arXiv:2601.07467v1 [math.AC] 12 Jan 2026

几乎对称数值广义几乎算术半群的弗罗贝尼乌斯数

MARCEL MORALES 和 NGUYEN THI DUNG

Abstract. 设 a, k, h, c 为正整数， d 为非零整数。回顾一下，数值广义几乎算术半群 S 是由互素正整数 $a, ha+d, ha+2d, \ldots, ha+kd, c$ 极小生成的半群，也就是说，其嵌入维数为 $k+2.$。在先前的工作中，作者在一个技术性假设下描述了 Ap´ery 集和定义理想 I S 的 Gr¨obner 基，完整版本将发表于一篇即将发表的论文中。本文在这一假设下继续研究，并描述伪弗罗贝尼乌斯集。因此，我们完整描述了 S 为对称或几乎对称时的情形，同时推广并扩展了 Ignacio Garc´ía-Marco、J. L. Ram´ írez Alfons´ín 和 O. J. Rødseth 先前的结果；我们还为其弗罗贝尼乌斯数找到了一个二次公式，推广了 J.C. Rosales 和 P.A. Garc´ía-S´ánchez 的一些结果。此外，给定数 a, d, k, h, c， 一个简单的算法便可判定 S 是否几乎对称，并进一步求出其型和弗罗贝尼乌斯数。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 3 3. 数值广义近等差半群（AAG 半群）4 3.1. AAG 半群的 Gröbner 基 4 3.2. AAG 半群的伪 Frobenius 集 8 4. 对称 AAG 半群 12 5. 几乎对称 AAG 半群，$d \in \mathbb{Z}^*$ 15 5.1. Frob(S) $\in PF(S)_\varepsilon$ with $\varepsilon \in \{1, 2\}$、card$(PF(S)_\varepsilon) \geq 2$ 的几乎对称 AAG 半群 5.2. $PF(S)_2 =$ {Frob(S)} 20 的几乎对称 AAG 半群 5.3. 满足 PF(S)$_1 =$ {Frob(S)} 23的几乎对称 AAG 半群 6. 几乎对称 AAG-半群的弗罗贝尼乌斯数公式 27 参考文献 31

2010年数学主题分类：主类：11D07，次类：11Gxx、14Gxx、13H10、14M05、16S36。关键词：弗罗贝尼乌斯数、伪弗罗贝尼乌斯数、Ap´ery 集、Gr¨obner 基、半群环、对称、几乎对称半群、戈伦斯坦环。第二作者部分获得傅里叶研究所、UMR 5582、数学实验室、格勒诺布尔-阿尔卑斯大学（法国格勒诺布尔 cedex 9，邮编 38058，CS 40700）的资助。

1. Introduction

设 $a_0, \ldots, a_n$ 为自然数，且 $S := \{k_0a_0 + \ldots + k_na_n \mid k_i \in \mathbb{N}\}$ 为由 $\{a_0, \ldots, a_n\}$. 生成的半群。回顾一下，若 $a_0, \ldots, a_n$ 是互素数，则 S 的弗罗贝尼乌斯数记为 $F(S)$, 它是所有不属于 S 的整数中的最大者。设 $K[S] := K[t^k \mid k \in S] = K[t^{a_0}, \ldots, t^{a_n}] \subset K[t]$ 为 S 的半群环，且 $R = K[x_0, \ldots, x_n]$ 为 K 上的 $n+1$ 元多项式环，按权进行分次，其中对所有 $i = 0, \ldots, n.$，$\deg x_i = a_i$。$K[S]$ 的定义理想 I 定义为 K-代数同态 Ψ: $R \to K[S]$ 的核，其中对所有 $i = 0, \ldots, n$, $\Psi(x_i) = t^{a_i}$。我们将经常用到这样一个事实： I 是由二项式生成的素理想，且不包含单项式。我们在环 R 的单项式集合 $[[R]]$ 上使用加权次数逆字典序 $\prec_w$，其中 $x_0 \prec \ldots \prec x_n$；并定义映射 φ: $[[R]] \to \mathbb{N}$，对每个单项式 $M = x_0^{k_0} \ldots x_n^{k_n} \in [[R]]$，都有 $\varphi(M) = k_0a_0 + \ldots + k_na_n$。回顾一下，伪 Frobenius 集 $PF(S)$ 是满足 $a \notin S$ 和 $a + s \in S$ 的所有整数 a 构成的集合，其中对所有 $0 \neq s \in S$ 均成立。 $PF(S)$ 中的元素个数称为 S 的型，记作 $t(S)$。最后，Ap´ery 集定义为 $\mathrm{Ap}(S, a_0) := \{s \in S \mid s - a_0 \notin S\}$，它在本文中起着重要作用。通过在 [8], 中定义关于 a_0 的单项式 Ap´ery 集 $\mathrm{Ap}(S, a_0)$，作为 Ap´ery 集 $\mathrm{Ap}(S, a_0)$ 的代数类比，并利用序 $\prec_w$ 及映射 φ，我们可以将对 Ap´ery 集的研究转化为研究 $[[R']]$ 中不属于 $\mathrm{in}(I)$ 的单项式集合，其中 $R' = K[x_1, \ldots, x_n]$，而 $\mathrm{in}(I)$ 是 I 关于 $\prec_w$ 的首项所生成的单项式理想。

设 a、k、h、c 为正整数，且 $d \in \mathbb{Z}^*$。回顾一下，数值广义几乎算术半群（简称 AAG 半群）是由互素正整数 a、$ha + d$、$ha + 2d$、.....、$ha + kd$、c 极小生成的半群，也就是说，它的嵌入维数为 $k + 2.$。我们的目标是用连分数描述 AAG 半群的所有性质，以此拓展我们先前在 [5], [6], [8] 中的工作。在 [8] 中，我们在一个假设条件下给出了定义理想 S 的 Gr¨obner 基，而完整情形将在即将发表的论文中讨论。本文延续 [8], 的工作；在相同假设下，我们可以描述伪弗罗贝尼乌斯集（见定理 3.14）。由此，我们完整描述了对称或几乎对称的 AAG 半群（见定理 4.1 、 5.3 、 5.4 、 5.5 ），改进并拓展了 [4] 的结果。特别地，我们证明，如果 S 几乎对称，那么其型至多为嵌入维数减 1。另一个有趣之处在于，如果 S 几乎对称，那么弗罗贝尼乌斯数可用关于 a、d、k、h、c 和 t（S）的线性公式或二次公式表示。此外，借助某些二次方程的解，可以通过一个简单的算法判定一个 AAG 半群是否几乎对称，并进一步求出其型和弗罗贝尼乌斯数。这一结果拓展并推广了 [14] 的所有结果。

此处介绍的算法是作者此前在 [5], [6] 中的工作的扩展，可从 http: // www-fourier.univ-grenoble- alpes.fr/ morales/ 下载。

2. Preliminaries

分别用 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{N}$ 表示整数集和非负整数集。给定$n \geqslant 1$和 $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$，使得 $\gcd(a_0, \ldots, a_n) = 1$，令 S 为 $\mathbb{N}$中的半群

$$S := \{k_0 a_0 + \ldots k_n a_n \mid k_i \in \mathbb{N}\}.$$

集合 $\mathbb{N} \setminus S$ 是有限的，且 S 称为数值半群。如果 S 由 $\{a_0, \ldots, a_n\}$ 最小生成，则 $n+1$ 称为 S.的嵌入维数。

定义 2.1. 设 S 是由 $a_0, \ldots, a_n$ 生成的数值半群。

(i) 数 $F(S) = \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \notin S\}$ 称为 S 的弗罗贝尼乌斯数。

(ii) 我们还定义 $PF(S) = \{s \in S \mid s \in S$ 若 $s \in S$ 且 $s \neq 0\}$ 为伪弗罗贝尼乌斯集。 $PF(S)$中的元素称为S的伪弗罗贝尼乌斯数。显然，弗罗贝尼乌斯数是一个伪弗罗贝尼乌斯数，并且 $PF(S)$中元素的个数称为 S的型，记为 $t(S)$。

(iii) The 相对于 a_0 在 S 中的 Ap´ery 集是集合 $\mathrm{Ap}(S, a_0) = \{s \in S \mid s - a_0 \notin S\}$.

若 $t(S) = 1$，则称数值半群为对称的。我们将利用以下性质刻画近对称数值半群。

引理 2.2. [10] 设 $t(S) > 1$。令 $PF(S) = \{f_1, \ldots, f_{t(S)-1}, F(S)\}$，其中 $f_1 < \cdots < f_{t(S)-1}$。那么，当且仅当 $f_i + f_{t(S)-i} = F(S)$ 对于$i = 1, \ldots, t(S) - 1$成立时， S是几乎对称的。

现在，我们需要一些关于弗罗贝尼乌斯数和 Gr¨obner 基的结果，这些结果由 [8]得出。令 $R = K[x_0, \ldots, x_n]$ 为按权 $\deg x_0 = a_0, \ldots, \deg x_n = a_n$, $J \subset R$ 分次的多项式环，$B = R/J$为一个分次理想，且 $R' = K[x_1, \ldots, x_n]$。设 $R' = K[x_1, \ldots, x_n]$，并用 $[[R']]$ 表示 R'. 的所有单项式组成的集合。令 $\varphi\colon [[R']] \to \mathbb{N}$ 为由$\varphi(M) = k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n$定义的映射，其中对每个单项式 $M = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \in [[R']]$均成立。我们考虑加权次数逆字典序 $\prec_w$，其中 $x_0 \prec_w \cdots \prec_w x_n$ 且对所有 $0 \leqslant i \leqslant n$都有 $\deg x_i = a_i$。令 $\mathrm{in}(I)$ 为 I 关于序 $\prec_w$的初始理想，也就是由 I中所有多项式的首项生成的理想。现在我们考虑两个集合

$$\widetilde{\mathrm{Ap}(S, a_0)} := \{M \in [[R']] \mid M \notin \mathrm{in}(I)\}$$

and

$$\widetilde{PF(S)} := \{M \in \widetilde{\mathrm{Ap}(S, a_0)} \mid \forall i \neq 0, \exists N_i \in [[R']], \alpha_i > 0 \text{ such that } Mx_i - x_0^{\alpha_i} N_i \in I\}.$$

推论 2.3。假设最大公因数$(a_0, \ldots, a_n) = 1$。我们有

(i) φ 到 $\widetilde{\mathrm{Ap}(S, a_0)}$的限制是双射，且 $\widetilde{\varphi(\mathrm{Ap}(S, a_0))} = \mathrm{Ap}(S, a_0)$。特别地，$\mathrm{card}((\mathrm{Ap}(S, a_0))) = a_0$，且 $F(S) = \max\{\varphi(M) \mid M \notin \mathrm{in}(I)\} - a_0$。

(ii) φ 到 $\widetilde{PF(S)}$的限制是双射，且 $\widetilde{\varphi(PF(S))} = PF(S) + a_0$，即每个元素 $\omega \in PF(S)$ 都恰好对应一个单项式 $M_\omega \in PF(H)$，使得$\varphi(M_\omega) - a_0 = \omega$.

(iii) $PF(S)$ 的极大性：设 $M \in [[R']]$，若对于某个 $i = 1$，有 $x_i M \in \mathrm{Ap}(S, a)$，……，$k+1$ 那么当然有 $M \notin PF(S)$。

(iv) 令 $s \in \mathrm{Ap}(S, a_0)$，$M \in \mathrm{Ap}(S, a_0)$ 和 $N \in [[R']]$，使得 $s = \varphi(M) = \varphi(N)$。那么 $M \prec_w N$。

我们用 Frob(S) 表示 $PF(S)$ 中唯一满足 $\varphi(\mathrm{Frob(S)}) = F(S)+a_0$ 的单项式。下面的引理用单项式刻画近对称数值半群。

引理 2.4. 假设 $t(S) > 1$。令 $PF(S) = \{M_1, \ldots, M_{t(S)-1}, \mathrm{Frob(S)}\}$，其中 $\varphi(M_1) < \cdots < \varphi(M_{t(S)-1})$。那么 S 是几乎对称的，当且仅当 $M_i M_{t(S)-i} - x_0 \mathrm{Frob(S)} \in I$，其中 $i = 1, \ldots, t(S) - 1$。

证明。设 $PF(S) = \{f_1, \ldots, f_{t(S)-1}, F(S)\}$。由于 $\varphi(M_i) = a_0 + f_i$，我们有 $\varphi(M_i M_{t(S)-i}) = 2a_0 + f_i + f_{t(S)-i}$ 且 $\varphi(\mathrm{Frob(S)}) = a_0 + F(S)$。因此由引理 2.2 可得结论。□

3. Numerical generalized almost arithmetic semigroups (AAG-semigroups)

设 a、k、h、c 为正整数，且 $d \in \mathbb{Z}^*$ 使得 $ha + kd > 0$。回顾 [8]，数值广义几乎算术半群（简称 AAG 半群）是由互素正整数 a、$ha + d$、$ha + 2d$、……、$ha + kd$、c 极小生成的半群，也就是说，其嵌入维数为 $k + 2$。当 $h = 1$、$d > 0$ 时，有一个有趣的特殊情形，称为数值近等差半群。D. P. Patil [11] 从代数角度研究了它们，J. L. Ramírez Alfonsín 和 O. J. Rødseth 则在 [12], [13] 从组合角度进行了研究。

令 $R = K[x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}]$ 为 K 上关于权分次的 $k + 2$ 元多项式环，其中对 $i = 0$，……，k，有 $\deg x_i = ha + id$；$\deg x_{k+1} = c$，并令 I 为同态 $\Phi\colon R \to K[S]$ 的核，该同态是 K-代数之间由 $\Phi(x_0) = t^a$、$\Phi(x_i) = t^{ha+id}$ 对所有 $i = 1$，……，k 以及 $\Phi(x_{k+1}) = t^c$. 定义的。令 $R' = K[x_1, \ldots, x_{k+1}]$。

3.1. AAG 半群的 Gr¨obner 基。

注 3.1. 若 $d < 0$，则可假设 $h \geq 2$。也就是说，设 $d < 0$ 且 $h = 1$，理想 I 由 a、$a + d$、$a + 2d$、……、$a + kd$、c 生成。若令 $a' = a + kd$、$d' = -d > 0$，则 S 由 a'、$a' + d'$、$a' + 2d'$、……、$a' + kd'$、c 生成。

我们回顾一下 [8, 第 5]节中的以下结果。下面的结果推广了 [11,引理 1.6]1]。

引理 3.2。对于 $1 \leq i$，$j < k$，令

$$\mathcal{A} := \{x_i x_j - x_0^h x_{i+j} \mid \text{if } i + j \leq k, \} \cup \{x_i x_j - x_{i+j-k} x_k \mid \text{if } i + j > k\}.$$

因此，$\mathcal{A}$ 中的每个二项式都属于 I。注意，$\mathrm{card}(\mathcal{A}) = \frac{(k-1)k}{2}$。

推论 3.3。考虑加权单项式序 $\prec_w$，使得 $x_0 \prec_w x_1 \prec_w \ldots \prec_w x_k \prec_w x_{k+1}$。$\mathcal{A}$ 的首项是 in(I)的生成元的一部分。此外，$\widetilde{a_0}$in(I) $\cap[[R']]$，并且 Ap(S, $y\ z\ \in$ $\mathbb{N}^2$ $M\quad z$ –)可以表示在平面上。事实上，对于任意点（，）我们关联单项式（$y,$）$:= L_i x_k^{\alpha} x_{k+1}^{z}$，其中 $\alpha = \lfloor \frac{y}{k} \rfloor$、$i = y - k\alpha$以及$L_i = 1$，如果 $i = 0$，而 $L_i = x_i$，如果 $0 < i < k.$。反过来，任意单项式 $L_i x_k^{\alpha} x_{k+1}^{z} \in [[R']]$都可以表示为点（$y, z$）$\in \mathbb{N}^2$，其中 $y = \alpha k + i.$

引理 3.4. 设 $s \in \mathbb{N}$、p、$r \in \mathbb{Z}$ 使得

$$ra = sd - pc.$$

设 $s = \sigma k + l\rho$，其中当 $\rho = 0$ 时 $0 \leq \rho < k$，当 $\rho > 0$ 时 $l = 0$。
(1) 有

$$(r + h(\sigma + l))a = \sigma(ha + kd) + l(ha + \rho d) - pc. \quad (*)$$

(2) 定义 $r' := r + h(\sigma + l)$，有

- 若 p，$r' \geq 0$，则 $L_l x_k^{\sigma} - x_0^{r'} x_{k+1}^{p} \in I$。
- 若 $p < 0$，$r' > 0$，则 $L_l x_k^{\sigma} x_{k+1}^{-p} - x_0^{r'} \in I$。
- 若 $p \geq 0, r' < 0$ 则 $x_{k+1}^{p} - x_0^{-r'} L_l x_k^{\sigma} \in I$。

现在我们定义数 s_i, p_i, r_i, q_i，使得对于 $i \geq 2$，(s_i, p_i, r_i) 是方程 $sd - pc = ra$ 的解。对于 [5] 中满足 $n = 3$ 的情形，我们使用数 a, d, c 应用我们的算法。

设 s_0 是满足方程$sd - pc = ra$的最小自然数，使得 (s_0, 0, r_0) 是其解。令 $p_0 = 0$，并设 p_1 是满足方程 $sd - pc = ra$ 的最小自然数，使得 (s_1, p_1, r_1) 是其解，其中 $0 \leq s_1 < s_0$。在我们的情形中，利用[5, 命题 1.3]，我们可以假设最大公因数(a, d) $= 1$，因此 $s_0 = a, p_1 = 1$。考虑余数为负的欧几里得算法:

$$\begin{cases} s_0 &= q_2 s_1 - s_2 \\ s_1 &= q_3 s_2 - s_3 \\ \ldots &= \ldots \\ s_{m-1} &= q_{m+1} s_m \\ s_{m+1} &= 0 \end{cases}$$

其中 $q_i \geq 2$, $s_i \geq 0$对所有的 $i = 2, \ldots, m+1.$。对于 $i = 1, \ldots, m$，令 p_{i+1}, r_{i+1} 定义为

$$p_{i+1} = p_i q_{i+1} - p_{i-1}\ , r_{i+1} = r_i q_{i+1} - r_{i-1}.$$

已在 [5], [6] 中证明，对于 $i = 0, \ldots, m$，三元数 (s_i, p_i, r_i) 是方程 $sd - pc = ra$ 的解，

$$s_i p_{i+1} - s_{i+1} p_i = a, s_{i+1} r_i - s_i r_{i+1} = c, p_{i+1} r_i - p_i r_{i+1} = d,$$

并且序列 s_i 是递减的，而序列 p_i 是递增的。此外，若 $d > 0$，则序列 r_i 是递减的。

设 $s_i = \sigma_i k + l_i \rho_i$, 其中 $0 \le \rho_i < k$ 且 $l_i = 0$ 若 $\rho_i = 0$, $l_i = 1$ 若 $\rho_i > 0$。我们还令 $r'_i = r_i + h\,(\sigma_i + l_i)$。若 $s_{\mu+1} \neq 0$，令 $s_\mu - s_{\mu+1} = \widetilde{\sigma} k + l\widetilde{\rho}$, 其中 $0 \le \widetilde{\rho} < k$, 且 $l = 0$ 若 $\widetilde{\rho} = 0$, $\widetilde{l} = 1$ 若 $\widetilde{\rho} > 0$。我们定义 $\widetilde{r} := r_\mu - r_{\mu+1} + h\,(\widetilde{\sigma} + \widetilde{l})$。

引理 3.5. ([8, 引理 5.4]) 对于 $i = 0, \ldots, m+1$，我们有

$$L_{\widetilde{\rho}_i} x_k^{\widetilde{\sigma}_i} x_{k+1}^{p_{i+1}-p_i} - x_0^{\widetilde{r}_i} \in I,$$

其中，若 $\widetilde{\rho}_i > 0$, 则 $\widetilde{r}_i > h$。此外，对于 $i = 0, \ldots, m$, 我们有 $r'_i > r'_{i+1}$.

注意，由于我们假设 S 的嵌入维数为 $k+2$，因此总有 $\widetilde{r}_i \ge 2$。

定义 3.6. 令 μ 为满足 $r'_\mu > 0 \ge r'_{\mu+1}$ 的唯一整数。我们整理出如下表所示的序列

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
s_μ	p_μ	r_μ	r'_μ
$s_{\mu+1}$	$p_{\mu+1}$	$r_{\mu+1}$	$r'_{\mu+1}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

如 [8], 从现在起，我们假设 $r'_\mu \ge h$ 或 $\rho_\mu = 0$。注意，根据 μ的定义，若 $h = 1$，则 $r'_\mu \ge h$。

定义 3.7. 使用上述记号，并假设 $r'_\mu \ge h$ 或 $\rho_\mu = 0$，我们定义以下集合:

(1) 若 $\rho_\mu = 0$，则我们令 $\mathcal{B} := \{x_k^{\sigma_\mu} - x^{r'_\mu - h} x_0^{r'_\mu} x_{k+1}^{p_\mu}\}$. 若 $\rho_\mu \neq 0$，则我们令

$$\mathcal{B} := \{x_{\rho_\mu} x_k^{\sigma_\mu} - x_0^{r'_\mu} x_{k+1}^{p_\mu}, x_{\rho_\mu + j} x_k^{\sigma_\mu} - x_0^{r'_\mu - h} x_j x_{k+1}^{p_\mu} \mid 1 \le j \le k - \rho_\mu\}.$$

(2) 若 $\widetilde{\rho} > 0$，则我们令

$$\mathcal{C} := \{x_{\widetilde{\rho}} x_k^{\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu} - x_0^{\widetilde{r}}, x_{j+\widetilde{\rho}} x_k^{\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu} - x_0^{\widetilde{r}-h} x_j \mid 1 \le j \le k - \widetilde{\rho}\},$$

若 $\widetilde{\rho} = 0$，则我们令 $\mathcal{C} := \{x_k^{\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu} - x_0^{\widetilde{r}}\}$; 若 $s_{\mu+1} = 0$，则我们令 $\mathcal{C} := \emptyset$。

(3) $\mathcal{D} := \{x_{k+1}^{p_{\mu+1}} - x^{r'_{\mu+1} - h} x_0^{r'_{\mu+1}} L_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}}\}$。

根据我们的假设，半群 S 的嵌入维数为 $k+2$，因此 $s_\mu > k, p_{\mu+1} > 1$，这意味着 $\mu > 0$; 若 $r'_{\mu+1} = 0$，则 $s_{\mu+1} > k$; 反之，若 $s_{\mu+1} \le k$，则 $r'_{\mu+1} < 0$。

下一个定理使我们能够有效地计算理想半群 I 的 Gr¨obner 基，它精确阐述并推广了 [11] 的主定理，其中考虑了 $h = 1$ 的情形。

定理 3.8. 设 S 为一个 AAG 半群。假设 $r'_\mu \ge h$ 或 $\rho_\mu = 0$ 成立。(i) 我们有

$$\widetilde{\mathrm{Ap}(S, a)} = \left\{L_i x_k^\alpha x_{k+1}^z \mid 0 \le \alpha k + i < s_\mu - s_{\mu+1}, 0 \le z < p_{\mu+1}\right\} \cup \left\{L_i x_k^\alpha x_{k+1}^z \mid s_\mu - s_{\mu+1} \le \alpha k + i < s_\mu, 0 \le z < p_{\mu+1} - p_\mu\right\}.$$

(ii) $\mathcal{G} := \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ 是 I 的 Gr ¨obner 基。

推论 3.9。设 $r'_\mu \geq h$ 或 $\rho_\mu = 0$成立。采用推论 3.3 中的记号。令

$$\mathcal{U} = \{M(y,z) \mid 0 \leq y < s_\mu - s_{\mu+1}, z \geq p_{\mu+1}\},$$
$$\mathcal{V} = \{M(y,z) \mid y \geq s_\mu - s_{\mu+1}, z \geq p_{\mu+1} - p_\mu\},$$
$$\mathcal{W} = \{M(y,z) \mid y \geq s_\mu, 0 \leq z < p_{\mu+1} - p_\mu\}.$$

则 $\mathrm{in}(I) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$.

从现在起，我们将使用推论 3.3 和推论 3.9 中引入的记号。

引理 3.10。设 $r'_\mu \geq h$ 或 $\rho_\mu = 0$成立。令 $M \in \mathrm{in}(I)$，若满足以下任一条件：$r'_{\mu+1} < 0$ 且 $M \in \mathcal{U}$，或$M \in \mathcal{V}$，或$r'_\mu > h$ 或 $\rho_\mu = 0$ 且 $M \in \mathcal{W}$，则存在 $\alpha > 0$ 以及一个单项式 N，使得 $M - x_0^\alpha N \in I$。

下面的引理使我们能够比较 $\widetilde{r}$ 和 $r'_\mu - r'_{\mu+1}$。

引理 3.11。（1）如果 $\rho_\mu = \rho_{\mu+1} = 0$，那么 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1}$.
（2）如果 $\rho_\mu = 0$、$\rho_{\mu+1} > 0$，那么 $\widetilde{r} - h = r'_\mu - r'_{\mu+1}$。（3）如果 $\rho_\mu > 0$、$\rho_{\mu+1} = 0$，那么 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1}$.（4）如果 $\rho_\mu > 0$、$\rho_{\mu+1} > 0$ 且 $0 < \rho_\mu < \rho_{\mu+1}$，那么 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1}$.（5）如果 $\rho_\mu > 0$、$\rho_{\mu+1} > 0$ 且 $0 < \rho_\mu = \rho_{\mu+1}$，那么 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1}$.（6）如果 $\rho_\mu > 0$、$\rho_{\mu+1} > 0$ 且 $\rho_\mu > \rho_{\mu+1} > 0$，那么 $\widetilde{r} - h = r'_\mu - r'_{\mu+1}$。

证明。回忆一下，$\widetilde{r} := r_\mu - r_{\mu+1} + h(\widetilde{\sigma} + l)$，$r'_\mu - r'_{\mu+1} = r_\mu - r_{\mu+1} + h(\sigma_\mu - \sigma_{\mu+1} + l_\mu - l_{\mu+1})$。共有六种情况。

(1) 若 $\rho_\mu = \rho_{\mu+1} = 0$，则 $\rho_\mu = \rho_{\mu+1} = \widetilde{\rho} = 0$、$l = 0$、$\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1}$。因此$\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1}$.(2) 若 $\rho_\mu = 0$、$\rho_{\mu+1} > 0$，则 $\rho_\mu = 0$、$\rho_{\mu+1} > 0$、$\widetilde{\rho} = k - \rho_{\mu+1} > 0$、$l = 1$，且$\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1} - 1$。因此 $\widetilde{r} - h = r'_\mu - r'_{\mu+1}$。(3) 若 $\rho_\mu > 0$、$\rho_{\mu+1} = 0$，则 $\rho_\mu = \widetilde{\rho}$、$l = 1$、$\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1}$。因此 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1}$.(4) 若 $\rho_\mu > 0$、$\rho_{\mu+1} > 0$ 且 $0 < \rho_\mu < \rho_{\mu+1}$，则 $\widetilde{\rho} = k + \rho_\mu - \rho_{\mu+1} > 0$、$l = 1$，且$\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1} - 1 \geq 0$。因此 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1}$.(5) 若 $\rho_\mu > 0$、$\rho_{\mu+1} > 0$ 且 $0 < \rho_\mu = \rho_{\mu+1}$，则 $\widetilde{\rho} = 0$、$l = 0$、$\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1} \geq 0$。因此 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1}$.(6) 若 $\rho_\mu > 0$、$\rho_{\mu+1} > 0$ 且 $\rho_\mu > \rho_{\mu+1} > 0$，则 $\widetilde{\rho} = \rho_\mu - \rho_{\mu+1} > 0$、$l = 1$，且$\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1} \geq 0$. 因此 $\widetilde{r} - h = r'_\mu - r'_{\mu+1}$。

□

关于 Ap´ery 集的描述以及用序列 s_i, p_i, r_i 表示弗罗贝尼乌斯数的公式（见 [8, 第 5] 节）。

3.2. AAG 半群的伪弗罗贝尼乌斯集。现在我们来考察 AAG 半群的伪弗罗贝尼乌斯集。当 $h=1$ 时， S 对称的情形已在 [12] 中研究，而 S 为伪对称的情形已在 [4] 中研究。在我们的工作中，我们将描述伪弗罗贝尼乌斯集，并一般性地刻画对于 $h \geq 1$, S 何时几乎对称。本文将研究范围限定在假设 $r'_\mu \geq h$ 或 $\rho_\mu = 0$ 下。注意，如果 $h=1$, 则 $r'_\mu \geq h$ 成立。下面回顾一个引理。

引理3.12。（[8, 推论 5.9]）采用上述记号，假设 $r'_\mu \geq h$ 或 $\rho_\mu = 0$。令 $PF(S)_1$ 为 $PF(S)$ 中所有单项式构成的集合，其中 x_{k+1} 的幂为 $p_{\mu+1}-1$；令 $PF(S)_2$ 为 $PF(S)$ 中所有单项式构成的集合，其中 x_{k+1} 的幂为 $p_{\mu+1}-p_\mu-1$。我们有 $PF(S) = PF(S)_1 \cup PF(S)_2$.

在定理 3.14 的证明中，我们需要以下注记。

注记 3.13。（a）令 $i \in \{1, \ldots k\}, j \in \{1, \ldots, k+1\}, x_i M \in \mathrm{Ap}(S,a)$ 中，若 $i+j \leq k$, 则由于 $x_i x_j - x_0^h x_{i+j} \in I$, 有 $x_j x_i M - x_0^h x_{i+j} M \in I$。因此，为了检验 $x_i M$ 是否属于 $PF(S)$ 中的，我们只需考虑满足 $i+j > k$ 的 j。

（b）由于 $s_\mu - s_{\mu+1} = (\sigma_\mu - \sigma_{\mu+1})\, k + \rho_\mu - \rho_{\mu+1}$, 因此若 $\rho_{\mu+1} \leq \rho_\mu$，则有 $\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1}$、$\widetilde{\rho} = \rho_\mu - \rho_{\mu+1}$；若 $\rho_{\mu+1} > \rho_\mu$，则有 $\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1} - 1$、$\widetilde{\rho} = k + \rho_\mu - \rho_{\mu+1}$。

在下一个定理中，我们描述伪弗罗贝尼乌斯集，这对于研究对称和几乎对称 AAG 半群非常有用。

定理 3.14。采用上述记号，假设 $r'_\mu \geq h$ 或 $\rho_\mu = 0$。则有

(1) Suppose $r'_{\mu+1} > 0$。
   (a) *If* $\rho_{\mu+1} = 0$ *then* $\widetilde{PF(S)}_1 = \emptyset$.
   (b) *If* $\rho_{\mu+1} > 0, \widetilde{\rho} = 0$ *then* $\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_i x_k^{\widetilde{\sigma}-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, i = 1, \ldots, k - \rho_{\mu+1}\}$.
   (c) *If* $\rho_{\mu+1} > 0, \widetilde{\rho} = 1, \widetilde{\sigma} = 0$ *then* $\widetilde{PF(S)}_1 = \emptyset$.
   (d) *If* $\rho_{\mu+1} > 0, \widetilde{\rho} = 1, \widetilde{\sigma} > 0$ *then* $\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_i x_k^{\widetilde{\sigma}-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, i = 1, \ldots, k - \rho_{\mu+1}\}$.
   (e) *If* $\rho_{\mu+1} > 0, \widetilde{\rho} > 1$ *then* $\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_i x_k^{\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, i = 1, \ldots, \min\{\widetilde{\rho}-1, k - \rho_{\mu+1}\}\}$.

(2) Suppose $r'_{\mu+1} < 0$。
   (a) *If* $\widetilde{\rho} = 0$ *then* $\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_i x_k^{\widetilde{\sigma}-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, i = 1, \ldots, k-1\}$.
   (b) *If* $\widetilde{\rho} = 1, \widetilde{\sigma} = 0$ *then* $\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\}$.
   (c) *If* $\widetilde{\rho} = 1, \widetilde{\sigma} > 0$ *then* $\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_i x_k^{\widetilde{\sigma}-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, i = 1, \ldots, k\}$.
   (d) *If* $\widetilde{\rho} > 1$ *then* $\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_i x_k^{\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, i = 1, \ldots, \widetilde{\rho}-1\}$.

(3) 若 $s_{\mu+1} = 0$，则 $\widetilde{PF(S)}_2 = \emptyset$。

(4) 假设 $\rho_\mu = 0$。

(i) If $s_{\mu+1} \geq k-1$ *then* $\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = 1, \ldots, k-1\}$.

(ii) If $s_{\mu+1} < k-1$ *then* $\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = \widetilde{\rho}, \ldots, k-1\}$.

(5)假设 $\rho_\mu = r_\mu + 1$。(i)若 $s_{\mu+1} \geq k$，则 $\widetilde{PF\ S(\ )}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = 1, \ldots, k\}$.(ii) 若 $1 < s_{\mu+1} < k$，则 $\widetilde{PF\ S(\ )}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = \widetilde{\rho}, \ldots, k\}$.(iii) 若 $s_{\mu+1} = 1$，则 $\widetilde{PF\ S(\ )}_2 = \{x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}\}$.(6) 假设 $\rho_\mu = 1$，$r'_\mu = h$。(i) 若 $s_\mu - s_{\mu+1} = 1$，则 $\widetilde{PF\ S(\ )}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = 1, \ldots, k\}$.(ii) 若 $1 < s_\mu - s_{\mu+1} \leq s_\mu - k$，则 $\widetilde{PF\ S(\ )}_2 = \{x_1 x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}\}$.(iii) 若 $s_\mu - k < s_\mu - s_{\mu+1}$，则 $PF(S)_2 = \emptyset$.

7) Suppose $\rho_\mu > 1$.

(i) If $s_{\mu+1} \geq \rho_\mu - 1$ *then* $\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = 1, \ldots, \rho_\mu - 1\}$.

(ii) If $s_{\mu+1} < \rho_\mu - 1$ *then* $\widetilde{\rho} = \rho_\mu - s_{\mu+1}$ *and* $\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = \widetilde{\rho}, \ldots, \rho_\mu - 1\}$.

证明。我们需要考虑所有可能的情形:

（1）证明断言（1）和（2）以研究 $\widetilde{PF(S)}_1$。

a）假设 $s_\mu - s_{\mu+1} = 1$。那么我们可以看到 $\widetilde{PF\ S(\ )}_1 \subset \{x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\}$ and $x_{k+1}(x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}) - x_0^{-r'_{\mu+1}} x_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}} \in I$。假设 $r'_{\mu+1} = 0$，则有 $\varphi(x_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}}) = s_{\mu+1} < s_\mu$。这意味着 $x_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}} \in \mathrm{Ap}(S, a)$。因此 $PF(S)_1 = \emptyset$。假设 $r'_{\mu+1} < 0$。对于 $j = 1$、.....、k，我们有 $x_j x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in \mathcal{V}$，所以根据引理 3.10，存在 $\alpha > 0$ and 一个单项式 N，使得 $x_j M_i - x_0^\alpha N$。因此 $\widetilde{PF\ S(\ )}_1 = \{x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\}$。

b) 假设 $PF(S)_{s_\mu - s_{\mu+1}} \subset \{x_i x_k^\gamma x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, i = 1, \ldots, A\}$，则有

If $\widetilde{\rho} = 0$ then $\gamma = \widetilde{\sigma} - 1$, and $A = k - 1$,
If $\widetilde{\rho} = 1, \widetilde{\sigma} > 0$ then $\gamma = \widetilde{\sigma} - 1$, and $A = k$,
If $\widetilde{\rho} > 1$ then $\gamma = \widetilde{\sigma}$, and $A = \widetilde{\rho} - 1$.

设 $M = x_k^\gamma x_{k+1}^{\mu+1-}$、$^1 j = 1$、.....、$k+1$.。根据注记 3.13，我们只需研究当 $i + j > k$ 时的单项式 $x_j x_i M$。如果 $j \leq k$，则有 $x_j x_i M \in \mathcal{V}$。因此，根据引理 3.10，存在 $\alpha > 0$ 以及一个单项式 N，使得 $x_j x_i M - x_0^\alpha N$。如果 $j = k+1$，则有 $x_{k+1} x_i M - x_0^{-r'_{\mu+1}} x_i L_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}} x_k^\gamma \in I$。

于是可知，如果 $PF(S)_{s_\mu - s_{\mu+1}} \subset \{x_i x_k^\gamma x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, i = 1, \ldots, A\}$。现在我们考虑 $r'_{\mu+1} = 0$ 的情形。首先注意到 $s_\mu = (\widetilde{\sigma} + \sigma_{\mu+1})k + \rho_{\mu+1} + \widetilde{\rho}$。

- 若 $\rho_{\mu+1} = 0$，则 $x_{k+1} x_i M - x_i x_k^{\sigma_{\mu+1}} x_k^\gamma \in I$，并且我们有若干情形：若 $\gamma = \widetilde{\sigma} - 1$，则 $\varphi(x_i x_k^{\sigma_{\mu+1}} x_k^\gamma) = i + (\sigma_{\mu+1} + \widetilde{\sigma} - 1)k = s_\mu + i - k - \widetilde{\rho} < s_\mu$。

因此 $x_i x_k^{\sigma_{\mu+1}} x_k^{\gamma} \in \mathrm{Ap}(S,a)$。于是 $PF(S)_1 = \emptyset$。若 $\gamma = \widetilde{\sigma}$，则 $i+(\widetilde{\sigma}+\sigma_{\mu+1})k = s_\mu + i - \widetilde{\rho} < s_\mu$，因为 $i < \widetilde{\rho}$，所以 $PF(S)_1 = \emptyset$。

- 现在假设 $\rho_{\mu+1} > 0$。我们有 $x_{k+1}x_iM - x_0^{-r'_{\mu+1}} x_i x_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}} x_k^{\gamma} \in I$. 若 $i+\rho_{\mu+1} \le k$，则 $x_i x_{\rho_{\mu+1}} - x_0^h x_{i+\rho_{\mu+1}} \in I$，所以 $x_iM \in PF(S)$。若 $i+\rho_{\mu+1} > k$，则 $x_{k+1}x_iM - x_{i+\rho_{\mu+1}-k} x_k^{\sigma_{\mu+1}+\gamma+1} \in I$。我们需要讨论若干情形。若 $\gamma = \widetilde{\sigma} - 1$，则 $i + \rho_{\mu+1} - k + (\widetilde{\sigma}+\sigma_{\mu+1})k = s_\mu + i - k - \widetilde{\rho} < s_\mu$，这意味着 $x_{i+\rho_{\mu+1}-k} x_k^{\widetilde{\sigma}+\sigma_{\mu+1}} \in \widetilde{S}\ \mathrm{Ap}(S,a)$。因此 $x_iM \notin \widetilde{PF\ S}()$。于是

$$\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_i x_k^{\widetilde{\sigma}-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, i = 1, \dots, k - \rho_{\mu+1}\}.$$

若 $\gamma = \widetilde{\sigma}$，则 $i+\rho_{\mu+1} - k + (\widetilde{\sigma}+\sigma_{\mu+1})k + k = s_\mu + i - \widetilde{\rho} < s_\mu$，这意味着 $x_{i+\rho_{\mu+1}-k} x_k^{\widetilde{\sigma}+\sigma_{\mu+1}+1} \in \widetilde{S}\ \mathrm{Ap}(S,a)$。因此 $x_iM \notin \widetilde{PF\ S}()$。于是

$$\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_i x_k^{\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, i = 1, \dots, \min\{\widetilde{\rho}-1, k-\rho_{\mu+1}\}\}.$$

(2) 为研究 $PF(S)_2$，证明断言 (3)、(4)、(5)、(6) 和 (7)。

a) 若 $s_{\mu+1} = 0$，则集合 $\widetilde{\mathrm{Ap}(S,a)}$ 可表示为一个矩形，则 $PF(S)$ 中不存在元素 $\widetilde{\ }$，其 x_{k+1} 的幂等于 $p_{\mu+1} - p_\mu - 1$.。因此 $PF(S)_2 = \emptyset$.b) 假设 $s_{\mu+1} > 0$。我们有

$$\widetilde{PF(S)}_2 \subset \{x_i x_k^{\gamma} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = 1, \dots, A\},$$

其中

若 $\rho_\mu = 0$，则 $\gamma = \sigma_\mu - 1$、$A = k-1$。

若 $\rho_\mu = 1$，则 $\gamma = \sigma_\mu - 1$、$A = k$。若 $\rho_\mu > 1$，则 $\gamma = \sigma_\mu$、$A = \rho_\mu - 1$。

(A) 令 $j = 1, \dots, k, i = 1, \dots, A, M = x_k^{\gamma} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}$，我们研究单项式 $x_j x_i M$。根据注记 3.13，我们可以假设 $i + j > k$，因此$x_j x_i M - x_{i+j-k} x_k^{\gamma+1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1} \in I$。我们需要考虑三种情况:

(I) 若 $\rho_\mu = 0$，则 $\gamma + 1 = \sigma_\mu$, $x_{i+j-k} x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1} \in \mathcal{W}$. 。因此，根据引理 3.10，存在 $\alpha > 0$ 和一个单项式 N，使得 $x_j x_i M - x_0^{\alpha} N$。

(II) 若 $\rho_\mu = p_{\mu+1} - p_\mu - 1$，则 $\gamma + 1 = \sigma_\mu$。若 $i + j - k = 1$，则 $x_j x_k^{\sigma_\mu} - x_0^{r'_\mu - h} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in I$，因此我们可以假设 $i + j - k \ge 2$。利用 I 的 Gröbner 基，我们得到 $x_{i+j-k} x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1} - x_0^{r'_\mu - h} x_{i+j-k-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in I$。如果 $r'_\mu > h$，则有 $x_j x_i M - x_0^{r'_\mu - h} x_{i+j-k-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in I$。因此我们假设 $r'_\mu = h$，于是$x_j x_i M - x_{i+j-k-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in I$。考虑两种情况。

(i) 假设 $s_\mu - s_{\mu+1} = 1$。由于 $i + j - k - 1 \ge 1$ 我们有 $x_{i+j-k-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in \mathcal{V}$，因此根据引理 3.10，对于 $j = 1, \dots, k$ 存在$\alpha > 0$ 以及一个单项式 N，使得 $x_j x_i M - x_0^{\alpha} N$。

(ii) 假设 $s_\mu - s_{\mu+1} > 1$。对于 $i > 1$, 令 $j = k + 2 - i$, 于是 $x_j x_i M - x_1 x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in I$, 但 $x_1 x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in \widetilde{S}$ Ap(, a)。因此, 对于 $i > 1$, 我们有 $x_i M \notin \widetilde{PF\ S}(\ )_2$, 即 $\widetilde{PF\ S}(\ )_2 \subset \{x_1 x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}\}$.

（III）如果 $\rho_\mu > 1$ 那么 $\gamma = \sigma_\mu$。我们有 $x_j x_i M - x_{i+j-k} x_k^{\sigma_\mu+1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1} \in I$ 和 $x_k^{\sigma_\mu+1} - x_0^{r'_\mu-h} x_{k-\rho_\mu} x_{k+1}^{p_\mu} \in I$。因此 $x_j x_i M - x_0^{r'_\mu-h} x_{i+j-k} x_{k-\rho_\mu} x_{k+1}^{p_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1} \in I$。由于 $i < \rho_\mu$ 我们有 $i + j - k + k - \rho_\mu < j \leq k$, 以及$x_{i+j-k} x_{k-\rho_\mu} - x_0^h x_{i+j-\rho_\mu}$。所以对于任意 $j = 1, \ldots\ldots, k$, $i = 1, \ldots\ldots, \rho_\mu - 1$ 我们有 $x_j x_i M - x_0^{r'_\mu} x_{i+j-\rho_\mu} x_{k+1}^{p_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1} \in I$。

（B）现在研究单项式 $x_{k+1} x_i M = x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu}$. 。我们同样有三种情况:

（I）设 $\rho_\mu = 0$。当且仅当 $i + (\sigma_\mu - 1)k \geq s_\mu - s_{\mu+1}$ 时，我们有 $x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu} \in \mathcal{V}$，也就是说 $i \geq k - s_{\mu+1}$。我们有两种情况。

（i）如果 $s_{\mu+1} \geq k - 1$，那么对于 $i = 1$、……、$k - 1$，有 $i \geq k - s_{\mu+1}$，因此根据引理 3.10 和情形（A），我们有 $\widetilde{PF\ S}$（ ）$_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = 1、\ldots\ldots、 k - 1\}$.。于是

$$\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = 1, \ldots, k - 1\}.$$

（ii）如果 $s_{\mu+1} < k-1$，那么 $s_\mu - s_{\mu+1} =$（$\sigma_\mu - 1$）$k +$（$k - s_{\mu+1}$），因此 $\widetilde{\rho} = k - s_{\mu+1}$。于是根据引理 3.10 和情形（A），我们有

$$\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = \widetilde{\rho}, \ldots, k - 1\}.$$

（II）设 $\rho_\mu = 1$。我们有: $x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu} \in \mathcal{V}$ 当且仅当 $i +$（$\sigma_\mu - 1$）$k \geq s_\mu - s_{\mu+1}$, 即 $i \geq k + 1 - s_{\mu+1}$。我们需要考虑若干情形。

（i） $k + 1 - s_{\mu+1} \leq 1$, 即 $s_{\mu+1} \geq k$.。接着根据情形（A），我们有

- 如果 $r'_\mu > h$ 或 $r'_\mu = h$, $s_\mu - s_{\mu+1} = 1$，那么我们有

$$\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = 1, \ldots, k\}.$$

- 若 $r'_\mu = h, s_\mu - s_{\mu+1} > 1$ 则有

$$\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_1 x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}\}.$$

(ii) $1 < s_{\mu+1} < k$。我们有 $1 < s_\mu - s_{\mu+1} = (\sigma_\mu - 1)k + (k + 1 - s_{\mu+1})$, 因此$k + 1 - s_{\mu+1} = \widetilde{\rho} \geq 2$。也就是说，对于 $i \geq \widetilde{\rho} \geq 2$, $x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu} \in \mathcal{V}$。

- If $r'_\mu > h$ 则有

$$\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = \widetilde{\rho}, \ldots, k\}.$$

- 若 $r'_\mu = h$，则有 $\widetilde{PF(S)}_2 = \emptyset$.

(iii) $s_{\mu+1} = 1$。当且仅当$i = k$时，我们有 $i + (\sigma_\mu - 1)k \geq s_\mu - s_{\mu+1} = \sigma_\mu k$。

- If $r'_\mu > h$ then

$$\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}\}.$$

- If $r'_\mu = h$ then we have $\widetilde{PF(S)}_2 = \emptyset$.

(III) 假设 $\rho_\mu > 1$。当且仅当 $i+\sigma_\mu k \geq s_\mu - s_{\mu+1}$，也就是说 $i \geq \rho_\mu - s_{\mu+1}$ 时，我们有 $x_i x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu} \in \mathcal{V}$。我们需要考虑两种情况。

(i) 若 $\rho_\mu - s_{\mu+1} \leq 1$，则对于任意 $i \geq 1$，我们有 $i \geq \rho_\mu - s_{\mu+1}$。因此

$$\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = 1, \ldots, \rho_\mu - 1\}.$$

(ii) 若 $\rho_\mu - s_{\mu+1} > 1$，则我们有 $\widetilde{\rho} = \rho_\mu - s_{\mu+1}$，并且

$$\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = \widetilde{\rho}, \ldots, \rho_\mu - 1\}.$$

□

4. Symmetric AAG-semigroups

本节将描述所有对称 AAG 半群。回顾一下，我们始终假设 $(a, d) = 1$。由 4 个元素生成的对称半群广为人知，例如参见 [2], ，因此我们可以假设 $k \geq 3$。当 $h = 1$ 时， S 对称的情形已在 [12] 中研究。

定理 4.1. 设 S 是一个 AAG 半群。假设 $k \geq 3$ 且 $r'_\mu \geq h$ 或 $\rho_\mu = 0$。我们有 S 是对称的，当且仅当以下情形之一成立

(1) $a = (\sigma k + 2)p'$， $d = p'r - p\hat{}r$， $c = -(\sigma k + 2)\hat{}r$，其中 $\sigma \geq 1$、$1 \leq p < p'$、$h \geq 1$、$\hat{}r < -1$，且 $\gcd(p', \hat{}r) = 1$， $r + h\sigma > 0$。弗罗贝尼乌斯数为 $(ha + d) + \sigma(ha + kd) + c(p' - 1) - a$；或 (2) $a = (\sigma k + 2)p' - \sigma' kp$， $d = p'r + ph\sigma'$， $c = \sigma' kr + (\sigma k + 2)\sigma' h$，其中 σ、σ'、p'、p、r、h 为整数，满足 $\sigma \geq \sigma' \geq 2$、$p' > p > 0$、$r + h(\sigma + 1) > 0$。弗罗贝尼乌斯数为 $(ha + d) + \sigma(ha + kd) + c(p' - p - 1) - a$；或 (3) $a = (\sigma k + 2)p' - (\sigma k + 1)p$， $d = p'r + ph(\sigma + 1)$ $c = (\sigma k + 1)r + (\sigma k + 2)(\sigma + 1)h$，其中 σ、σ'、p'、p、r、h 为整数，满足 $\sigma \geq 1$、$p' > p > 0$、$r + h(\sigma + 1) > 0$。弗罗贝尼乌斯数为 $(ha + d) + \sigma(ha + kd) + c(p' - p - 1) - a$；或 (4) $a = (\sigma k + 1)p' - (k - 1)p$， $d = -p'h\sigma - p\hat{}r$， $c = -(k - 1)h\sigma - (\sigma k + 1)\hat{}r$，其中 $\sigma \geq 1$、$p' > p > 0$、$\hat{}r < -h$。弗罗贝尼乌斯数为 $(ha + d) + (\sigma - 1)(ha + kd) + c(p' - 1) - a$。

证明。在所有情况下，应用定理 3.8 均可得到一个 Gröbner 基。证明包括考察定理 3.14 的所有可能情形。下文不再逐一说明。

(1) $s_{\mu+1} = 0$。于是 $r'_{\mu+1} \neq 0$，并且有 $\widetilde{PF(S)} = \widetilde{PF(S)_1}$，其中 $\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu, \widetilde{\rho} = \rho_\mu$。$\mathrm{card}(PF(S)) = 1$ 当且仅当处于情形 2d)，且 $\rho_\mu = 2$，

且 $\widetilde{PF\ S}(\ ) = \{x_1 x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\}$。我们有 $s_\mu = \sigma k + 2$，对于某个 $\sigma \geq 1$。我们设 $p := p_\mu, p' := p_{\mu+1}, r := r_\mu, \hat{r} := r_{\mu+1}$。我们有下表

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sigma k+2$	p	r	
0	p'	$\hat{r}$	

满足条件 $0 < p < p', r + h(\sigma+1) > 0, \hat{r} < -1$。根据 [6] 的引理 2.2.4，我们得到

$$a = (\sigma k+2)p', d = p'r - p\hat{r}, c = -(\sigma k+2)\hat{r}.$$

由于 $\gcd(a,d) = 1$，我们有 $\gcd(p', \hat{r}) = 1$。弗罗贝尼乌斯数为$\varphi(x_1 x_k^{\sigma} x_{k+1}^{p'-1}) - a$。

(2) $s_{\mu+1} \neq 0$ 且 $\mathrm{card}(\widetilde{PF(S)_1}) = 0$，$\mathrm{card}(\widetilde{PF(S)_2}) = 1$。我们需要考虑情形 1a) 或 1c)，以及 4ii)、5iii)、6ii)、7i)、7ii) 中的一种。

(a) 1a) 或 1c) 和 4ii)。$\mathrm{card}(\widetilde{PF(S)_2}) = 1$ 意味着 $\widetilde{\rho} = k - 1$。根据 4ii)，我们有 $\rho_\mu = 0$，因此 $\rho_{\mu+1} = 1$，排除情况 1a)；当且仅当 $k = 2$ 时，情况 1c) 才可能成立。

(b) 根据 1a) 和 5iii)，我们有 $\rho_\mu = 1, s_{\mu+1} = 1 = \rho_{\mu+1}$，这与 1a) 矛盾。

(c) 1 6 $r'_{\mu+1} = 0\ \rho_{\mu+1} = 0\ \rho_\mu = 1\ r'_\mu = h$ $s_\mu = \sigma_\mu k +$ 根据 1 $s_{\mu+1} = \sigma_{\mu+1} k$ $\sigma = \sigma_\mu\ \sigma' = \sigma_{\mu+1}\ p = p_\mu\ p' = p_{\mu+1}$ a) 和 ii)，我们有 , , , , 因此 , 。我们设 .,.,.,.,.。但是$r'_{\mu+1} = 0 = r_{\mu+1} + h\sigma'$ 因此 $r_{\mu+1} = -h\sigma'$，此外 $r'_\mu = h = r_\mu + h(\sigma+1)$ 因此$r_\mu = -h\sigma$。我们应该有该表

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sigma k+1$	p	$-h\sigma$	
$\sigma' k$	p'	$-h\sigma'$	

由 [6] 的引理 2.2.4可得

$$a = (\sigma k+1)p' - \sigma' kp,\ d = -h\sigma p' + ph\sigma',\ c = -h\sigma\sigma' k + (\sigma k+1)\sigma' h$$

对某些 $\sigma > \sigma'$、$p' > p > 0$。通过简单计算可得 $c = h\sigma', a_k = hp', a_{k-1} = h[p'(1+\sigma-\sigma') + \sigma'(p'-p)] = (1+\sigma-\sigma')a_k + (p'-p)a_{k+1}$，也就是说，$S$ 的嵌入维数小于 $k+2$，矛盾。

(d) 由 1a) 和 7i)，我们有 $\rho_\mu = 2$、$\rho_{\mu+1} = 0$ 和 $\widetilde{PF\ S}(\ ) = \{x_1 x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}\}$。因此我们有 $s_\mu = \sigma_\mu k + 2$、$s_{\mu+1} = \sigma_{\mu+1} k$、$\sigma_{\mu+1} \geq 2$。我们设 $\sigma = \sigma_\mu = \sigma_{\mu+1}\ p = p_\mu\ p' = p_{\mu+1}\ r = r_\mu$ $r'_{\mu+1} = 0 = r_{\mu+1} + h\sigma'$.、 σ'.、 .、 .、 .、 .，因为我们有$r_{\mu+1} = -h\sigma'$ 和该表

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sigma k+2$	p	r	
$\sigma' k$	p'	$-h\sigma'$	

根据 [6] 的引理 2.2.4，我们得到

$$a=(\sigma k+2)p'-\sigma' kp,\ d=p'r+ph\sigma',\ c=\sigma' kr+(\sigma k+2)\sigma' h$$

对于某些 $\sigma\geq\sigma'\geq 2, p'>p>0, r+h(\sigma+1)>0$。弗罗贝尼乌斯数为 $\varphi(x_1x_k^{\sigma}x_{k+1}^{p'-p-1})-a$。

(e) 1a) 和 7ii) 由于 $s_{\mu+1}<\rho_\mu-1$，我们由 1a) 得到 $s_{\mu+1}=\rho_{\mu+1}=0$，矛盾。

(f) 1c) 和 5iii)、6i) 或 7ii) 很容易排除。因此我们考虑情形 1c) 和 7i)。

当且仅当 $\rho_\mu=2$ 时，$\widetilde{\text{card}(PF(S)_2)}=\rho_\mu-1=1$。因此 $PF(S)=\{x_1x_k^{\sigma_\mu}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}\}$ 根据假设 $s_\mu-s_{\mu+1}=1$，我们有 $s_\mu=\sigma_\mu k+2$，$\sigma_\mu k+1$ $\sigma\geq 1$ $p=p_\mu$ $p'=p_{\mu+1}$ $r=r_\mu$ $r'_{\mu+1}=0=$，其中某些元素满足该条件。令 ...，由于 $r_{\mu+1}+h(\sigma+1)$，我们有 $r_{\mu+1}=-h(\sigma+1)$，以及下表：

s	p	r	r'
...	...	...	...
$\sigma k+2$	p	r	
$\sigma k+1$	p'	$-h(\sigma+1)$	

由 [6] 的引理 2.2.4 可得

$a=(\sigma k+2)p'-(\sigma k+1)p$，$d=p'r+ph(\sigma+1)$ $c=(\sigma k+1)r+(\sigma k+2)(\sigma+1)h$，其中 $\sigma\geq 1$、$p'>p>0$、$r>-h(\sigma+1)$。弗罗贝尼乌斯数为 $\varphi(x_1x_k^{\sigma}x_{k+1}^{p'-p-1})-a$。

(3) $s_{\mu+1}\neq 0$ 且 $\widetilde{PF(S)_1}=1$，$\widetilde{PF(S)_2}=0$。我们处于情形 6iii)，有 $\rho_\mu=1$、$r'_\mu=h$、$0<s_{\mu+1}<k$，因此 $r'_{\mu+1}<0$ 且 $s_\mu-s_{\mu+1}=(\sigma_\mu-1)k+(k-s_{\mu+1}+1)$。若 $s_{\mu+1}=1$，则有 $\widetilde{\rho}=0$，我们处于情形 2a)，且 $\text{card}(PF(S)_1)=1$ 意味着 $k=2$。若 $s_{\mu+1}>1$，则有 $1<\widetilde{\rho}=k-s_{\mu+1}+1<k$，因此我们处于情形 2d)。$\text{card}(PF(S)_1)=1$ 意味着 $\widetilde{\rho}=2$，也就是说 $s_{\mu+1}=k-1$，并且 $\widehat{PF(S)}=\{x_1x_k^{\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\}$。另一方面，$r'_\mu=h=r_\mu+h(\sigma_\mu+1)$，因此 $r_\mu=-h\sigma_\mu$。令 $\sigma..=\sigma_\mu$、$p..=p_\mu$、$p'..=p_{\mu+1}$、$\hat{}r..=r_{\mu+1}$，得到下表

s	p	r	r'
...	...	...	...
$\sigma k+1$	p	$-h\sigma$	
$k-1$	p'	$\hat{r}$	

其中 $\sigma\geq 1$、$p'>p>0$、$\hat{}r<-h$。由 [6] 的引理 2.2.4 可得

$$a=(\sigma k+1)p'-(k-1)p, d=-p'h\sigma-p\hat{r}, c=-(k-1)h\sigma-(\sigma k+1)\hat{r}.$$

注意，如果 $d>0$，那么 $\hat{}r<-(p'/p)h\sigma$。弗罗贝尼乌斯数为 $\varphi(x_1x_k^{\sigma-1}x_{k+1}^{p'-1})-a$。

□

5. Almost Symmetric AAG-semigroups, $d \in \mathbb{Z}^*$

由 4 个元素生成的几乎对称半群已广为人知，例如参见 [9], [3], ，因此我们可以假设 $k \geq 3$。 S 型为 2 的几乎对称情形（伪对称）已在 [4] 中研究。证明由考察定理 3.14 的所有可能情形构成。我们不再逐一说明。注意，通过计算 φ ， $PF(S)_i$ 中的元素按递增顺序排列（当 $d > 0$ 时），按递减顺序排列（当$d < 0$时）。

下面的引理对于研究比值为相对整数的 AAG 半群的几乎对称性非常有用。

引理 5.1. (1) 若 $x_0^\alpha N_1 - x_0^\beta N_2 \in I$，对于某些单项式 N_1, N_2，其中 $N_2 \in \widetilde{S}$ Ap(, a)，则 $\alpha \leq \beta$。
(2) 假设 $t(S) \geq 1$。令 $N_1, N_2 \in \widetilde{PF(S)}$，使得 $N_1N_2 - x_0M \in I$，其中 $M \in \widetilde{\text{Ap}(S, a)}$。若对于某个单项式 N有 $N_1N_2 - x_0^\lambda N \in I$，且 $\lambda \in \mathbb{N}^*$，则 $\lambda = 1$。特别地，若 S 是一个 AAG 半群，且 $N_1 = x_iN_1', N_2 = x_jN_2'$ 满足 $i + j \leq k$，则$h = 1$。

$\widetilde{\text{证明}}$。第一个结论是 Ap(S, a) 的定义。第二个结论由第一个结论推出。第三个结论由第一个结论推出，因为当 $i + j \leq k$ 时 $x_ix_j - x_0^h x_{i+j} \in I$。□

由于几乎对称 AAG 半群的描述相当冗长，我们将分成三个小节来介绍。

5.1. 几乎对称 AAG 半群，满足 $\widetilde{\text{Frob(S)}} \in \widetilde{PF(S)_\varepsilon}$ 满足 $\varepsilon \in \widetilde{\{1, 2\}}$，card($PF(S)_\varepsilon$) ≥ 2。

定理 5.2. 使用上述记号，设 $d > 0$ ，且满足 $r'_\mu \geq h$ 或 $\rho_\mu = 0$。$\widetilde{\text{设}}$ S 是型为 ≥ 2 的几乎对称半群。若 Frob(S) $\in PF(S)_\varepsilon$ 满足 $\varepsilon \in \widetilde{\{1, 2\}}$, card($PF(S)_\varepsilon$) ≥ 2，则有

$$h = 1, k \geq 3 \ \ odd, a = k + 2, d \in 2\mathbb{N}^*, c = a + (d/2)k, \gcd(a, d) = 1.$$

$\widetilde{\text{此外}}$ $PF(S) = \{x_1, \ldots, x_k\} \cup \{x_{k+1}\}$, $t(S) = k + 1$, Frob(S) $= x_k$, $F(S) = kd$。

$\widetilde{\text{证明}}$。存在 $2 \leq l \leq k$, M 一个单项式，使得 Frob(S) $= x_lM$ 且 $x_{l-1}M \in \widetilde{PF(S)_\varepsilon}$。由于 S几乎对称，存在 $M_1 \in PF(S)$，使得 $M_1x_{l-1}M - x_0x_lM \in I$，这意味着 $x_{l-1}M_1 - x_0x_l \in I$。我们乘以 x_1，并利用 Gr¨obner 基，得到 $x_0^h x_lM_1 - x_0x_lx_1 \in I$，这意味着 $h = 1$, $M_1 - x_1 \in I$；如果 $M_1 \neq x_1$，那么 S 的嵌入维数小于 $k + 2$，这与我们的假设矛盾，因此$\widetilde{M_1 = x_1 \in PF(S)}$。我们必须考察定理 3.14 中满足 $\widetilde{\text{使得}}$ $x_1 \in PF(S)$ 的所有可能情形。由于 $\sigma_\mu \geq 1, p_{\mu+1} \geq 2$，可能的情形为 4)、5) 或 6)。特别地，我们有 $\sigma_\mu = 1$. 。情形 4) 意味着 $s_\mu = k$，这与$\widetilde{s_\mu > k}$矛盾。情形 5) 和 6) 意味着 $PF(S)_2 = \{x_1, \ldots, x_k\}$，其中 $s_\mu = k + 1, s_{\mu+1} =$

$k, \widetilde{\sigma} = 0, \widetilde{\rho} = 1, r'_{\mu+1} < 0$。唯一可能的情形是 2b)，因此我们有 $\widetilde{PF\ S}(\ )_1 = \{x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\}$，$\varepsilon = 2$，Frob(S) $= x_k$。由于 $h = 1$，根据 Gr¨obner 基，我们有 $x_i x_{k-i} - x_0 x_k \in I$。$S$几乎对称当且仅当 $x^{2(p_{\mu+1}-1)}{}_{k+1} - x_0 x_k \in I$，因此 $x_0^{-r'_{\mu+1}} x_k x_{k+1}^{p_{\mu+1}-2} - x_0 x_k \in I$，这意味着 $p_{\mu+1} = 2, r'_{\mu+1} = -1$ 和 $p_\mu = 1$，所以 $r_{\mu+1} = r'_{\mu+1} - 1 = -2$，我们得到下表

s	p	r	r'
...	...	...	...
$k+1$	1	r_μ	r'_μ
k	2	-2	-1

注意，$r'_\mu = h = 1$ 当且仅当 $r_\mu = -1$，这意味着 $d = 0$，因此情形 6) 不可能。情形 5) 是可能的，且有 $a = k+2, d = 2r_\mu + 2, c = k(r_\mu + 2) + 2$，其中 k 为奇数，$k \geq 3, r_\mu \geq 0$，最大公因数$(a, d) = 1$，也就是说

$$h = 1, k \geq 3 \text{ odd}, a = k+2, d \in 2\mathbb{N}^*, c = a + (d/2)k.$$

M 此外，我们有 $PF(S) = \{x_1, \ldots, x_k\} \cup \{x_{k+1}\}$, $t(S) = k+1$, $F(S) = kd$. □

定理 5.3. 在上述记号下，假设 $d < 0$ 且 $r'_\mu \geq h$ 或 $\rho_\mu = 0$。若 S是几乎对称的，且 Frob(S) $\in PF(S)_\varepsilon$，其中 $\varepsilon \in \{1, 2\}$，card$(PF(S)_\varepsilon) \geq 2$，则有:

$$a = (\sigma k + 1)p - \sigma k,\ d = -h\sigma(p-1) + 1 < 0,\ c = h\sigma + \sigma k + 1,$$

满足 $gcd(a, d) = 1$, $h \geq 2, k \geq 3, \sigma \geq 1, p \geq 2$。此外 $t(S) = k+1$ 且 $PF(S)_1 = \{x_{k+1}^{p-1}\}$, $PF(S)_2 = \{x_1 x_k^{\sigma-1} x_{k+1}^{p-2}, \ldots, x_k x_k^{\sigma-1} x_{k+1}^{p-2}\}$, Frob(S) $= x_1 x_k^{\sigma-1} x_{k+1}^{p-2}$。

证明。I) 假设 card$(PF(S)_2) \geq 2$ 且 Frob(S) $\in PF(S)_2$。由定理 3.14 可知，我们有 Frob(S) $= x_1 M$ 或对某个单项式 M 和 $\widetilde{\rho} \geq 2$，Frob(S) $= x_{\widetilde{\rho}} M$。

I-A) 假设 $\widetilde{\text{Frob(S)}} = x_1 M$，我们有 $x_2 M \in PF(S)_2$, 因此存在某个单项式 $M_1 := L_i x_k^\alpha x_{k+1}^\beta \in \widetilde{PF\ S}(\ )$，使得

$$x_2 M M_1 - x_0 x_1 M \in I, x_2 M_1 - x_0 x_1 \in I.$$

若 $0 < i < k-1$，则由引理 5.1 可得矛盾。若 $i = k-1$，则$x_2 x_{k-1} - x_1 x_k \in I$, 这将导致 $x_k x_k^\alpha x_{k+1}^\beta - x_0 \in I$，与 S 的嵌入维数为 $k+2$ 矛盾。因此 $M_1 := x_k^\alpha x_{k+1}^\beta$。假设 $\alpha > 0$。我们考察两种情况:

(1) $M_1 \in \widetilde{PF\ S}(\ )_1$。我们处于定理 3.14 的情形2c)。因此 $\widetilde{\rho} = 1$，$M_1 = x_k^{\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}$，其中 $\widetilde{\sigma} > 0$，$r'_{\mu+1} < 0$。我们有 $x_1 x_k^{\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu} - x_0^{\widetilde{r}} \in I$，所以 $x_2 x_k^{\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu} - x_0^{\widetilde{r}-h} x_1 \in I$, 我们还有 $x_2 M_1 - x_0 x_1 \in I$。因此

$$x_0^{\widetilde{r}-h} x_1 x_{k+1}^{p_\mu - 1} - x_0 x_1 \in I,$$

这意味着 $p_\mu = 1, \widetilde{r} = h+1$。应用引理 3.11 可得

(a) 若 $\rho_\mu = 0$，则 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1} + h = h+1$，这不可能，因为 $r'_\mu \geq 1$, $r'_{\mu+1} < 0$。

(b) 若 $\rho_\mu = 1$，则 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1} = h+1$。只有当 $r'_\mu = h$，$r'_{\mu+1} = -1$ 时才可能，这意味着我们处于情形 6i)。因此 $s_\mu - s_{\mu+1} = 1$，这与 $\widetilde{\sigma} > 0$ 矛盾。

(c) 如果 $\rho_\mu > 1$，那么我们有 $\rho_\mu > \rho_{\mu+1}$ 和 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1} + h = h+1$，这是不可能的，因为 $r'_\mu \geq h$，$r'_{\mu+1} < 0$。

(2) $M_1 \in PF\ S\ (\ )_2$。我们处于情形 5i)、5ii) 或 6i)。我们有 $M_1 = x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}$，因此 $x_2 x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1} - x_0 x_1 \in I$；但根据 I 的格罗布纳基，我们有 $x_2 x_k^{\sigma_\mu} - x_0^{r'_\mu - h} x_1 x_{k+1}^{p_\mu} \in I$，从而 $x_0^{r'_\mu-h} x_1 x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} - x_0 x_1 \in I$，即 $x_0^{r'_\mu-h} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} - x_0 \in I$，其中 $p_{\mu+1} > 1$。这意味着 S 的嵌入维数小于 $k+2$，矛盾。

综上，我们已经证明了 $M_1 = x_{k+1}^{\beta}$。唯一可能的情形是定理 3.14 的 2b)，我们有 $M_1 = x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, s_\mu - s_{\mu+1} = 1$ 且

$$x_2 x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} - x_0 x_1 \in I, x_1 x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu} - x_0^{\widetilde{r}} \in I. \tag{1}$$

因此

$$x_0^{\widetilde{r}-h} x_1 x_{k+1}^{p_\mu - 1} - x_0 x_1 \in I,$$

这意味着 $p_\mu = 1, \widetilde{r} = h+1$。现在我们考察所有情形:

若 $\rho_\mu = 0$ 或 $\rho_\mu > 1$，则 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1} + h = h+1$，这是不可能的 .

若 $\rho_\mu = 1$，则 $\widetilde{r} = r'_\mu - r'_{\mu+1} = h+1$，这意味着 $r'_\mu = h, r'_{\mu+1} = -1$。我们处于情形 6i)

$$\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}, i = 1, \ldots, k\}.$$

注意，$x_3 x_k^{\sigma_\mu} - x_2 x_{k+1} \in I$ 意味着

$$(x_{3+i} x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-2})(x_{k-i} x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-2}) - x_0 x_1 x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-2} \in I$$

对于 $i = 0, \ldots, k-3$，这验证了 S 是几乎对称的。令 $p = p_{\mu+1}, \sigma = \sigma_\mu$。唯一可能的情形由下表给出

s	p	r	r'
a	0	d	
$\sigma k + 1$	1	$-h\sigma$	h
σk	p	$-h\sigma - 1$	-1

由 [6] 的引理 2.2.4 可得

$$a = (\sigma k + 1)p - \sigma k; d = (p-1)(-h\sigma) + 1; c = h\sigma + \sigma k + 1$$

其中 gcd$(a, d) = 1, h \geq 2, p \geq 2, \sigma \geq 1$。

I-B) 假设 $\widetilde{\text{Frob(S)}} = x_{\widetilde{\rho}} M$，且 $\widetilde{\rho} > 1$，则有 $x_{\widetilde{\rho}+1} M \in PF(S)_2$，因此存在某个单项式 $M_1 \in PF(S)$，使得

$$x_{\widetilde{\rho}+1} M M_1 - x_0 x_{\widetilde{\rho}} M \in I.$$

定理 3.14 中可能的情形是 4ii)、5ii) 或 7ii)。

(1) 若 $\rho_\mu = 0$，则属于情形 4ii)。首先假设 $M_1 \in PF(S)_2$。这意味着存在某个 $i = \widetilde{\rho}+1$，使得 $M_1 = x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}\ k-1$，.....，$x_{\widetilde{\rho}+1} x_i x_k^{\sigma_\mu-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1} - x_0 x_{\widetilde{\rho}} \in I$。若 $\widetilde{\rho}+1+i \le k$，则会产生矛盾。若 $\widetilde{\rho}+1+i > k$，则可以使用 $x_k^{\sigma_\mu} - x_0^{r'_\mu} x_{k+1}^{p_\mu} \in I$。因此我们有 $x_0^{r'_\mu} x_{\widetilde{\rho}+1+i-k} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} - x_0 x_{\widetilde{\rho}} \in I$，但$r'_\mu \ge 1$，这与我们的假设矛盾：$S$的嵌入维数为 $k+2$。现在假设 $M_1 \in PF(S)_1$。由于属于情形 4ii)，我们有 $s_{\mu+1} < k-1$，这意味着 $r'_{\mu+1} < 0$ 且 $\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - 1$，$\widetilde{\rho} = k - s_{\mu+1} \ge 2$. 因此，$M_1$ 唯一可能的情形是 2d)，对于某个 $1 \le i \le \widetilde{\rho}-1$，有 $M_1 = x_i x_k^{\sigma_\mu - 1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}$，但 Frob(S) $= x_{\widetilde{\rho}} x_k^{\sigma_\mu-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}$，因此 $\varphi(M_1) > \varphi($Frob(S))，矛盾。

(2) 若 $\rho_\mu = 1$，则属于情形 5ii)。先假设 $M_1 \in PF(S)_2$。我们有$M_1 = x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}$ 且 $x_{\widetilde{\rho}+1} M_1 - x_0 x_{\widetilde{\rho}} \in I$，但 $x_{\widetilde{\rho}+1} x_k^{\sigma_\mu} - x_0^{r'_\mu - h} x_{\widetilde{\rho}} x_{k+1}^{p_\mu} \in I$，这意味着 $x_0^{r'_\mu-h} x_{\widetilde{\rho}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} - x_0 x_{\widetilde{\rho}} \in I$。回想一下，$p_{\mu+1} \ge 2$，由此得到矛盾。

现在假设 $M_1 \in PF(S)_1$。由于属于情形 5ii)，我们有$1 < s_{\mu+1} < k$，这意味着 $r'_{\mu+1} < 0$ 且 $\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - 1, \widetilde{\rho} = k+1-s_{\mu+1} > 1$。因此，对于 M_1，唯一可能的情形是 2d)，对某个$1 \le i \le \widetilde{\rho}-1$，$M_1 = x_i x_k^{\sigma_\mu-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}$，但 Frob(S) $= x_{\widetilde{\rho}} x_k^{\sigma_\mu-1} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}$。因此 $\varphi(M_1) > \varphi($Frob(S))，矛盾。

(3) 若 $\rho_\mu > 1$，则属于情形 7ii)。首先假设 $M_1 \in PF(S)_2$。这意味着 $M_1 = x_{\rho_\mu-1} x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}$，因此 $x_{\widetilde{\rho}+1} x_{\rho_\mu-1} x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1} - x_0 x_{\widetilde{\rho}} \in I$。若 $\widetilde{\rho}+\rho_\mu \le k$，则有 $x_{\widetilde{\rho}+1} x_{\rho_\mu-1} - x_0^h x_{\widetilde{\rho}+\rho_\mu} \in I$，这会导致矛盾，因为 $h \ge 2$。若$\widetilde{\rho}+\rho_\mu > k$，则有 $x_{\widetilde{\rho}+1} x_{\rho_\mu-1} - x_{\widetilde{\rho}+\rho_\mu-k} x_k \in I$，并且 $x_k^{\sigma_\mu+1} - x_0^{r'_\mu-h} x_{k-\rho_\mu} x_{k+1}^{p_\mu} \in I$。因此 $x_0^{r'_\mu-h} x_{\widetilde{\rho}+\rho_\mu-k} x_{k-\rho_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} - x_0 x_{\widetilde{\rho}} \in I$。但是 $x_{\widetilde{\rho}+\rho_\mu-k} x_{k-\rho_\mu} - x_0^h x_{\widetilde{\rho}} \in I$意味着 $x_0^{r'_\mu} x_{\widetilde{\rho}} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} - x_0 x_{\widetilde{\rho}} \in I$，且 $r'_\mu \ge h \ge 2$，这会导致矛盾。

现在假设 $M_1 \in PF(S)_1$，由于我们处于情形 7ii)，因此有$1 < s_{\mu+1} < \rho_\mu - 1$，这意味着 $r'_{\mu+1} < 0$，且 $\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu$，$\widetilde{\rho} = \rho_\mu - s_{\mu+1} > 1$。因此，$M_1$ 唯一可能的情形是 2d)，$M_1 = x_i x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}$ 对于某个 $1 \le i \le \widetilde{\rho}-1$，但 Frob(S) $= x_{\widetilde{\rho}} x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}$。因此 $\varphi(M_1) > \varphi($Frob(S))，矛盾。

II）假设 card($PF(S)_1$) ≥ 2，Frob(S) $\in PF(S)_1$。

Frob(S) $= x_1 M$ 对于某个单项式 $M = x_k^u x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}$，其中$u = \widetilde{\sigma}$ 属于情形 1e）或 2d），且 $u = \widetilde{\sigma} - 1$ 属于情形 1b）、1d）、2a）或 2b）。我们有$x_2 M \in PF\ S(\ )_1$,，因此存在某个单项式 $M_1 := L_i x_k^\alpha x_{k+1}^\beta \in PF\ S(\ )$，使得

$$x_2 M L_i x_k^\alpha x_{k+1}^\beta - x_0 x_1 M \in I.$$

根据理想 I 开头处的相同论证，我们得到 $M_1 := x_k^\alpha x_{k+1}^\beta$. 我们考察两种情况：

(1) 若 $s_{\mu+1}=0$，则有 $PF(S)_2=\emptyset$ 且 $r'_{\mu+1}<0$，因此 $M_1\in PF(S)_1$。我们需要检查 2a)、2c) 和 2d) 这几种情况。

(a) 在情形2a)中，我们有 $\rho_\mu=0$、$\widetilde{\sigma}=\sigma_\mu$、$M_1=x_{k-1}x_k^{\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}$，且 S 几乎对称，这意味着 $x_2x_{k-1}M-x_0x_1\in I.$。但是 $x_2x_{k-1}-x_1x_k\in I$，因此条件 $x_k^{\sigma_\mu}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}-x_0\in I$ 意味着 S 的嵌入维数小于 $k+2$。

(b) 在情形2c)中，我们有 $\rho_\mu=1$、$\widetilde{\sigma}=\sigma_\mu$，且 $M_1=x_k^{\sigma_\mu}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}$、$S$ 几乎对称意味着 $x_2x_k^{\sigma_\mu}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}-x_0x_1\in I$。但是 $x_2x_k^{\sigma_\mu}-x_0^{r'_\mu-h}x_1x_{k+1}^{p_\mu}\in I$，所以我们有

$$x_1x_0^{r'_\mu-h}x_{k+1}^{p_{\mu+1}+p_\mu-1}-x_0x_1\in I,$$

其中 $p_{\mu+1}+p_\mu-1\geq 2$，这意味着 S的嵌入维数小于 $k+2$。

(c) 在情形 2d) 中，我们有 $\rho_\mu=\widetilde{\rho}>1$、$\widetilde{\sigma}=\sigma_\mu$、$M_1=x_{\rho_\mu-1}x_k^{\sigma_\mu}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}$。由于 $1<\rho_\mu<k$，我们有 $x_2x_{\rho_\mu-1}-x_0^hx_{\rho_\mu+1}\in I$。因此 $x_0^hx_{\rho_\mu+1}x_k^{\sigma_\mu}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}-x_0x_1\in I$，这导致矛盾，因为 $h\geq 2$。

(2) 如果 $s_{\mu+1}\neq 0$，那么我们有两种情况：要么 $M_1\in \widetilde{PF(S)_1}$，要么 $M_1\in\widetilde{PF(S)}_2$.

• 如果 $M_1=x_k^{\alpha}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\in \widetilde{PF(S)_1}$ 那么唯一可能的情形是 2c)。因此 $r'_{\mu+1}<0, \widetilde{\rho}=1, \alpha=\widetilde{\sigma}>0$。由于 S几乎对称，我们有 $x_2x_k^{\widetilde{\sigma}}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}-x_0x_1\in I$。利用 I 的 Gr¨obner 基，我们有 $x_2x_k^{\widetilde{\sigma}}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu}-x_0^{\widetilde{r}-h}x_1\in I.$ 因此$x_0^{\widetilde{r}-h}x_1x_{k+1}^{p_\mu-1}-x_0x_1\in I$，当且仅当 $\widetilde{r}-h=1, p_\mu=1$时这是可能的。应用引理 3.11，我们得到

(a) 若 $\rho_\mu=0$，则 $\widetilde{r}=r'_\mu-r'_{\mu+1}+h=h+1$，这不可能，因为$r'_\mu\geq 1$, $r'_{\mu+1}<0$。(b) 若 $\rho_\mu=1$，则 $\widetilde{r}=r'_\mu-r'_{\mu+1}=h+1$，这仅当 $r'_\mu=h, r'_{\mu+1}=-1$ 时才可能，这意味着我们处于情形 6)。在情形 6i) 中，我们有 $s_\mu-s_{\mu+1}=1$，这与 $\widetilde{\sigma}>0$矛盾。在情形 6ii) 中，由于 S几乎对称，存在 $M_2\in PF(S)$，使得 $x_1x_k^{\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}M_2-x_0$ Frob(S) $\in I$。若 $M_2\in \widetilde{PF\ S(\ )_1}$，则对于某个 $j=3,\ldots,k-1$，有 $M_2=\widetilde{\ }x_jM$。回想 Frob(S) $=x_1M$，因此对于某个 $j=3,\ldots,k-1$，我们有 $x_jx_k^{\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}-x_0\in I$，这是不可能的。若 $M_2\in \widetilde{PF\ S(\ )_2}$，则有 $(x_1x_k^{\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1})^2-x_0$ Frob(S) $\in I$，但$x_1^2-x_0^hx_2\in I$，所以得到矛盾。最后，在情形 6iii) 中，我们回想 $\rho_\mu=\widetilde{\rho}=1$，因此 $\rho_{\mu+1}=0$，这意味着 $s_{\mu+1}=0$ 和 $x_{k+1}^{p_{\mu+1}}-x_0\in I$，这是不可能的。

(c) 如果 $\rho_\mu>1$，那么我们有 $\rho_\mu>\rho_{\mu+1}$ 和 $\widetilde{r}=r'_\mu-r'_{\mu+1}+h=h+1$，这是不可能的，因为 $r'_\mu\geq h$、$r'_{\mu+1}<0$。

• 如果 $M_1 \in PF(S)_2$，那么可能的情形为 5i)、5ii)、5iii) 或 6i)，因此 $\rho_\mu = 1$、$M_1 = x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}$。所以

$$x_2 x_k^{\sigma_\mu} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1} - x_0 x_1 \in I,$$

但 $x_2 x_k^{\sigma_\mu} - x_0^{r'_\mu - h} x_1 x_{k+1}^{p_\mu} \in I$。由此可得

$$x_0^{r'_\mu - h} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} - x_0 \in I,$$

这不可能，因为 $p_{\mu+1} > 1$。

□

因此，我们只需研究满足 $PF(S)_i = \{\text{Frob(S)}\}$的几乎对称 AAG 半群，其中 $i = 1$ 或 $i = 2$。

5.2. 满足 $PF(S)_2 = \{\text{Frob(S)}\}$ 的几乎对称 AAG 半群。

定理 5.4. 假设 $PF(S)_2 = \{\text{Frob(S)}\}$, $k \geq 3, t(S) \geq 2$ 且满足 $r'_\mu \geq h$ 或 $\rho_\mu = 0$。那么 S 是几乎对称的，当且仅当

(i) 以下两种情况之一

$$a = (\sigma k + 2)p - ((\sigma - 1)k + l),\ d = pr + \sigma, c = ((\sigma - 1)k + l)r + (\sigma k + 2)\sigma,$$

其中 $h = 1, k \geq 3, 1 \leq l \leq k-1$, $p, \sigma \geq 2, r < -(\sigma + 1)$。此外，$t(S) = k - l + 1$ 和 $PF(S)_1 = \{x_i x_{k+1}^{p-1} \mid i = 1, \ldots, k-l\}$, $PF(S)_2 = \{x_1 x_k^{\sigma} x_{k+1}^{p-2}\}$,

(ii) 或者

$$a = (\sigma k + 2)p - (\sigma k + 1)\ \ d = pr + h(\sigma + 1) + 1, c = (\sigma k + 1)r + (\sigma k + 2)(h(\sigma + 1) + 1),$$

其中 $h \geq 1, \sigma \geq 1, p \geq 2, r > -h(\sigma + 1) - 1$. 此外，$t(S) = 2$ 和 $PF(S)_1 = \{x_{k+1}^{p-1}\}$, $PF(S)_2 = \{x_1 x_k^{\sigma} x_{k+1}^{p-2}\}$.

证明。为了证明该定理，我们经常参照定理 3.14 中的情形。首先，由定理 3.14 可知 $PF\ S(\ )_2 = \{L_\gamma x_k^{\sigma_\mu - \delta} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}\}$，其中 γ、$\delta \in \{0, 1\}$，且对于某些 $\Gamma \leq \Delta$、$\varepsilon \in \{0, 1\}$，有 $PF\ S(\ )_1 = \{L_\Gamma x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}, \ldots, L_\Delta x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\}$。令 $M_{\widetilde{\sigma}-\varepsilon} = x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}$、$N_{\sigma_\mu - \delta} = x_k^{\sigma_\mu - \delta} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}$。由于 S 几乎对称，因此有

$$L_\Gamma L_\Delta M_{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}^2 - x_0 L_\gamma N_{\sigma_\mu - \delta} \in I. \tag{2}$$

注意到 $2p_{\mu+1} - 2 - (p_{\mu+1} - p_\mu - 1) = p_{\mu+1} + p_\mu - 1 \geq 0$，且 $x_{k+1}^{p_{\mu+1}} - x_0^{-r'_{\mu+1}} L_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}} \in I$，因此 (2) 变为

$$x_0^{-r'_{\mu+1}} L_\Gamma L_\Delta L_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}-2\varepsilon} x_{k+1}^{p_\mu - 1} - x_0 L_\gamma x_k^{\sigma_\mu - \delta} \in I. \tag{3}$$

由于 $L_\gamma x_k^{\sigma_\mu - \delta} \in S\,\text{Ap}(\ )$，我们有 $r'_{\mu+1} \in \{0, -1\}$。我们需要考虑两种情况。

(1) 如果 $r'_{\mu+1} = 0$，那么 $\rho_{\mu+1} > 0$，$s_\mu - s_{\mu+1} > 1$。对于$\sim$card($PF(S)$ $_1$)，唯一可能的情况是 1b)、1d) 或 1e)。

(a) 在情形 1b)、1d) 中，我们有 $\widetilde{\rho} \in \{0,1\}, \Gamma = 1, \Delta = k - \rho_{\mu+1}, \varepsilon = 1$，因此得到 (3)

$$x_0^h x_1 x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}-1} x_{k+1}^{p_\mu-1} - x_0 L_\gamma x_k^{\sigma_\mu-\delta} \in I. \tag{4}$$

这意味着 $h = 1$。令 $\Theta = \sigma_{\mu+1} + 2\widetilde{\sigma} - 1 - (\sigma_\mu - \delta)$。根据定义$s_\mu - s_{\mu+1} = (\sigma_\mu - \sigma_{\mu+1})$ $k + \rho_\mu - \rho_{\mu+1}$。因此，若 $\rho_\mu = \rho_{\mu+1}$，则 $\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1}, \widetilde{\rho} = \rho_\mu - \rho_{\mu+1}$。若 $\rho_\mu > \rho_{\mu+1}$，则 $\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1}$；若 $\rho_\mu < \rho_{\mu+1}$，则$\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1} - 1, \widetilde{\rho} = k + \rho_\mu - \rho_{\mu+1}$。

假设 $\rho_\mu < \rho_{\mu+1}$。那么 $\widetilde{\rho} \geq 1$，并且当且仅当 $\rho_\mu = 0$、$\rho_{\mu+1} = k-1$ 时等号成立，因此我们处于情形 4i)，其中 $k = 2$，但我们假设 $k \geq 3$。因此，在情形 1b)、1d) 中，我们有 $\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1}$；经过简单计算可得 $\Theta = \widetilde{\sigma} - 1 + \delta \geq 0$。于是 (4) 变为

$$x_1 x_k^{\widetilde{\sigma}-1+\delta} x_{k+1}^{p_\mu-1} - L_\gamma \in I. \tag{5}$$

当且仅当 $\gamma = 1$、$\widetilde{\sigma} - 1 + \delta = 0$、$p_\mu = 1$ 时，这才有可能。在情形 1b)、1d) 中，我们有 $\widetilde{\sigma} > 0$，因此仅当 $\widetilde{\sigma} = 1$ 时才有 $\widetilde{\sigma} - 1 + \delta = 0$，$\delta = 0$，所以我们处于情形 7i)，其中 $\rho_\mu = 2$。由于 $r'_{\mu+1} = 0$，我们有 $r_{\mu+1} = -\sigma_\mu$。令 $l = \rho_{\mu+1}$、

σ r $..= \sigma_\mu$、p $..= p_{\mu+1}$、$..= r_\mu$，则得到下表

s	p	r	r’
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sigma k + 2$	1	r	
$(\sigma - 1)k + l$	p	$-\sigma$	0

其中，$l = 2$ 对应情形 1b)，$l = 1$ 对应情形 1d)。由 [6] 的引理 2.2.4 可得$a = (\sigma k + 2)p - ((\sigma - 1)k + l)$ $d = pr + \sigma$，$c = ((\sigma - 1)k + l)r + (\sigma k + 2)\sigma$，其中 $h = 1$、$k \geq 3$、$1 \leq l \leq 2$、p、$\sigma \geq 2$、$r < -(\sigma + 1)$。此外，我们有$t(S) = k - l + 1$。

（b）在情形 1e) 中，我们有 $\widetilde{\rho} > 1, \Gamma = 1, \Delta = \min\{\widetilde{\rho} - 1, k - \rho_{\mu+1}\}, \varepsilon = 0$，因此 (3) 变为

$$x_1 x_\Delta x_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_\mu-1} - x_0 L_\gamma x_k^{\sigma_\mu-\delta} \in I. \tag{6}$$

现在我们考虑三种情形。

若 $\rho_\mu = 0$，则属于情形4i)，这意味着 $k = 2$，与我们的假设矛盾。

若 $\rho_\mu > \rho_{\mu+1}$，则 $\widetilde{\rho} = \rho_\mu - \rho_{\mu+1} \leq k - \rho_{\mu+1} + 1$，这意味着 $\Delta = \rho_\mu - \rho_{\mu+1} - 1$。因此方程（6）变为

$$x_1 x_{\rho_\mu - \rho_{\mu+1} - 1} x_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_\mu-1} - x_0 L_\gamma x_k^{\sigma_\mu-\delta} \in I, \tag{7}$$

但 $x_1 x_{\rho_\mu - \rho_{\mu+1} - 1} x_{\rho_{\mu+1}} - x_0^{2h} x_{\rho_\mu} \in I$ 因此我们有 $x_0^{2h} x_{\rho_\mu} x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_\mu-1} - x_0 L_\gamma x_k^{\sigma_\mu-\delta} \in I$，这不可能，因为 $h \geq 1$。

如果 $0 < \rho_\mu < \rho_{\mu+1}$ 那么 $\widetilde{\sigma} = \sigma_\mu - \sigma_{\mu+1} - 1$, $\widetilde{\rho} = k + \rho_\mu - \rho_{\mu+1} \geq k - \rho_{\mu+1} + 1$, 这意味着 $\Delta = k - \rho_{\mu+1}$。方程（6）变为

$$x_1 x_{k-\rho_{\mu+1}} x_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}} x_{k+1}^{p_\mu - 1} - x_0 L_\gamma x_k^{\sigma_\mu - \delta} \in I. \tag{8}$$

但是 $x_{k-\rho_{\mu+1}} x_{\rho_{\mu+1}} - x_0^h x_k \in I$，因此我们有

$$x_0^h x_1 x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}+1} x_{k+1}^{p_\mu - 1} - x_0 L_\gamma x_k^{\sigma_\mu - \delta} \in I, \tag{9}$$

这意味着 $h = 1$。注意，由于 $\sigma_{\mu+1} + 2\widetilde{\sigma} + 1 - (\sigma_\mu - \delta) = \widetilde{\sigma} + \delta \geq 0$，我们有

$$x_1 x_k^{\widetilde{\sigma}+\delta} x_{k+1}^{p_\mu - 1} - L_\gamma \in I, \tag{10}$$

当且仅当 $\widetilde{\sigma} = \delta = 0$、$\gamma = 1$、$p_\mu = 1$ 时，这是可能的情形。因此我们处于情形7i)，其中 $\rho_\mu = 2$。由于 $r'_{\mu+1} = 0$ 我们有 $r_{\mu+1} = -\sigma_\mu$。令 $l = \rho_{\mu+1}$、

σ r $..= \sigma_\mu$、$p ..= p_{\mu+1}$、$..= r_\mu$。我们得到下表

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sigma k + 2$	1	r	
$(\sigma - 1)k + l$	p	$-\sigma$	0

其中 $l > 2$。根据 [6] 的引理 2.2.4，我们得到

$a = (\sigma k + 2)p - ((\sigma - 1)k + l)$ $d = pr + \sigma$， $c = ((\sigma - 1)k + l)r + (\sigma k + 2)\sigma$，其中 $h = 1$、$k \geq 3$、$3 \leq l \leq k - 1$、p、$\sigma \geq 2$、$r < -(\sigma + 1)$。此外，$t(S) = k - l + 1$。

(2) 如果 $r'_{\mu+1} = -1$，那么 (3) 变为

$$L_\Gamma L_\Delta L_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}-2\varepsilon} x_{k+1}^{p_\mu - 1} - L_\gamma x_k^{\sigma_\mu - \delta} \in I. \tag{11}$$

我们需要研究情形 2a)、情形 2b)、情形 2c) 和情形 2d)。

(a) 在情形 2a)、情形 2d) 中，我们有 Γ、$\Delta > 0$、$\Gamma + \Delta \leq k$，因此 $x_\Gamma x_\Delta - x_0^h x_{\Gamma+\Delta}$ 这意味着 $x_0^h x_{\Gamma+\Delta} L_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}-2\varepsilon} x_{k+1}^{p_\mu - 1} - L_\gamma x_k^{\sigma_\mu - \delta} \in I$，矛盾。

(b) 在情形 2b) 中，我们有 $s_\mu - s_{\mu+1} = 1$、$\Gamma = \Delta = 0$、$\varepsilon = 0$，因此有 $L_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\sigma_{\mu+1}} x_{k+1}^{p_\mu - 1} - L_\gamma x_k^{\sigma_\mu - \delta} \in I$。我们讨论 ρ_μ。如果 $\rho_\mu = 0$，那么 $\rho_{\mu+1} = k - 1$，我们处于情形4i) $\mathrm{card}(PF(S)_2) = 1$ 当且仅当 $k = 2$，但我们假设 $k \geq 3$。如果 $\rho_\mu \geq 1$，那么 $\rho_{\mu+1} = \rho_\mu - 1$、$\sigma_\mu = \sigma_{\mu+1}$，因此有 $L_{\rho_{\mu+1}} x_k^{\delta} x_{k+1}^{p_\mu - 1} - L_\gamma \in I$，这当且仅当 $p_\mu = 1$ 以及满足 $\rho_\mu = 2$. 的情形7i) 时才可能。我们设 $\sigma ..= \sigma_\mu$、$p ..= p_{\mu+1}$、$r ..= r_\mu$。注意，$-1 = r'_{\mu+1} = r_{\mu+1} + h(\sigma + 1)$，因此 $r_{\mu+1} = -h(\sigma + 1) - 1$. 我们得到下表

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sigma k + 2$	1	r	
$\sigma k + 1$	p	$-h(\sigma + 1) - 1$	-1

由 [6 的引理 2.2.4 可得

$$a = (\sigma k + 2)p - (\sigma k + 1),\ d = pr + h(\sigma + 1) + 1,$$

$$c=(\sigma k+1)r+(\sigma k+2)(h(\sigma+1)+1),$$

其中 $h\geq 1$、$\sigma\geq 1$、$p\geq 2$、$r>-h(\sigma+1)$、-1、$t(S)=2$。

(c) 在情形2c)中，我们有 $\widetilde{\rho}=1,\widetilde{\sigma}>0,\Gamma=1,\Delta=k,\varepsilon=1$，于是 (11) 变为

$$x_1x_kL_{\rho_{\mu+1}}x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}-2}x_{k+1}^{p_\mu-1}-L_\gamma x_k^{\sigma_\mu-\delta}\in I. \tag{12}$$

现在我们讨论 $\rho_{\mu+1}$。

若 $\rho_{\mu+1}=0$，则 $\rho_\mu=1,\widetilde{\sigma}=\sigma_\mu-\sigma_{\mu+1}$，这意味着我们处于情形6ii)。因此 $\gamma=1,\delta=1,\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}-1-\sigma_\mu+\delta=\widetilde{\sigma}$。(11) 变为

$$x_1x_k^{\widetilde{\sigma}}x_{k+1}^{p_\mu-1}-x_1\in I. \tag{13}$$

这不可能，因为 $\widetilde{\sigma}>0$。

若 $\rho_{\mu+1}>0$。注意，若 $\rho_\mu>\rho_{\mu+1}$，则 $\rho_{\mu+1}=\rho_\mu-1$，因此我们处于情形7i)，其中 $\rho_\mu=2,\rho_{\mu+1}=1$，并且 (11) 变为 $x_1x_kx_1x_k^{\sigma_{\mu+1}+2\widetilde{\sigma}-2}x_{k+1}^{p_\mu-1}-L_\gamma x_k^{\sigma_\mu-\delta}\in I$，这导致矛盾，因为$x_1^2-x_0^hx_2\in I$。

若 $\rho_\mu<\rho_{\mu+1}$，则 $\widetilde{\rho}=1$ 意味着 $\rho_{\mu+1}=k-1,\rho_\mu=0$，因此我们处于情形4i)，这意味着 $k=2$，与我们的假设相矛盾。

□

5.3. PF(S)$_1$ = {Frob(S)}的几乎对称 AAG 半群。

定理 5.5. 假设 $PF(S)_1=\{\text{Frob(S)}\}$, $k\geq 3,t(S)\geq 2$，且 $r'_\mu\geq h$或$\rho_\mu=0$。那么，当且仅当（i）以下情况之一成立时， S 是几乎对称的:

$a=(\sigma k+l+2)(p+1)-lp$, $d=-(p+1)\sigma-pr$, $c=-l\sigma-(\sigma k+l+2)r$，其中 $h=1,k\geq 4,\sigma\geq 1,1\leq l\leq k-3,r<-\sigma$。此外， $t(S)=l+1$ 且 $PF(S)_1=\{x_1x_k^\sigma x_{k+1}^p\}$, $PF(S)_2=\{x_2x_k^\sigma,\ldots,x_{l+1}x_k^\sigma\}$.

（ii）或

$a=(\sigma k)(p+1)-(k-2)p$、 $d=(1-h\sigma)(p+1)-pr$、 $c=(k-2)(1-\sigma)-\sigma kr$, 其中有 $h\geq 1$、$k\geq 3$、$p\geq 1$、$\sigma\geq 2$、$r<-h$。此外，我们有 $t(S)=k-1$ 和 $PF(S)_1=\{x_1x_k^{\sigma-1}x_{k+1}^p\}$、 $PF(S)_2=\{x_2x_k^{\sigma-1},\ldots,x_{k-1}x_k^{\sigma-1}\}$。（iii）或者

$a=(\sigma k+1)(p+1)-(k-1)p$、 $d=(p+1)(1-h\sigma)-pr$、 $c=(k-1)(1-h\sigma)-(\sigma k+1)r$，其中有 $h\geq 1$、$k\geq 3$、p、$\sigma\geq 1$、$r<$，最小值为 $\{-h,1-h\sigma\}$。此外， $t(S)=k$和 $PF(S)_1=\{x_1x_k^{\sigma-1}x_{k+1}^p\}$、 $PF(S)_2=\{x_2x_k^{\sigma-1},\ldots,x_k^\sigma\}$。（iv）或者

$$a=(k+1)(p+1)-kp=k+p+1,\ d=-(p+1)-pr,c=-k-(k+1)r,$$

其中 $h=1$、$k\geq 3$、$p\geq 1$、$r<-1$。此外， $t(S)=k+1$ 以及 $PF(S)_1=\{x_{k+1}^p\}$, $PF(S)_2=\{x_1,\ldots,x_k\}$。

(v) 或

$$a=(\sigma k+1)(p+1)-(2k-1)p,\ d=-(p+1)\sigma-pr, c=-\sigma(2k-1)-(\sigma k+1)r,$$

其中 $h=1, k\geq 3, \sigma\geq 2, p\geq 1, r<-\sigma$。此外，$t(S)=2$ 和 $PF(S)_1=\{x_1x_k^{\sigma-2}x_{k+1}^{p}\}$, $PF(S)_2=\{x_1x_k^{\sigma-1}\}$。

证明。我们有 $\widetilde{PF\ S}(\ )_1=\{L_\gamma x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\}$，其中 $\gamma,\varepsilon\in\{0,1\}$。根据定理 3.14，我们有 $\widetilde{PF\ S}(\ )_2=\{x_\Gamma N_{\sigma_\mu-\delta},\dots,x_\Delta N_{\sigma_\mu-\delta}\}$，其中某些 $\Gamma\leq\Delta,\delta\in\{0,1\}$ 满足 $N_{\sigma_\mu-\delta}=x_k^{\sigma_\mu-\delta}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}$ $M_{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}=x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}$ S。令 $\sigma_\mu=\sigma$。由于其几乎对称，我们有

$$L_\Gamma L_\Delta N_{\sigma_\mu-\delta}^2-x_0L_\gamma M_{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}\in I. \tag{14}$$

现在我们考虑定理 3.14 中关于 $PF(S)_2$ 的所有情形。

(1) 情形4i)或情形7i)。我们有 $\Gamma+\Delta\leq k$. 注意，在情形4i)中为 $\delta=1,\rho_\mu=0,\Gamma+\Delta=k$, $\sigma_\mu\geq 2$，而在情形7i)中为 $\delta=0,\rho_\mu>1,\Gamma+\Delta=\rho_\mu$。由于 $x_\Gamma x_\Delta-x_0^hx_{\Gamma+\Delta}\in I$，方程 (14) 变为：

$$x_0^{h-1}x_{\Gamma+\Delta}x_k^{2\sigma_\mu-2\delta}x_{k+1}^{2(p_{\mu+1}-p_\mu-1)}-x_\gamma x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\in I. \tag{15}$$

设在情形4i)中 $\Theta=2\sigma_\mu-1$，在情形7i)中 $\Theta=2\sigma_\mu$。我们可以写成

$$x_0^{h-1}L_{\rho_\mu}x_k^{\Theta}x_{k+1}^{2(p_{\mu+1}-p_\mu-1)}-x_\gamma x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\in I. \tag{16}$$

由于 $\Theta\geq\sigma_\mu$ 且 $L_{\rho_\mu}x_k^{\sigma_\mu}-x_0^{r'_\mu}x_{k+1}^{p_\mu}\in I$，我们有

$$x_0^{r'_\mu+h-1}x_k^{\Theta-\sigma_\mu}x_{k+1}^{2(p_{\mu+1}-p_\mu-1)}-x_\gamma x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\in I,$$

其中 $r'_\mu+h-1\geq 1$，但 $x_\gamma x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\in \widetilde{S}\ \mathrm{Ap}(\ ,a_0)$，矛盾。

(2) 情形 4ii)。我们有 $\Gamma=\widetilde{\rho},\Delta=k-1,\delta=1,\rho_\mu=0,s_{\mu+1}<k-1$. 注意到 $s_{\mu+1}=\rho_{\mu+1}<k-1$，因此 $\widetilde{\rho}>1, r'_{\mu+1}<0,\sigma_\mu\geq 2,\widetilde{\sigma}=\sigma_\mu-1\geq 1$。这意味着我们处于情形 2d)，其中 $\widetilde{\rho}=2,\gamma=1,\varepsilon=0$。因此 $\Gamma+\Delta=k+1$。方程 (14) 变为：

$$x_1x_k^{2\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{2(p_{\mu+1}-p_\mu-1)}-x_0x_1x_k^{\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\in I. \tag{17}$$

但是 $x_k^{\sigma_\mu}-x_0^{r'_\mu}x_{k+1}^{p_\mu}\in I$，且 $2(p_{\mu+1}-p_\mu-1)-p_\mu-(p_{\mu+1}-1)=p_{\mu+1}-p_\mu-1$，所以我们有

$$x_0^{r'_\mu-1}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}-1\in I,$$

当且仅当 $r'_\mu=1$、$p_{\mu+1}=p_\mu+1$ 时这是可能的。此外，我们有 $1=r'_\mu=r_\mu+\sigma_\mu h$，因此 $r_\mu=1-\sigma_\mu h$。令 $\sigma=\sigma_\mu$、$p=p_\mu$、$r=r_{\mu+1}$，可得

$$\widetilde{PF(S)}_1=\{x_1x_k^{\sigma-1}x_{k+1}^{p}\},\widetilde{PF(S)}_2=\{x_2x_k^{\sigma-1},\dots,x_{k-1}x_k^{\sigma-1}\}$$

以及表格

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
σk	p	$1-\sigma h$	1
$k-2$	$p+1$	r	<0

由 [6] 的引理 2.2.4 可得

$a=(\sigma k)(p+1)-(k-2)p,\ d=(1-\sigma h)(p+1)-pr,$
$c=(k-2)(1-\sigma h)-\sigma kr,$

其中 $h\geq 1, \sigma\geq 2, p\geq 1, r<-h, t(S)=k-1$。

(3) 情形 5i) 或 6i)。我们有 $\rho_\mu=1, \delta=1$, 且 $\Gamma+\Delta=k+1$。方程变为: (14)

$$x_1x_k^{2\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{2(p_{\mu+1}-p_\mu-1)}-x_0L_\gamma x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\in I. \tag{18}$$

但是 $\sigma_\mu\geq 1$, $x_1x_k^{\sigma_\mu}-x_0^{r'_\mu}x_{k+1}^{p_\mu}\in I$ 且 $2(p_{\mu+1}-p_\mu-1)-p_\mu-(p_{\mu+1}-1)=p_{\mu+1}-p_\mu-1$, 所以我们有

$$x_0^{r'_\mu-1}x_k^{\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}-L_\gamma x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon}\in I,$$

这意味着 $r'_\mu=1=h$。现在我们处于情形 6i), 因此有 $s_\mu-s_{\mu+1}=1$。于是 $\rho_{\mu+1}=0$, 唯一可能的情形是 2b), 其中 $\sigma_\mu=1$。此外, 我们有 $1=r'_\mu=r_\mu+\sigma_\mu+1=r_\mu+2$, 因此 $r_\mu=-1$。令 $p:=p_\mu, r:=r_{\mu+1}$, 我们有 $\widetilde{PF}(S)_1=\{x_{k+1}^p\}, \widetilde{PF}(S)_2=\{x_1,\ldots,x_k\}$。

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$k+1$	p	-1	1
k	$p+1$	r	<0

由 [6] 的引理 2.2.4 可得

$a=(k+1)(p+1)-kp=k+p+1,\ d=-(p+1)-pr,$
$c=-k-(k+1)r,$

其中 $h=1, k\geq 3, p\geq 1, r<-1, t(S)=k+1$。

(4) 情形 5ii)。我们有 $\rho_\mu=1, \delta=1, 1<s_{\mu+1}=\rho_{\mu+1}<k, r'_\mu>h$ 和 $\Gamma+\Delta=k+\widetilde{\rho}\geq k+1$。若 $\widetilde{\rho}=1$, 则 $\rho_{\mu+1}=0$, 矛盾。因此我们有 $\widetilde{\rho}\geq 2$。由于 $\rho_{\mu+1}>1$, 我们处于情形 2d), 这意味着 $\widetilde{\rho}=2, s_{\mu+1}=\rho_{\mu+1}=k-1, \varepsilon=0, \gamma=1.$。还要注意, $\widetilde{\sigma}=\sigma_\mu-1$。方程 (14) 变为:

$$x_2x_k^{2\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{2(p_{\mu+1}-p_\mu-1)}-x_0x_1x_k^{\sigma_\mu-1}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\in I. \tag{19}$$

但是 $\sigma_\mu\geq 1$、$x_2x_k^{\sigma_\mu}-x_0^{r'_\mu-h}x_1x_{k+1}^{p_\mu}\in I$ 和 $2(p_{\mu+1}-p_\mu-1)-p_\mu-(p_{\mu+1}-1)=p_{\mu+1}-p_\mu-1$, 因此我们得到 $x_0^{r'_\mu-h-1}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}-1\in I$, 当且仅当 $r'_\mu=h+1$、$p_{\mu+1}-p_\mu-1=0$ 时这是可能的。由于 $h+1=r'_\mu=r_\mu+h(\sigma+1)$, 我们有 $r_\mu=1-h\sigma$; 另一方面, $r'_{\mu+1}=r_{\mu+1}+h<0$, 所以 $r_{\mu+1}<-h$。令

$\sigma ..= \sigma_\mu$、 $p ..= p_\mu$、 $r ..= r_{\mu+1}$，我们有

$$\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_1 x_k^{\sigma-1} x_{k+1}^p\}, \widetilde{PF(S)}_2 = \{x_2 x_k^{\sigma-1}, \ldots, x_k^\sigma\}, t(S) = k.$$

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sigma k+1$	p	$1-h\sigma$	$h+1$
$k-1$	$p+1$	r	<0

根据 [6] 的引理 2.2.4，我们得到

$$a = (\sigma k+1)(p+1) - (k-1)p,\ d = (p+1)(1-h\sigma) - pr,$$
$$c = (k-1)(1-h\sigma) - (\sigma k+1)r,$$

其中 $h \geq 1$、 $p \geq 1$、 $\sigma \geq 1$、 $r < -h$。

(5) 情形 5iii) 我们有 $\Gamma + \Delta = 0$、 $\rho_\mu = 1$、 $s_{\mu+1} = 1$，因此 $\widetilde{\rho} = 0$ 且 $r'_{\mu+1} < 0$。定理 3.14 中满足 $\widetilde{\rho} = 0$ 且 card$(PF(S)_1) = 1$ 的种可能情形是 2a)，其中 $k = 2$；这不可能，因为我们假设 $k \geq 3$。

(6) 情形 6ii) 我们有 $\Gamma = \Delta = 1$、 $\delta = 1$、 $\rho_\mu = 1$、 $h = r'_\mu$、 $s_{\mu+1} > k$、 $s_\mu - s_{\mu+1} > 1$，因此方程 (14) 变为：

$$x_0^{h-1} x_2 x_k^{2\sigma_\mu - 2} x_{k+1}^{2(p_{\mu+1} - p_\mu - 1)} - L_\gamma x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in I. \tag{20}$$

这意味着 $h = 1$. 若 $\gamma = 0$，则属于情形 2b)，且 $\widetilde{\sigma} = \varepsilon = 0$ 这意味着 $x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in$ 属于(I)，这是不可能的。因此我们有 $\gamma = 1$、 $h = 1$，并且

$$x_2 x_k^{2\sigma_\mu - 2} x_{k+1}^{2(p_{\mu+1} - p_\mu - 1)} - x_1 x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon} x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1} \in I. \tag{21}$$

若 $\sigma_\mu = 1$，则 $s_\mu = k+1$，这意味着 $s_{\mu+1} < k$，矛盾。因此我们有$\sigma_\mu \geq 2$。由 I 的 Gr¨obner 基，我们有 $x_2 x_k^{\sigma_\mu} - x_1 x_{k+1}^{p_\mu} \in I$；还要注意， $2p_{\mu+1} - p_\mu - 2 -(p_{\mu+1} - 1)$ $= p_{\mu+1} - p_\mu - 1 \geq 0$。因此方程 (21) 变为：

$$x_k^{\sigma_\mu - 2} x_{k+1}^{p_{\mu+1} - p_\mu - 1} - x_k^{\widetilde{\sigma}-\varepsilon} \in I,$$

当且仅当 $p_{\mu+1} = p_\mu + 1$、 $\sigma_\mu - 2 - (\widetilde{\sigma} - \varepsilon) = 0$ 时，这才有可能。我们需要考察两种情况：

若 $\varepsilon = 1$，则可能的情形为 1b)、1d) 或 2a)。情形 2a) 蕴含 $k = 2$，而情形 1b) 蕴含 $\widetilde{\rho} = 0, \rho_{\mu+1} = 1$，因此 $k = 2$。另一方面，情形 1d) 蕴含 $\widetilde{\rho} = 1, \rho_{\mu+1} = k-1$，但 $\rho_\mu = 1$，由此得到 $\widetilde{\rho} = 2$，矛盾。若 $\varepsilon = 0$，则可能的情形为 1e) 或 2d)。在这两种情形下，我们都有 $\widetilde{\rho}$ =2, $\rho_{\mu+1} = k-1$，因此 $\sigma_\mu = \sigma_{\mu+1} + \widetilde{\sigma} + 1$。我们有 $\sigma_\mu - 2 - (\widetilde{\sigma} - \varepsilon) = \sigma_\mu - 2 - (\sigma_\mu - \sigma_{\mu+1} - 1) = 0$ 当且仅当 $\sigma_{\mu+1} = 1$。在情形 1e) 下，我们有 $r'_{\mu+1} = 0$，这意味着 $r_{\mu+1} = -2$. 。由于 $h = 1$，我们可以假设 $d > 0$，这意味着 $r_\mu > r_{\mu+1}$，即 $-\sigma_\mu > -2$，但我们有 $\sigma_\mu \geq 2$，矛盾，因此可以排除情形 1e)。唯一可能的情形是 2d)。令 $\sigma ..= \sigma_\mu, p ..= p_\mu, r ..= r_{\mu+1}$，我们有

表

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sigma k+1$	p	$-\sigma$	1
$2k-1$	$p+1$	r	<0

应用理想 I 的引理 2.2.4，我们得到

$$a=(\sigma k+1)(p+1)-(2k-1)p,\ d=-(p+1)\sigma-pr,$$
$$c=-\sigma(2k-1)-(\sigma k+1)r,$$

其中 $h=1$、$k\geq 3$、$\sigma\geq 2$、$p\geq 1$、$r<-\sigma$ 和 $t(S)=2$。

（7）情形 7ii）。我们有 $\Gamma+\Delta=\widetilde{\rho}+\rho_\mu-1$ 和 $\delta=0$、$s_{\mu+1}=\rho_{\mu+1}<\rho_\mu-1$，这意味着 $\widetilde{\rho}\geq 2$、$r'_{\mu+1}<0$ 和 $\sigma_\mu=\widetilde{\sigma}$。唯一可能的情形是 2d)，其中 $\widetilde{\rho}=2$，因此我们有 $\widetilde{\rho}+\rho_\mu-1=\rho_\mu+1\leq k$。由 I 的 Gr¨obner 基，我们得到 $x_2x_{\rho_\mu-1}-x_0^h x_{\rho_\mu+1}$、$x_{\rho_\mu+1}x_k^{\sigma_\mu}-x_0^{r'_\mu-h}x_1x_{k+1}^{p_\mu}\in I$。因此，方程 (14) 变为：

$$x_0^{r'_\mu-1}x_1x_{k+1}^{p_\mu}x_k^{\sigma_\mu}x_{k+1}^{2(p_{\mu+1}-p_\mu-1)}-x_1x_k^{\sigma_\mu-\varepsilon}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-1}\in I. \tag{22}$$

这意味着 $r'_\mu=h=1$。由于 $2p_{\mu+1}-p_\mu-2-(p_{\mu+1}-1)=p_{\mu+1}-p_\mu-1\geq 0$，我们得到

$$x_k^{\varepsilon}x_{k+1}^{p_{\mu+1}-p_\mu-1}-1\in I. \tag{23}$$

当且仅当 $\varepsilon=0, p_{\mu+1}=p_\mu+1$ 时，这才有可能。由于 $h=1$，我们可以假设 $d>0$，因此序列 r_i 严格递减。我们有 $1=r'_\mu=r_\mu+\sigma_\mu+1$，所以 $r_\mu=-\sigma_\mu$，$r_{\mu+1}<-\sigma_\mu$。令 $\sigma=\sigma_\mu, p=p_\mu, l=s_{\mu+1}, r_{..}=r_{\mu+1}$，则得到下表：

s	p	r	r'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sigma k+l+2$	p	$-\sigma$	1
l	$p+1$	r	<0

其中 $\sigma\geq 1, 1\leq l<k-2, r<-\sigma$。我们有 $t(S)=l+1$。由[6]的引理 2.2.4，我们得到

$$a=(\sigma k+l+2)(p+1)-lp,\ d=-(p+1)\sigma-pr,$$
$$c=-l\sigma-(\sigma k+l+2)r.$$

□

6. Formula for Frobenius number of Almost Symmetric AAG-semigroups

本节扩展并推广了理想 I 的所有结果。

定理 6.1. 设 S 是一个几乎对称的 AAG，满足 $k\geq 3, t(S)\geq 2$，且满足$r'_\mu\geq h$ 或 $\rho_\mu=0$。那么，弗罗贝尼乌斯数可以用关于 a、d、c、k和型 $t(S)$的线性公式或二次公式表示。

证明. 我们将采用第 5 节中的记号和证明。首先，我们研究以下情形

~ ~ ~: Frob(S) $\in PF(S)_i$, card($PF(S)_i$) ≥ 2, 其中 $i = 1$ 为 2。

在 定理 5.2 中，我们有 $F(S) = kd$，因此在这种情况下无需证明任何内容 e.

在定理 5.3 中，我们有 $F(S) = a_1 + (\sigma - 1)a_k + (p-2)c - a$。由方程（1）可得 $a_2 + (p-1)c = a + a_1$。但是 $x_{k+1}^p - x_0 x_k^\sigma \in I$，因此我们有 $pc = a + \sigma a_k$。通过简单计算可得

$$F(S) = 3a_1 - 2a_2 - a_k.$$

~ ~因此，我们可以假设对于某个 $i = 1, 2$，有 $PF(S)_i = \{$Frob(S)$\}$

I）假设 $PF(S)_2 = \{$ Frob(S)$\}$。根据定理 5.4， S 是几乎对称的，且 $k \geq 3, t(S) \geq 2$ 当且仅当满足以下条件之一。

~ ~(1) $PF(S)_1 = \{x_{k+1}^{p-1}\}$, $PF(S)_2 = \{x_1 x_k^\sigma x_{k+1}^{p-2}\}$, $t(S) = 2$。由于 S是几乎对称的，我们有 $x_{k+1}^{2(p-1)} - x_0$ Frob(S) $\in I$，因此 $F(S) = 2(p-1)c - 2a$。于是，确定 $F(S)$的公式等同于用 a, d, c, k表示 p。我们有 $x_{k+1}^p - x_0 x_1 x_k^\sigma \in I$。因此

$$cp = a + a_1 + \sigma a_k. \tag{24}$$

由于 $a = (\sigma k + 2)p - (\sigma k + 1)$，我们有

$$\sigma k(p-1) = a + 1 - 2p. \tag{25}$$

我们将 (24) 乘以 $k(p-1)$，并利用 (25)，得到

$$k(p-1)pc = k(p-1)(a + a_1) + a_k(a + 1 - 2p). \tag{26}$$

因此，我们得到一个关于变量 p 的二次方程

$$kcp^2 - (k(c + a + a_1) - 2a_k)p - a_k(a+1) + k(a + a_1) = 0, \tag{27}$$

so

$$p = \frac{k(c + a + a_1) - 2a_k + \sqrt{(k(c + a + a_1) - 2a_k)^2 - 4kc(-a_k(a+1) + k(a + a_1))}}{2kc}.$$

~ ~(2) $PF(S)_1 = \{x_i x_{k+1}^{p-1} \mid i = 1, \ldots, k-l\}$,$PF(S)_2 = \{x_1 x_k^\sigma x_{k+1}^{p-2}\}$, $t(S) = k - l + 1$和$h = 1$。由于 S 几乎对称，我们有 $x_1 x_{k-l} x_{k+1}^{2(p-1)} - x_0$ Frob(S) $\in I$，因此 $x_{k-l+1} x_{k+1}^{2(p-1)} -$ Frob(S) $\in I$，且 $F(S) = 2(p-1)c + a_{k-l+1} - a$，所以确定 $F(S)$ 的公式等同于用 a、d、c、k、l 表示 p。我们有$x_{k+1}^p - x_l x_k^{\sigma-1} \in I$，因此

$$cp = a_l + \sigma a_k - a_k. \tag{28}$$

由于 $a = (\sigma k + 2)p - ((\sigma - 1)k + l)$，我们有

$$\sigma k(p-1) = a - 2p - k + l. \tag{29}$$

我们将 (28) 乘以 $k(p-1)$，并利用 (29) 得到

$$k(p-1)pc = k(p-1)a_l + a_k(a - 2p - k + l) - k(p-1)a_k. \tag{30}$$

因此，我们得到关于变量 p 的二次方程

$$kcp^2 - (k(c + a_l - a_k) - 2a_k)p - a_k(a + l) + ka_l = 0, \tag{31}$$

$$\text{so } p = \frac{k(c + a_l - a_k) - 2a_k + \sqrt{(k(c + a_l - a_k) - 2a_k)^2 - 4kc(-a_k(a + l) + ka_l)}}{2kc}.$$

II) 假设 $PF(S)_1 = \{\text{Frob(S)}\}$。根据定理 5.5， S是几乎对称的，其中 $k \geq 3, t(S) \geq 2$ ，当且仅当以下任一条件成立：

(1) $PF(S)_1 = \{x_1x_k^\sigma x_{k+1}^{p-1}\}$, $PF(S)_2 = \{x_2x_k^\sigma, \ldots, x_{l+1}x_k^\sigma\}$, $t(S) = l + 1, h = 1, l \leq k - 3$。由于 S 是几乎对称的，因此有 $x_2x_{l+1}x_k^{2\sigma} - x_0Frob(S) \in I$，所以我们有 $x_{l+3}x_k^{2\sigma} - \text{Frob(S)} \in I$ 且 $F(S) = a_{l+3} + 2\sigma a_k - a$。另一方面 $x_{l+2}x_k^\sigma - x_0x_{k+1}^{p-1} \in I$，因此

$$a_{l+2} + \sigma a_k = a + c(p - 1). \tag{32}$$

因此， $F(S) = a_{l+3} + 2(a + c(p - 1) - a_{l+2}) - a$。确定 $F(S)$ 的公式，等同于用 a、 d、 c、 k、 l 表示 p。由于 $a = (\sigma k + l + 2)p - l(p - 1)$，我们有

$$\sigma kp = a - 2p - l. \tag{33}$$

我们将 (32) 乘以 kp ，并利用 (33) 得到

$$ka_{l+2}p + k\sigma a_kp = kap + kcp(p - 1). \tag{34}$$

因此我们得到一个关于变量 p 的二次方程

$$kcp^2 - (k(c - a + a_{l+2}) - 2a_k)p - a_k(a - l) = 0, \tag{35}$$

$$\text{so } p = \frac{k(c - a + a_{l+2}) - 2a_k + \sqrt{(k(c - a + a_{l+2}) - 2a_k)^2 + 4kca_k(a - l)}}{2kc}.$$

(2) $\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_1x_k^{\sigma-1}x_{k+1}^p\}$, $\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_2x_k^{\sigma-1}, \ldots, x_{k-1}x_k^{\sigma-1}\}$, $t(S) = k - 1$ 以及 $h = 1$。由于 S 几乎对称，我们有 $x_2x_{k-1}x_k^{2\sigma-2} - x_0\text{Frob(S)} \in I$ ，即为 $x_1x_k^{2\sigma-1} - x_0\text{Frob(S)} \in I.$。因此 $F(S) = a_1 + 2\sigma a_k - a_k - 2a$。另一方面$x_k^\sigma - x_0x_{k+1}^{p-1} \in I$，所以我们有

$$\sigma a_k = a + c(p - 1). \tag{36}$$

因此， $F(S) = a_1 + 2(a + c(p - 1)) - a_k - 2a$。要确定 $F(S)$ 的公式，就需要确定 p关于 a、 d、 c、 k 的表达式。由于 $a = (\sigma k)(p + 1) - (k - 2)p$ ，我们有

$$\sigma kp = a + kp - 2p - k - 2. \tag{37}$$

我们将（36）乘以 kp ，并利用（37）得到

$$a_k(a + kp - 2p - k - 2) = kap + kcp(p - 1). \tag{38}$$

因此，我们得到一个关于变量 p 的二次方程

$$kcp^2 - (k(c - a + a_k) - 2a_k)p - a_k(a - k + 2) = 0, \tag{39}$$

and $p = \dfrac{k(c-a+a_k) - 2a_k + \sqrt{(k(c-a+a_k)-2a_k)^2 + 4kca_k(a-k+2)}}{2kc}$.

(3) $\widetilde{PF(S)}_1 = \{x_1x_k^{\sigma-1}x_{k+1}^p\}$, $\widetilde{PF(S)}_2 = \{x_2x_k^{\sigma-1}, \ldots, x_k^\sigma\}$, $t(S) = k$。由于 S 是几乎对称的，我们有 $x_2x_k^{2\sigma-1} - x_0\text{Frob(S)} \in I$，因此有 $F(S) = a_2 + 2\sigma a_k - a_k - 2a$。另一方面 $x_1x_k^\sigma - x_0^{h+1}x_{k+1}^{p-1} \in I$，所以我们有

$$a_1 + \sigma a_k = (h+1)a + c(p-1) \tag{40}$$

以及 $F(S) = a_2 + 2(a + c(p-1) - a_1) - a_k - 2a$。确定$F(S)$的公式，需要确定 p 关于 a、d、c、k的表达式。通过推导公式$a = (\sigma k+1)(p+1) - (k-1)p$，我们得到

$$\sigma kp = a + p(k-2) - k + 1. \tag{41}$$

将 (40) 乘以 kp，并利用 (41)，得到

$$ka_1p + a_k(a + p(k-2) - k + 1) = k(h+1)ap + kcp(p-1). \tag{42}$$

因此，我们得到一个关于变量 p 的二次方程

$$kcp^2 - (k(a_1 + c - (h+1)a + a_k) - 2a_k)p - a_k(a-k+1) = 0, \tag{43}$$

and

$$p = \frac{k(a_1 + c - (h+1)a + a_k) - 2a_k + \sqrt{(k(a_1 + c - (h+1)a + a_k) - 2a_k)^2 + 4kca_k(a-k+1)}}{2kc}.$$

(4) $PF(S)_1 = \{x_{k+1}^p\}$, $PF(S)_2 = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $t(S) = k+1$。我们有 $F(S) = pc - a$，且 $a = k + p + 1$，因此 $F(S) = c(a-k-1) - a$。

(5) $PF(S)_1 = \{x_1x_k^{\sigma-2}x_{k+1}^p\}$, $PF(S)_2 = \{x_1x_k^{\sigma-1}\}$, $t(S) = 2$。由于 $x_1^2x_k^{2\sigma-2} - x_0Frob(S) \in I$，且 $x_1^2 - x_0x_2 \in I$，我们有 $F(S) = a_2 + 2\sigma a_k - 2a_k - a$。由$x_1x_k^\sigma - x_0x_{k+1}^p \in I$，得到

$$a_1 + \sigma a_k = a + c(p-1). \tag{44}$$

因此，$F(S) = a_2 + 2(a + c(p-1) - a_1) - 2a_k - a$。确定 $F(S)$ 的公式，等同于用 a、d、c、k 表示 p。

通过推导公式 $a = (\sigma k+1)(p+1) - (2k-1)p$，我们得到

$$\sigma kp = a + p(2k-2) - 2k + 1. \tag{45}$$

将 (44) 乘以 kp，并利用 (45)，得到

$$ka_1p + a_k(a + p(2k-2) - 2k + 1) = kap + kcp(p-1). \tag{46}$$

因此，我们得到一个关于变量 p 的二次方程

$$kcp^2 - (k(c + d + 2a_k) - 2a_k)p - a_k(a - 2k + 1) = 0, \tag{47}$$

and $p = \dfrac{k(c+d+2a_k) - 2a_k + \sqrt{(k(c+d+2a_k) - 2a_k)^2 + 4kca_k(a-2k+1)}}{2kc}$.

□

注 6.2. 给定一个具有数据 a、d、c、h、k 的 AAG 半群 S，我们可以通过使用 [7], 中实现的三数最大公因数欧几里得算法，判断 S 是否为满足条件 $r_\mu \geq h$ 或 $\rho_\mu = 0$ 的几乎对称半群。该算法会给出引理 3.4 中描述的表格。表格给出了序列 s_i、p_i、r_i、q_i 以及数值 μ，因此我们可以使用第 5 节中的定理来检查该半群是否为几乎对称半群。更快的算法是使用定理 6.1，它给出了关于 p 的一组 $2k+2$ 公式；如果 $p > 1$ 是其中一个公式的自然数解，那么我们还可以得到 S 可能的型，以及数值 l，从而确定第 5 节中可能的情形。使用第 5 节相应情形下关于 a 的公式，我们可以求出 σ；如果 σ 是自然数，那么最终可以由关于 d 的公式求出自然数 r，并检查 c 的值是否正确。

例 6.3。我们已实现上述算法。对于

$$150 \leq a \leq 165, -5 \leq d \leq 10, 170 \leq c \leq 186, 19 \leq k \leq 20, 1 \leq h \leq 4,$$

使得 $r_\mu \geq h$ 几乎对称的 AAG 半群，当且仅当以下情况之一成立:

1) $a = 155, d = 1, c = 177, k = 20, h = 4$。定理 5.4 情形 1), $p = 8, \sigma = 1, r = -1, t(S) = 2$，或 2) $a = 163, d = -2, c = 170, k = 19, h = 1$。定理 5.4 情形 2), $l = 14, p = 3, \sigma = 4, r = -2, t(S) = 6$，或 3) $a = 165, d = 4, c = 170, k = 19, h = 1$。定理 5.5 情形 1), $l = 5, p = 4, \sigma = 2, r = -4, t(S) = 6$，或 4) $a = 165, d = -2, c = 174, k = 19, h = 1$。定理 5.4 情形 2), $l = 12, p = 3, \sigma = 4, r = -2, t(S) = 8$，或 5) $a = 163, d = 7, c = 179, k = 19, h = 1$。定理 5.5 情形 5), $p = 6, \sigma = 3, r = -5, t(S) = 2$，或 6) $a = 165, d = 7, c = 183, k = 19, h = 3$。定理 5.5 情形 3), $p = 7, \sigma = 2, r = -7, t(S) = 19$，或 7) $a = 165, d = -1, c = 186, k = 19, h = 4$。定理 5.5 情形 3), $p = 7, \sigma = 2, r = -8, t(S) = 19$。

References

[1] V. Barucci, R. Fröberg,《一维几乎戈伦斯坦环》，《代数学杂志》188 (1997), 418–442。

[2] H. Bresinsky,《由 4 个元素生成的对称整数半群》，《数学手稿》17 (1975), 205-219。

[3] Kazufumi Eto,《仿射四维空间中的几乎戈伦斯坦单项式曲线》，《代数学杂志》488 (2017), 362- 387。[4] Ignacio García-Marco, Jorge L. Ramírez Alfonsín, Øystein J. Rødseth,《数值半群 II：伪对称 AA 半群》，《代数学杂志》470 (2017), 484-498。[5] Marcel Morales,《单项式曲线的 syzygy 与一个 Frobenius 线性丢番图问题》，预印本。马克斯·普朗克数学研究所（波恩-德意志联邦共和国）(1987)。[6] Marcel Morales,《余维二单项式簇的方程》，《代数学杂志》175 (1995), 1082-1095。

[7] Marcel Morales, Frobenius 数软件——Gr ¨obner 基，可从 https: //www-fourier.ujf-grenoble.fr/ morales/ 下载。[8] Marcel Morales, Nguyen Thi Dung, 一种求 Frobenius 数和 Gr ¨obner 基的“伪多项式”算法，《符号计算杂志》，https://doi.org/10.1016/j.jsc.2023.102233。[9] A. Moscariello，关于几乎戈伦斯坦单项式曲线的型，《代数学杂志》456 (2016), 266-277。[10] H. Nari，几乎对称数值半群的对称性，《半群论坛》86 (2013), 140 - 154。[11] Dilip P. Patil，某些单项式曲线关系理想的极小生成元集，《数学手稿》80 (1993), 239- 248。[12] J. L. Ramírez Alfonsín, and O. J. Rødseth，《数值半群、Ap ´ery 集与希尔伯特级数》，《半群论坛》79(2) (2009), 323-340。[13] J. Rødseth，《Frobenius 线性丢番图问题 II》，《纯粹与应用数学杂志》307/308 (1979), 431-440。[14] J.C. Rosales, and P.A. García-Sánchez，《三生成元伪对称数值半群》(2005)。爱思唯尔公司出版。DOI：10.1016/j.jalgebra.2005.06.005。

Institut Fourier, UMR 5582, Laboratoire de Mathématiques, Université GrenobleAlpes, CS 40700, 38058 Grenoble cedex 9, France电子邮箱：marcel.morales@univ-grenoble-alpes.fr

University of Information and Communication Technology, Thai Nguyen, Vietnam电子邮箱：ntdung.cntt@ictu.edu.vn