arXiv:2601.07445v1 [physics.bio-ph] 12 Jan 2026

噪声增强气味源定位

Francesco Marcolli、Martin James 和 Agnese Seminara*
Machine Learning Genoa Center (MaLGa) & Department of Civil, Chemical and Environmental Engineering, University of Genoa, Genoa, Italy（日期：2026年1月12日）

我们研究了在湍流环境中推断释放气味的目标位置这一问题。推断所需的输入信息由散布在气味羽流中的众多传感器提供。受生物学中的分布式化学感知启发，我们探讨推断准确度是否会受到本体感觉噪声的影响，即传感器感知位置上的噪声。令人惊讶的是，在存在净流体流动的情况下，本体感觉噪声不仅不会降低贝叶斯推断的性能，反而会提高它。存在一种最优噪声，能够有效利用隐藏在气味羽流几何结构中的额外信息。在一定距离范围内，对噪声进行经验调节即可发挥良好作用，并且在实践中可以实现。其他噪声源也能提高准确率，这是因为它们能够打破湍流羽流的时空相关性。噪声的这些反直觉益处可用于改善生物学和机器人学中的感觉处理。

I. 引言

章鱼和其他头足类一样，具备分布式感觉系统：它们的八条腕上布满吸盘，每个吸盘中含有数千个感觉细胞，能够探测来自表面和水体本身的化学与机械线索 [1–9]。即使缺乏视觉，化学信息也能促进实验室中的猎物位置定位 [8]。在这些实验中，猎物释放的化学物质由水流携带，形成含噪且稀疏的羽流，这类似于野外的真实条件，而这些条件通常受湍流主导。因此，这些生物利用分布式化学感知作为远距感觉，进行湍流导航。为此，必须从散布于其全身的化学感受细胞阵列中提取信息。机器人学广泛研究了类似问题：利用化学传感器阵列所提供的分布式信息，定位化学品泄漏等 [10–12]。

为了处理分布式信息，机器人学中的算法通常会将各个传感器的独立读数与其在空间中的位置结合起来 [13–15]。同样，动物通常也会将每个感觉细胞的独立信号与该细胞在空间中的位置信息结合起来，而这种位置信息被编码在大脑中感觉器官的拓扑地图内 [16–22]。

相比之下，章鱼似乎缺乏大脑中感觉输入和运动控制的躯体定位图，这一点与编码柔性身体形状所面临的挑战有关 [23, 24]。事实上，吸盘内细胞的位置不足以确定该细胞在空间中的位置，因为相对于身体其余部分，吸盘可以自由移动很远。要绘制器官本身的地图，就需要结合本体感觉；本体感觉使动物能够感知自身身体各部分的位置，即身体各部分在空间中的位置。尽管缺乏躯体定位，行为实验表明，章鱼很可能具备一定程度的本体感觉 [25–29], ，这或许得益于某种具身机制 [30]。然而，精确的本体感觉反馈在多大程度上传递到大脑，仍有待确定 [31]。因此，尽管传感器在空间中的位置信息可能含有噪声，章鱼仍能从湍流气味的分布式测量值中提取有用信息。但要解读它们的集体读数，许多化学传感器的位置信息是否至关重要？回答这一问题将直接关乎软体机器人学的发展，有助于设计受章鱼启发的算法，用于化学源的多传感器定位。受章鱼分布式化学感知的启发，我们研究了一个由多个传感器组成的虚拟智能体；这些传感器能够在湍流环境中探测气味，而湍流环境取自直接数值模拟。我们探讨，关于传感器位置的准确信息，是否是推断释放气味的嗅觉目标位置所必需的。令人惊讶的是，位置噪声并不会降低对目标位置的瞬时贝叶斯推断精度，反而会提高精度。我们表明，含噪推断利用了风或水流存在时气味各向异性中隐藏的额外信息。噪声存在一个最优水平，具体取决于未知的目标位置。通过建立渐近理论，我们表明，可以通过经验方式调节噪声，使其近似于未知的最优噪声。其他位置噪声和感觉噪声来源也能改善推断，其作用机制是部分修正模型设定错误。

我们的结果表明，在存在湍流的情况下，处理分布式化学感知并不总是需要准确的本体感觉。相反，生命系统和非生命系统都可能利用噪声来提升其感觉系统的预测能力。

* agnese.seminara@unige.it

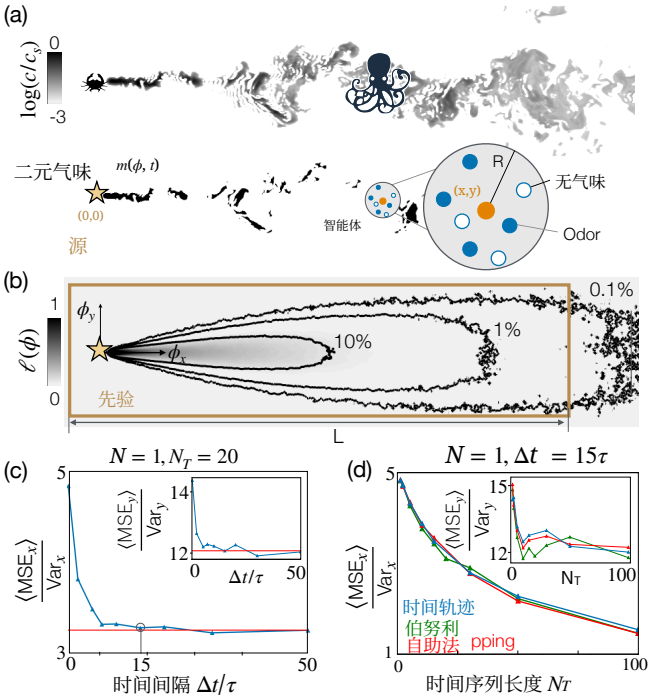


图1。（a）通过直接数值模拟（上图）获得的由嗅觉目标（螃蟹）释放的气味场 $c(\boldsymbol{\phi})$ 快照及其二值化版本 $m(\boldsymbol{\phi})$（下图）。多传感器智能体表示为一个半径为 R、中心位于（x、y）的圆；实心点和空心点分别表示能够检测到气味和未检测到气味的 N 传感器。我们的目标是根据二元气味检测推断中心的坐标（x、y）。（b）经验似然 $\ell(\boldsymbol{\phi}) = \langle m(\boldsymbol{\phi})\rangle$。棕色矩形界定了均匀先验。（c）$x$ 坐标（主图）和 y 坐标（插图）中的均方误差，针对全部52个点（x、y）取均值：$\langle \mathrm{MSE}_x\rangle = 1/52\sum_{i=1}^{52} \mathrm{MSE}_x^i$，针对使用单个传感器和 $N_T = 20$ 个时间点进行推断，这些时间点以固定间隔 Δt 采样（蓝线）。对于 $\Delta t \gtrsim 15\tau$，$\langle \mathrm{MSE}_x\rangle$在3.3$\mathrm{Var}_x$处达到平台，与在整个模拟过程中随机采样相同数量时间点时的预测准确度相匹配（红线），证实测量值不相关。（d）单个传感器和不断增加的时间点数量 N_T 时的结果，与（c）相同；时间点以相等间隔 $\Delta t = 15\tau$采样。

II. 结果

建模与方法论：我们考虑一个嗅觉智能体，它由随机分布在一个圆内的 N 个传感器组成；该圆的半径为 R，圆心位于 $\boldsymbol{\xi} = (x,\ y)$。传感器 i 位于 $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi} + (x_i,\ y_i)$，其中 $(x_i,\ y_i)$ 是相对于中心的坐标。坐标系原点处有一个目标，它在存在湍流时释放气味（图 1a）。任意时刻 t、任意位置 $\boldsymbol{\phi}$ 的气味场 $c(\boldsymbol{\phi},\ t)$，由湍流明渠流的计算流体力学模拟得出，详情见附录。在全文中，空间尺度均以 Δx 为单位，即模拟的网格间距（见表II）。智能体的灵敏度阈值为 c_0，并进行二值测量 m，（图 1a，下方）如下：

$$m(\boldsymbol{\phi},t) = \begin{cases} 1, & \text{if } c(\boldsymbol{\phi},t) \geq c_0 \text{ and} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

我们假设智能体拥有一个经验模型，用于估计在任意位置 $\boldsymbol{\phi}$ 检测到气味的似然：

$$\ell(\boldsymbol{\phi}) = p\,(m = 1 \mid \boldsymbol{\phi}) = \bar{m}(\boldsymbol{\phi}) \tag{2}$$

其中，$\bar{m}(\boldsymbol{\phi})$ 表示 m 的时间平均值，并假设气味场 c 在统计上是平稳的（图 1b）。我们将通过数值模拟得到的二维气味场快照计算 $\bar{m}(\boldsymbol{\phi})$ 的经验平均值；理论结果则使用式（8）。

智能体利用来自 N 个相互独立的传感器 [32]，的贝叶斯推断，推断其中心的位置为 $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \mathrm{argmax}_{\boldsymbol{\xi}} \prod_{i=1}^{N} L(m_i|\boldsymbol{\xi})\, p(\boldsymbol{\xi})$，其中 $p(\boldsymbol{\xi})$ 是均匀先验（图 1b 中的棕色矩形）。推断在二维空间中进行，即 $\boldsymbol{\xi} = (\hat{x},\ \hat{y})$。此处，$L(m_i|\boldsymbol{\xi})$ 表示在中心位于 $\boldsymbol{\xi}$ 时，第 $i-$ 个传感器检测到 m_i 的似然：

$$L(m_i|\boldsymbol{\xi}) = \int \ell_i^{m_i}(1-\ell_i)^{1-m_i} p(\boldsymbol{\phi}_i|\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\phi}_i \tag{3}$$

其中 $\ell_i = \ell(\boldsymbol{\phi}_i)$取决于物理学，而 $p(\boldsymbol{\phi}_i|\boldsymbol{\xi})$表示位置信息，即本体感觉。我们从对两个位置信息自由度进行建模开始：

$$p(\boldsymbol{\phi}_i|\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \delta(\boldsymbol{\phi}_i - \boldsymbol{\xi}_i(\boldsymbol{\xi})) & \text{Perfect} \\ \delta(\boldsymbol{\phi}_i - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_i(\boldsymbol{\xi})) & \text{Noisy} \end{cases} \tag{4}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i$ 是相对于中心的感知传感器位置，对应于真实相对位置的含噪测量值：$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i = \boldsymbol{\xi}_i + \boldsymbol{\gamma}_i$。这里，$\boldsymbol{\gamma}_i \sim \mathcal{N}_T(0, \eta^2)$取自均值为零、标准差为 η的高斯分布，并截断于$(-\eta - 1, \eta + 1)$之间。因此，含噪本体感觉描述了这样一种情形：智能体认为其传感器位于位置 $\boldsymbol{\xi}_i$，却没有意识到这些并非正确位置 $\boldsymbol{\xi}_i$。相比之下，完美本体感觉指智能体利用关于其传感器间相对位置的精确信息。

为了量化推断准确度，我们评估推断位置与真实位置之间的均方误差 $\mathrm{MSE}_x = \frac{1}{N_r}\sum_{i=1}^{N_r}(\hat{x_i} - x)^2$ 和偏差 $b_x = \frac{1}{N_r}\sum_{i=1}^{N_r}(\hat{x}_i - x)$（坐标也同理）——这里，$i$遍历针对目标同一位置 $\boldsymbol{\xi} = (x, y)$进行推断的 N_r 次实现。

单个传感器。气味场的波动、间歇性和稀疏性，使得在湍流环境中进行气味源定位成为一个困难的问题 [33–39]。单个二元传感器显然无法提供良好的瞬时推断。然而，智能体可以利用由其单个

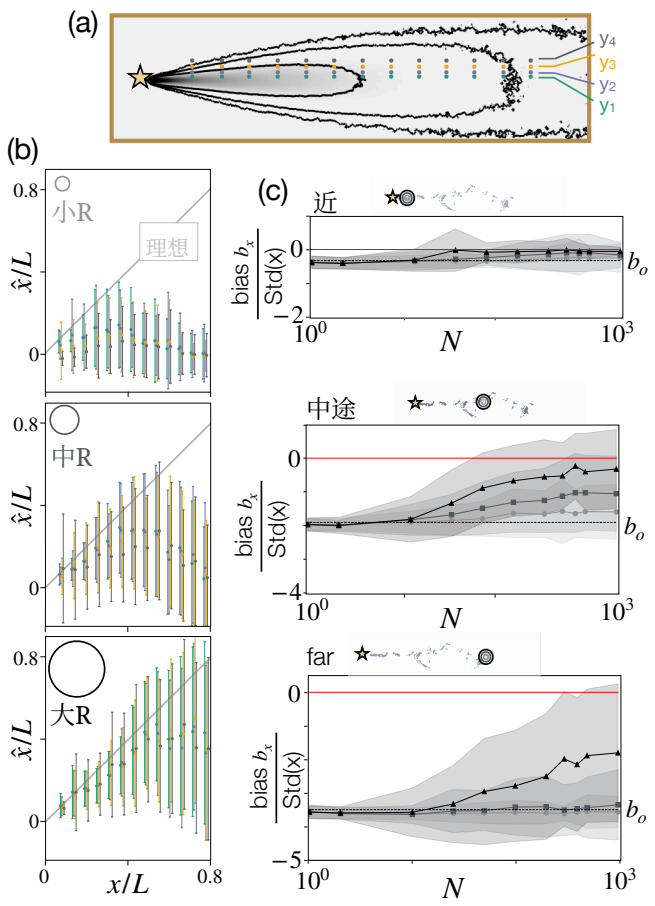


图2. 由于气味信号中的相关性，使用多个传感器并具备完美本体感觉时，进行瞬时推断仍颇具挑战。(a) 区域内测试点示意图。(b) 最大后验估计$\hat{x}$ *vs* 真实值 x，以及 200 次实现的均值和标准差。颜色表示相对于中心线的不同位置 y，中心线示意于 (a) 中。灰线：理想估计$\hat{x} = x$。随着 x 增大，检测变得稀少，准确率会下降；而随着 R 增大，智能体收集到的气味测量值彼此越来越独立，准确率会提高。(c) 智能体远离源时，性能会下降。偏差 $b_x = \sum_{i=1}^{N_r}(\hat{x}_i - x)/N_r$，其中 N_r 为实现次数，并以 x 的标准差 Std(x) 归一化；结果是传感器数量 N 的函数，$x/L = 0.23$，0。58，0。93 从上到下排列。均值（实线）和标准差（阴影）由各次实现计算，并对 y 的全部 4 个取值取平均。浅灰、中灰和深灰分别表示 $R = 10$，25，40 时的结果（单位为网格间距 Δx）。单个传感器的偏差 $b_0 = -0.327$，-1.904，-3.479，通过解析方法计算（见材料与方法）。

传感器收集的完整测量时间序列来改善推断。请注意，气味信号在时间上具有相关性，因此测量之间需要等待时间 $\Delta t \geq \tau_c$，以积累独立信息，其中 τ_c 是信号的相关时间。我们确认，在给定测量次数 $N_T = 20$的情况下，当我们将 Δt 增加到大约 10 至 $15\,\tau$ 以上时，均方误差会达到平台期（图 1c），其中 τ 是科尔莫戈罗夫时间尺度。在这些时间尺度下，气味线索实际上是不相关的，这一点也得到证实：在 $\Delta t \geq 10\tau$ 处，均方误差的渐近值与使用相同测量值数量的自助法数据计算得到的均方误差相当。 N_T

因此，我们固定 $\Delta t = 15\tau$，以确保气味测量值彼此不相关，并延长时间序列的持续时间。推断效果缓慢改善（图 1d），但经过 100 次测量后，误差仍在 1 的量级。作为参考， $100 \times 15\tau$ 相对较慢，例如，在大气的典型条件下，这可能相当于约 2 分钟。与上文一样，使用与原始信号相同的经验似然进行自助法与伯努利采样的比较，证实了这些测量值彼此不相关。通过适当处理时间序列，从气味线索更复杂的特征中提取其他有用信息，或许可以获得更好的结果 [36, 40, 41]。

具有完美本体感觉的多传感器推断。接下来，我们研究使用多个传感器进行瞬时推断，具体方法如第二节开头所述。我们重点考察位于 155 个位置$\boldsymbol{\xi}$ 的智能体，这些位置按矩形网格排列，包含 31×5 个位置，分布在 x 和 y （补充图 S1）。我们使用完美本体感觉进行贝叶斯推断（式（3）和式（4）中的第一式）。我们发现，性能会随着传感器数量 N 和智能体尺寸 R 的增大而提升，因为较大的 R 能进一步降低各个传感器之间的相关性（图 2a、b）。与单个传感器的偏差 b_0（通过解析方法计算，图 2b 中的虚线）相比，偏差显著减小。请注意，由于存在相关性，性能的提升最终会随着 N 而趋于饱和。结果在定性上不受与中线距离的影响（图 2a 中的颜色）；当智能体位于目标的更远顺风方向时，即使半径 R 很大，估计仍然相当不准确。

含噪本体感觉。（如何）位置信息含噪时，结果会如何变差？我们聚焦于同一网格中的真实 $\boldsymbol{\xi}$ 位置，并计算含噪本体感觉下的最大后验估计，与完美本体感觉下的估计进行比较（公式（3）和公式（4）的第二个公式，示意图见图 3a）。我们将 $N = 500$、 $R = 25$和 $\eta = 185$ 固定为网格间距 Δx的单位。我们首先量化 x–方向上的误差，并汇总目标近处区域中的所有位置 x 。在这个信息丰富的区域中，我们发现噪声会带来不利影响（图3b，上）。但令人惊讶的是，汇总中心区域内所有 x 的结果后，噪声变得无关紧要；而在最远区域的位置上，噪声甚至有益（图3b，中和下）。为了考察结果是否取决于噪声强度，我们改变噪声的取值，从$\eta = 0$ 到 $\eta = 10R$，重复进行了模拟。我们发现，在目标近处区域，任何程度的噪声都会带来不利影响，见图3c，上。在中间区域，大多数 η取值下噪声都有益，尤其是噪声取值为

$2R < \eta < 4R$ （图3c，中）。在离目标最远的区域内，噪声带来的益处尤为显著；较大的噪声值 $\eta \approx 7R$ 使均方误差相较于 $\eta = 0$降低了十倍以上，即相较于完美本体感觉的情况（图3c，下）。

最优噪声。为了系统地探究这一模式，我们分别考察每个点 x，而不是汇总各区域的结果。对于每个 x，我们扫描推断准确度随位置噪声幅度 η变化的情况。我们发现，在每个位置都存在一个能使均方误差$_x$ 最小化的最优噪声水平 $\eta^*(x)$（图 4a），且 $\eta^*(x)$会随 x系统性地增大（图 4b）。如果在每个位置将 η 调节至与当地的最优噪声 $\eta^*(x)$相匹配，那么直到区域末端，贝叶斯估计都会非常准确（图 4c）。请注意，由于噪声的影响，智能体感知到的自身尺寸大于实际尺寸。事实上，真实传感器位置是在一个大小为 R 的圆内提取的，随后在真实位置上叠加噪声，因此多传感器智能体感知到的尺寸为 $\sigma(\eta) \approx R + \eta$，而在最优噪声下：

$$\sigma(\eta^*) \approx R + \eta^* \tag{5}$$

因此，根据公式（5），噪声会增大智能体的感知尺寸，这将是理解其为何有益的关键。

几何论证：检测对。为了说明这种违反直觉的效应是如何产生的，我们现在简要介绍一个简单的几何论证，该论证仅依赖一对检测（图 5a）。设两个传感器被感知为垂直对齐：$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\pm} = (x,\ y \pm a)$，二者都检测到气味，$m_+ = m_- = 1$。由公式（3）和公式（4）的第二个等式可得 $(\hat{x},\ \hat{y}) = \arg\max_{(x,y)} \ell(x,\ y+a)\ell(x,\ y-a)\, p(x,\ y)$。只要先验是平坦的，后验便是将似然沿 $\pm a$ 方向垂直平移后所得结果的乘积，其最大值位于图 5a 所示的两条等高线的交点处。这两条等高线可直接由似然的等值线$\phi_y = c_a(\phi_x)$得到，其最大值位于 a:$a = \max c_a(\phi_x)$。因此，根据这对检测得到的位置估计为：

$$\hat{x}_a = \arg\max_{\phi_x} c_a(\phi_x) \tag{6}$$

其中，$\hat{y} = 0$ 由对称性可得。我们在$\hat{x}_a$ 中添加下标 a，以强调一个重要之处：式（6）中的估计值$\hat{x}$ 仅取决于对检测对之间距离的感知，a。换言之，a 是一个用于调节$\hat{x}$ 的旋钮。具体而言，感知到的检测间距越大，估计距离$\hat{x}_a$ 也越大。显然，存在一个中间距离 a^*，可使估计准确 $x = \hat{x}_{a^*}$。该最优值定义如下：

$$\hat{x}_{a^*} = \arg\max_{\phi_x}(c^*(\phi_x)) = x \quad ; \quad a^* = \max(c^*(\phi_x)) \tag{7}$$

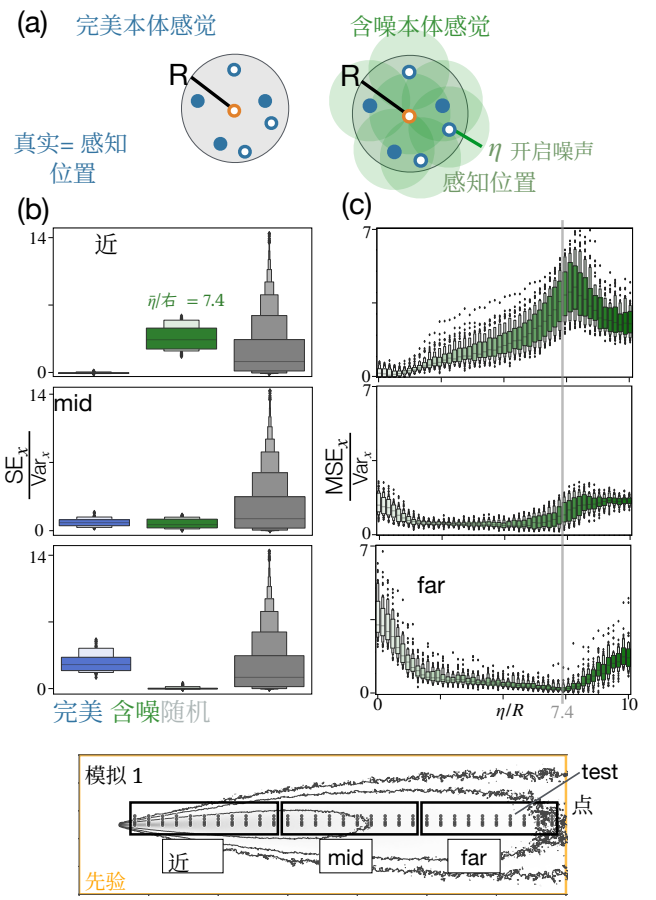


图 3. 本体感觉噪声可改善远离目标时的推断。(a) 完美本体感觉的智能体（左）和含噪本体感觉的智能体（右）示意图。(b) 平方误差 SE $= (\hat{x}_i - x_j)^2$ 在 $i \in (1,\ N_r)$ 和 $N_r = 100$ 次实现下的箱线图，涵盖源附近的 55 个测试位置 x_j（上）、中等距离的 50 个位置（中）以及远离源的 50 个位置（下）。完美本体感觉（蓝色）、噪声强度为 $\eta = 7.4R$ 的含噪本体感觉（绿色）。只有在源附近，完美本体感觉的表现才优于含噪本体感觉；远离源时，噪声可提高贝叶斯估计的准确率。图中还显示了先验$\hat{x}_{\text{random}} \sim P(x)$ 范围内的随机估计，以供比较（灰色）。(c) 集成中 j 个位置（由上至下依次为近、中、远）的均方误差 $\text{MSE}_x = \frac{1}{N_r}\sum_{i=1}^{N_r}(\hat{x}_i - x_j)^2$ 箱线图，横轴为噪声强度（η）相对于智能体大小（R）的比值；该图进一步证实，智能体离目标越远，较大的噪声值越有用。

请注意，检测对的最优距离a^*取决于对似然和 x的了解，因此得到由公式（7）定义的等值线 $c^*(\phi_x)$。利用完整模拟所得的经验似然，我们根据公式（7）计算最优检测对距离 a^* 随 x 变化的函数。对于感知位置为（x，$y \pm a^*(x)$）的一对检测，其最大后验估计$\hat{x}_{a^*}$ 与x 几乎完美匹配（图5b），这证实了这一几何论证正确地捕捉到了检测的最优调节

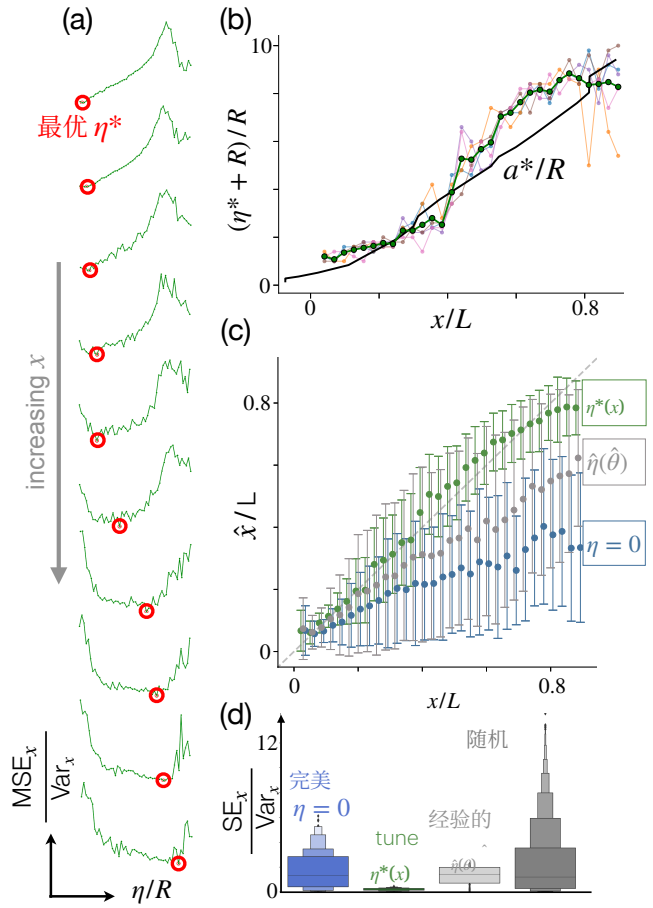


图4。存在一种取决于 x 的最优噪声，将噪声调节至该值可显著改善推断。(a) 均方误差$_x$ 在 η^* 的特定值处出现明显最小值，该值随距离 x增加而增大。(b) 对于不同的 y 值（粉色、蓝色、红色和橙色曲线），在作为 x函数的最优噪声下的感知尺寸，以及它们的平均值（黑色）。最优感知尺寸与检测对之间的最优距离 a^*_{pair} （黑色曲线）吻合良好。(c) 最大后验估计$\hat{x}$ *vs* 与真实值 x的比较；平均值（点）和标准差（误差条）基于100次实现和 y的5个值计算得出。比较了完美本体感觉 $\eta = 0$ （蓝色）、经过噪声调节的含噪本体感觉 $\eta^*(x)$ （绿色）以及采用经验噪声$\hat{\eta}(\hat{\theta})$ 的含噪本体感觉（灰色）。(d) 所有点的平方误差汇总统计，颜色编码与面板(c)相同。随机（深灰色）：推断位置是在先验内具有均匀概率的随机点。对于这些结果，我们排除了检测少于2次的实现，因为这些实现完全受先验支配。

对。那么，为什么用两个检测来建模与多传感器推断有关?

无限 N 伯努利采样理论。接下来，我们展示，位置信息含噪的传感器组在渐近情况下等效于一对检测。考虑一个由无限多个相互独立的传感器组成的群体，它们位于一个半径为 R 、中心为（x， y）的小圆内其感知位置服从标准差为 σ的高斯分布。 $\sigma > R$ 的值表示存在位置噪声，而 $\sigma \to R$ 则表示本体感觉完美。将这组传感器置于一个圆锥形羽流中，其检测似然如下:

$$\ell(\phi) = \left(\frac{\phi_x}{\lambda}\right)^{-\delta} e^{-\frac{\phi_y^2}{\beta^2\phi_x^2}} \tag{8}$$

如图 6a 所示。式（8）是湍流气味羽流的一种典型参数化形式，同时刻画了纵向衰减和横向扩展 [42]。因此，我们的理论结果适用于具有类似标度性质的任何各向异性羽流。在这一理想化情形下，源位置的最大似然估计取决于两个参数： (*i*) 检测到气味的传感器比例， θ 以及 (*ii*) 传感器组的感知尺寸， σ。我们考虑尺寸足够小的传感器组，因此忽略传感器组半径的影响 $R \approx 0$。在较远距离处且对于 $N \to \infty$，检测比例近似于传感器组中心处的似然$\theta \approx \ell(x, y)$，忽略组内似然的变化。距离源足够远时，最大似然估计无法推断 y，且平均而言会落在中心线上。假设 $y = \hat{}y = 0$, $\hat{}x$ 的估计渐近地满足式（24）；推导详情见“材料与方法”。式（24）与以下数值模拟结果定量吻合：对 $N = 10000$ 伯努利传感器取 $R = 0$、 $y = 0$ ，以及对式（8）中的似然取 $\delta = 1.54$、 $\lambda = 96.86$ 和 $\beta = 0.08$；这些参数由我们湍流模拟的经验似然拟合得到（图 6a、b）。先验仅在低信息极限下影响推断；此时大多数传感器检测到零，估计位置会收敛到先验范围内最远的点。可以进行修正，以便更好地匹配较近距离的情况——但这不会影响上述论证。

对于较小的感知尺寸 $\sigma \to 0$，式（24）规定，渐近情况下，贝叶斯估计由 θ 决定:

$$\hat{x} = \lambda\theta^{-\frac{1}{\delta}} = x \tag{9}$$

其中，第二个等式来自对在（$\phi_x = x$， $\phi_y = 0$）中计算的式（8）里的似然函数求逆。正如预期的那样， $\sigma = 0$ 是最优选择；在信息充足的 $N \to \infty$ 极限下，任何噪声都会产生负面影响。

当 σ 的值较大时，推断会变差，估计的位置渐近地独立于传感器读数 θ，而会收敛到一条仅取决于感知尺寸 σ 的单一曲线:

$$\hat{x} = \arg\max_x c_\sigma(x) = \sqrt{\frac{2}{\beta^2\delta}}\sigma \tag{10}$$

有趣的是，假设似然采用式 (8) 中的形式，则对于感知位置为 $(x, \pm\sigma)$ 的一对检测，式 (10) 与式 (6) 相符。

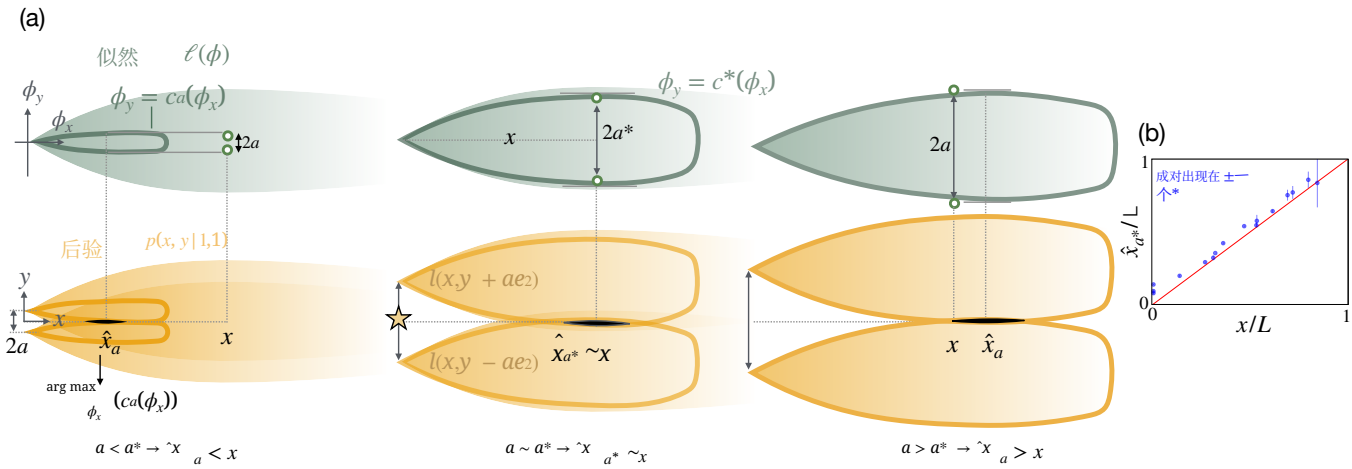


图5。两个检测极限说明了感知到的传感器位置如何调节源位置的贝叶斯估计。ˆ (a) 上：空间坐标（ϕ_x，ϕ_y）中的似然（绿色图），其中两个检测被感知为位于 $\boldsymbol{\xi}_\pm = (x,\ y \pm a)$，且 a 分别较小（左）、中等（中心）和较大（右）。似然的等高线 $\phi_y = c_a(\phi_x)$ 定义为其宽度与感知到的成对距离相匹配的等高线：$\max\ c_a = a$。下：在测量两个检测之后的后验分布 $p(x,\ y|1,\ 1)$，其形式为似然平移量 $\pm a$ 的乘积，得到于ˆ $\boldsymbol{\xi}_\pm$。 $p(x,\ y|1,\ 1)$ 在等高线 c_a 最宽的位置处达到最大值$\hat{x}_a = \arg\max c_a$。两个检测之间的距离决定了估计位置$\hat{x}_a$，并且存在一个最优感知距离 a^*，使得$\hat{x}_{a^*} = x$。(b) 基于数值模拟，在各向异性湍流羽流中心线上的一维最大后验估计中，两个检测相距 a^* 时确实几乎是完美的。

换言之，中心线上的一组传感器实际上相当于一对检测。因此， σ 起到调节估计位置的旋钮作用，类似于检测对中的 a 。

有限条件下伯努利采样的最优噪声调节 N。模型预测，当偏离这些理想化条件时，可以调节噪声来提高推断准确度，具体如下。对于$N \to \infty$ ，噪声不会带来任何优势，因为在没有本体感觉噪声的情况下进行推断（$\sigma = 0$）是完美的（式（9），图 6b 的 y 轴）。关键在于，这一结果依赖于 $\theta = \ell\ (x,\ 0)$ ，也就是说，检测比例近似于似然。然而，对于有限的 N 和／或相关信号（例如由湍流造成的信号），检测的经验比例 θ 会成为真实位置处似然 $\ell\ (x,\ 0)$ 的含噪版本，从而使推断受到干扰。当 $\theta > \ell\ (x,\ 0)$ 时，某次实现得出的估计位置 x 会低估 x；从错误曲线读取理想化理论即可看出这一点（图 6c 左侧，紫色，标记为 θ_+）。对于这些实现，将感知尺寸增至有限值 σ_+^* 即可恢复完美推断。当 $\theta < \ell\ (x,\ 0)$ 时，推断会高估 x；若感知尺寸接近拐点 σ_-^* ，则推断会略有改善（图 6c 左侧，粉色，标记为 θ_-）。因此，除检测比例 $\theta \approx \ell\ (x,\ 0)$ 这一狭窄范围外，无论群体检测到的气味比似然预期更多还是更少，增大感知尺寸都能改善贝叶斯估计。最优感知尺寸的上限由一对检测的最优距离决定：

检测：

$$\sigma^* \lesssim a^* \tag{11}$$

其中， a^* 由公式（7）定义。通过从定义伯努利过程的二项分布中ˆ自举 θ ，并直接根据理论读取推断出的位置（图 6d，实线），以及通过使用 $N = 10$伯努利传感器得到的最大后验估计（图 6d 虚线；图 6e），均证实了这一缩放关系。这里所有论证均针对沿中心线的一维推断展开。

湍流中的最优噪声调节，标度论证。即使在较大的 N 下，检测的经验比例也可能与似然 $\ell(x,\ 0)$ 不同，例如在湍流羽流中，气味呈现出强烈的时空相关性，从而影响邻近传感器的检测。根据上文所示的一维推断渐近理论，我们预计，湍流中多传感器智能体的最优感知尺寸 σ^* 将按两次检测之间的最优距离 a^* 缩放。事实上，当 $\theta \gg \ell(x,\ 0)$ 时，检测到气味的传感器远多于预期，因此预计最优噪声将按检测对极限缩放。具有 $\theta \approx 0$ 的情况对最优噪声的贡献较弱，因为对于较小的 θ ，估计值 ˆx 对 σ 的依赖较弱（见图 6b 中较小 ˆθ 对应的较长平台，最终并入先验）。因此，我们预计，湍流中多传感器智能体的最优感知尺寸主要由较大的正向波动决定，而这类波动在湍流中所占比例偏高（参见图 6f 中，相对于伯努利变量 $N = 500$ 个不相关样本的二项分布所呈现的厚尾）。

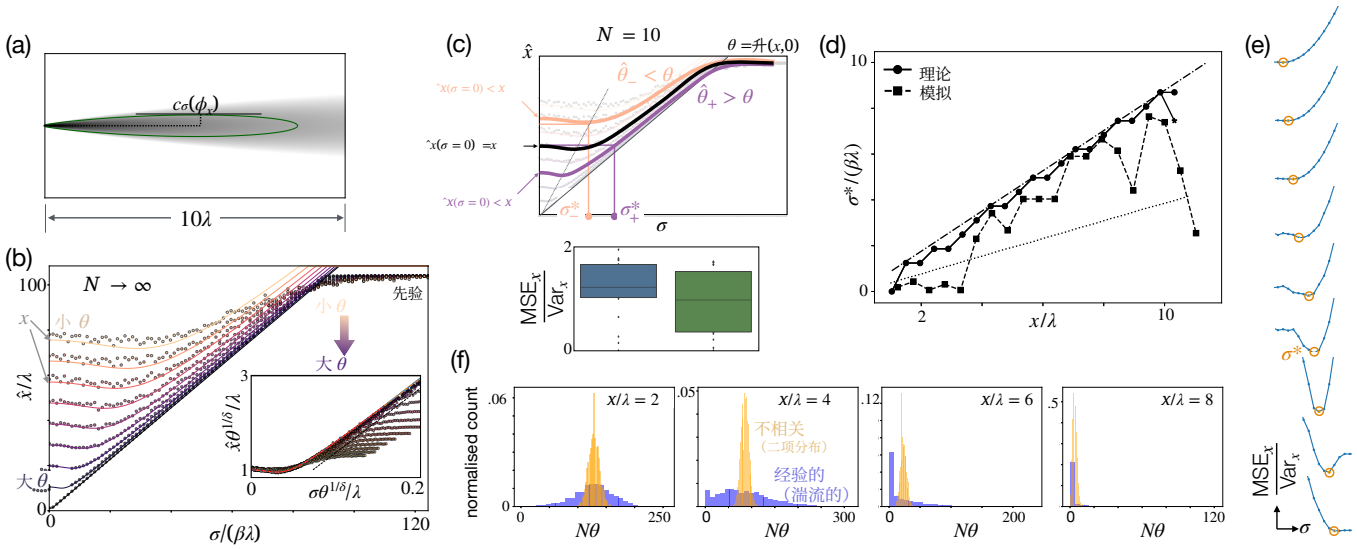


图6. 理论预测，双探测极限是最优本体感知尺寸的紧上界。(a) 对流体动力学模拟所得经验似然的拟合，以及根据两个探测极限绘制的等高线图示意图，定义似然衰减所经过的长度尺度 λ（见正文）。(b) 理想化理论：对于位于尺寸为 σ 的圆内、数量无限的传感器，最大后验估计为$\hat{x}$。推断取决于感知尺寸 σ 和检测到气味的传感器比例 $\theta = N_1/N$。当 σ 较大时，最大后验估计$\hat{x}$ 收敛至双探测极限，此时两个传感器相距 $2a = \sigma$（在插图中更清晰）。对于 $N \to \infty$，$\theta = \ell(x, 0)$，因此当 $\sigma = 0$ 时（y 轴上），推断是完美的。(c) 对于有限样本数 N，θ 的经验值与似然不同，从而在 $\sigma = 0$ 处导致错误估计（$\theta < \theta$时高估，粉色；$\hat{\theta} > \theta$时低估，紫色）。增大感知尺寸 σ 有助于改善推断（下图）。(d) 实线：对理论预测进行数值优化所得的最优 σ^*，其中传感器数量为 $N = 10$，σ 按照 c 中示意的方式设定。先验只影响最远点（点 *vs* 星号）。虚线和方块：采用 $N = 10$ 个伯努利传感器进行的模拟与理论相符。(e) 伯努利采样的最大后验结果表明，存在一个明确的最优噪声，其值随距离增大而系统性升高（由于尺度无关紧要，故未标示）。(f) 湍流会导致检测次数大幅偏离预期值（经验直方图，$N = 500$）。

总之，我们的一维渐近理论表明，湍流中多传感器智能体的最优尺寸 σ^* 按两次检测之间的最优距离缩放，即 $\sigma^* \sim a^*$。由于噪声会调节感知尺寸 $\sigma^* \sim R + \eta^*$（见公式（5）），最优尺寸 σ^* 会产生最优误差 η^*：

$$\eta^* \sim a^* - R \tag{12}$$

其中 a^* 由式（7）定义，可根据似然和 x得出。我们利用模拟所得的经验似然，在完整的二维推断中测试了这一标度关系，并优化噪声以最小化估计位置 $\hat{x}$ 的误差。结果证实，最优噪声与预期的标度关系一致（见图 4b）。显然，传感器组进行的二维推断比我们的几何论证所能描述的更为复杂。因此，即使在误差最优时，其推断噪声仍高于检测对位于 $\pm a^*(x)$时的一维情形（比较图 5b 与图 4c 中的绿色曲线）。不过，方差仅略有增加，且最优噪声与我们的一维渐近理论式（12）相当吻合（图 4b）。有趣的是，含噪本体感觉使传感器组仍能在 y 方向上保留预测能力。事实上，增大感知尺寸不会使y 方向上的估计相对于完美本体感觉有所退化，这可能是因为只有在区域靠近源的前半部分，才能进行 y 推断，而此处的本体感觉误差仍在可控范围内 $\eta^* \lesssim R$（补充图 S7）。在区域后半部分，远离源的位置，已无法进行 y 推断；此时最优噪声大于智能体的尺寸，因此传感器的感知位置与其真实位置几乎无关。在这些位置，将本体感觉误差称为可调大小参数或许更为恰当。

经验噪声调节。到目前为止，我们讨论了如何调节噪声以优化预测准确率。但在实践中，真实的生物体或机器人无法进行最优调节，因为它取决于 x，而 η^* 是未知的。为了在不了解 x的情况下设定噪声，我们定义经验噪声 $\hat{\eta} = \eta^*(x_{\hat{\theta}})$，其中$x_{\hat{\theta}}$ 是对 x的猜测，该猜测由检测比例θ得出，方法是沿中心线对经验似然求逆（见材料与方法）。采用经验噪声 $\hat{\eta}$ 进行的含噪本体感觉推断，效果虽不及最优调节，但明显优于具有完美本体感觉的智能体，图 4c-d。与之前的情况类似，

对于经过最佳调节的本体感觉噪声所观察到的情况，经验噪声并未使 y 方向上的预测相较于完美本体感觉有所退化（补充图 S8 和 S9）。在实践中，噪声会将估计值 $\hat{x}$推向更大的值（补充图 S10），从而纠正了完美本体感觉下观察到的负偏差。

各向同性气味羽流。我们的几何论证依赖于气味羽流的各向异性，无论相关性如何都成立。如上所述，对于通过对各向异性湍流羽流进行阈值化（图 4c-d）或伯努利采样（图 6c，底部）获得的二元观测，本体感觉中的噪声确实能够改善贝叶斯推断。在这两种情况下，最优噪声都符合上文概述的几何论证（图 4a-b 和图 6d-e）。存在相关性时，这种效应更加显著，因为相关性使问题更具挑战性；不存在相关性时，问题则简单得多，我们使用 $N = 10$来避免抵消噪声带来的益处。反过来说，我们预测，对于各向同性气味羽流，无论相关性如何，本体感觉噪声带来的益处都会消失。事实上，与完美本体感觉的情况相比，对各向同性伯努利和湍流气味羽流进行贝叶斯推断并未显示噪声带来任何益处（图 7）。请注意，目前噪声只影响传感器的位置感知，而不影响其真实位置。因此，本体感觉噪声不会影响感觉输入，只会影响其处理过程。这与下一节所述的其他噪声源不同。

其他噪声实现方式。接下来，我们探讨其他噪声源是否也能同样提高预测准确性。为了针对影响位置（下文第 1 和第 2 项）或感知（第 3 和第 4 项）的四种不同模态开展系统测试，我们使用较小的数据集（见补充图 S1）重复上述所有步骤：

1. 含噪本体感觉：模糊传感器的感知位置。$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i = \boldsymbol{\xi}_i + \boldsymbol{\gamma}_i$使用 $\gamma \sim \mathcal{N}_T(0,\ \eta^2)$，并截断至（$-\eta - 1,\ \eta + 1$）。这是迄今为止我们所考虑的噪声：它影响对传感器位置的感知。此定义的一个副作用是，噪声会增大智能体的感知尺寸。

2. 含噪位置：模糊传感器的真实位置，或˜传感器，$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i = \boldsymbol{\xi}_i + \boldsymbol{\gamma}_i$，使用与上文相同的高斯分布噪声 $\gamma \sim \mathcal{N}_T(0,\ \eta^2)$，并截断至（$-\eta - 1$ $\eta + 1$）。根据这一界定，由于噪声的影响，智能体看起来比实际更小；换言之，真实位置位于半径为 R 的圆之外。

3. 随机翻转二进制信号：以概率 η 交换二进制气味观测 $0 \to 1$ 和 $1 \to 0$，或将 $\tilde{m}_i = m_i + \rho$ 对 2 取模，并使用 $\rho \sim$ 伯努利(η)。

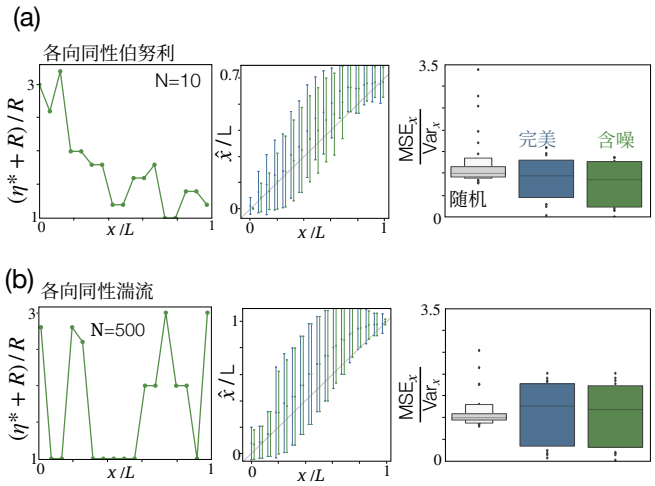


图7. 在无法利用几何结构的各向同性条件下，噪声的益处消失。（a）采用完美（蓝色）和含噪（绿色）本体感觉时，各向同性伯努利采样的最优噪声（左）以及估计位置 vs 真实值 x（中）。正如预期，噪声并未改善性能（右）。为避免掩盖噪声带来的任何益处，我们使用少量传感器 $N = 10$ （$N = 500$ 的结果证实了相同趋势，且精度更高，数据未显示）。（b）与（a）相同，但针对各向同性湍流，结果证实本体感觉噪声的益处取决于各向异性。

4. 向原始信号添加噪声：用高斯噪声模糊原始气味。$\tilde{c}_i = c_i + \Gamma$，以及 $\Gamma \sim \mathcal{N}(0,\ \eta^2)$，然后按照式（1）所述进行阈值处理。

我们针对各向异性湍流羽流重复贝叶斯推断方案，并在每个位置优化噪声。有趣的是，推断准确度受益于所有这些不同的噪声实现方式，尤其是翻转二进制信号，这种方式取得了惊人的准确率（见图 8、补充图 S3）。不过请注意，我们优化噪声以提高 x 中贝叶斯推断的准确率；在这一最优噪声水平下，只有位置噪声能够推断 y ，而对于感知噪声，估计的 $\hat{y}$ 总是回到中心线（见补充图 S4）。

固定噪声与纠错。我们想知道，即使完全不进行调节，噪声是否仍有益。我们为所有位置设置相同的噪声值：$\eta_0/R = 1$ 用于含噪本体感觉和含噪位置，$\eta_0 = 0.01$ 用于翻转噪声，$\eta_0/c^0 = 0.001$用于原始信号上的噪声。我们发现，所有含噪智能体的表现都优于理想智能体（图 8a）。η_0 的恒定值选自一个范围，在该范围内，噪声至少在某些位置有益（见补充图 S5；请注意感知噪声有趣的非单调行为和渐近平台）。

最后，我们考虑智能体可能意识到

其本体感觉和感知均存在噪声，并且在知道 η_0 的取值后，可能会对此进行纠正。我们引入了材料与方法中所述的误差纠正。我们发现，对于位置噪声，与未经纠正的估计相比，误差纠正能够改善偏差、方差或二者兼有（补充图 S3）。相比之下，对感知噪声进行纠正会产生更为复杂的结果：对于原始信号中的噪声，纠正会降低偏差，但相较于未经纠正的情况会增加方差。而对于二进制信号上的噪声（翻转），纠正会使偏差和方差均变差（补充图 S3）。

总体而言，与具有完美本体感觉和感知能力的理想智能体相比，无论噪声水平是（不切实际地）经过调节以优化性能，还是固定不变，或固定不变并进行校正，所有四种噪声生成机制都能合理地提高准确率。这一点可从 52 个测试位置上的均方误差汇总统计中看出（图 8a）。固定翻转噪声带来的总体结果最为显著，使平均 $\langle$均方误差$\rangle_x$ 从 3.5 大幅降至 0.4。

其他噪声源也能改善推断，其原因至少部分在于它们能够打破相关性。事实上，如果噪声影响传感器实际所在的位置（含噪位置，项目 2），那么按照我们对噪声的定义，它们采样的位置就会超出其感知到的位置。因此，与在彼此更近的点采样相比，其测量值的相关性预计会更低。感知噪声（翻转和原始噪声）也会打破相关性，因为它们会在测量值中引入不相关的错误。因此，我们预计这些噪声机制在存在相关性的情况下会奏效，无论信号是各向同性还是各向异性（与使用湍流气味羽流进行推断的结果一致，见图 8a、b）；而在不存在相关性的情况下则会失效（与使用各向同性伯努利采样的结果一致，见补充图 S6；请注意，在各向异性伯努利采样中，翻转仍有残余益处，这可能与几何结构或随机共振中广为研究的阈值效应有关 [43]）。

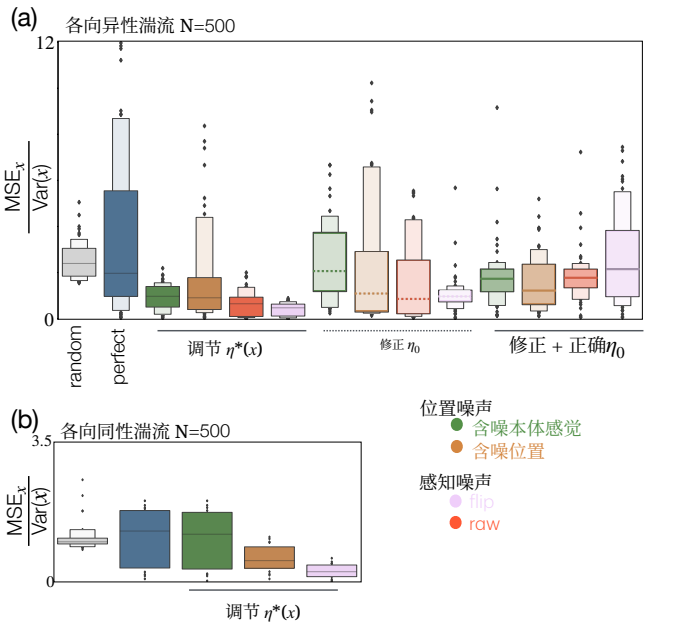


图 8. 不同噪声源通常都能改善推断，即使噪声是固定的而非经过调节。(a) 系统比较四种噪声源以及三种设定噪声强度的方式下的表现，即调节至最优 $\eta^*(x)$（左），使用设定值 η_0（中），以及固定噪声但在似然中将其纳入考虑（右）。箱线图展示了 $\mathrm{MSE}_x = \sum_{i=1}^{N_r}(\hat{c}_i - x_k)$ 的中位数（线）、第 25 百分位数（深色箱体）和第 75 百分位数（浅色箱体），其中 k 遍历测试所用的 52 个位置。与先验范围内均匀分布的随机估计（灰色）以及具有完美位置信息和感知能力的智能体（蓝色）相比，所有噪声源（颜色见图例）通常都能带来改善。调节噪声明显能获得最佳表现，但固定噪声和校正后的噪声也能取得良好表现。对于本体感觉噪声、位置噪声、二进制信号的随机翻转以及原始信号上的加性噪声，我们分别使用 $\eta_0 = 25$，25，0。001，0。01。气味数据和测试位置取自模拟 2（见材料与方法及图 S5，中）。(b) 各向同性湍流的相同统计结果（模拟 3，见材料与方法及图 S5，下）。

III. 讨论

受章鱼启发，我们分析了如何根据分布在空间中的多个传感器所进行的检测，推断湍流气味羽流的源。我们的大部分研究结果都致力于理解本体感觉噪声的作用：传感器仍以单向.....的方式分布
均匀分布在半径为 R 的圆内，但其感知到的位置相对于真实位置存在模糊。我们发现，适当调节本体感觉噪声的水平可以改善推断。这种违反直觉的效应源于噪声使智能体感知到自身更大。若控制得当，这便能利用隐藏在气味羽流几何结构中的额外信息。事实上，在存在净流体流动时，气味会被输送到空间中的一个圆锥区域内，贝叶斯估计取决于这种各向异性几何结构。我们表明，从渐近意义上看，传感器组的行为类似于一对有效检测；智能体感知到的尺寸对应于两个传感器之间感知到的距离，而这一距离可以调节，从而更准确地估计源位置。我们针对伯努利采样发展并测试了该理论；在这种情况下，模型能够完美地捕捉问题的统计特性。在此情况下，贝叶斯推断保证渐近收敛 [44]，而噪声带来的益处仅在 N 较小时才明显，此时距离渐近极限尚远。

有趣的是，尽管理论是针对伯努利检测建立的，但几何结构提供的额外信息，即使存在时空

相关性（由湍流造成）时仍然存在。事实上，由于问题变得更具挑战性，噪声在真实的湍流羽流中的益处，比在理想化的伯努利采样中更加显著。与理论所强调的几何结构的关键作用一致，我们发现，在各向同性气味羽流中，无论是伯努利采样还是湍流，噪声都不起作用。请注意，在湍流存在的情况下，模型设定有误，因为它没有考虑气味检测之间的强相关性。然而，本体感觉噪声不会改变任何相关性，因此无法纠正模型的这一缺陷。相反，它利用了模型原本未加以利用的几何信息。据我们所知，此前尚未有人描述过这一机制。

该理论还预测，本体感觉噪声的最优强度取决于智能体相对于目标的位置，这与数值结果一致。显然，真实生物和机器人无法将噪声调节到这一最优水平，因为它们不知道目标的位置。不过，智能体可以利用标度论证，仅根据当前观测来估算最优噪声。进行这种经验噪声调节时，气味检测的似然会被使用两次：一次用于贝叶斯推断，另一次则根据几何结构计算最优的两次检测距离。为了不依赖对气味羽流延伸范围的了解，未来研究可以采用无模型的监督算法来扩展我们的方法，以近似贝叶斯推断（例如参见 [36]）；也可以根据局部测得的平均流速和波动来近似羽流形状。

因此，总体而言，我们的结果表明，含噪本体感觉并不会妨碍准确推断。事实上，近似噪声调节在现实的湍流条件下也能有效发挥作用，这表明机器人学中的含噪本体感觉甚至可以经过调节，从而改善基于感觉信息的推断。

章鱼启发的机器人学正受到相当多的关注 [45, 46]。精确的本体感觉通常被认为是软体机器人学中实现复杂运动控制所必需的 [47], , 而针对软体身体形态编码的挑战，近期已通过深度学习算法得到处理 [48]。仍需进一步研究以测试某些特定任务是否最好借助含噪的本体感觉来完成，从而避免获取和处理来自集成式软体传感器的精确本体感觉反馈；这类传感器需要先进的硬件和软件 [47, 49]。

在生物体中，嗅觉处理可能会受到本体感觉噪声的影响。人们长期以来一直假设，大脑会进行贝叶斯推断；理论和实验研究表明，噪声可能有助于检测微弱的感觉输入，也有助于以概率方式编码信号，从而促进贝叶斯推断（例如参见 [50, 51], [51–54] 及其中的参考文献）。计算研究和实验研究表明，噪声可能有益于处理感觉信息，例如参见 [55, 56]。

对于章鱼而言，目前的知识尚不足以测试噪声是否会影响分布式化学感知信息的处理。行为实验表明，大脑确实会处理由腕收集的感觉信息 [27–29]。然而，本体感觉信息在多大程度上可用，并被整合到感觉处理和运动控制中，仍有待确定 [31]。

遗憾的是，章鱼本体感觉的分子机制仍不明确 [31, 57–59], , 因此，像目前对昆虫所能进行的那样，对本体感觉实施靶向扰动对章鱼而言是不可行的 [60, 61], 。为了量化本体感觉，可以通过测试行为来收集间接证据，例如让章鱼在没有视觉的情况下通过腕迷宫，或在没有视觉线索的情况下寻找、移动物体并操纵猎物 [9, 27, 59, 62–65]。此外，还需要进一步研究以了解化学感知信息是如何被解读的，尤其需要确定每个吸盘是否处理其局部感觉信息，还是所有信息都会被汇总并随后在中枢进行处理。

其他噪声源带来的结果，可以理解为修正设定错误的模型的一种手段。事实上，当噪声影响感知过程本身或传感器的真实位置时，它实际上会削弱气味中的相关性，从而部分修正独立观测这一模型假设。与此一致，只有在湍流造成时空相关性的情况下，传感器真实位置上的位置噪声才有益；对于伯努利采样，无论几何结构如何，都没有益处。类似地，翻转噪声在湍流中有益，而在伯努利各向同性采样中则没有益处；不过，它对各向异性伯努利也有益，这表明它或许同时利用了相关性和几何结构。请注意，所有涉及湍流的结果都是在传感器数量较大时$N = 500$得到的，这与问题困难得多这一事实相符；也就是说，当模型设定错误时，贝叶斯推断的渐近收敛并无保证 [66]。关于如何以其他方式修正模型设定错误，文献 [33]曾在湍流源定位的背景下进行讨论。

远不止湍流源定位这一具体问题，噪声可能改善推断这一观点在信息处理领域由来已久（例如参见 [67, 68]），通常在参考文献 [69]之后被称为随机共振）。在对信号统计特性作出假设的情况下，理论上可以证明噪声增强的贝叶斯估计量（例如参见 [70]）。还需要进一步研究，以便将这些论证应用于湍流气味羽流复杂的统计特性 [42, 71–74]。另一个有趣的理论研究方向，是贝叶斯推断与经验损失最小化之间的联系；在对模型和数据结构作出假设的情况下，标签上的噪声已经

已被证明可发挥正则化器的作用 [75]。

噪声在处理湍流信息方面所具有的反直觉益处，为进一步研究提供了令人兴奋的方向，并可能催生适应不确定环境的新概念，这些概念可应用于生命系统以及机器人学中的优化原理。

致谢

本研究获得了授予 AS 的资助：欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划提供资助（资助协议编号：101002724 RIDING），美国国立卫生研究院（NIH）通过项目编号 R01DC018789 提供资助。欧洲委员会及其他组织对可能如何使用本文所含信息概不负责。感谢 Francesco Viola 分享图形处理器加速版的计算流体动力学代码，并在计算流体力学方面提供支持和交流。

附录

A. 推断方案

多传感器贝叶斯推断依赖于根据观测值计算参数的后验分布：

$$P(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{m}) \propto L(\boldsymbol{m}|\boldsymbol{\xi}) \cdot p(\boldsymbol{\xi})$$

其中，$P(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{m})$ 是后验分布，$\boldsymbol{m}$ 是 N 传感器进行的二值测量数组，$\boldsymbol{\xi} = (x,\ y)$ 是待推断的参数集合，即智能体中心相对于目标的位置（$x,\ y$）。$L(\boldsymbol{m}|\boldsymbol{\xi})$ 是似然，$p(\boldsymbol{\xi})$ 是先验；我们将先验视为均匀且平坦地分布在图 1b 所示的矩形区域内。根据贝叶斯定理，由于我们对模型比较不感兴趣，因此舍弃分母中的证据项。我们假设各测量值相互独立，因此将似然分解为$L(\boldsymbol{m}|\boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1}^{N} L_i(m_i|\boldsymbol{\xi})$，其中 $L_i(m_i|\boldsymbol{\xi})$ 是在中心位于 $\boldsymbol{\xi}$时，第 $i-$ 个传感器测量 m_i 的似然。显然，该模型存在错误设定，因为测量值并不独立，而是受到湍流所继承的时空相关性 [76]影响。然而，湍流相关性 notoriously 难以建模，因此我们将继续采用这一简化假设（例如参见 [33, 42]）。请注意，噪声会增强相关信号和不相关信号的贝叶斯估计，而我们的渐近分析揭示了为什么对于相关信号，这种效应更加显著，正如我们在正文中所阐释的那样。我们定义

$$L_i(m_i|\boldsymbol{\xi}) = \int \ell_i^{m_i}(1-\ell_i)^{1-m_i} p(\boldsymbol{\phi}_i|\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\phi}_i \tag{13}$$

其中，$\ell_i = p(m=1\,|\,\boldsymbol{\phi_i}) = \ell(\boldsymbol{\phi}_i)$ 是在传感器位于 $\boldsymbol{\phi}_i$ 时测量 $m=1$ 的概率，该概率完全由物理学决定。$p(\boldsymbol{\phi}_i|\boldsymbol{\xi})$ 是在中心位于$\boldsymbol{\xi}$时，传感器 i 位于 $\boldsymbol{\phi}_i$ 的概率，用于描述本体感觉。我们确定了三种本体感觉模型：

$$p(\boldsymbol{\phi}_i|\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \delta(\boldsymbol{\phi}_i - \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{\xi})) & \text{Perfect} \\ \delta(\boldsymbol{\phi}_i - \tilde{\boldsymbol{x}}_i(\boldsymbol{\xi})) & \text{Imperfect Unaware} \\ \mathcal{N}_T(\tilde{\boldsymbol{x}}_i(\vec{\xi}), \eta^2) & \text{Imperfect Aware} \end{cases} \tag{14}$$

完美本体感觉由以传感器相对于中心的真实位置为中心的狄拉克δ函数表征：$\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{\xi})$。接下来的两行描述了两种不同的不完美本体感觉情形。不完美无意识智能体忽略位置噪声：狄拉克δ函数以错误的位置为中心 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i(\boldsymbol{\xi}) \sim \mathcal{N}_T(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{\xi}),\ \eta^2)$，其中 $\mathcal{N}_T$表示生成位置噪声的截断正态分布。在有意识情形中，智能体使用正确的本体感觉分布，而方程 13 中的积分实际上会校正位置噪声。

为获得单点估计量，我们选择最大后验概率（最大后验概率）[77–85]：

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \arg\max_{\boldsymbol{\xi}} L(\boldsymbol{m}|\boldsymbol{\xi}) \cdot p(\boldsymbol{\xi}) \tag{15}$$

我们使用 Python 库 Optuna [86]，通过树结构帕曾估计（TPE）算法以数值方式计算最大后验概率。为获得统计量，我们将整个过程重复 M 次。因此，我们可以计算估计位置 $\boldsymbol{\xi}$ 的集成均值及其标准差：

$$\langle\hat{\boldsymbol{\xi}}\rangle = \frac{\sum_{j=1}^{M} \hat{\boldsymbol{\xi}}_j}{M} \tag{16}$$

and:

$$StD(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{M} (\hat{\boldsymbol{\xi}}_j - \langle\hat{\boldsymbol{\xi}}\rangle)^2}{M}} \tag{17}$$

标准差量化了跨不同 M 实现的估计值$\hat{}x$ 的离散程度，表明推断过程的稳健性。所有展示估计目标位置与 真实值对比的图均表示$\hat{}\ \hat{}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \pm StD(\boldsymbol{\xi})$

性能指标

这里总结了本文中用于表示经典性能指标不同变体的符号，该指标基于估计值与真实值之间的平方误差：

• 平方误差：大型数据集的 $\mathrm{SE}_x = (\hat{x}_i - x_k)^2$ 中，索引 i 遍历 $N_r = 100$；小型数据集的实现中，索引 $N_r = 200$ 遍历各次实现；索引 k 则遍历补充图 S1 所示的大型数据集的 155 个测试位置和小型数据集的 52 个测试位置

• 均方误差：$\mathrm{MSE}_x = 1/N_r \sum_{i=1}^{N_r} (\hat{x}_i - x_k)^2$，其中 k 依次遍历大型数据集的 155 个测试位置和小型数据集的 52 个测试位置，这些位置见补充图 S1

•平均均方误差：$\langle \mathrm{MSE}_x \rangle = 1/(N_r n_y) \sum_{k=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{N_r} (\hat{x}_i - x_k)^2$，其中 k 现在遍历具有固定 x 和不同 y 的 n_y 测试点。大型数据集为 $n_y = 5$，小型数据集为 $n_y = 4$。

• 位置方差：$\mathrm{Var}_x = 1/N_p \sum_{k=1}^{N_p} (\bar{x} - x_k)^2$，其中 N_p 是测试位置的数量，且 $\bar{x} = 1/N_p \sum_{k=1}^{N_p} x_k$。此方差用作归一化因子。

•上述所有定义同样适用于 y 坐标，只需进行替换 $x \leftrightarrow y$。

• 偏差 b_0 可通过解析方法计算，且取决于先验。

$$b_0 = (x_0 \cdot p_0(\boldsymbol{\xi}) + x_s \cdot p_1(\boldsymbol{\xi})) - \boldsymbol{\xi},$$

其中，x_0 是传感器检测到 0 时最大后验概率的收敛平均位置。x_0 强烈依赖于先验的选择。$p_0(\boldsymbol{\xi})$ 是在给定位置 $\boldsymbol{\xi}$检测到 0 的概率，x_s 是源位置，而 $p_1(\boldsymbol{\xi})$ 是在位置 $\boldsymbol{\xi}$检测到 1 的概率。该概率是对所用不同 y取平均后计算得出的。

纠错

对于本体感觉噪声，可通过对所有感知位置的取值范围内的似然进行积分来实现校正（公式 14 的第三项）。类似地，按照经典误差校正方法 [43]，我们将其他噪声模态的误差校正定义为对噪声分布的积分：

$$\bar{f}(x) = \int f(\tilde{x} - n)\, p(n)\, dn, \tag{18}$$

其中，$f(x)$ 是信号 x的通用函数，$\tilde{x}$ 是含噪信号，$f(x)$ 是校正后的函数，$p(n)$ 是噪声的概率密度函数（pdf），而 n是噪声随机变量。

对于将噪声添加到原始信号上的情况，我们写作

$$L_i(m_i, \boldsymbol{\xi}) = \int p\big(m_i \,|\, \boldsymbol{\xi},\, \Theta(\tilde{c}_i - n - t_r)\big)\; p(n)\, dn, \tag{19}$$

其中，$\tilde{c}_i$ 是含噪信号，tr 是阈值，$\Theta(\cdot)$是赫维赛德阶跃函数，而积分实际上是在校正后的信号 $\tilde{c}_i - n$上计算似然。在噪声充当二进制对称信道（Binary Symmetric Channel）的情况下，即噪声可以翻转测量结果时，我们有：

$$\begin{aligned} L_i(\tilde{m}_i, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{m_i \in \{0,1\}} p\big(\tilde{m}_i \,|\, m_i\big)\; p\big(m_i \,|\, \boldsymbol{\xi}\big) \\ &= (1-\eta)\, p(m_i = \tilde{m}_i \mid \boldsymbol{\xi}) + \eta\, p(m_i = 1 - \tilde{m}_i \mid \boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \tag{20}$$

其中，$\tilde{m}_i$ 为（可能经过）翻转的信号，翻转过程遵循 $p(\tilde{m}_i \neq m_i) = \eta$。

B. 理论

设位于相对于中心线（x，y）的 $\{(x_p,\ y_p)\}$ 处的 P 个传感器检测到非零信号，而位于 $\{(x_q,\ y_q)\}$ 处的 Q 个传感器检测到零信号。在这些假设下，由式（8）出发，总似然为

$$\begin{aligned} L(\hat{x}, \hat{y}) \;=\; & \prod_{p=1}^{P} \left(\frac{\hat{x} + x_p}{\lambda} \right)^{-\delta} \exp\left[-\frac{(\hat{y} + y_p)^2}{\beta^2 \left(\hat{x} + x_p\right)^2} \right] \\ & \times \prod_{q=1}^{Q} \left(1 - \left(\frac{\hat{x} + x_q}{\lambda} \right)^{-\delta} \exp\left[-\frac{(\hat{y} + y_q)^2}{\beta^2 \left(\hat{x} + x_q\right)^2} \right] \right), \end{aligned} \tag{21}$$

其中，$(\hat{x},\ \hat{y})$ 是中心（x，y）的估计位置。由于我们关注的是远离源的估计值，因此假设 $\hat{x} \gg |x_{p,\ q}|$，从而 $\hat{x} + x_{p,\ q} \approx \hat{x}$。此外，我们将中心固定在中心线上，即 $y = \hat{y} = 0$。

采用这些近似后，似然可简化为

$$L(\hat{x}) = \left(\frac{\hat{x}}{\lambda} \right)^{-\delta P} \exp\left[-\sum_{p=1}^{P} \frac{y_p^2}{\beta^2 \hat{x}^2} \right] \prod_{q=1}^{Q} \left(1 - \left(\frac{\hat{x}}{\lambda} \right)^{-\delta} \exp\left[-\frac{y_q^2}{\beta^2 \hat{x}^2} \right] \right).$$

最大化上述似然意味着最小化指数项 $S(\hat{x})$（将符号反转后）：

$$\begin{aligned} S(\hat{x}) \;=\; & \delta P \log\left(\frac{\hat{x}}{\lambda} \right) + \sum_{p=1}^{P} \frac{y_p^2}{\beta^2 \hat{x}^2} \\ & - \sum_{q=1}^{Q} \log\left(1 - \left(\frac{\hat{x}}{\lambda} \right)^{-\delta} \exp\left[-\frac{y_q^2}{\beta^2 \hat{x}^2} \right] \right). \end{aligned} \tag{22}$$

进一步假设 y_p 和 y_q 均取自相互独立且相同的正态分布，其标准

图	N	λ	$L \times H$	N_p	N_r	R	
1	500	96.86	863 × 94	52	200	-	模拟 2
2	500	96.86	863 × 94	52	200	10 , 25, 40	模拟 2
3 和 4	500	176.76	1750 × 500	155	100	25	模拟 1
5	2	96.86	863 × 94	52	200	-	模拟 2
6	10	96.86	990 × 1	20	100	-	伯努利，似然公式 (8)， λ 根据对模拟 2 的拟合得出
7a	10	35.27	165 × 1	17	100	25	伯努利，经验似然模拟 3
7b	500	35.27	165 × 1	17	100	25	模拟 3
8	500	96.86	863 × 94	52	200	25	模拟 2

表 I. 数值推断的参数。参考图、传感器数量、似然的代表性长度尺度 λ 根据经验似然拟合公式 (8) 得出、先验范围 $L \times H$、测试位置数量 N_p、实现次数 N_r、气味观测。似然是模拟中所有快照的经验平均值，但图 6 除外，其似然遵循公式 (8)，并使用相应参数 λ。

差为 σ，将式 (22) 除以传感器总数后可简化为

$$s(\hat{x}) = \theta\left(\delta\log\left(\frac{\hat{x}}{\lambda}\right)+\frac{\sigma^2}{\beta^2\hat{x}^2}\right) - (1-\theta)\log\left(1-\left(\frac{\hat{x}}{\lambda}\right)^{-\delta}\sqrt{\frac{\beta^2\hat{x}^2}{\beta^2\hat{x}^2+2\sigma^2}}\right), \tag{23}$$

其中 $\theta = \frac{P}{P+Q}$ 对上述表达式求最小值，可得 $\hat{x}$：

$$\theta\left(\delta\hat{x}^{-1}-2\sigma^2\beta^{-2}\hat{x}^{-3}\right) = \frac{1-\theta}{1-\left(\frac{\hat{x}}{\lambda}\right)^{-\delta}\sqrt{\frac{\beta^2\hat{x}^2}{\beta^2\hat{x}^2+2\sigma^2}}}\left(\frac{\hat{x}}{\lambda}\right)^{-\delta}\frac{\delta\beta^2\hat{x}^2+2\sigma^2(\delta-1)}{(\beta^2\hat{x}^2+2\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\beta. \tag{24}$$

经验噪声调节

在正文中，我们讨论了使用本体感觉噪声 $\hat{\eta}$ 进行推断的结果，该噪声根据经验检测比例 θ 进行调节。为定义 $\hat{\eta}$，我们从经验似然 $f(x, y) = T(c(x, y) > c_{thr})/T$入手；它对应于在湍流羽流的直接数值模拟中，气味高于阈值的时间比例。我们将这些数据拟合到方程 8 中的似然，并得到正文中提及的参数 λ, β, δ 的取值。中心线上：

$$\theta = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\delta} \tag{25}$$

将此表达式代入方程 10，可得：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta}{2}}\frac{\beta\lambda}{\theta^{\frac{1}{\delta}}} \tag{26}$$

$\hat{}$ 使用该表达式，以 θ 替代 θ，即可根据经验测量估计最优感知尺寸。因此，经验噪声设定为：

$$\hat{\eta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{2}}\frac{\beta\lambda}{\hat{\theta}^{\frac{1}{\delta}}} - R \tag{27}$$

经验噪声 $\hat{\eta}$ 对应于公式（12）中的最优噪声，其中 $x \equiv \hat{x}_{\hat{\theta}} = \lambda\hat{\theta}^{-1/\delta}$，该结果由对公式（25）求逆得到。

C. 流体动力学模拟

Anisotropic turbulence

流场采用明渠中纳维–斯托克斯方程的直接数值模拟进行建模，并使用半隐式有限差分格式：

$$\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right) = -\nabla P+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}; \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0. \tag{28}$$

这里，$\boldsymbol{u}$是流体速度场，ρ 是密度，P 是压力，μ 是黏度。为模拟气味输运，我们使用平流扩散方程：

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla c = D\nabla^2 c, \tag{29}$$

其中，D 是气味的扩散率。关于湍流通道流模拟的更多细节，请参见文献 [87]（表3，模拟编号2和3）。模拟参数见表II。

Isotropic turbulence

通过将气味源置于模拟区域中心，并使用二维各向同性随机强迫项驱动流场，可获得各向同性气味场。推断在通道中部高度处的二维水平切片上进行。

用于气味输运计算流体动力学的代码早期版本已公开，网址为 https://gitlab.com/vdv9265847/ IBbookVdV/，相关介绍见参考文献 [88]。我们的模拟使用了由 F. Viola 及其同事在参考文献 [88–91] 中开发的 GPU加速版本代码。

这些作者将在不久后公开分享该代码。所有请求均可联系 F. Viola 及其同事提出。

模拟编号	N_x	N_y	Re	$\eta/\Delta x$
(1) 各向异性大	2000	500	17500	5.5
(2) 各向异性小	1024	256	7830	5
(3) 各向同性	512	512	4990	0.8

表II. 模拟参数：模拟编号、流向网格点数 N_x、横流向网格点数 N_y、整体雷诺数 Re 以及柯尔莫哥洛夫长度 η 与网格间距 Δx 之比。各向异性模拟的雷诺数 $Re = U_b(H/2)/\nu$ 基于整体速度 U_b、半高 $H/2$ 和运动黏度$\nu = \mu/\rho$；各向同性模拟的雷诺数则为 $Re = U_{\rm rms}L/\nu$，其中 $U_{\rm rms}$ 为中平面的均方根速度，L 为模拟区域的长度。

[1]L. Van Giesen、P. B. Kilian、C. A. Allard 和 N. W. Bellono，章鱼化学触觉的分子基础，《细胞》**183**，594（2020年）。[2] V. Maselli、A.-S. Al-Soudy、M. Buglione、M. Aria、G. Polese 和 A. Di Cosmo，普通章鱼食物选择中的感觉层级：化学与视觉，《动物》**10**，457（2020年）。[3] C. A. Allard、G. Kang、J. J. Kim、W. A. Valencia-Montoya、R. E. Hibbs 和 N. W. Bellono，章鱼感觉受体演化的结构基础，《自然》**616**，373（2023年）。[4] G. Kang、C. A. Allard、W. A. Valencia-Montoya、L. van Giesen、J. J. Kim、P. B. Kilian、X. Bai、N. W. Bellono 和 R. E. Hibbs，感觉特化驱动章鱼和鱿鱼的行为，《自然》**616**，378（2023年）。[5] R. Villanueva、V. Perricone 和 G. Fiorito，作为捕食者的头足类：探寻行为灵活性、适应性和摄食习性的简短旅程，《生理学前沿》**8**，598（2017年）。[6] A.-S. Al-Soudy、V. Maselli、S. Galdiero、M. J. Kuba、G. Polese 和 A. Di Cosmo，普通章鱼吸盘中的视紫红质激酶基因的鉴定与表征：使用腕部环顾四周？《生物学》**10**，936（2021年）。[7] R. D. Tarvin，味觉吸盘，《细胞》**183**，587（2020年）。[8] W. L. Weertman、V. Gopal、D. M. Sivitilli、D. Scheel 和 D. H. Gire，章鱼能够利用气味羽流寻找食物，bioRxiv，2024（2024年）。[9] D. M. Sivitilli、T. Strong、W. Weertman、J. Ullmann、J. R. Smith 和 D. H. Gire，无视觉反馈条件下的章鱼腕部搜索行为机制，《仿生与生物仿制》**18**，066017（2023年）。[10] R. A. Russell、D. Thiel、R. Deveza 和 A. Mackay-Sim，用于定位危险化学品泄漏的机器人系统，载于 *Proceedings of 1995 IEEE international conference on robotics and automation* 1 1995 556，第（IEEE，）卷，第 561 页。[11] G. Kowadlo 和 R. A. Russell，机器人气味定位：分类体系与综述，《国际机器人研究杂志》**27**，869（2008年）。[12] X.-x. Chen 和 J. Huang，移动机器人气味源定位算法：综述与未来展望，《机器人学与自主系统》**112**，123（2019年）。[13] A. Nehorai、B. Porat 和 E. Paldi，《蒸气释放源的检测与定位》，IEEE信号处理汇刊**43**，243（1995年）。[14] M. E. Alpay 和 M. H. Shor，《源定位问题的基于模型的求解技术》，IEEE控制系统技术汇刊**8**，895（2002）。[15] J. Matthes、L. Groll 和 H. B. Keller，《利用空间分布式电子鼻对平流和扩散进行源定位》，IEEE信号处理汇刊**53**，1711（2005年）。[16] D. H. Hubel 和 T. N. Wiesel，《猫的视觉皮层中的感受野、双眼交互与功能结构》，生理学杂志**160**，106（1962）。[17] D. H. Hubel 和 T. N. Wiesel，《猫纹状皮层单个神经元的感受野》，生理学杂志**148**，574（1959）。[18] R. C. Decharms 和 M. M. Merzenich，《通过动作电位时序的协调实现声音的初级皮层表征》，《自然》**381**，610（1996）。[19] G. L. Romani、S. J. Williamson 和 L. Kaufman，《人类听觉皮层的音调拓扑组织》，《科学》**216**，1339（1982）。[20] T. A. Woolsey 和 H. Van der Loos，《小鼠大脑皮层躯体感觉区（SI）第四层的结构组织：由离散细胞构筑单位组成的皮层区的描述》，《脑研究》**17**，205（1970）。[21] C. C. Petersen，《桶状皮层的功能组织》，Neuron**56**，339（2007）。[22] S. E. Petersen 和 M. I. Posner，《人脑的注意系统：20年后》，《神经科学年度评论》**35**，73（2012）。[23] L. Zullo、G. Sumbre、C. Agnisola、T. Flash 和 B. Hochner，《章鱼高级运动中枢的非躯体拓扑组织》，《当代生物学》**19**，1632（2009）。[24] E. Tytell，《是否存在章鱼小人？》，《实验生物学杂志》**213**，v（2010），
https://journals.biologists.com/jeb/article-pdf/213/4/v/1271873/osiv-vii.pdf。[25] Y. Gutfreund、T. Flash、Y. Yarom、G. Fiorito、I. Segev 和 B. Hochner，《章鱼腕部运动的组织：用于研究柔性腕部控制的模型系统

》，《神经科学杂志》**16**，7297（1996）。[26] Y. Gutfreund、T. Flash、G. Fiorito 和 B. Hochner，《章鱼伸腕运动中涉及的腕部肌肉激活模式》，《神经科学杂志》**18**，5976（1998）。[27] T. Gutnick、L. Zullo、B. Hochner 和 M. J. Kuba，《普通章鱼利用外周感觉信息实现腕部运动的中枢神经控制》，《当代生物学》**30**，4322（2020年）。[28] L. Zullo 和 B. Hochner，《无脊椎动物脑组织的新视角》，《交流与整合生物学》**4**，26（2011）。[29] B. Hochner，《神经系统如何随具身性演化：我们能从章鱼及其他软体动物身上学到什么》，《脑、行为与进化》**82**，19（2013年）。[30] B. Hochner、L. Zullo、T. Shomrat、G. Levy 和 N. Nesher，《章鱼运动控制的具身机制》，《当代生物学》**33**，R1119（2023年）。[31] L. Zullo、J. L. R¨ockner 和 B. Pistolato，《肌肉静水骨骼中的本体感觉》，《整合与比较生物学》，icaf046（2025年）。[32] A. Keats、E. Yee 和 F.-S. Lien，《复杂城市环境中应用的源定位贝叶斯推断》，《大气环境》**41**，465（2007）。[33]L. Piro、R. A. Heinonen、M. Cencini 和 L. Biferale，《利用多种错误模型在湍流中定位气味源：引入加权贝叶斯更新》（2024年），arXiv:2407.08343 [physics]。[34] K. L. Baker、M. Dickinson、T. M. Findley、D. H. Gire、M. Louis、M. P. Suver、J. V. Verhagen、K. I. Nagel 和 M. C. Smear，《跨物种嗅觉搜索算法》，《神经科学杂志》**38**，9383（2018）。[35] M. Durve、L. Piro、M. Cencini、L. Biferale 和 A. Celani，《湍流环境中的集体嗅觉搜索》，《物理评论E》**102**，012402（2020年）。[36] N. Rigolli、N. Magnoli、L. Rosasco 和 A. Seminara，《学习利用湍流气味羽流预测目标位置》，eLife**11**，e72196（2022）。[37] A. Celani、E. Villermaux 和 M. Vergassola，《湍流环境中的气味景观》，《物理评论X》**4**，041015（2014年）。[38] J. Murlis、J. S. Elkinton 和 R. T. Carde，《气味羽流及昆虫如何利用它们》，《昆虫学年评》**37**，505（1992）。[39] N. Rigolli、G. Reddy、A. Seminara 和 M. Vergassola，《交替策略作为湍流气味导航的多模态策略而涌现》，eLife**11**（2022年）。[40] J. D. Victor、S. D. Boie、E. G. Connor、J. P. Crimaldi、G. Ermentrout 和 K. I. Nagel，《嗅觉导航与受体非线性》，《神经科学杂志》**39**，3713（2019年）。[41] S. D. Boie、E. G. Connor、M. McHugh、K. I. Nagel、G. B. Ermentrout、J. P. Crimaldi 和 J. D. Victor，《真实气味羽流的信息论分析：哪些线索有助于确定位置？》，《PLOS计算生物学》**14**，e1006275（2018）。[42] A. Celani、E. Villermaux 和 M. Vergassola，《湍流环境中的气味景观》，《物理评论X》**4**，041015（2014年）。[43] R. J. Carroll、D. Ruppert、L. A. Stefanski 和 C. M. Crainiceanu，*Measurement error in nonlinear models: a modern perspective* 2006（Chapman and Hall/CRC，）。[44] L. C. L.

，关于最大值的某些渐近性质

似然估计及相关的贝叶斯估计，《加州大学统计学出版物》1, 277（1953年）。[45] G. Giordano、M. Carlotti 和 B. Mazzolai，关于头足类拟态及其对本体感觉自主软体机器人的仿生技术的展望，Advanced Materials Technologies 6, 2100437（2021年）。[46] Z. Xie、F. Yuan、J. Liu、L. Tian、B. Chen、Z. Fu、S. Mao、T. Jin、Y. Wang、X. He、 *et al.*，受章鱼启发、用于环境交互的传感化软体腕，Science Robotics 8, eadh7852（2023年）。[47] H. Wang、M. Totaro 和 L. Beccai，迈向感知型软体机器人：进展与挑战，Advanced Science 5, 1800541（2018年）。[48] R. L. Truby、C. Della Santina 和 D. Rus，通过深度学习实现柔性传感化机器人三维构型的分布式本体感觉，《IEEE机器人与自动化快报》5, 3299（2020年）。[49] D. Kim、S.-H. Kim、T. Kim、B. B. Kang、M. Lee、W. Park、S. Ku、D. Kim、J. Kwon、H. Lee、 *et al.*，软体机器人学中机器学习方法综述，PLOS ONE 16, e0246102（2021年）。[50] T. Noda 和 H. Matsuyama，从辛几何视角看贝叶斯推断，《纯数学进展》9, 827（2019年）。[51] D. C. Knill 和 A. Pouget，贝叶斯脑：不确定性在神经编码与计算中的作用，Trends in Neurosciences 27, 712（2004年）。[52] W. J. Ma、J. M. Beck、P. E. Latham 和 A. Pouget，基于概率群体编码的贝叶斯推断，《自然神经科学》9, 1432（2006年）。[53] M. Li 和 J. Z. Tsien，神经编码——关于细胞组装编码如何从脉冲时间和神经元变异性中产生的神经自我信息理论，Frontiers in Cellular Neuroscience 11, 236（2017年）。[54] G. B. Ermentrout、R. F. Gal´an 和 N. N. Urban，可靠性、同步性与噪声，Trends in Neurosciences 31, 428 2008( )。[55] F. Moss、L. M. Ward 和 W. G. Sannita，随机共振与感觉信息处理：应用教程与综述，Clinical Neurophysiology 115, 267 2004( )。[56] M. D. McDonnell 和 D. Abbott，什么是随机共振？定义、误解、争论及其与生物学的相关性，《PLOS计算生物学》5, e1000348（2009年）。[57] J. C. Tuthill 和 E. Azim，本体感觉，《当代生物学》28, R194（2018年）。[58] M. J. Wells, *Octopus: physiology and behaviour of an advanced invertebrate*（Springer Science & Business Media, 2013年）。[59] T. Gutnick、R. A. Byrne、B. Hochner 和 M. Kuba，普通章鱼利用视觉信息确定腕的位置，《当代生物学》21, 460（2011年）。[60] A. Mamiya、P. Gurung 和 J. C. Tuthill，果蝇腿部本体感觉的神经编码，Neuron 100, 636（2018年）。[61] K. M. Oliver、D. M. Florez-Paz、T. C. Badea、G. Z. Menon、V. Menon 和 J. C. de Nooij，肌梭和高尔基腱器官传入神经纤维的分子相关因素，《自然通讯》12, 1451（2021年）。[62] T. Flash 和 L. Zullo，章鱼及其他头足类柔性肢体的生物力学、运动控制与动力学模型，Journal of Experimental Biology 226, jeb245295（2023年）。

[63] N. Nesher、G. Levy、F. W. Grasso 和 B. Hochner，皮肤与吸盘之间的自我识别机制可防止章鱼腕彼此干扰，《当代生物学》24, 1271（2014年）。[64] R. J. Crook 和 E. T. Walters，神经行为学：自我识别帮助章鱼避免缠绕，《当代生物学》24, R520（2014年）。[65] G. Sumbre、G. Fiorito、T. Flash 和 B. Hochner，章鱼柔性腕的运动控制，《自然》433, 595（2005年）。[66] R. H. Berk，模型错误时后验分布的极限行为，《数理统计年刊》37, 51（1966年）。[67] S. Mitaim 和 B. Kosko，自适应随机共振，《IEEE会刊》86, 2152–2183（1998年）。[68] L. Gammaitoni、P. H¨anggi、P. Jung 和 F. Marchesoni，随机共振，《现代物理评论》70, 223（1998年）。[69] R. Benzi、A. Sutera 和 A. Vulpiani，随机共振的机制，《物理学杂志A：数学与一般》14, L453–L457（1981年）。[70] G. O. Balkan 和 G. Sinan，基于克拉美–罗下界、利用量化观测实现噪声增强的最优参数估计，《IEEE信号处理快报》17, 477（2010年）。[71] J. Duplat 和 E. Villermaux，受限混合物中的随机搅拌混合，《流体力学杂志》617, 51（2008年）。[72] B. I. Shraiman 和 E. D. Siggia，标量湍流，《自然》405, 639（2000年）。[73] E. Villermaux 和 J. Duplat，混合是一种聚集过程，Comptes Rendus M´ecanique 331, 515（2003年）。[74] M. Orsi、L. Soulhac、F. Feraco、M. Marro、D. Rosenberg、R. Marino、M. Boffadossi 和 P. Salizzoni，均匀各向同性湍流中的标量混合：一项数值研究，《物理评论：流体》6, 034502（2021年）。[75] C. M. Bishop，使用噪声训练等价于蒂霍诺夫正则化，《神经计算》7, 108（1995年）。[76] R. A. Heinonen、L. Biferale、A. Celani 和 M. Vergassola，探索真实湍流中的贝叶斯嗅觉搜索，《物理评论：流体》10, 064614（2025年）。[77] M. Pereyra，重新审视对数凹模型中的最大后验估计，SIAM Journal on Imaging Sciences 12, 650（2019年），https://doi.org/10.1137/18M1174076。[78]C. Clason、T. Helin、R. Kretschmann 和 P. Pi-iroinen，贝叶斯反问题中的广义众数，《工业与应用数学学会／美国统计学会不确定性量化杂志》7, 652（2019年），https://doi.org/10.1137/18M1191804。[79] P. Wacker，巴拿赫空间中非参数贝叶斯反问题的最大后验估计量，arXiv：概率（2020年）。[80] T. Helin 和 M. Burger，无限维贝叶斯反问题中的最大后验概率估计，《反问题》31, 085009（2015年）。[81] M. Dashti 和 A. M. Stuart，反问题的贝叶斯方法，载于 *Handbook of uncertainty quantification*（施普林格，）第2017–311页。[82] M. Burger 和 F. Lucka，对数凹先验下线性反问题的最大后验估计是适当贝叶斯估计量，《反问题》30, 114004（2014年）。[83] R. Bassett 和 J. Deride，作为贝叶斯估计量极限的最大后验估计量，《数学规划》428, 129（2019年）。[84] R. Gribonval 和 M. Nikolova，关于贝叶斯估计以及近端算子，《应用与计算调和分析》**50**，49（2021年）。[85] A. Tarantola，*Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*（SIAM，2005）。[86] T. Akiba、S. Sano、T. Yanase、T. Ohta 和 M. Koyama，Optuna：新一代超参数优化框架，CoRR **abs/1907.10902**（2019年），1907.10902。[87] M. Rando、M. James、A. Verri、L. Rosasco 和 A. Seminara，利用时间记忆进行 Q学习以在湍流中导航，eLife **13**，RP102906（2025年）。[88] R. Verzicco、M. D. de Tullio 和 F. Viola，*An In-troduction to Immersed Boundary Methods*，《应用与计算数学剑桥专著》（剑桥大学出版社，2025年）。[89] F. Viola、V. Meschini 和 R. Verzicco，左心脏中的流固—电生理相互作用（fsei）：一种多向耦合计算模型，《欧洲力学学报B：流体》**79**，212（2020年）。[90] F. Viola、V. Spandan、V. Meschini、J. Romero、M. Fatica、M. D. de Tullio 和 R. Verzicco，Fsei-gpu：左心脏流固—电生理相互作用的图形处理器加速模拟，《计算机物理通信》**273**，108248（2022年）。[91] F. Viola、G. Del Corso 和 R. Verzicco，人类心脏的高保真模型：一种浸入边界实现，《物理评论：流体》**8**，100502（2023年）。

支持信息

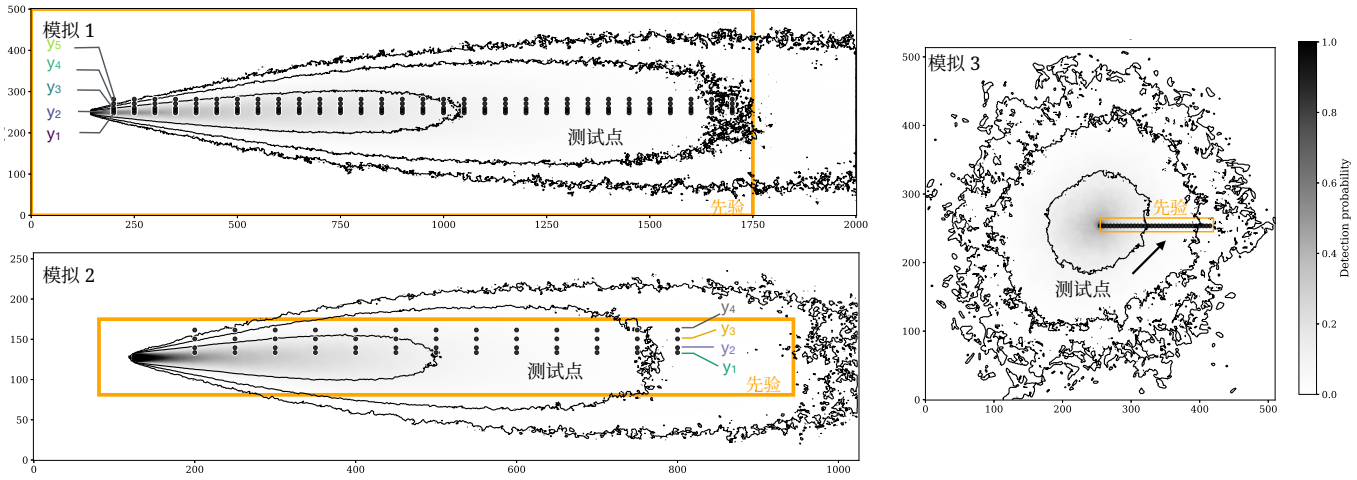


图 S1。模拟 1、2 和 3 的测试位置。模拟 1： $y = 0$，5，10，15，20；先验： 1750×500。模拟 2：$y = 0$，5，10，15，20；先验： 863×94。模拟 3：测试点在一维中沿径向排列；先验长度：165。在所有图中，似然（黑色）对应于 $\ell = 0.1$，0。01 和 0。001 的等值线逐渐变宽；所有先验在橙色标示的区域内均为平坦分布。

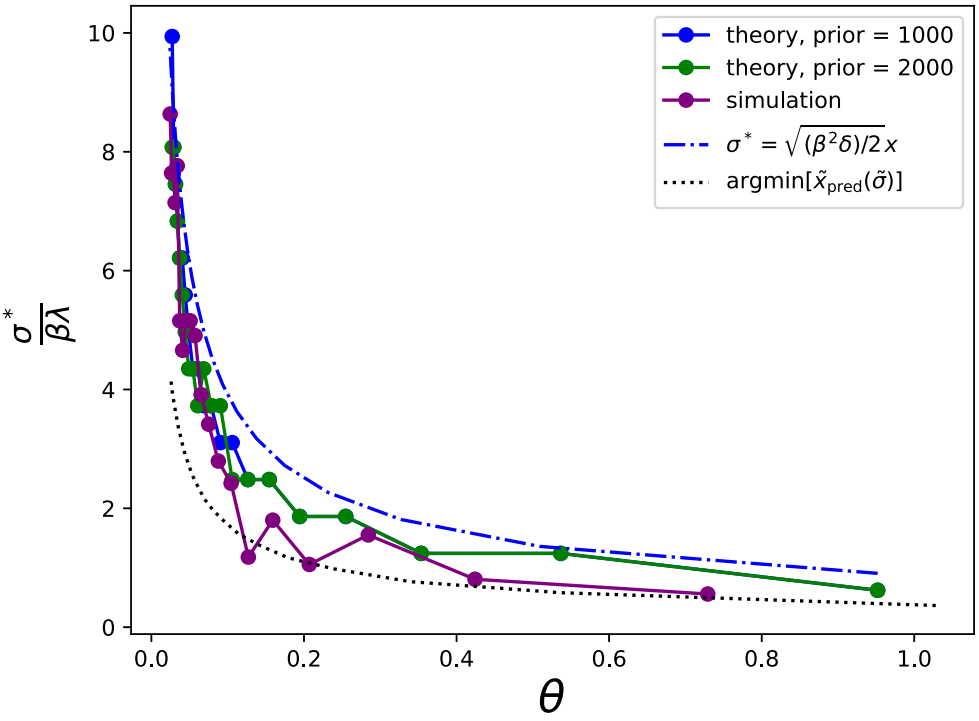


图 S2。多传感器智能体的理论最优规模 σ^*，根据经验似然与解析形式（正文中的公式 8）拟合所得参数进行归一化，并以 $N \to \infty$ 极限下的检测比例为函数，其中 $\theta = \ell(x,\ 0)$。

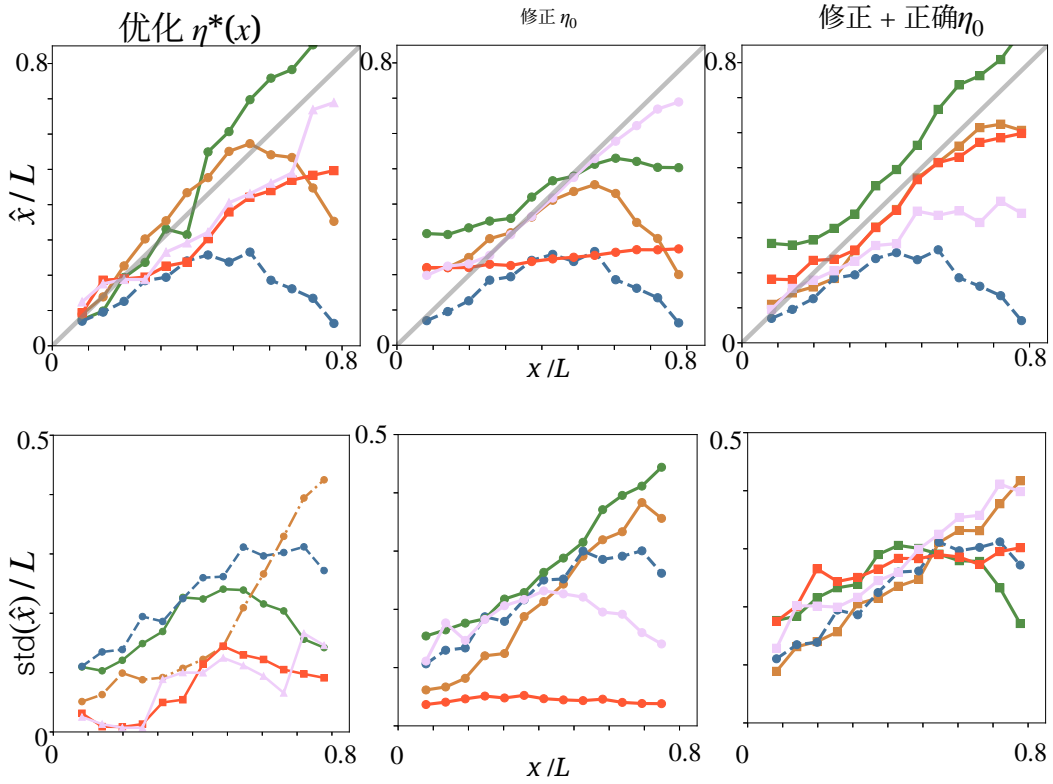


图 S3。源 vs 的估计位置$\hat{x}$（上）和标准差 std($\hat{x}$)（下），x 为真实值。所有量均以先验 L 的长度归一化。不同颜色表示不同的噪声源（颜色编码同图 S4；蓝色 $=$ 表示完美本体感觉），不同列表示不同的误差调节方式：左列，噪声调节至最优值；中列：噪声固定；右列：噪声固定，并对推断应用纠错。

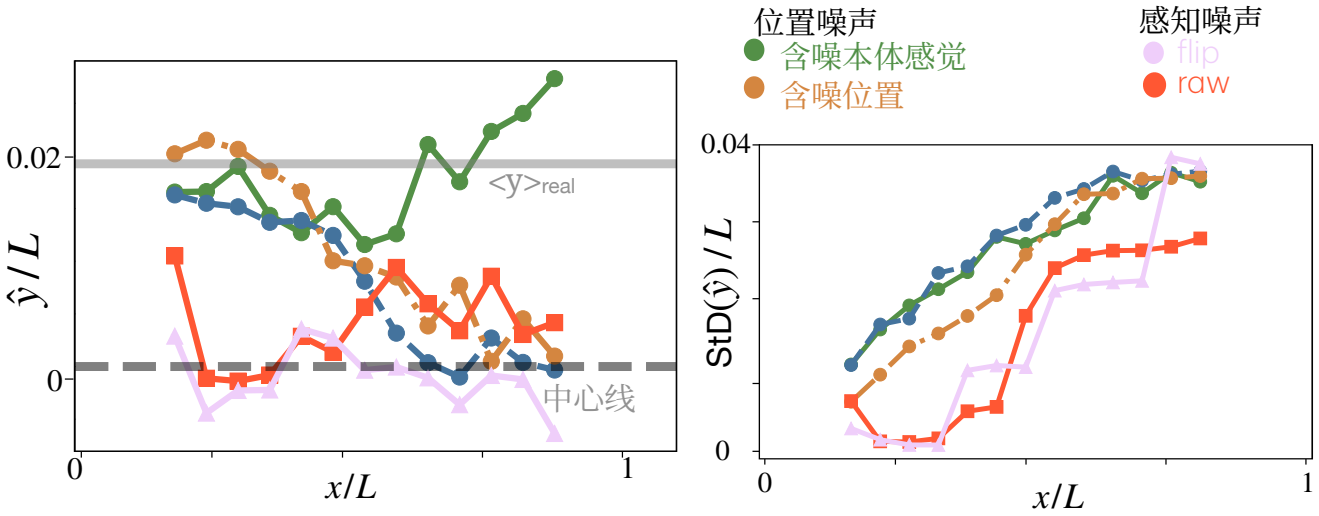


图 S4。源 vs 的估计位置$\hat{y}$（左）和标准差 std($\hat{y}$)（右），x 为真实值。为简便起见，我们对四个值的 y 预测取了平均值。灰线表示平均值的正确预测 y，并以 $< y >_{real} = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/4$ 标示。所有量均以先验 L 的长度归一化。不同颜色根据图例表示不同的噪声源，噪声调节至最优值，即使 x 方向上的准确率最大化的值。对于位置噪声，在 x 方向优化推断，仍可推断出 y，效果与完美本体感觉（蓝色曲线）相似。针对 x中的推断进行优化的感知噪声，会妨碍在 y中的推断。

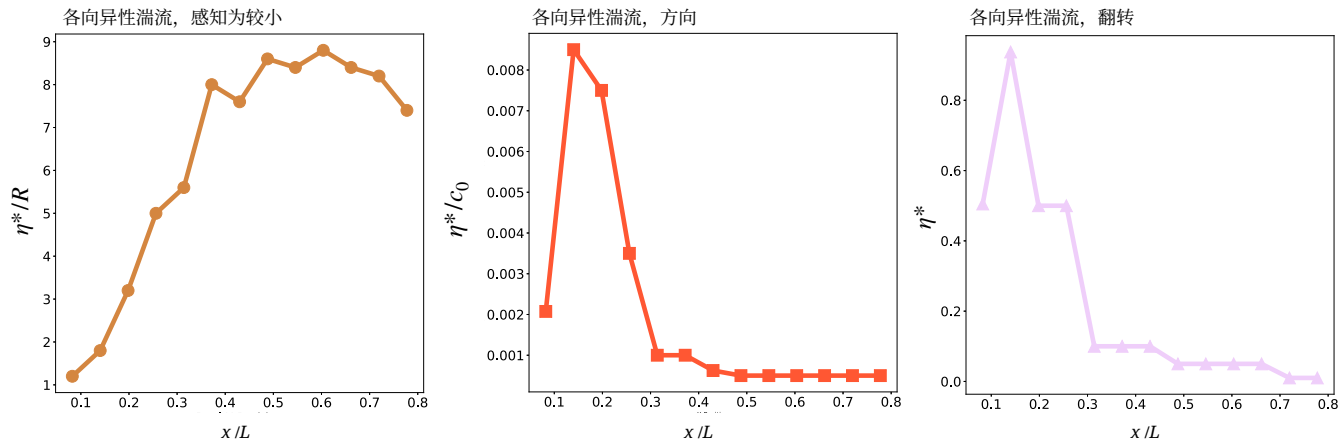


图 S5. 归一化最优误差随测试点与原点之间距离的变化：实际传感器位置的位置误差（左）、影响浓度的感知误差（中心）以及影响检测概率的翻转误差（右）。

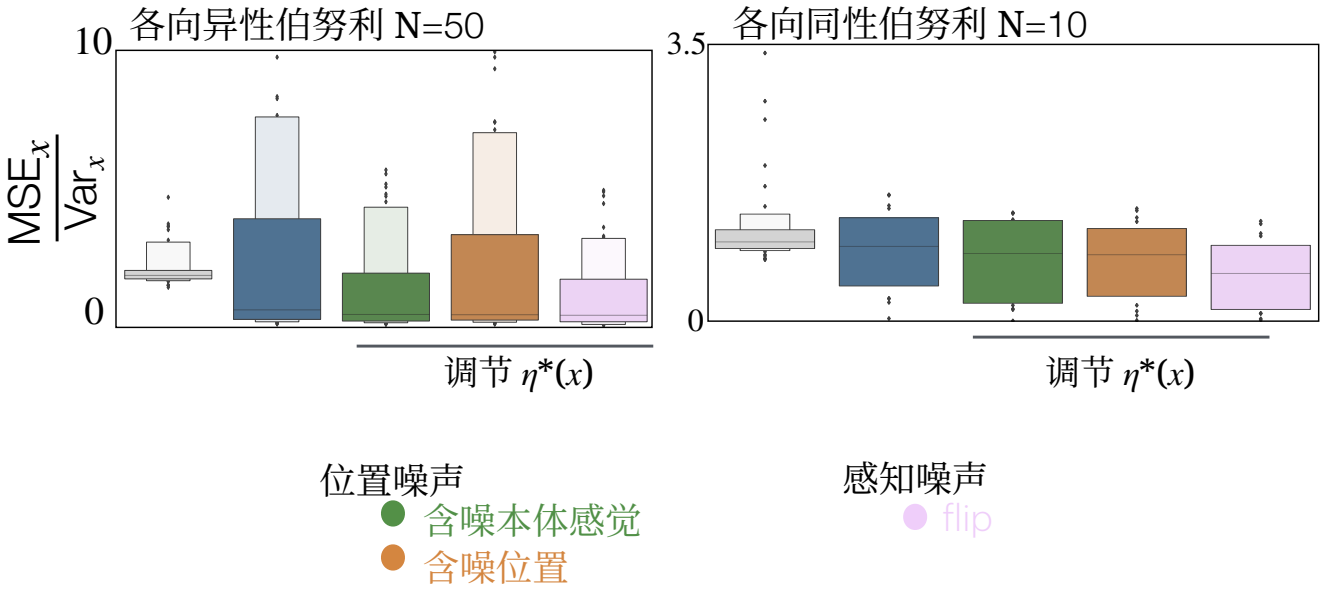


图 S6。对于使用 $N = 50$ 传感器的各向异性伯努利检测（左）和使用 $N = 10$ 的各向同性伯努利检测（右），不同噪声源下推断准确度的汇总统计。传感器数量经过选择，以确保比较具有意义，即在具备完美感知和位置信息的情况下进行推断时，其准确率仍足够低，从而留有一定的提升空间。

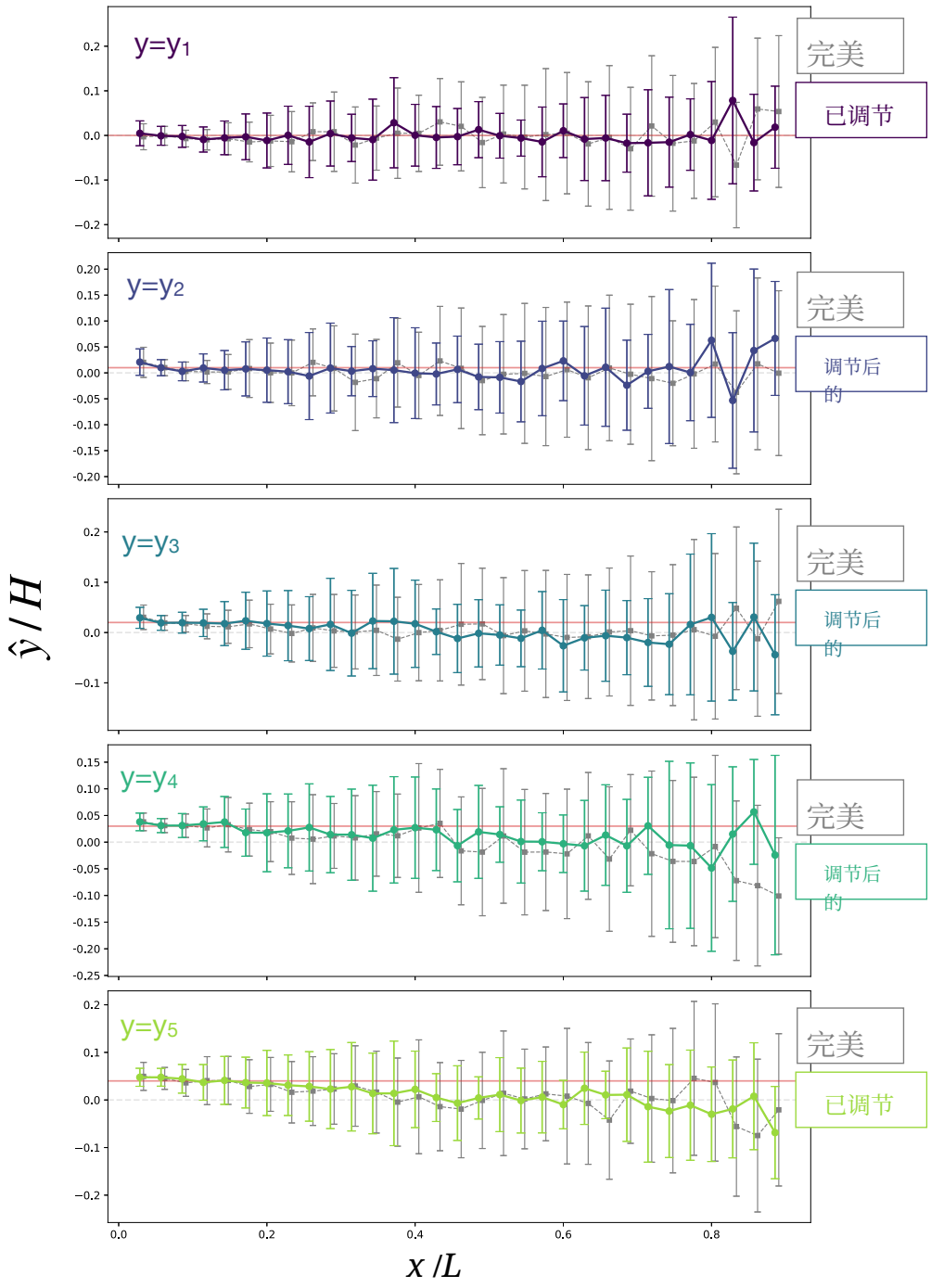


图 S7. 完美本体感觉下的预测$\hat{y}/H$ 随 x/L （灰色）以及经过最优调节的含噪本体感觉（彩色）变化的情况，显示本体感觉中的噪声不会使 y中的预测变差。红线对应正确的 y/H；从上到下对应图 S1 左上方所示的 y 五个取值（颜色编码相同）。此处， L 为先验的长度，先验的宽度为 $H \approx 0.3\,L$。

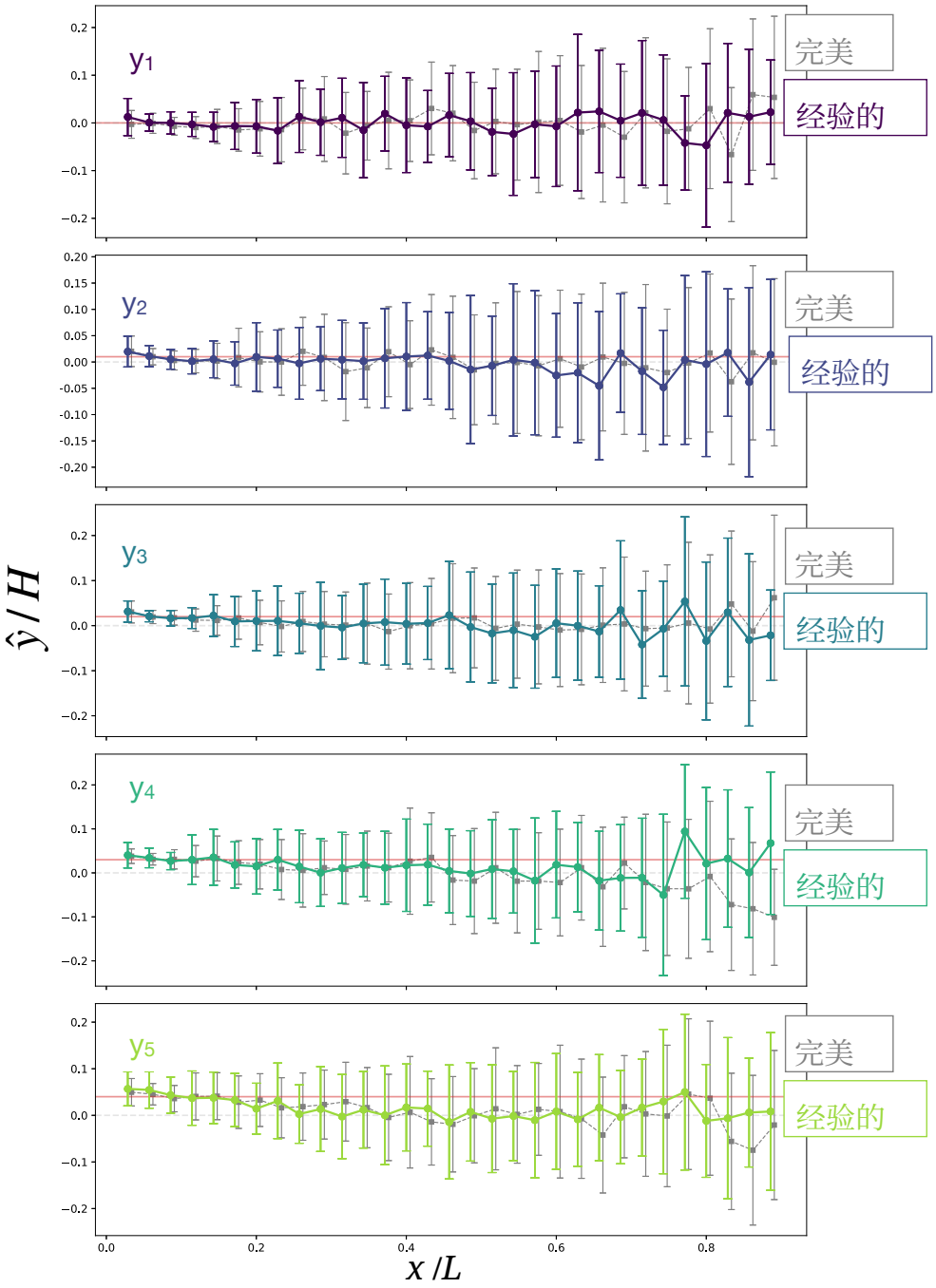


图 S8。与图 S7 相同，但噪声是通过经验调节的。

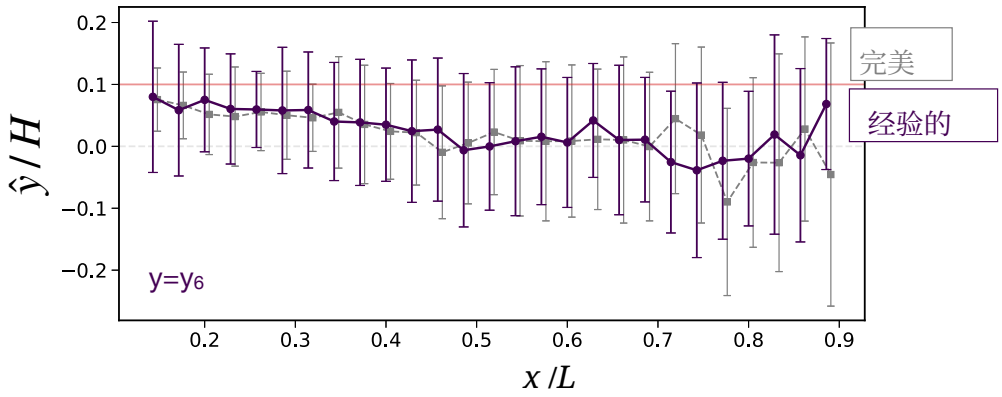


图 S9. 与图 S8 相同，展示另一组距离中心线更远的点， $y_6/H = 0.1$，结果在定性上相似，但源附近的推断效果有所下降。

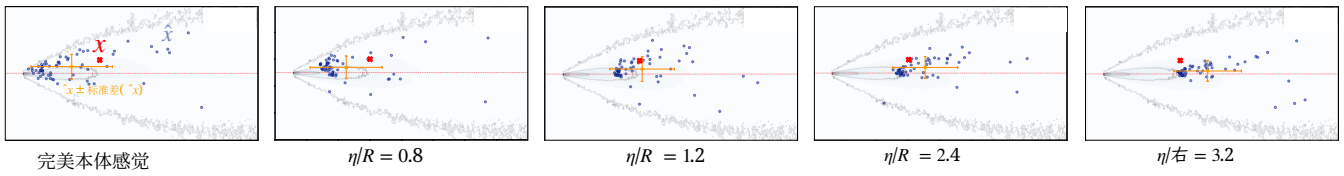


图 S10. 使用含噪本体感觉推断测试点的位置， η 设为图下方标注的值（蓝色圆形散点）；其均值和标准差（橙色点和误差线）；测试点的真实位置（红色）。从左到右：随着本体感觉噪声增大，推断位置云团逐渐远离源。