关于 Bergemann、Brooks 和 Morris《价格歧视的界限》的一则短评*

Keita Kuwahara†

2026年1月13日

arXiv:2601.07452v1 [econ.TH] 12 Jan 2026

摘要

本文重新审视了 Bergemann 等人（2015）对三级价格歧视的分析。该分析刻画了通过市场细分能够实现的消费者—生产者剩余组合集合。原文通过随机价格下的市场细分证明了这一结果，并声称任何采用可能随机定价的细分方式，都对应着一种直接分割，即在每个市场细分中收取确定性价格。然而，按照论文给出的市场细分定义，这一说法并不成立，本文对此给出了反例。随后，我们提出一种替代定义以解决这一问题，并考察两种定义之间的差异对该文主要结果的影响。

1 引言

Bergemann 等人（2015）分析了三级价格歧视：垄断者通过获取有关消费者特征的更多信息，将总体市场细分，并为不同细分市场设定不同的价格。具体而言，他们刻画了通过此类细分能够实现的消费者剩余与生产者剩余组合集合。他们利用允许垄断者采用随机定价策略的细分方式，得出了这一主要结果。尽管如此，Bergemann 等人（2015）的命题2指出，对于任何细分，即使垄断者采用随机定价策略，也存在与之对应的直接分割。在直接分割中，为每个市场细分指定一个确定性价格，并实现相同的结果。

然而，在本文中，我们针对 Bergemann 等人（2015）的命题2提出了反例（第 3 节）。具体而言，我们给出两个反例：一个是垄断者采用随机定价策略的情形，另一个是定价策略具有确定性的情形。这些反例表明，Bergemann 等人（2015）的命题2并非普遍成立，因此不能在不失一般性的前提下，将讨论限于直接分割。为解决这一问题，我们接下来讨论如何修改细分的定义（第 4 节）。

尽管 Bergemann 等人（2015）的命题2在直接分割的原始定义下并不成立，但该原始定义在应用中或许“实际上行得通”。具体而言，我们聚焦于论文的主要结果，并证明，在原始定义下，通过一般细分可以实现的消费者剩余—生产者剩余组合，几乎都能通过直接分割实现（第5节）。此外，研究还表明，所有

*我衷心感谢我的导师 Michihiro Kandori，以及 Morris 提出的宝贵意见。

†东京大学经济学研究生院。电子邮箱：kuke0303@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

这类组合都可以精确实现，唯一的例外是总体市场需求具有单位弹性的极特殊情况。（也就是说，垄断者对向任意一位消费者收取其支付意愿水平的价格都无差异。）

2 模型

我们采用 Bergemann 等人（2015）提出的模型框架，并在全文中使用相同的符号。为便于理解，下面简要概述这一设定。垄断者向连续统消费者出售一种商品，每位消费者只需求一单位。将消费者的总量标准化为 1，并将恒定边际成本标准化为 0。消费者的估值可能为 $K \geq 2$ 中的一种，表示为

$$V \triangleq \{v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_K\} \subset \mathbb{R}_+, \quad \text{with } 0 < v_1 < \cdots < v_k < \cdots < v_K.$$

A个市场 x 是这些 K 估值上的一个概率分布。所有市场的集合为 i s:

$$X \triangleq \Delta(V) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^V \,\middle|\, \sum_{k=1}^{K} x(v_k) = 1 \right\}.$$

我们将 $x_k \triangleq x(v_k)$ 记为估值为 v_k 的消费者所占的比例。若价格 v_k 能使预期收入最大化，则该价格对市场x而言是最优的：

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j \geq v_i \sum_{j=i}^{K} x_j, \quad \text{for all } i = 1, \ldots, K.$$

令 $X_k \subset X$ 表示 v_k 为最优价格的市场集合。

我们固定一个总体市场 $x^* \in X$，并假设 $x_k^* > 0$ 对所有 $k = 1,\ldots, K$均成立。细分将总体市场划分为若干子市场。形式上，细分 σ 是定义在 X上的概率分布。可行细分的集合为

$$\Sigma \triangleq \left\{ \sigma \in \Delta(X) \,\middle|\, \sum_{x \in \operatorname{supp} \sigma} \sigma(x) \cdot x = x^*, \, |\operatorname{supp} \sigma| < \infty \right\}.$$

针对细分 σ 的定价规则 为 σ支撑集中的每个市场指定一个价格分布：

$$\phi : \operatorname{supp} \sigma \to \Delta(V).$$

令 $\phi_k(x)$ 表示在市场 x中收取价格 v_k 的概率。如果对每个 x， $v_k \in \operatorname{supp} \phi(x)$ 蕴含 $x \in X_k$，则该定价规则是最优的 。

我们将直接分割 定义为一种支撑集至多包含 K 个市场的细分，这些市场以 $k \in A \subset \{1, \ldots, K\}$ 为索引，且满足 $x^k \in X_k$。直接定价规则 在市场 x^k中以概率 1 收取价格 v_k ，即

$$\phi_k(x^k) = 1.$$

根据定义，直接定价规则对于直接分割而言是最优的；在下文讨论中，每当我们提及直接分割时，均假设垄断者会采用直接定价。

给定细分 σ 和定价规则 ϕ，消费者剩余为

$$\sum_{x \in \operatorname{supp} \sigma} \sigma(x) \sum_{k=1}^{K} \phi_k(x) \sum_{j=k}^{K} (v_j - v_k) x_j,$$

生产者剩余为

$$\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\sum_{k=1}^{K}\phi_k(x)v_k\sum_{j=k}^{K}x_j,$$

而总剩余为

$$\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\sum_{k=1}^{K}\phi_k(x)\sum_{j=k}^{K}v_jx_j.$$

特别地，最大可行剩余为

$$w^*\triangleq\sum_{j=1}^{K}v_jx_j^*,$$

而统一定价下的生产者剩余为

$$\pi^*\triangleq\max_{k\in\{1,\dots,K\}}v_k\sum_{j=k}^{K}x_j^*.$$

最后，我们定义一类特征市场。令 $\mathcal{V}$ 表示V的所有子集构成的集合，并令 $\mathcal{V}_k\subset\mathcal{V}$ 为包含 v_k的子集构成的集合。对于每个 $S\in\mathcal{V}_k$，定义市场x^S 为满足以下条件的解:

$$v_i\sum_{j=i}^{K}x_j^S=v_k\sum_{j=k}^{K}x_j^S\quad\text{for all } v_i\in S,$$

and

$$\sum_{\{j|v_j\in S\}}x_j^S=1.$$

注意， x^S 是唯一确定的。以下结果见 Bergemann等人（2015）。

引理 1 (L Bergemann 等人（2015）的主张1)。 X_k 等于 $\{x^S\}_{S\in\mathcal{V}}$ $_k$

3 Bergemann等人（2015）的命题2

以下主张是 Bergemann 等人（2015）命题2表述的一部分。

主张1 （Bergemann 等人（2015）命题2的一部分）。 对于任意细分和最优定价规则（σ,ϕ），都存在一种直接分割 σ' （以及相应的直接定价规则 ϕ'），能够实现相同的估值与价格联合分布。因此，它实现的生产者剩余、消费者剩余和总剩余也相同。

然而，这一主张并不正确。以下简单的反例表明，它并非普遍成立。

例1: 令 $V=\{1,2\}$和 $x^*=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$。定义 σ和 ϕ如下:

$$\sigma\left(x^*\right)=1,\quad\phi_1\left(x^*\right)=\frac{1}{2},\quad\phi_2\left(x^*\right)=\frac{1}{2}.$$

注意， ϕ 是一个最优定价规则。我们证明，不存在任何直接分割，能够实现与（σ， ϕ）相同的估值和价格联合分布。为导出矛盾，假设存在一个直接分割 σ' 及其对应的直接定价规则 ϕ'，能够实现相同的联合分布。

由于在 (σ,ϕ) 下的价格只能取 1 或 2，且 (σ',ϕ') 下价格的边际分布必须与 (σ,ϕ) 下的边际分布一致，因此对于某些 x^1 和 x^2，有 $\sigma'(x^1)>0$、 $\sigma'(x^2)>0$。注意， $\phi'_1(x^1)=1$ ，且 $\phi'_2(x^2)=1$。此外，对于 $k=1,2$，在 (σ,ϕ) 下给定价格 v_k 时的估值分布必须与 (σ',ϕ') 下的估值分布一致，即 x^k。现在，在 (σ,ϕ) 下，给定价格 1 时的估值分布为

$$\frac{1}{\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\phi_1(x)}\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\phi_1(x)\cdot x=x^*.$$

类似地，给定价格 2 时的估值分布为

$$\frac{1}{\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\phi_2(x)}\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\phi_2(x)\cdot x=x^*.$$

因此，我们必须有 $x^1=x^2=x^*$。然而，这导致了一个矛盾：

$$\phi'(x^1)\neq\phi'(x^2)=\phi'(x^1).$$

有人可能会猜想，在例1中，未能构造出相应的直接分割，是由于垄断者的定价策略具有随机性。然而，事实并非如此。下面的例子表明，即使定价策略是确定性的，也可能不存在能够产生相同估值与价格联合分布的相应直接分割。

例2： 令 $V=\{1,2,3\}$和 $x^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$。定义 σ和 ϕ如下：

$$\sigma\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{4},\quad \sigma\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\right)=\frac{1}{4},\quad \sigma\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)\right)=\frac{1}{2},$$
$$\phi_1\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)\right)=1,\quad \phi_1\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\right)=1,\quad \phi_2\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)\right)=1.$$

注意， ϕ是一个最优定价规则。与例1类似，我们证明不存在一种直接分割，能够实现与 (σ,ϕ) 相同的估值和价格联合分布。为导出矛盾，假设存在一种直接分割 σ' 及与之关联的直接定价规则 ϕ' ，能够实现相同的联合分布。

由于 (σ,ϕ) 下的价格只能取1或2，且 (σ',ϕ') 下价格的边际分布必须与 (σ,ϕ) 下的边际分布一致，因此对于某些 x^1 和 x^2，有 $\sigma'(x^1)>0,\sigma'(x^2)>0$，且 $\sigma'(x^1)+\sigma'(x^2)=1$。注意，$\phi'_1(x^1)=1$ 且 $\phi'_2(x^2)=1$。此外，对于$k=1$，2，在 (σ,ϕ) 下给定价格 v_k时的估值分布必须与 (σ',ϕ') 下的估值分布一致，也就是说， x^k。现在，在 (σ,ϕ) 下，给定价格为1时的估值分布为

$$\frac{1}{\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\phi_1(x)}\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\phi_1(x)\cdot x=2\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right).$$

类似地，在价格为 2 的条件下，估值分布为

$$\frac{1}{\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\phi_2(x)}\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\phi_2(x)\cdot x=2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right).$$

因此，我们必然有 $x^1 = x^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$。然而，这会导致矛盾：

$$\phi'(x^1) \neq \phi'(x^2) = \phi'(x^1).$$

基于例1和例2，我们现在考虑任意（σ，ϕ）下的一般情形。在Bergemann等人（2015）命题2的证明中，直接细分 σ' 构造如下：

$$\sigma'(x^k) \triangleq \sum_{x \in \operatorname{supp} \sigma} \sigma(x)\phi_k(x),$$

因此，

$$x^k \triangleq \frac{1}{\sigma'(x^k)} \sum_{x \in \operatorname{supp} \sigma} \sigma(x)\phi_k(x) \cdot x.$$

如例1和例2所示，如果存在相应的直接细分，那么由其支持的x^k 必然具有这种特定形式。因此，如果以这种方式构造出的 $\{x^k\}$并非各不相同，就不存在相应的直接细分。反之，如果 $\{x^k\}$ 各不相同，那么以这种方式构造的直接细分 σ' 将产生相同的估值与价格联合分布。

4 修订后的定义方案

使主张1成立的一种方法，是对相关定义作出适当修订。本节将探讨如何修改细分的定义。正如第 3 节所讨论的，问题的根源在于，垄断者无法区分具有相同估值分布的两个市场细分。为解决这一问题，我们将细分 σ 重新定义为估值上的一个分布 $X \times V$，并满足以下条件：

$$\sum_{(x, v_k) \in \operatorname{supp} \sigma} \sigma((x, v_k)) \cdot x = x^* \quad \text{and} \quad |\operatorname{supp} \sigma| < \infty.$$

此外，我们重新定义 ϕ：$\operatorname{supp} \sigma \to \Delta(V)$，使其满足以下条件：对于所有 $(x, v_k) \in \operatorname{supp} \sigma$，均有

$$\phi_k((x, v_k)) = 1.$$

请注意，给定 σ 后，ϕ 由其唯一确定。对于原始定义下的任意 (σ', ϕ')，我们可以在修订后的定义下构造 $\sigma \in \Delta(X \times V)$，使估值与价格的联合分布保持不变，具体方法是令

$$\sigma((x, v_k)) \triangleq \sigma'(x)\phi'_k(x).$$

因此，在此定义下，细分与原始定义下的细分一样灵活。我们还指出，这一修改不会影响 Bergemann 等人（2015）的主要结果（论文中的定理1）。

由于我们修改了细分的定义，因此为保持一致，也重新定义了直接分割。直接分割 σ 是一种支撑集至多包含 K 个市场、由 $k \in A \subset \{1, \ldots, K\}$ 索引的细分，满足 $(x^k, v_k) \in \operatorname{supp} \sigma$。在此定义下，主张1成立。对于任意细分 σ，都可以按如下方式构造相应的直接分割 σ'：

$$\sigma'((x^k, v_k)) \triangleq \sum_{(x, v_\ell) \in \operatorname{supp} \sigma \,:\, v_\ell = v_k} \sigma((x, v_\ell)),$$

因此，

$$x^k \triangleq \frac{1}{\sigma'((x^k, v_k))} \sum_{(x,v_\ell)\in \operatorname{supp}\sigma\,:\, v_\ell = v_k} \sigma((x, v_\ell)) \cdot x.$$

在例1和例2中，我们都可以通过设定 $\sigma'((x^*,\ 1)) = \sigma'((x^*,\ 2)) = \frac{1}{2}$ 来构造直接细分 σ'。

以上讨论着重于对定义所做的修改。相比之下，第5节给出了在不改变原始定义的情况下继续进行分析会得到什么结果。

5 剩余三角形

Bergemann等人（2015）的主要结果表述为定理1，如下所示。

定理1 (Bergemann等人（2015）的定理1)。 存在一种细分和最优定价规则，使得消费者剩余为 u、生产者剩余为 π，当且仅当 $u \geq 0$、$\pi \geq \pi^*$ 和 $u + \pi \leq w^*$ 成立。

令 $T \triangleq \{(u,\ \pi) :\ u \geq 0,\ \ \pi \geq \pi^*,\ \ u + \pi \leq w^*\}$。如果主张1成立，那么根据定理1，通过直接细分可实现的消费者—生产者剩余对集合将与 T 一致。然而，根据第2节给出的定义，我们发现了主张1的反例。这自然引出了以下问题：直接细分下可实现的 $(u,\ \pi)$ 对集合是否仍与 T 一致？以下定理将回答这一问题。

定理2。 通过直接分割可实现的消费者—生产者剩余对集合与 T 相同，当且仅当 $x^* \neq x^V$。

当 $x^* = x^V$时，通过直接分割可实现的消费者—生产者剩余对集合由以下命题刻画。

命题1。 设 $x^* = x^V$。存在一种直接分割，使消费者剩余为 u 且生产者剩余为 π，当且仅当满足以下任一条件：

1. $u \geq 0$、$\pi > \pi^*$和 $u + \pi \leq w^*$，或
2. $\pi = \pi^*$ 且

$$u = \sum_{j=k}^{K} (v_j - v_k) x_j^* \quad \textit{for some } k.$$

定理2和命题1的证明见附录。

A 证明

A.1 命题1的证明

为证明命题1，我们先证明引理 2 和 3。

引理 2. 对于任意 x^*，若 $u \geq 0$、$\pi > \pi^*$ 和 $u+\pi \leq w^*$ 成立，则存在一种直接分割，其消费者剩余为 u，生产者剩余为 π。

证明。我们考虑两种细分，这两种细分也都用于 Bergemann等人（2015）。第一种定义如下。取任意满足 $x^* \in X_k$ 的 k，并令 σ 为一种满足 supp $\sigma \subset \{x^S\}_{S\in\mathcal{V}_k}$ 的细分。第二种是以下直接分割 σ':

$$\sigma'(x) = \begin{cases} x_k^* & \text{if } x = x^{\{v_k\}}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，对于所有 k, $\sigma'(x^{\{v_k\}}) > 0$，由于我们假设 $x_k^* > 0$。此外，对于给定的市场 x，我们将最低定价规则 $\phi(x)$ 定义为确定性地收取 min supp x，类似地，将最高定价规则 $\phi(\underline{x})$ 定义为确定性地收取 max supp x。现在，对于 σ 和 σ'，ϕ 和 ϕ 都是最优定价规则。

注意，任何满足 $u \geq 0$、$\pi > \pi^*$ 和 $u + \pi \leq w^*$ 的数对 (u, π)，都可以用$\alpha \in (0, 1]$ 和 $\beta \in [0, 1]$）表示如下:

$$(u, \pi) = \alpha \cdot (0, w^*) + (1 - \alpha) \cdot [\beta \cdot (w^* - \pi^*, \pi^*) + (1 - \beta) \cdot (0, \pi^*)] .$$

根据 Bergemann等人（2015），可以使用由下式定义的数对 (σ'', ϕ) 达到所需的福利结果:

$$\sigma''(x) = \alpha\sigma'(x) + (1 - \alpha)\sigma(x),$$
$$\phi_k(x) = \beta\, \underline{\phi}_k(x) + (1 - \beta)\, \overline{\phi}_k(x).$$

注意，ϕ 是 σ'' 的最优定价规则。

因此，根据第 3 节中的观察，只需证明所构造的$\{x^k\}$定义如下:

$$x^k \triangleq \frac{1}{\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma''} \sigma''(x)\phi_k(x)} \sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma''} \sigma''(x)\phi_k(x) \cdot x,$$

由互不相同的元素组成。具体而言，只需证明在 x^k 处唯一的最优价格是 v_k，下面我们将证明这一点。由于 ϕ是 σ''的最优定价规则，对于任意满足 $\sigma''(x) > 0$的 x，若 $\phi_k(x) > 0$，则

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j \geq v_i \sum_{j=i}^{K} x_j \quad \text{for all } i = 1, \ldots, K.$$

具体而言，由于 $\alpha > 0$，我们有 $\sigma''(x^{\{v_k\}}) > 0$，并且

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{\{v_k\}} > v_i \sum_{j=i}^{K} x_j^{\{v_k\}} \quad \text{for all } i \neq k.$$

因此，对于所有 $i \neq k$，我们得到

$$\sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma''} \sigma''(x)\phi_k(x) \left(v_k \sum_{j=k}^{K} x_j \right) > \sum_{x\in\operatorname{supp}\sigma''} \sigma''(x)\phi_k(x) \left(v_i \sum_{j=i}^{K} x_j \right),$$

或等价地,

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^k > v_i \sum_{j=i}^{K} x_j^k.$$

□

引理 3。 设 $x^* = x^V$。如果某种直接分割实现了生产者剩余 $\pi = \pi^*$，那么相应的消费者剩余 u 满足

$$u = \sum_{j=k}^{K} (v_j - v_k) x_j^* \quad for\ some\ k.$$

证明。 任取一个生产者剩余为 $\pi = \pi^*$ 的直接细分 σ （以及相应的直接定价规则 ϕ）。如果 $|\operatorname{supp}\sigma| = 1$，那么我们必有 $\sigma(x^V) = 1$，相应的消费者剩余 u 满足

$$u = \sum_{j=k}^{K} (v_j - v_k) x_j^* \quad \text{for some } k.$$

因此，我们可以假设 $|\operatorname{supp}\sigma| \geq 2$。由于价格 v_1 对 x^* 是最优的，我们有 $\pi^* = v_1$。于是，$\pi = \pi^*$ 推出

$$\sum_{x \in \operatorname{supp}\sigma} \sigma(x) \sum_{k=1}^{K} \phi_k(x) v_k \sum_{j=k}^{K} x_j = v_1.$$

现在，根据 ϕ 的最优性，对于所有 $x \in \operatorname{supp}\sigma$，我们有

$$\sum_{k=1}^{K} \phi_k(x) v_k \sum_{j=k}^{K} x_j \geq v_1.$$

因此，对于所有 $x \in \operatorname{supp}\sigma$，我们有

$$\sum_{k=1}^{K} \phi_k(x) v_k \sum_{j=k}^{K} x_j = v_1.$$

由此可知，对于任意 k 以及任意 $x \in \operatorname{supp}\sigma$，我们有

$$v_1 \geq v_k \sum_{j=k}^{K} x_j.$$

现在，对于所有 k，
我们有

$$v_1 = v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^* = \sum_{x \in \operatorname{supp}\sigma} \sigma(x) \left(v_k \sum_{j=k}^{K} x_j \right).$$

因此，对于任意 k 以及任意 $x \in \operatorname{supp}\sigma$，

$$v_1 = v_k \sum_{j=k}^{K} x_j.$$

这意味着每个 $x \in \operatorname{supp}\sigma$ 都必须满足 $x = x^V$，这与$|\operatorname{supp}\sigma| \geq 2$的假设矛盾。

□

由定理1以及引理 2 和 3，我们可以推导出命题1。

A.2 定理2的证明

“仅当”部分由引理 3 得出。因此，只需证明“如果”部分。为此，我们先准备几个引理。

引理 4. 设 $x \in X$，并设 $P = \{v_k \in V:$ 价格 v_k 是 $x\}$的最优价格。那么，

$$x \in \operatorname{conv}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right).$$

证明。 任取 $v_k \in P$。根据引理 1，我们可以写成

$$x = \alpha_1 x^{S_1} + \alpha_2 x^{S_2} + \cdots + \alpha_m x^{S_m}$$

对于某些 $\alpha_i > 0$ 和 $S_i \in \mathcal{V}_k$，其中 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 1$。现在我们证明，对于所有 S_i，$P \subset S_i$。反设存在某个 S_{i^*} 使得 $P \setminus S_{i^*} \neq \emptyset$。任取$v_\ell \in P \setminus S_{i^*}$。现在，对于任意 S_i，

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_i} \geq v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_i}.$$

此外，

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_{i^*}} > v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_{i^*}}.$$

因此，

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j = \alpha_1 v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_1} + \cdots + \alpha_m v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_m} > \alpha_1 v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_1} + \cdots + \alpha_m v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_m} = v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j,$$

这与假设 $v_\ell \in P$ 矛盾。因此，对于所有 S_i，我们必有 $P \subset S_i$，从而

$$x \in \operatorname{conv}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right).$$

□

引理 5. 设 $P \in \mathcal{V} \setminus \{\emptyset\}$。 $x \in$ 仿射包 $\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right)$ 蕴含

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j = v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j \quad \textit{for all } v_k, v_\ell \in P.$$

证明。 任取 $x \in$仿射包 $\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right)$，以及任意 v_k，$v_\ell \in P$。根据仿射包的定义，我们可以写成

$$x = \alpha_1 x^{S_1} + \alpha_2 x^{S_2} + \cdots + \alpha_m x^{S_m}$$

对于某些 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 和 $S_i \supset P$。由于根据定义，对于任意 S_i，

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_i} = v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_i},$$

我们有

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j = \alpha_1 v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_1} + \cdots + \alpha_m v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_m} = \alpha_1 v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_1} + \cdots + \alpha_m v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_m} = v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j.$$

□

引理 6. 设 $P = \{v_k \in V:$ 价格 v_k 是 $x^*\}$的最优解。那么， x^* 位于$\text{conv}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right)$的相对内部。

证明。 注意，根据引理 4， $x^* \in \text{conv}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right)$，并且

$$\text{aff}\left(\text{conv}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right)\right) = \text{aff}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right).$$

此外，由于对所有 k， $x_k^* > 0$ ，存在某个 $\varepsilon > 0$ ，使得对于任意正的 $\delta < \varepsilon$，任意 $x \in B_\delta(x^*) \cap \text{aff}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right)$ 都满足 $x \in \Delta(V)$。这里， $B_\delta(x^*)$ 表示开球 $\{y \in \mathbb{R}^K : \|y - x^*\| < \delta\}$。我们证明存在某个正的 $\delta < \varepsilon$ ，使得对于任意 $x \in B_\delta(x^*) \cap \text{aff}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right)$,

$$x \in \text{conv}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right).$$

为导出矛盾，假设对于每个满足 $1/n < \varepsilon$ 的 $n \in \mathbb{N}$ ，都存在 $x^n \in B_{1/n}(x^*) \cap \text{aff}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right)$，使得 $x^n \notin \text{conv}\left(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V}\right)$。根据引理 4 和引理 5，对于每个 x^n，都存在 $v_{k_n} \in V \setminus P$，使得价格 v_{k_n} 对 x^n 是最优的。

由于 $V\setminus P$是有限集，因此序列 $\{v_{k_n}\}_{n=\min\{n'\in\mathbb{N}:1/\varepsilon<n'\}}^{\infty}$存在一个子序列 $\{v_{k_{a_n}}\}_{n=1}^{\infty}$，使得对于某个固定的 $v_k \in V \setminus P$， $v_{k_{a_n}} = v_k$。这意味着，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，价格 v_k 对 x^{a_n}都是最优的，也就是说，

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{a_n} \geq v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{a_n} \quad \text{for all } v_\ell \in V, \quad n \in \mathbb{N}.$$

根据构造，我们有 $\lim_{n\to\infty} x^{a_n} = x^*$，这意味着

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{*} \geq v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{*} \quad \text{for all } v_\ell \in V.$$

因此，价格 $v_k \notin P$ 对 x^*是最优的，由此得到一个矛盾。 □

引理 7. 假设 $x \in X$ 可以表示为

$$x = \alpha_1 x^{S_1} + \alpha_2 x^{S_2} + \cdots + \alpha_m x^{S_m}$$

对于某些 $\alpha_i > 0$ 和 $S_i \in \mathcal{V}_k$。那么，当且仅当对所有 S_i都有 $v_\ell \in S_i$ 时，价格 v_ℓ 对 x 是最优的。

证明。 **（充分性部分）**假设对所有 S_i都有 $v_\ell \in S_i$ 。那么，对于任意 k'，我们有

$$v_{k'} \sum_{j=k'}^{K} x_j = \alpha_1 v_{k'} \sum_{j=k'}^{K} x_j^{S_1} + \cdots + \alpha_m v_{k'} \sum_{j=k'}^{K} x_j^{S_m} \leq \alpha_1 v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_1} + \cdots + \alpha_m v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_m} = v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j.$$

因此，价格 v_ℓ 对于 x是最优的。

(仅在部分情况下) 假设价格 v_ℓ 对于 x是最优的。假设存在某个 S_{i^*} ，使得 $v_\ell \notin S_{i^*}$，从而得出矛盾。于是，对于所有 S_i,

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_i} \geq v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_i},$$

而且,

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_{i^*}} > v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_{i^*}}.$$

因此，

$$v_k \sum_{j=k}^{K} x_j = \alpha_1 v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_1} + \cdots + \alpha_m v_k \sum_{j=k}^{K} x_j^{S_m} > \alpha_1 v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_1} + \cdots + \alpha_m v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j^{S_m} = v_\ell \sum_{j=l}^{K} x_j,$$

这与价格 v_ℓ 对 x的最优性相矛盾。 □

引理 8。 设 $x^* \neq x^V$。存在一种直接细分，其消费者剩余为 u ，生产者剩余为 π^* ，当且仅当 $0 \leq u \leq w^* - \pi^*$。

证明。 “仅当”部分由定理1得出。因此，只需证明“如果”部分。设 $P = \{v_k \in V:$ 价格 v_k 对 $x^*\}$是最优的。根据引理 6， x^* 位于 conv $(\{x^S\}_{S:P\subset S\subset V})$的相对内部。因此，我们可以写成[1]

$$x^* = \sum_{S:P\subset S\subset V} \alpha_S x^S$$

对于某个 $\alpha_S > 0$，其中 $\sum_{S:\ P\subset S\subset V} \alpha_S = 1$。我们将细分 σ 定义为 $\sigma(x^S) = \alpha_S$。我们还考虑最低定价规则 $\underline{\phi}(x)$和最高定价规则 $\overline{\phi}(x)$，如引理 2 的证明及 Bergemann 等人（2015）中所示。接着，我们将定价规则 ϕ 定义为

$$\phi_k(x) = \frac{u}{w^* - \pi^*} \underline{\phi}_k(x) + \frac{w^* - \pi^* - u}{w^* - \pi^*} \overline{\phi}_k(x).$$

根据 Bergemann 等人（2015），(σ, ϕ) 产生消费者剩余 u 和生产者剩余 π^*。注意， ϕ 是 σ的最优定价规则。

根据第 3 节中的观察，只需证明所构造的集合 $\{x^k\}$（定义如下）

$$x^k \triangleq \frac{1}{\sum_{x\in \operatorname{supp}\sigma} \sigma(x)\phi_k(x)} \sum_{x\in \operatorname{supp}\sigma} \sigma(x)\phi_k(x)\cdot x = \frac{1}{\sum_{S:P\subset S\subset V} \alpha_S \phi_k(x^S)} \sum_{S:P\subset S\subset V} \alpha_S \phi_k(x^S)\cdot x^S,$$

由 成互不相同的元素。下文中，我们分别讨论各种情形。

我们先考虑 $u = 0$的情形。如果 x^k 定义良好（即 $\sum_{S:P\subset S\subset V} \alpha_S \phi_k(x^S) > 0$），那么对于所有 $j > k$，都有 $x_k^k > 0$ 和 $x_j^k = 0$。因此， $\{x^k\}$ 中的元素两两不同。同理，在 $u = w^* - \pi^*$的情形下，如果 x^k 定义良好，那么对于所有 $j < k$，都有 $x_k^k > 0$ 和$x_j^k = 0$。因此，在这种情形下，$\{x^k\}$ 也由互不相同的元素构成。于是，下文将重点讨论 $0 < u < w^* - \pi^*$的情形。

接下来，我们考虑 P 是单元素集的情形。令 $v_{k^*} \in P$。对于任意 $v_\ell \neq v_{k^*}$，根据引理 7， x^ℓ 的最优价格恰好是 v_ℓ 和 v_{k^*}。另一方面，根据引理 7， x^{k^*} 的最优价格唯一地为 v_{k^*}。因此， $\{x^k\}$ 中的元素两两不同。

接下来，我们考虑 P 不是单元素集的情形，即 $|P| \geq 2$。对于任意满足 $v_k <$ min P 或 $v_k >$ max P 的 v_k ，根据引理 7， x^k 的最优价格集合恰好由 v_k 和 P 中的元素组成。此外，对于任意满足 min $P < v_k <$ max P 的 v_k， x^k 未定义。最后，根据引理 7，对于 $x^{\min P}$ 和 $x^{\max P}$，二者拥有相同的最优价格集合，即 P。因此，只需证明 $x^{\min P} \neq x^{\max P}$。

首先，如果 $v_1 <$ min P，则有 $x_1^{\min P} = 0$but $x_1^{\max P} > 0$，因此它们是不同的。同理，如果$v_K >$ max P，则有 $x_K^{\max P} = 0$but $x_K^{\min P} > 0$，因此它们也不同。因此，在下文中，我们可以假设 $v_1 =$ min P and $v_K =$ max P。

[1]例如，参见 Rockafellar（1997）。

由于 $x^* \neq x^V$，我们有 $P \neq V$。因此，对于 $i = 1, 2$，我们可以取任意不同的集合 S_1 和 S_2，使得 $P \subset S_i \subset V$。接下来，我们将构造一种与迄今为止考虑过的完全不同的直接分割。作为预备步骤，我们按如下方式构造 x' 和 x''：

$$x' = (\alpha_{S_1} + \alpha_{S_2}) \left\{ \left(\frac{\alpha_{S_1}}{\alpha_{S_1} + \alpha_{S_2}} + (1-\beta)\varepsilon \right) x^{S_1} + \left(\frac{\alpha_{S_2}}{\alpha_{S_1} + \alpha_{S_2}} - (1-\beta)\varepsilon \right) x^{S_2} \right\} + \sum_{S \neq S_1, S_2 : P \subset S \subset V} \alpha_S x^S,$$

$$x'' = (\alpha_{S_1} + \alpha_{S_2}) \left\{ \left(\frac{\alpha_{S_1}}{\alpha_{S_1} + \alpha_{S_2}} - \beta\varepsilon \right) x^{S_1} + \left(\frac{\alpha_{S_2}}{\alpha_{S_1} + \alpha_{S_2}} + \beta\varepsilon \right) x^{S_2} \right\} + \sum_{S \neq S_1, S_2 : P \subset S \subset V} \alpha_S x^S,$$

对于某些 $\varepsilon > 0$ 和 $\beta \in (0,1)$。由于 $\alpha_{S_1} > 0$ 和 $\alpha_{S_2} > 0$，存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意 $\beta \in (0,1)$，都有 $x', x'' \in X$。我们取这样的 $\varepsilon > 0$。注意，对于任意 $\beta \in (0,1)$，$\beta x' + (1-\beta)x'' = x^*$ 和 $x' \neq x''$。

我们构造一个直接分割 σ' 以及与之对应的直接定价规则 ϕ' 如下：

$$\sigma'(x') = \beta, \quad \sigma'(x'') = 1 - \beta, \quad \phi'_1(x') = 1, \quad \phi'_K(x'') = 1.$$

注意，根据引理 7，我们有 $x' \in X_1$ 和 $x'' \in X_K$。此外，由于 $x'' \in X_1$ 同样成立，在 (σ', ϕ') 下的生产者剩余等于 π^*，与 β 的取值无关。另一方面，消费者剩余

$$\begin{aligned} u' &= \beta \sum_{j=1}^{K} (v_j - v_1) x'_j \\ &= \beta \left\{ \sum_{j=1}^{K} (v_j - v_1) x_j^* + (\alpha_{S_1} + \alpha_{S_2})(1-\beta)\varepsilon \left(\sum_{j=1}^{K} (v_j - v_1) x_j^{S_1} - \sum_{j=1}^{K} (v_j - v_1) x_j^{S_2} \right) \right\} \end{aligned}$$

关于 $\beta \in (0,1)$ 连续变化，并且我们有

$$\lim_{\beta \to 0^+} u' = 0, \quad \lim_{\beta \to 1^-} u' = w^* - \pi^*.$$

因此，根据介值定理，存在某个 $\beta \in (0, 1)$，使得 $u' = u$。 □

根据定理1、引理 2 和引理 8，定理 2 的“如果”部分也得到了证明。

参考文献

Bergemann, D.、Brooks, B. 和 Morris, S.（2015）。价格歧视的界限。《美国经济评论》，*105*(3)，921–957。Rockafellar, R. T.（1997）。凸分析（第 28 卷）。普林斯顿大学出版社。