$ 为 ω 的一个划分，其中各集合属于 $\mathscr{I}$，且所有线性选择子都属于 $\mathscr{I}$。任取函数π: $\omega\to\omega\times\omega$，使得对所有 $i<\omega$，$\pi[P_i]\subseteq\{j_i\}\times\omega$，并且 $\pi\restriction P_i$ 是单射，其中 j_i 是满足 $f(j_i+1)>i$的最小 j_i。为证明 π 是 $\mathscr{J}_L^f\le_{\mathrm{K}}\mathscr{I}$ 的见证，令 $A\in\mathscr{J}_L^f$，并取 k，$j^*<\omega$，使得对所有 $j\ge j^*$，$|(A)_j|\le k\cdot f(j)$。令 $i_0<\omega$ 满足对所有 $i\ge i_0$，$j_i\ge j^*$。于是，对所有 $i\ge i_0$,

$$|\pi^{-1}[A]\cap P_i| = |\pi[\pi^{-1}[A]\cap P_i]| \le |(A)_{j_i}| \le k\cdot f(j_i)\le k\cdot i.$$

因此，$\pi^{-1}[A]$ 包含于由 $(P_i)_{i<i_0}$ 和 k个 $\bar{P}$的线性选择子之并中，所以由 (3) 得 $\pi^{-1}[A]\in\mathscr{I}$。□

In p具体而言，$\mathscr{J}_L^f$ 不依赖于 $f\in\omega^\omega$，就 Katětov–Blass 序而言 :

推论 6.6。$\mathscr{J}_L^f\cong_{\mathrm{KB}}\mathscr{J}_L$ 对于任意 $f\gg 1$。

证明。在前面对 (3) $\Rightarrow$ (1) 的证明中，当 $f\in\omega^\omega$ 是恒等函数时，$j_i=i$，因此 π: $\omega\to\omega\times\omega$是单射。这意味着，如果 $\mathscr{I}$不是局部线性选择的，那么 $\mathscr{J}_L\le_{\mathrm{KB}}\mathscr{I}$。因此，由 (2) $\Rightarrow$(3)，对于任意 $f\gg 1$，都有 $\mathscr{J}_L\le_{\mathrm{KB}}\mathscr{J}_L^f$。由 (2) $\Rightarrow$ (1) 得 $\mathscr{J}_L^f\le_{\mathrm{KB}}\mathscr{J}_L$。□

关于 Katětov 序，$\mathscr{J}_L$ 与其他博雷尔理想之间的关系可概括如下。

命题 6.7。

(1) $\mathscr{J}_L\le_{\mathrm{KB}}\mathscr{I}_L^f$ 对所有 $1\ll f\ll\exp$。(2) $\mathcal{ED}\le_{\mathrm{KB}}\mathscr{J}_L\le_{\mathrm{KB}}$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想 且 $\mathcal{ED}\not\ge_{\mathrm{K}}\mathscr{J}_L\not\ge_{\mathrm{K}}$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想。

(3) $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}\not\le_{\mathrm{K}}\mathscr{J}_L$ 且 $\mathscr{J}_L\not\le_{\mathrm{K}}\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$。

证明。(1) $\mathscr{J}_L\cong_{\mathrm{KB}}\mathscr{J}_L^f\le_{\mathrm{KB}}\mathscr{I}_L^f$ 由推论 6.6 得出。

(2) 根据定义，$\mathcal{ED}\subseteq\mathscr{J}_L\subseteq$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想，因此 $\mathcal{ED}\le_{\mathrm{KB}}\mathscr{J}_L\le_{\mathrm{KB}}$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想成立。为说明有限集理想 $\otimes$ 有限集理想 $\not\le_{\mathrm{K}}\mathscr{J}_L$，注意到任意高解析 P-理想都在某个 $\mathscr{I}_L^f$之上满足 Katětov–Blass 关系，因而也在 $\mathscr{J}_L$之上。由于对于任意 P-理想 $\mathscr{I}$，有限集理想$\otimes$ 有限集理想 $\not\le_{\mathrm{K}}\mathscr{I}$（参见 [BF17，观察 2.3]），所以有限集理想 $\otimes$ 有限集理想 $\not\le_{\mathrm{K}}\mathscr{J}_L$。为了证明 $\mathscr{J}_L\not\le_{\mathrm{KB}}\mathcal{ED}$，只需证明 $\mathcal{ED}$ 不满足命题 6.5 中的 (3)。设 $\langle P_n\rangle_{n<\omega}$ 是将 ω 划分为属于 $\mathcal{ED}$的集合的一个划分。分两种情况:

(i) 对于无限多个 $i<\omega$，存在 $n<\omega$ 使得 $|P_n\cap(\{i\}\times\omega)|=\omega$。(ii) 对于除有限多个 $i<\omega$ 以外的所有 $i<\omega$，都存在无限多个 $n<\omega$ 使得 $P_n\cap(\{i\}\times\omega)\neq\emptyset$。

在这两种情况下，都很容易找到一个 $\langle P_n\rangle_{n<\omega}$ 的线性选择子，它不属于 $\mathcal{ED}$.

(3) 由于 $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}\not\le_{\mathrm{K}}$有限集理想 $\otimes$有限集理想（参见 [Hru17]），$\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}\not\le_{\mathrm{K}}\mathscr{J}_L$。要证明 $\mathscr{J}_L\not\le_{\mathrm{K}}\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$，只需证明 $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$ 不满足命题 6.5 中的（3）。设 $\langle P_n\rangle_{n<\omega}$ 是将 ω 划分为属于 $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$ 的集合的一个划分。令 $\Delta_n=\{n\}\times(n+1)$。那么

(i) $\sup_{n<\omega}|\{k<\omega: P_k\cap\Delta_n\neq\emptyset\}|<\omega$, or
(ii) $\sup_{n<\omega}|\{k<\omega: P_k\cap\Delta_n\neq\emptyset\}|=\omega$.

无论哪种情况，都很容易找到一个属于 $\langle P_n\rangle_{n<\omega}$ 但不属于 $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}}$的线性选择子。□

备注6.8。由于 $\mathscr{J}_L$ 不是 P-理想，也不在 Katětov 意义下高于 $\mathcal{ED}_{\text{fin}}$，

$$\text{add}^*(\mathscr{J}_L) = \text{non}^*(\mathscr{J}_L) = \omega.$$

容易看出， $\mathscr{J}_L$ 有一个不可数强无界集，因此我们有

$$\text{add}^*_\omega(\mathscr{J}_L) = \text{add}(M_{\mathscr{J}_L}) = \text{add}(K_{\mathscr{J}_L}) = \omega_1,$$
$$\text{cof}^*(\mathscr{J}_L) = \text{cof}^*_\omega(\mathscr{J}_L) = \text{cof}(M_{\mathscr{J}_L}) = \text{cof}(K_{\mathscr{J}_L}) = \mathfrak{c}.$$

在 [DFGT21], 中证明了$\text{cov}^*(\mathscr{J}_L) = \text{non}(\mathcal{M})$。不难证明$\text{non}^*_\omega(\mathscr{J}_L) = \text{cov}(\mathcal{M})$；由于 $\mathcal{ED} \subseteq \mathscr{J}_L$, $\text{cov}(\mathcal{M}) = \text{non}^*_\omega(\mathcal{ED}) \leq \text{non}^*_\omega(\mathscr{J}_L)$成立，并且可以修改$\text{non}^*_\omega(\mathcal{ED}) \leq \text{cov}(\mathcal{M})$的证明（命题3.34），以证明$\text{non}^*_\omega(\mathscr{J}_L) \leq \text{cov}(\mathcal{M})$。由于 $\mathcal{ED} \subseteq \mathscr{J}_L \subseteq$ 有限集理想 $\otimes$ 有限集理想，我们有

$$\text{non}(K_{\mathscr{J}_L}) = \mathfrak{b}, \text{cov}(K_{\mathscr{J}_L}) = \mathfrak{d},$$
$$\mathfrak{e}^{\text{const}}(2) \leq \text{non}(M_{\mathscr{J}_L}) \leq \mathfrak{e}^{\text{const}}_{\leq}(2),$$
$$\mathfrak{v}^{\text{const}}_{\leq}(2) \leq \text{cov}(M_{\mathscr{J}_L}) \leq \mathfrak{v}^{\text{const}}(2).$$

接下来我们考虑 f-线性增长理想 $\mathscr{I}^f_L$。与 $\mathscr{J}^f_L$ 不同，这些理想不一定是Katětov–Blass等价的。回想一下， $f \leq^* g$ 蕴含 $\mathscr{I}^f_L \subseteq \mathscr{I}^g_L$。

命题6.9。 在族$\{\mathscr{I}^f{}_{\text{L}} : 1 \ll f \ll \exp\}$中，没有 $\leq_{\text{KB}}$-极小或极大成员。

证明。 在证明的其余部分中，我们记 $P_n = P^{\exp}_n$。令 $F := \{f \in \omega^\omega : 1 \ll f \ll \text{exp}\}$。对于 f, $g \in F$和 $n < \omega$，定义如下条件：

$$g(n)^2 \leq f(n) \text{ and } g(n)^2 \cdot \left(1 + \sum_{k<n} \left\lceil \frac{2^k}{f(k)} \right\rceil\right) \leq 2^n. \tag{6.1}$$

容易看出，“$\forall g \in F\ \exists f \in F\ \forall^\infty n < \omega$ ((6.1) 成立)”和“$\forall f \in F\ \exists g \in F\ \forall^\infty n < \omega$ ((6.1) 成立)”。因此，只需证明：如果 $f, g \in F$ 对几乎所有 $n < \omega$ 都满足 (6.1)，那么 $\mathscr{I}^g{}_{\text{L}} \leq_{\text{KB}} \mathscr{I}^f{}_{\text{L}}$。取这样的 f, g，并且不妨设 (6.1) 对所有 $n < \omega$ 都成立。由于 $g \leq^* f$, $\mathscr{I}^g_L \leq_{\text{KB}} \mathscr{I}^f_L$显然成立。为证明 $\mathscr{I}^f_L \not\leq_{\text{KB}} \mathscr{I}^g_L$，反设 $\pi\colon \omega \to \omega$见证了 $\mathscr{I}^f_L \leq_{KB} \mathscr{I}^g_L$。只需找到 $A \in \mathscr{I}^f_L$使得 $\pi^{-1}[A] \notin \mathscr{I}^g_L$。为了构造这样的集合 A，我们归纳地定义 $n_i < \omega$和有限集 $A_i \subseteq \omega$如下。令 $i < \omega$，并假设已定义 $(n_j)_{j<i}$ 和 $(A_j)_{j<i}$。首先，选取$n_i < \omega$，使得如果对某个 $j < i$ 和 $n < \omega$ 有 $A_j \cap P_n \neq \emptyset$，那么对所有 $m \geq n_i$,

$$\pi[P_m] \cap P_n = \emptyset. \tag{6.2}$$

这是可能的，因为 π 是有限到一的。为定义 A_i，令

$$N_i := \sum_{k<n_i} \left\lceil \frac{2^k}{f(k)} \right\rceil,$$

并令 $\langle I_k\rangle_{k<N_i}$ 为 $\langle P_n\rangle_{n<n_i}$ 的一个子划分，使得若 $I_k \subseteq P_n$，则 $|I_k| \leq f(n)$。令 $I_{N_i} = \bigcup_{m\geq n_i} P_m$。由鸽巢原理可知，存在 $k \leq N_i$ 使得

$$|\pi^{-1}[I_k] \cap P_{n_i}| \geq g(n_i)^2,$$

否则，由 (6.1) 可得

$$|P_{n_i}| = 2^{n_i} < g(n_i)^2 \cdot (N_i + 1) \leq 2^{n_i},$$

矛盾。令 k_i 为满足条件的最小的 k。令 $\{a^i_j : j < l\}$ 为 $I_{k_i} \cap \pi[P_{n_i}]$ 的递增枚举，并令 $A_i = \{a^i_j : j < \min\{g(n_i)^2, l\}\}$。

现在令 $A = \bigcup_{i<\omega} A_i$。则有以下结论：

(1) 对所有 $i<\omega$, $|\pi^{-1}[A_i]\cap P_{n_i}|\geq g(n_i)^2$。(2) 对所有 $i<\omega$, $|A_i|\leq g(n_i)^2$，并且如果 $A_i\cap P_n\neq\emptyset$ 对某个 $n<n_i$ 成立，则 $|A_i|\leq|I_{k_i}|\leq f(n)$。(3) 对所有 $n<\omega$，存在 $i<\omega$ 使得 $A\cap P_n=A_i\cap P_n$，并且如果$A\cap P_n\neq\emptyset$，这样的 i 是唯一的。

注意，第三个子句由 (6.2) 得出。于是 $\pi^{-1}[A]\notin\mathscr{I}_L^g$，因为根据 (1)，

$$|\pi^{-1}[A]\cap P_{n_i}|\geq|\pi^{-1}[A_i]\cap P_{n_i}|\geq g(n_i)^2$$

对所有 $i<\omega$ 均成立。要证明 $A\in\mathscr{I}_L^f$，只需证明对于所有 $n>0$，$|A\cap P_n|\leq f(n)$。根据 (3)，对每个 $n>0$，都有 $i<\omega$ 使得 $A\cap P_n=A_i\cap P_n$。于是根据 (2)，若 $n<n_i$，则 $|A_i|\leq f(n)$；否则

$$|A\cap P_n|=|A_i\cap P_n|\leq g(n_i)^2\leq f(n_i)\leq f(n).$$

证明完毕。 □

事实 6.10 ([HMTU17，定理 2。2])。 $\mathcal{ED}_{\rm fin}\leq_{\rm KB}\mathscr{I}$ 当且仅当存在一个将ω 划分为有限集的划分，使得所有选择子都属于 $\mathscr{I}$。

回顾一下，若超滤子 $\mathcal{U}$ 在 ω 上满足以下条件，则称其为快速：对于 ω 的每个有限集划分 P，都存在一个 P 的线性选择子属于 $\mathcal{U}$。按照 [BTW82]，中的命名惯例，我们引入以下概念。

定义 6.11. 理想 $\mathscr{I}$ 在 ω 上称为局部快速，如果对于 ω 的每个有限集合划分 P，都存在 P的一个 $\mathscr{I}$-正线性选择子。

命题 6.12. 以下各项等价：

(1) 存在 $f\in\omega^\omega$ 使得 $1\ll f\ll\exp$ 且 $\mathscr{I}_L^f\leq_{\rm KB}\mathscr{I}$.(2) $\mathscr{I}$ 不是局部快速的。

证明. 为了证明 (1) 推出 (2)，假设 $f\in\omega^\omega$ 满足 $\mathscr{I}_L^f\leq_{\rm KB}\mathscr{I}$，其见证函数为 $g\colon\omega\to\omega$。对于 $j\in\omega$，令 $Q_j:=\bigcup\{P\text{exp}_i\colon i<\omega, f(i)=j\}$ 且$P_j:=g^{-1}(Q_j)$。注意，$\bar{Q}:=(Q_j)_{j<\omega}$ 是 ω 的一个划分（可能包含 $\emptyset$），因此 $P:=(P_j)_{j<\omega}$ 也是。为说明 P 是 (2) 的见证，设 $A\subseteq\omega$ 是 P的一个线性选择子。任取 $i<\omega$，并令 $j=f(i)$。于是，$g(A)\cap P\text{exp}_i\subseteq g(A)\cap Q_j=g(A\cap g^{-1}(Q_j))=g(A\cap P_j)$的大小为 $\leq|A\cap P_j|\leq j=f(i)$，因为 A是 P的一个线性选择子；我们将证明 $A\in\mathscr{I}$。由于 i是任意的，$g(A)\in\mathscr{I}_L^f$（由 $k=1$见证）。 g是 $\mathscr{I}_L^f\leq_{\rm KB}\mathscr{I}$的见证，因此$A\subseteq g^{-1}(g(A))\in\mathscr{I}$。

为证明 (2) 蕴含 (1)，令 $P=(P_j)_{j<\omega}$ 为 ω 的一个有限集划分，使得所有线性选择子都属于 $\mathscr{I}$。取 $i_0<i_1<\cdots<\omega$使得 $|P_j|\leq|P_{i_j}^{\rm exp}|$，并选择某个函数 $f\in\omega^\omega$，使得对所有 j，$f(i_j)=j$。必要时，对 $(i_j)_{j<\omega}$ 取子序列，我们可以假设 $f\ll\exp$。令 $g\colon\omega\to\omega$ 为一个单射，使得$g(P_j)\subseteq P_{i_j}^{\rm exp}$。为证明 g是 $\mathscr{I}_L^f\leq_{\rm KB}\mathscr{I}$的见证，假设 $A\in\mathscr{I}_L^f$，并证明 $B:=g^{-1}(A)\in\mathscr{I}$。取 $k<\omega$，使得对每个 $i<\omega$，$|A\cap P\text{exp}_i|\leq k\cdot f(i)$。对每个 $j<\omega$，$|B\cap P_j|=|g(B\cap P_j)|\leq|A\cap P\text{exp}_{i_j}|\leq k\cdot f(i_j)=k\cdot j$，因此 B可以划分为 k 个集合 $(B_l)_{l<k}$，使得对每个 $j<\omega$，$|B_l\cap P_j|\leq j$。根据 (2)，每个 B_l 都属于 $\mathscr{I}$，因此 $B=\bigcup_{l<k}B_l\in\mathscr{I}$。□

推论 6.13. 设 $\mathscr{U}$ ω 上的一个超滤子。那么，当且仅当对所有满足 $1\ll f\ll\exp$ 的 $f\in\omega^\omega$，$\mathscr{I}_L^f\not\leq_{\rm KB}\mathscr{U}^*$ 时，$\mathscr{U}$ 是快速的。

对于以下结果，我们将在事实 2.4 中使用 Solecki 对解析 P-理想$\mathscr{I}=\text{Exh}(\phi)$ 的刻画。当 $\mathscr{I}$ 是高的时，次测度 ϕ 具有以下性质：

引理 6.14 ([HH07，引理 1。4])。 设 $\mathscr{I} = \mathrm{Exh}(\phi)$，其中 ϕ 是定义在 ω上的下半连续次测度。那么， $\mathscr{I}$ 是高的，当且仅当 极限$_{n\to\omega}\,\phi(\{n\}) = 0$。

命题 6.15。 每个高解析 *P*-理想都不是局部快速的。

证明。 设 $\mathscr{I}$ =Exh(ϕ)，其中 ϕ 是事实 2.4 中的下半连续次测度。归纳地，按如下方式取 $M_0 < M_1 < \cdots < \omega$： $M_0 := 0$，并且对于 $i > 0$,

$$M_i := \min\left\{M > M_{i-1} : \text{ for } n \geq M,\ \phi(\{n\}) \leq \frac{1}{i \cdot 2^i}\right\},$$

这由引理 6.14 可得。令 $P_i := [M_i, M_{i+1})$。为说明区间划分

$P = (P_i)_{i<\omega}$ 见证了命题 6.12 中的 (2)，假设 $A \subseteq \omega$ 是 P的线性选择子。对于 $i > i_0$:

$$\begin{aligned}\phi(A \cap P_i) &\leq \sum_{n\in A\cap P_i} \phi(\{n\}) \\ &\leq |A \cap P_i| \cdot \frac{1}{i \cdot 2^i} \leq \frac{1}{2^i}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\phi(A \setminus M_i) = \phi\left(A \cap \bigcup_{k\geq i} P_k\right) &= \sup_{i'\geq i} \phi\left(A \cap \bigcup_{i\leq k\leq i'} P_k\right) \\ &\leq \sup_{i'\geq i} \sum_{i\leq k\leq i'} \phi\left(A \cap P_k\right) \leq \sum_{i'\geq i} \frac{1}{2^{i'}} = \frac{1}{2^{i-1}}.\end{aligned}$$

因此，$\lim_{n\to\infty} \phi(A \setminus n) = 0$，所以 $A \in \mathscr{I} = \mathrm{Exh}(\phi)$。故 $\mathscr{I}$不是局部快速的。 □

我们以给出局部快速博雷尔理想的刻画来结束本节。Laflamme 在 [Laf96，第 4]，节中提出了这样的刻画，但他没有在论文中写出明确的表述，因此我们将其连同证明一并列出，以资记录。[8]沿用 [Laf96] 和 [KZ17], 的说法，我们称 ω 上的理想 $\mathscr{I}$可由 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 中的元素 - 对角化 ω，如果存在一个由 $\mathcal{A}$ 中的元素构成的序列 $\langle A_n\rangle_{n<\omega}$，使得

$$\forall X \in \mathscr{I}\ \exists n < \omega\ |A_n \cap X| < \omega.$$

根据定义，non$^*(\mathscr{I})$ $> \omega$ 当且仅当 $\mathscr{I}$ 不能由$[\omega]^\omega$中的元素进行 ω-对角化。引理 2.8 (2) 指出，若 $\mathscr{I}$ 是 Borel 的，这些条件也等价于$\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}} \leq_{\mathrm{KB}} \mathscr{I}$。我们引入以下 ω-对角化的变体。

定义 6.16。 我们称 $A \subseteq$ Fin 是无界[9]，如果对于任意 $k < \omega$，都存在 $a \in A$ 使得 $a \cap k = \emptyset$。对于定义在 ω 上且满足 $\mathcal{A} \subseteq [\mathrm{Fin}]^\omega$ 的理想 $\mathscr{I}$，若存在由 $\mathcal{A}$中的无界元素组成的序列 $\langle A_n\rangle_{n<\omega}$，使得

$$\forall X \in \mathscr{I}\ \exists n < \omega\ |\{a \in A_n : a \subseteq X\}| < \omega.$$

接下来，我们根据 Laflamme 的建议介绍局部快速理想博弈 $\mathcal{G}_{\text{local-rapid}}(\mathscr{I})$。该博弈由 ω 个回合组成，其典型过程如下所示。

I	X_0		X_1	$\cdots$
II		s_0		s_1 $\cdots$

[8]注意，一个理想是局部快速的，当且仅当其对偶滤子按 Laflamme 的意义是弱快速的。[9]这一术语曾用于 [HMM10]。在 [Laf96]中，无界性也称为 Fr-普遍性，其中 Fr 是弗雷歇滤子。

在此博弈中，玩家 I 必须在 ω 的有限子集 X_n 上进行操作，而玩家 II 必须通过选择 $s_n \in [\omega \setminus X_n]^{\leq n}$ 作出回应。当且仅当 $\bigcup_{n<\omega} s_n \in \mathscr{I}$ 时，玩家 I 获胜。

命题 6.17 (Laflamme [Laf96])。设 $\mathscr{I}$ 是 ω上的一个理想。则以下结论成立。

(1) 当且仅当 $\mathscr{I}$ 不是局部快速的，玩家 *I* 在 $\mathcal{G}_{\textit{local-rapid}}(\mathscr{I})$ 中有获胜策略。(2) 当且仅当 $\mathscr{I}$ 能由 $\bigcup_{n<\omega}[[\omega]^{\leq n}]^{\omega}$的无界元素进行 ω-对角化，玩家 *II* 在 $\mathcal{G}_{\textit{local-rapid}}(\mathscr{I})$ 中有获胜策略。

博雷尔决定性立即给出了所需的刻画。

推论 6.18。对于 ω上的任意博雷尔理想 $\mathscr{I}$，$\mathscr{I}$ 是局部快速的，当且仅当它能由 $\bigcup_{n<\omega}[[\omega]^{\leq n}]^{\omega}$的无界元素进行$\omega$-对角化。

在命题 6.17 的证明中，我们使用以下记号。对于玩家 I 的任意策略 σ 以及玩家 II 的任意一步 s，$\sigma * s$ 表示玩家 I 根据策略 σ 对抗 s时的下一步。类似地，对于玩家 II 的任意策略 τ 以及玩家 I 的任意一步 X，$X * \tau$ 表示玩家 II 根据策略 τ 对抗 X时的下一步。

命题 *6.17* 的证明。为证明 (1)，假设 $\mathscr{I}$ 不是局部快速的，其见证是将 ω 划分为有限集的划分 $\langle P_n\rangle_{n<\omega}$。我们为玩家 I 定义策略 σ 如下：

$$\sigma * \langle s_0, \dots, s_{n-1}\rangle = \bigcup\{P_k : k < n \wedge P_k \cap \bigcup_{i<n} s_i \neq \emptyset\}$$

为证明 σ 是玩家 I 的获胜策略，假设玩家 II 用 $\langle s_i\rangle_{i<\omega}$ 对抗 σ。令 $S = \bigcup_{i<\omega} s_i$。那么对所有 $n < \omega$，存在 $k \leq n$ 使得 $S \cap P_n \subseteq s_k$，从而 $|S \cap P_n| \leq k \leq n$。由 $\langle P_n\rangle_{n<\omega}$ 的选择可知，$S \in \mathscr{I}$。因此玩家 I 赢得了这场游戏。

现在假设玩家 I 有一个获胜策略 σ。令 $g \in \omega^{\omega}$，使得 $\sigma(\emptyset) \subseteq g(0)$，并且对每个 $n < \omega$，

$$\bigcup\{\sigma * \langle s_0, \dots, s_n\rangle : \forall i \leq n\,(s_i \subseteq g(n))\} \subseteq g(n+1).$$

令 $P_0 = [0, g(1))$，并且对所有 $n < \omega$，$P_{n+1} = [g(n+1)\ g(n+2))$。反设 $\mathscr{I}$ 是局部快速的。那么存在 $S \in \mathscr{I}^+$，使得对所有 $n < \omega$，$|S \cap P_n| \leq n$。取这样一个 S，并对每个 $i < 2$，令 $S_i = S \cap \bigcup_{k<\omega} P_{2k+i+1}$。由于 $S = (S \cap P_0) \cup S_0 \cup S_1$，我们有 $S_i \in \mathscr{I}^+$，其中某个 $i < 2$。假设 $S_0 \in \mathscr{I}^+$，玩家 II 可以通过出 $s_{2k} = \emptyset$ 并对所有 $k < \omega$ 出 $s_{2k+1} = S_0 \cap P_{2k+1}$，击败 σ。在另一种情况下，玩家 II 也可以用类似的方法击败 σ，这就矛盾了。

为证明（2），假设 $\mathscr{I}$ 被 ω 通过由 $\bigcup_{n<\omega}[[\omega]^{\leq n}]^{\omega}$ 中无界元素组成的序列 $\langle A_n\rangle_{n<\omega}$ 对角化。如有必要，将 $[\omega]^n$ 加入该序列中，我们可以假设对所有 $n < \omega$ 都有 $A_n \subseteq [\omega]^{\leq n}$。固定一个满射 π: $\omega \to \omega$，使得对所有 $n < \omega$，$\pi(n) \leq n$ 且 $|\pi^{-1}(n)| = \omega$。然后，我们为玩家 II 定义一个策略 τ，如下：

$$\langle X_0, \dots, X_n\rangle * \tau = \text{the lexicographically least element of } A_{\pi(n)} \cap [\omega \setminus (X_n \cup n)]^{\leq \pi(n)}.$$

由于所有 A_n 都是无界的，这一定义是良好的。为证明 τ 是玩家 II 的获胜策略，设 $\langle s_n\rangle_{n<\omega}$ 是玩家 II 在 τ 之后的一步。集合 $S := \bigcup_{n<\omega} s_n$ 包含每个 A_n 中的无限多个成员。由于 $\mathscr{I}$ 被 $\langle A_n\rangle_{n<\omega}$ 对角化，ω，$S \in \mathscr{I}^+$。

最后，假设玩家 II 在这个游戏中有一个获胜策略 τ。我们通过归纳法定义 X_s玩家 II 遵循 τ时每一步可能采取的行动 s。具体如下：

根据 s 的长度进行定义：令 $X_\emptyset = \{\langle X\rangle * \tau$：$X \in$ 有限集理想$\}$。对每个 $s \in X_\emptyset$，选取 $X^s_\emptyset$ 使得 $\langle X^s_\emptyset\rangle * \tau = s$。对于任意满足 X_s 有定义的 s 以及任意 $t \in X_{\vec{s}}$，定义

$$X_{\vec{s}^\frown t} = \{\langle X^{s_0}_\emptyset, \dots, X^t_{\vec{s}}, X\rangle * \tau : X \in \mathrm{Fin}\},$$

并对每个 $u \in X_{s^\frown t}$，选择 $X^u_{s^\frown t}$，使得 $\langle X^{s_0}_\emptyset$，……，$X^t_s$，$X^u_{s^\frown t}\rangle * \tau = u$。我们声称，$\mathscr{I}$ 可由所有集合 X_s 组成的族 ω-对角化。反之，假设并非如此。那么存在 $Y \in \mathscr{I}$，使得对于任意满足 X_s 有定义的 s，都有无穷多个 $t \in X_s$，

$$\langle X^{s_0}_\emptyset, \dots, X^t_{\vec{s}}\rangle * \tau \subseteq Y.$$

于是很容易构造出一局由玩家 I 获胜的对局，而玩家 II 遵循 τ。这是矛盾。□

参考文献

[Bar87] Tomek Bartoszyński. “测度与纲的组合方面”。载于：《*Fundamenta Mathematicae*》127.3 (1987)，第 225–239 页。doi: 10.4064/fm-127-3-225-239.[BCM 25] Jörg Brendle、Miguel A. Cardona 和 Diego A. Mejía。“分离强零测理想的基数特征”。载于：《数理逻辑杂志》0.0 (2025)，第 2550012 页。doi: 10.1142/S0219061325500126。预印本：https://doi.org/10.1142/S0219061325500126.[BF17] Jörg Brendle 和 Jana Flašková。“自然数集上超滤子的泛型存在性”。载于：《*Fundamenta Mathematicae*》236.3 (2017)，第 201–245 页。doi: 10. 4064/fm730-5-2016.[BHH04] B. Balcar、F. Hernández-Hernández 和 M. Hrušák。“有理数稠密子集的组合学”。载于：《*Fundamenta Mathematicae*》183.1 (2004)，第 59–80 页。doi: 10.4064/fm183-1-4.[BJ95] Tomek Bartoszyński 和 Haim Judah。《集合论：实数直线的结构》。A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995，第 xii+546 页。[Bla10] Andreas Blass。“连续统的组合基数特征”。载于：《集合论手册，第 *1*、*2*、*3* 卷》。Springer, Dordrecht, 2010，第 395– 489 页。doi: 10.1007/978-1-4020-5764-9_7.[BM 14] Jörg Brendle 和 Diego Alejandro Mejía。“碎片化理想中的 Rothberger 间隙”。载于：《*Fundamenta Mathematicae*》227.1 (2014)，第 35–68 页。doi: 10.4064/fm227-1-4.[Bre03] Jörg Brendle。“逃逸与预测。III. 常值预测与支配实数”。载于：《日本数学会杂志》55.1 (2003)，第 101–115 页。doi: 10. 2969/jmsj/1196890844.[Bre91] Jörg Brendle。“Cichoń 图中的较大基数”。载于：《符号逻辑杂志》56.3 (1991)，第 795–810 页。doi: 10.2307/2275049.[Bre95] Jörg Brendle。“逃逸与预测——Specker 现象与 Gross 空间”。载于：《*Forum Mathematicum*》7.7 (1995)。doi: 10.1515/form.1995. 7.513.[BS03] Jörg Brendle 和 Saharon Shelah。“逃逸与预测。IV. 常值预测的强形式”。载于：《数学逻辑文献》42.4 (2003)，第 349– 360 页。doi: 10.1007/s001530200143.[BS87] Andreas Blass 和 Saharon Shelah。“可能存在简单的 $P_{\aleph_1}$-点和 $P_{\aleph_2}$-点，且 Rudin–Keisler 序可能是向下有向的”。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》33.3 (1987)，第 213–243 页。doi: 10.1016/0168-0072(87) 90082-0.

[BS99] Jörg Brendle 和 Saharon Shelah。“ ω上的超滤子——它们的理想及其基数特征”。载于：美国数学会汇刊 351.7 (1999)，第 2643– 2674 页。doi: 10.1090/S0002-9947-99-02257-6.[BTW82] J. E. Baumgartner、A. D. Taylor 和 S. Wagon。《理想的结构性质》。英文版。华沙：波兰科学院数学研究所，1982。[CGHY24] Jorge Antonio Cruz Chapital、Tatsuya Goto、Yusuke Hayashi 和 Takashi Yamazoe。“分裂数的博弈论变体”。见 https: //arxiv.org/abs/2412.19556。2024。[CGM+24] Miguel A. Cardona、Viera Gavalová、Diego A. Mejía、Miroslav Repický 和 Jaroslav Šupina。“斜槽数”。见 https://arxiv.org/abs/2406.19901。2024。[CM19] Miguel A. Cardona 和 Diego A. Mejía。“关于 Yorioka 理想的基数特征”。载于：Mathematical Logic Quarterly 65.2 (2019)，第 170– 199 页。doi: https://doi.org/10.1002/malq.201800034。预印本：https: //onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/malq.201800034.[CM22] Miguel A. Cardona 和 Diego A. Mejía。“利用图基序强迫构造 Cichoń 图的组合结构”。载于：Kyoto Daigaku Surikaiseki Kenkyusho Kokyuroku 2213 (2022)，第 14–17 页。[CM23] Miguel A. Cardona 和 Diego A. Mejía。“局部化与反局部化基数”。载于：Kyoto Daigaku Surikaiseki Kenkyusho Kokyuroku 2261 (2023)，第 47–77 页。[CM25] Aleksander Cieślak 和 Arturo Martínez-Celis。“关于与 Laver 树和 Miller 树相关的理想”。载于：符号逻辑杂志 (2025)，第 1–19 页。doi: 10.1017/jsl.2025.10130.[CMR25] Miguel Antonia Cardona、Diego Alejandro Mejía 和 Ismael Rivera-Madrid。“零测可加理想与瘦集可加理想的一致性数”。载于：符号逻辑杂志 (2025)，第 1–37 页。doi: 10.1017/jsl.2025. 10105.[CR25] Miguel A. Cardona 和 Miroslav Repický。常值预测数与逃逸数，I：推广与变体。2025。arXiv: 2507 . 11339[math.LO]。[CRS25] Miguel A. Cardona、Miroslav Repický 和 Saharon Shelah。“强零测理想基数特征的更多分离”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2502.01646 (2025)。[DFGT21] Pratulananda Das、Rafał Filipów、Szy mon Głąb 和 Jacek Tryba。“Katětov 序中介于理想 $\mathcal{ED}$ 与 Fin $\otimes$ Fin 之间的博雷尔理想结构”。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》172.8 (2021)，论文编号 102976，共 17 页。doi: 10.1016/j.apal.2021.102976.[FK25] Rafał Filipów 和 Adam Kwela。“无法区分理想逐点收敛与 σ-一致收敛的空间”。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》176.9 (2025)，第 103609 页。doi: https://doi.org/10.1016/j.apal.2025.103609.[Fre91] D. H. Fremlin。“测度论偏序集与图基序”。载于：第 11 卷。谨以此卷纪念 Gottfried Köthe 教授。1991，第 177–214 页。[GKMS21a] Martin Goldstern、Jakob Kellner、Diego A. Mejía 和 Saharon Shelah。“不添加实数而控制基数特征”。载于：《数理逻辑杂志》21.3 (2021)，论文编号 2150018，共 29 页。doi: 10.1142/S0219061321500185。

[GKMS21b] Martin Goldstern、Jakob Kellner、Diego A. Mejía 和 Saharon Shelah。《分裂族的保持与连续统的基数特征》。载于：《以色列数学杂志》246.1（2021），第 73–129 页。doi: 10.1007/s11856- 021-2237-7。[GKMS22] Martin Goldstern、Jakob Kellner、Diego A. Mejía 和 Saharon Shelah。《无需大基数的 Cichoń 极大值》。载于：《欧洲数学会杂志》24.11（2022），第 3951–3967 页。doi: 10.4171/jems/1178。[GKS19] Martin Goldstern、Jakob Kellner 和 Saharon Shelah。《Cichoń 极大值》。载于：《数学年刊》（第 2 辑）190.1（2019），第 113–143 页。doi: 10 .4007 / annals.2019.190.1.2。[GMS16] Martin Goldstern、Diego Alejandro Mejía 和 Saharon Shelah。《Cichoń 图的左侧》。载于：《美国数学会会刊》144.9（2016），第 4025–4042 页。doi: 10.1090/proc/13161。[HH07] Fernando Hernández-Hernández 和 Michael Hrušák。《解析 P 理想的基数不变量》。载于：《加拿大数学杂志》 59.3 （2007），第 575–595 页。doi: 10.4153/CJM-2007-024-8。[HMM10] Michael Hrušák、David Meza-Alcántara 和 Hiroaki Minami。《 F_σ理想的对分裂、对收割与基数不变量》。载于：《符号逻辑杂志》75.2（2010），第 661–677 页。doi: 10.2178/jsl/1268917498。[HMTU17] M. Hrušák、D. Meza-Alcántara、E. Thümmel 和 C. Uzcátegui。《理想的 Ramsey 型性质》。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》168.11（2017），第 2022–2049 页。doi: 10.1016/j.apal.2017.06.001。[Hru11] Michael Hrušák。《滤子与理想的组合学》。载于：《集合论及其应用》，第 533 卷。《当代数学》。美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2011 年，第 29–69 页。doi: 10.1090/conm/533/10503。[Hru17] Michael Hrušák。《博雷尔理想上的 Katětov 序》。载于：《数学逻辑文献》56.7-8（2017），第 831–847 页。doi: 10.1007/s00153-017-0543-x。[HRZ14] Michael Hrušák、Diego Rojas-Rebolledo 和 Jindřich Zapletal。《博雷尔理想的共尾性》。载于：《数学逻辑季刊》60.1-2（2014），第 31–39 页。doi: 10.1002/malq.201200079。[JS90] Haim Judah 和 Saharon Shelah。《Kunen-Miller 图表（勒贝格测度、贝尔性质、Laver 实数与强迫的保持定理）》。载于：《符号逻辑杂志》55.3（1990），第 909–927 页。doi: 10.2307/2274464。[Kad00] Masaru Kada。《关于 Cichoń 图与无限博弈的进一步研究》。载于：《符号逻辑杂志》65.4（2000），第 1713–1724 页。doi: 10.2307/2695071。[Kam00] Shizuo Kamo。《与预测器相关的基数不变量》。载于：逻辑研讨会 ’98（布拉格）。第 13 卷。《逻辑学会符号逻辑讲义》，伊利诺伊州厄巴纳，2000 年，第 280–295 页。[Kam01] Shizuo Kamo。《与预测器相关的基数不变量 II》。载于：《日本数学会杂志》53.1（2001），第 35–57 页。doi: 10.2969/jmsj/05310035。[Kho11] Yurii Khomskii。《实数连续统中的正则性性质与可定义性：射影层级中的理想化强迫、极化分割、Hausdorff 间隙与极大几乎不交族》。博士论文。阿姆斯特丹大学，2011。[KZ17] A. Kwela 和 P. Zakrzewski。《理想的组合学——选择性与稠密性》。载于：《查理大学数学评论》58.2（2017），第 261–266 页。doi: 10.14712/1213-7243.2015.203。[Laf96] Claude Laflamme。《滤子博弈与策略的组合性质》。载于：集合论（爱达荷州博伊西，1992–1994）。第 192 卷。《当代数学》。美国数学会，

美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），1996 年，第 51–67 页。doi: 10. 1090 / conm/ 192 / 02348。[LV99] Alain Louveau 和 Boban Velickovic。《解析理想与共尾类型》。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》99.1-3（1999），第 171–195 页。doi: 10.1016/S0168- 0072(98)00065-7。[Maz91] Krzysztof Mazur。《F_σ理想与布尔代数 $P(\omega)/I$ 中的 $\omega_1\omega_1^*$ 间隙》。载于：《 Fundamenta Mathematicae 》 138.2 （ 1991），第 103–111 页。doi: 10.4064/fm-138-2-103- 111。[Mej13] Diego A. Mejía。《矩阵迭代与 Cichoń 图》。载于：《数学逻辑文献》52.3-4（2013），第 261–278 页。doi: 10.1007/s00153-012-0315-6。[Mej19] Diego A. Mejía。《带垂直支撑限制的矩阵迭代》。载于：第 14 届和第 15 届亚洲逻辑会议论文集。World Scientific。2019 年，第 213–248 页。doi: 10.1142/9789813237551_0012。[Mil12] Arnold W. Miller。《Hechler 树与 Laver树》。见 https://arxiv. org/abs/1204.5198。2012。[Mil82] Arnold W. Miller。《贝尔纲定理失效时所对应的最小基数的刻画》。载于：《美国数学会会刊》86.3（1982），第 498–502 页。doi: 10.2307/2044457。[Paw00] Janusz Pawlikowski。《密度零斜线》。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》103.1-3（2000），第 39–53 页。doi: 10.1016/S0168-0072(99)00018-4。[Paw85] Janusz Pawlikowski。《测度与纲的传递基的幂》。载于：《美国数学会会刊》93.4（1985），第 719–729 页。doi: 10 . 2307 / 2045552。[Rag20] Dilip Raghavan。《密度零理想与分裂数》。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》171.7（2020），第 102807 页，共 15 页。doi: 10.1016/j.apal.2020. 102807。[RS17] Dilip Raghavan 和 Saharon Shelah。《基数不变量之间的两个不等式》。载于：《Fundamenta Mathematicae》237.2（2017），第 187–200 页。doi: 10 . 4064 / fm253-7-2016。[She00] Saharon Shelah。《零测理想的覆盖可能具有可数共尾性》。载于：第 166 卷，第 1-2 期。Saharon Shelah 纪念专辑。2000 年，第 109–136 页。doi: 10.4064/fm-166-1-2-109-136。[She92] Saharon Shelah。《差异万岁 I：可数模型的超幂非同构》。载于：连续统集合论（加利福尼亚州伯克利，1989）。第 26 卷。数学科学研究所出版物。Springer，纽约，1992 年，第 357–405 页。doi: 10.1007/978-1-4613-9754-0_20。[Sol99] Sławomir Solecki。《解析理想及其应用》。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》99.1-3（1999），第 51–72 页。doi: 10 . 1016 / S0168 - 0072(98) 00051-7。[Šup23] Jaroslav Šupina。《伪交数、理想斜线、拓扑空间与基数不等式》。载于：《数学逻辑文献》62.1-2（2023），第 87–112 页。doi: 10.1007/s00153-022-00832-8。[SZ 11] Marcin Sabok 和 Jindřich Zapletal。《闭集理想的强迫性质》。载于：《符号逻辑杂志》76.3（2011），第 1075–1095 页。doi: 10.2178/jsl/ 1309952535。[Tod96] Stevo Todorčević。《解析间隙》。载于：《Fundamenta Mathematicae》150.1（1996），第 55–66 页。doi: 10.4064/fm-150-1-55-66。

[Voj92] Peter Vojtáš。《非中心子集系统的基数》。载于：《离散数学》108.1（1992），第125–129页。doi：https://doi.org/ 10.1016/0012-365X(92)90666-4。[Yam24] Takashi Yamazoe。《Cichoń 最大值与闭零理想的基数》。见 https://arxiv.org/abs/2412.09069。2024。[Yam25] Takashi Yamazoe。《Cichoń 最大值与躲避数》。载于：《符号逻辑杂志》（2025年1月），第1–31页。doi：10.1017/jsl.2024.65。[Zap08] Jindřich Zapletal。《理想化强迫》。第174卷。《剑桥数学论丛》。剑桥大学出版社，剑桥，2008年，第vi+314页。doi：10.1017/CBO9780511542732。弗罗茨瓦夫科技大学纯数学与应用数学学院，Wybrzeże Stanisława Wyspiańskiego 27，50-370 弗罗茨瓦夫，波兰。电子邮箱：aleksander.cieslak@pwr.edu.pl 维也纳工业大学离散数学与几何研究所，Wiedner Hauptstraße 8-10/104，1040 维也纳，奥地利。电子邮箱：takehiko.gappo@tuwien.ac.at 弗罗茨瓦夫大学数学研究所，pl. Grunwaldzki 2，50-384 弗罗茨瓦夫，波兰。电子邮箱：arturo.martinez-celis@math.uni.wroc.pl 神户大学系统信息学研究生院，Rokko–dai 1–1，Nada–ku，657–8501 神户，日本。电子邮箱：212x502x@cloud.kobe-u.jp