基于波数域反射系数的三维声场模拟方向性反射建模

Satoshi Hoshika 和 Takahiro Iwami

日本福冈九州大学设计研究生院 hoshikasatoshi@gmail.com, iwami@design.kyushu-u.ac.jp

Akira Omoto

日本福冈九州大学设计学院
omoto@design.kyushu-u.ac.jp

arXiv:2601.07481v1 [eess.AS] 12 Jan 2026

摘要

本研究提出一种框架，将波数域声反射系数融入声场分析，以表征材料反射和散射现象的方向依赖性。针对每个传播方向，反射系数定义为入射波与反射波的振幅比，并根据入射声场和反射声场的空间傅里叶变换进行估算。随后，将得到的波数域反射系数转换为声导纳表示，可直接与边界元法（BEM）等数值方法兼容，从而能够模拟镜面反射分量以外的反射。与传统的扩展反应模型不同，该方法无需显式模拟材料内部。这显著降低了计算成本，同时允许直接使用测量数据、经验模型或用户定义的方向性反射特性。作者此前通过二维声场模拟验证了该方法的有效性，结果证实该方法能够准确再现方向依赖的反射行为。本研究将该框架扩展至三维分析，证明其适用于更真实、复杂的声学环境。该方法为模拟具有方向依赖性的声反射和散射提供了一种实用且灵活的工具，并有望应用于建筑声学、材料表征和噪声控制。

已提交至《声学会议论文集》（PoMA 2025）。

1 背景与动机

阻抗边界条件长期以来一直是模拟材料表面吸声与反射的标准方法。这类边界条件最简单的形式是将法向质点速度与表面声压相关联，无需显式解析材料内部，即可高效地表征能量耗散。然而，局部反应阻抗模型本质上忽略了方向效应，无法描述非镜面反射或散射现象。

为解决这些局限，人们开发了扩展反应模型，以考虑材料内部的波传播和能量耗散。代表性例子包括等效流体模型 [1, 2], Biot型多孔弹性模型 [3, 4], 以及对周期性或层状结构的数值分析[5, 6]。虽然这些方法能够预测角度相关反射和散射特性，但需要对材料域进行体积离散。在三维模拟中，这

会导致计算成本大幅增加，网格通常包含数万甚至数十万个单元。此外，要解析方向反射行为，通常需要针对不同入射角进行多次模拟，这会进一步加重计算负担。

与这些方法不同，本研究采用宏观视角，专门关注边界处入射声场与反射声场之间的关系。所提出的框架并不对材料的内部动力学进行建模，而是将边界视为一种线性算子，将入射声能重新分配至不同的反射方向。通过对边界声压场应用空间傅里叶变换，可以用传播方向来描述这种关系，并将入射声场和反射声场分解为由面内波数标记的平面波分量。当内部微观结构未知、过于复杂而难以显式建模，或无需借助其描述可观测的反射行为时，这一视角尤其适用。

此前已有研究采用空间傅里叶变换技术分析边界处的方向性反射特性。例如，Tamura 提出了一种方法，利用空间傅里叶变换，根据实测声压分布估计与角度相关的反射系数 [7, 8]。尽管该方法能够评估斜入射效应，但反射系数被视为标量，并针对每个入射方向独立定义。因此，非镜面反射以及不同波分量之间的方向耦合无法在统一框架中得到表示。

为克服这一局限，作者此前提出了波数域声反射系数的概念，记为 $\mathbf{C}_\mathrm{r}$，它表示波数空间 [9, 10] 中入射波分量与反射波分量之间的线性映射。这种基于算子的表述无需采用材料内部的体积模型，便能自然地描述非镜面反射和多方向散射。然而，先前的研究主要局限于二维声场，尚未系统地扩展至三维问题，也未能将估计得到的反射特性实际应用于数值声场仿真。

本研究旨在构建一个统一框架，用于描述三维声场中的方向性声反射。所提出的方法利用多个声源和接收器获取的入射声场与反射声场空间分布，估计波数域反射矩阵 $\mathbf{C}_\mathrm{r}$。随后，将估计得到的矩阵转换为波数域导纳，并将其作为非局部边界条件纳入传统边界元法（BEM）。如此一来，无需采用显式解析材料内部、计算成本高昂的扩展反应模型，即可在边界处直接再现复杂的角度相关反射与散射行为。

2 三维声场中波数域反射系数估算原理

2.1 波数域声学反射系数的定义 $\mathbf{t}$

如图 1 所示，我们考虑三维声场中的入射声波和反射声波。材料表面位于 $\Gamma = \{\, \boldsymbol{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \,\}$，入射声压和反射声压分别记为 p_i 和 p_r。所有量均在频域中处理，为简洁起见，省略角频率 ω。

我们将边界平面上的压力分布及其傅里叶变换视为有限能量信号，并采用希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 作为函数空间。在波数域分析中，仅

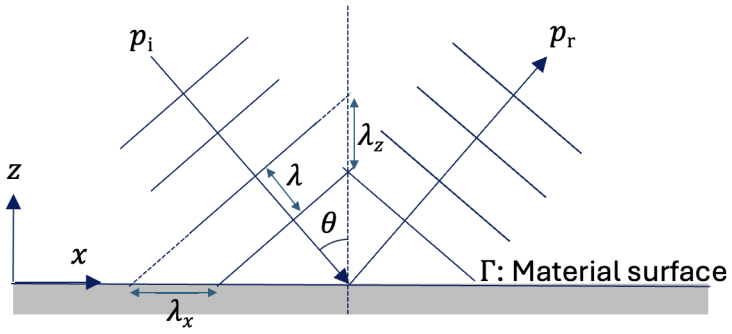


图1：三维声场中反射的示意图。平面波从上半空间入射到 $z = 0$ 处的边界面，并反射回同一半空间。

考虑平行于边界的分量 (k_x, k_y)：

$$\boldsymbol{k}_{xy} := (k_x, k_y), \qquad \mathcal{D}_k := \{\, \boldsymbol{k}_{xy} \in \mathbb{R}^2 \mid k_x^2 + k_y^2 \le k^2 \,\}.$$

满足 $|\boldsymbol{k}_{xy}| > k$ 的倏逝分量不会对辐射远场产生贡献，因此予以忽略。

沿边界平面的二维傅里叶变换定义为 [11]

$$\mathcal{F}_{xy} f(\boldsymbol{k}_{xy}) := \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{1}$$

$$\mathcal{F}_{xy}^{-1} \hat{f}(x,y) := \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\boldsymbol{k}_{xy})\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y. \tag{2}$$

用球坐标表示三维波数向量，

$$k_x = k \sin\theta \cos\phi, \qquad k_y = k \sin\theta \sin\phi, \qquad k_z = k \cos\theta, \tag{3}$$

其中，对于传播分量，$|k_z| = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$.

采用这种表示方式，入射声场和反射声场的波数域频谱定义在同一区域 $\mathcal{D}_k$，但通过法向波数分量的符号加以区分：

$$\hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy}) := \mathcal{F}_{xy} p_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy}), \qquad k_z < 0, \tag{4}$$

$$\hat{p}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy}) := \mathcal{F}_{xy} p_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy}), \qquad k_z > 0. \tag{5}$$

也就是说，$\hat{}p_{\mathrm{i}}$ 表示朝边界传播的平面波分量，而$\hat{}p_{\mathrm{r}}$ 则对应反射后远离边界传播的分量。

随后，入射声场和反射场可表示为平面波展开：

$$p_{\mathrm{i}}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}_k} \hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy})\, \mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y - |k_z| z)}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}_{xy}, \tag{6}$$

$$p_{\mathrm{r}}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}_k} \hat{p}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy})\, \mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y + |k_z| z)}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}_{xy}. \tag{7}$$

利用边界平面谱，反射算子可写为:

$$\hat{p}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy}) = \iint_{\mathcal{D}_k} C_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy}, \boldsymbol{k}'_{xy})\, \hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}'_{xy})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}'_{xy}, \tag{8}$$

其中，反射算子 $\mathcal{C}_{\mathrm{r}}: L^2(\mathcal{D}_k) \to L^2(\mathcal{D}_k)$ 定义为

$$\mathcal{C}_{\mathrm{r}}\hat{f}(\boldsymbol{k}_{xy}) := \iint_{\mathcal{D}_k} C_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy}, \boldsymbol{k}'_{xy})\, \hat{f}(\boldsymbol{k}'_{xy})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}'_{xy}.$$

考虑能量平衡和耗散，算子范数满足 $\|\mathcal{C}_{\mathrm{r}}\|_{\mathrm{op}} \le 1$，且除非边界是完全反射的 [12]，否则严格满足 $\|\mathcal{C}_{\mathrm{r}}\|_{\mathrm{op}} < 1$。

在数值实现中，波数域 $\mathcal{D}_k$ 通过采样点$\{\boldsymbol{k}_{xy,m}\}_{m=1}^{M}$ 进行离散化，并为其赋予相应的求积权重 $w_m > 0$。这些权重表示积分测度，对应于波数平面上每个离散模态所覆盖的有限面积。因此，连续积分可近似为

$$\iint_{\mathcal{D}_k} f(\boldsymbol{k}_{xy})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}_{xy} \;\approx\; \sum_{n=1}^{M} f(\boldsymbol{k}_{xy,n})\, w_n.$$

因此，反射谱可离散化为

$$\hat{p}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy,m}) \approx \sum_{n=1}^{M} C_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy,m}, \boldsymbol{k}_{xy,n})\, \hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy,n})\, w_n.$$

w_n 的具体形式取决于用于离散化 $\mathcal{D}_k$的采样方案。例如，当采用斐波那契格点对上半球进行均匀采样时，求积权重可近似为

$$w_n \approx \frac{2\pi k k_{z,n}}{M},$$

其中，k 为声学波数，$k_{z,\ n}$ 为第 n 个波数向量的法向分量，M为采样模态总数。此选择可确保立体角近似均匀划分，并实现反射算子的能量一致离散化。

定义向量

$$\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}} = [\hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy,1}), \ldots, \hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy,M})]^{\mathsf{T}}, \tag{9}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{r}} = [\hat{p}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy,1}), \ldots, \hat{p}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy,M})]^{\mathsf{T}}. \tag{10}$$

定义矩阵

$$[\mathbf{C}_{\mathrm{r}}]_{mn} := C_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy,m}, \boldsymbol{k}_{xy,n})\, w_n,$$

离散关系可写为

$$\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{r}} = \mathbf{C}_{\mathrm{r}}\, \hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}}. \tag{11}$$

C_{r} 的对角元素对应于镜面反射，而非对角元素表示由散射引起的方向耦合。

2.2 波数域反射系数的估计（3D)

根据公式（11），波数域反射矩阵 $\mathbf{C}_\mathrm{r}$ 由 Q 组入射声场和反射声场的谱估计得到。将这些谱按列堆叠可得

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_\mathrm{i} = [\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{i},1}, \ldots, \hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{i},Q}] \in \mathbb{C}^{M\times Q}, \tag{12}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_\mathrm{r} = [\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{r},1}, \ldots, \hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{r},Q}] \in \mathbb{C}^{M\times Q}. \tag{13}$$

这些矩阵满足以下线性关系

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_\mathrm{r} = \mathbf{C}_\mathrm{r}\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_\mathrm{i}, \tag{14}$$

由此可估计 $\mathbf{C}_\mathrm{r}$，例如使用摩尔－彭若斯伪逆：

$$\mathbf{C}_\mathrm{r} \simeq \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_\mathrm{r}\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_\mathrm{i}^{\dagger}, \tag{15}$$

其中 $(\cdot)^\dagger$ 表示伪逆。

对于具有均匀或周期结构的边界，反射波场通常集中在数量有限的波数分量上。因此，相应的反射矩阵 $\mathbf{C}_\mathrm{r}$ 往往在波数空间中呈现稀疏或近似稀疏结构。若预期存在此类结构，则可采用稀疏性促进估计技术，例如 ℓ_1 正则化回归，作为替代解决方案，以增强在观测有限或含噪情况下的稳健性。本研究将此类正则化作为一种实用选项，但所提出的框架本身并不局限于任何特定的估计方法。

3 Admittance 算子及其在数值模拟中的应用 s

3.1 归一化声导纳算子及其矩阵表示的推导

如上一节所示，波数域中的反射系数描述了入射波在边界处反射时的方向和振幅。本节将反射系数转换为归一化声导纳，提出一个将该理论应用于数值模拟的框架。这种表述对于采用导纳形式表达边界条件的数值方法尤为有用，例如边界元法（BEM）。为此，我们根据波数域中声压与质点速度之间的关系推导导纳算子。

我们将归一化声导纳算子（$\mathcal{B}: L^2(\mathcal{D}_k) \to L^2(\mathcal{D}_k)$)定义为波数域中将声压映射为质点速度的算子，其表达式为

$$\mathcal{B}\,\hat{p}(\boldsymbol{k}_{xy}) = \hat{v}(\boldsymbol{k}_{xy}). \tag{16}$$

波数域中的声压场 $\hat{p}(\boldsymbol{k}_{xy}, z)$ 可表示为入射波与反射波的叠加：

$$\hat{p}(\boldsymbol{k}_{xy}, z) = \hat{p}_\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{xy})\mathrm{e}^{-ik_z z} + \hat{p}_\mathrm{r}(\boldsymbol{k}_{xy})\mathrm{e}^{ik_z z}. \tag{17}$$

设 ρ 和 c 分别表示介质的密度和声速。根据欧拉方程，可得到 z 方向上的质点速度 $\hat{v}(\boldsymbol{k}_{xy}, z)$:

$$\hat{v}(\boldsymbol{k}_{xy}, z) = \frac{1}{i\rho\omega}\frac{\partial}{\partial z}\hat{p}(\boldsymbol{k}_{xy}, z) = \frac{k_z}{\rho c k}\left(-\hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy})\mathrm{e}^{-ik_z z} + \hat{p}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy})\mathrm{e}^{ik_z z}\right). \tag{18}$$

在边界 $z = 0$处，声压和质点速度表示为

$$\hat{p}(\boldsymbol{k}_{xy}) = \hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy}) + \hat{p}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy}), \tag{19}$$

$$\hat{v}(\boldsymbol{k}_{xy}) = \frac{k_z}{\rho c k}\left(-\hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy}) + \hat{p}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{k}_{xy})\right). \tag{20}$$

利用反射系数算子 $\mathcal{C}_r$ 和恒等算子 $\mathcal{I}$，可将声压和质点速度改写为

$$\hat{p}(\boldsymbol{k}_{xy}) = (\mathcal{I} + \mathcal{C}_r)\,\hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy}), \tag{21}$$

$$\hat{v}(\boldsymbol{k}_{xy}) = \hat{\beta}_0(\boldsymbol{k}_{xy})(-\mathcal{I} + \mathcal{C}_r)\,\hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy}), \tag{22}$$

^其中，$\beta_0(\boldsymbol{k}_{xy})$表示与面内波数 $\boldsymbol{k}_{xy}$对应的特性导纳，其定义为

$$\hat{\beta}_0(\boldsymbol{k}_{xy}) := \frac{k_z}{\rho c k} = \frac{\sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}}{\rho c k}. \tag{23}$$

^ 该量等于 $\beta_0(\boldsymbol{k}_{xy}) = \cos\theta/(\rho c)$，其中 θ 为入射角，表示斜入射波 [13]的特性导纳。

将式 (21) 和 (22) 代入式 (16)，得到

$$\mathcal{B}(\mathcal{I} + \mathcal{C}_r)\,\hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy}) = \hat{\beta}_0(\boldsymbol{k}_{xy})(-\mathcal{I} + \mathcal{C}_r)\,\hat{p}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}_{xy}). \tag{24}$$

要利用 $(\mathcal{I} + \mathcal{C}_r)^{-1}$构造归一化声导纳算子 $\mathcal{B}$，需要 $(\mathcal{I} + \mathcal{C}_r)$ 可逆。算子理论中的纽曼级数展开保证了这一可逆性。正如上一节所述，由于能量守恒且存在微小耗散，$\mathcal{C}_r$ 是作用于 $L^2(\mathcal{D}_k)$ 上的有界线性积分算子，且其算子范数满足 $\|\mathcal{C}_r\|_{\mathrm{op}} < 1$。因此，

$$(\mathcal{I} + \mathcal{C}_r)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathcal{C}_r)^n,$$

并由范数收敛保证其可逆性。

因此，归一化声导纳算子 $\mathcal{B}$ 为

$$\mathcal{B} = \hat{\beta}_0(\boldsymbol{k}_{xy})(-\mathcal{I} + \mathcal{C}_r)(\mathcal{I} + \mathcal{C}_r)^{-1}. \tag{25}$$

在数值计算中，连续的波数空间通过有限维表示进行近似。将波数平面 $\mathcal{D}_k$ 离散为有限个点 $\{\boldsymbol{k}_{xy,1}, \boldsymbol{k}_{xy,2}, \ldots, \boldsymbol{k}_{xy,M}\}$，即可得到基于式（25）的归一化声导纳矩阵表示:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(-\mathbf{I} + \mathbf{C}_r)(\mathbf{I} + \mathbf{C}_r)^{-1}, \tag{26}$$

其中，$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ 为单位矩阵，$\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{M\times M}$ 为对角矩阵，其单元对应介质的特性导纳，定义为：

$$\mathbf{B}_0 := \operatorname{diag}\left(\frac{\sqrt{k^2-(k_{x,1}^2+k_{y,1}^2)}}{\rho c k},\ \frac{\sqrt{k^2-(k_{x,2}^2+k_{y,2}^2)}}{\rho c k},\ \dots,\ \frac{\sqrt{k^2-(k_{x,M}^2+k_{y,M}^2)}}{\rho c k} \right).$$

因此，对于波数域中的压力向量 $\hat{\mathbf{p}} \in \mathbb{C}^M$，相应的质点速度向量 $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^M$ 计算如下

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\,\hat{\mathbf{p}}.$$

3.2 波数域导纳在边界元法中的应用

边界元法（BEM）通过离散由基尔霍夫–亥姆霍兹积分定理导出的边界积分方程，求解边界上的声压和质点速度，广泛用于声吸收和散射分析 [14, 15]。

考虑一个包含强度为 A、位于 $\boldsymbol{r}_\mathrm{s}$ 的点声源的区域 Ω。声压场 $p(\boldsymbol{r})$ 满足基尔霍夫–亥姆霍兹积分方程，其中 G 表示自由场格林函数，k 表示声学波数，ρ 表示介质密度。对于边界 Γ 上的观测点，立体角系数为 $\epsilon = 1/2$。将 Γ 离散为 N_b 个边界单元后，标准边界元法公式可写成矩阵形式：

$$\frac{1}{2}\mathbf{p} = A\mathbf{g}_\mathrm{s} + \mathbf{G}'\mathbf{p} - i\omega\rho\,\mathbf{G}\mathbf{v}, \tag{27}$$

其中，$\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{v}$ 分别表示边界压力向量和质点速度向量。

传统边界元法通过施加逐点关系 $\mathbf{v} = \beta\mathbf{p}$，假设边界为局部反应边界。虽然该近似在法向入射时成立，但无法捕捉斜入射时的方向相关行为。为克服这一局限，本研究引入了一个在波数域中定义的非局部边界算子。

对边界压力分布进行空间傅里叶变换后，边界上的质点速度可表示为如下算子形式

$$\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{F}}_{xy}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}_k\mathbf{B}\widetilde{\mathbf{F}}_{xy}\,\mathbf{p} = \widehat{\mathbf{B}}\,\mathbf{p}, \tag{28}$$

其中，$\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n_k\times n_k}$ 表示波数域中的比声导纳矩阵，$\widehat{\mathbf{B}}$ 表示其空间域对应项。矩阵 $\widetilde{\mathbf{F}}_{xy} \in \mathbb{C}^{n_k\times N_\mathrm{b}}$ 表示下文定义的白化空间傅里叶变换。将式（28）代入式（27），可得到一个闭合的边界元方程组，并可使用标准线性求解器求解。

空间傅里叶变换矩阵 $\mathbf{F}_{xy}$ 是对式（1）中定义的连续二维傅里叶变换的离散近似。利用平面 $z=0$ 上的 N_b 边界单元中心 $\{(x_m, y_m)\}_{m=1}^{N_\mathrm{b}}$以及 n_k 离散面内波数向量 $\{\boldsymbol{k}_{xy,i}\}_{i=1}^{n_k}$，其元素定义如下：

$$[\mathbf{F}_{xy}]_{im} = \frac{1}{2\pi}\exp\!\left(-i\,\boldsymbol{k}_{xy,i}\cdot\boldsymbol{r}_{xy,m}\right), \tag{29}$$

其中 $\boldsymbol{r}_{xy,\,m} = (x_m, y_m)$。因子 $1/(2\pi)$ 直接遵循连续傅里叶变换约定，而积分测度的离散化则通过第 2.1 小节中引入的求积权重单独处理。

由于波数域 $\mathcal{D}_k$ 经过离散化，得到的平面波基函数集合在连续能量内积下并非完全正交，因此通常有 $\mathbf{F}_{xy}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}_k\mathbf{F}_{xy} \neq \mathbf{I}$. 7

为补偿这种数值非正交性，基于加权格拉姆矩阵应用白化归一化

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}_{xy}^{\mathrm{H}} \mathbf{W}_k \mathbf{F}_{xy}.$$

逆平方根 $\mathbf{H}^{-1/2}$ 定义为满足 $\mathbf{H}^{-1/2}\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1/2} = \mathbf{I}$ 的厄米正定矩阵，例如可通过对 $\mathbf{H}$ 进行特征值分解来计算。

根据此定义，归一化的空间傅里叶变换矩阵为

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{xy} = \mathbf{F}_{xy} \mathbf{H}^{-1/2}, \tag{30}$$

该矩阵满足加权正交归一条件 $\widetilde{\mathbf{F}}_{xy}^{\mathrm{H}} \mathbf{W}_k \widetilde{\mathbf{F}}_{xy} = \mathbf{I}$。在式 (28) 中使用 $\widetilde{\mathbf{F}}_{xy}$，可消除平面波分量之间的人为耦合，并使采用超出局部反应模型范围的方向相关边界算子的边界元仿真保持稳定。

4 数值实验 I：波数域反射系数估计

4.1 仿真条件

为验证所提出的波数域反射系数估计方法的有效性，我们进行了数值模拟。研究了两种类型的边界：一种是产生镜面反射的平板，另一种是产生多方向散射的周期性狭缝结构。两种边界均建模为声学刚性表面（诺伊曼条件）。

声源位于反射表面上方 0.1 m 处，并在该高度周围分布了 100 个全向点声源。声源高度和径向距离（$r = 0.75$ m）保持不变，空间分布采用斐波那契采样确定，以避免方向偏差。接收点位于反射表面上方 0.01 m 处，按照间距为 0.04 m 的规则网格排列，共 400 个。声源-接收器配置如图 2a （平板）和图 2b （狭缝）所示。

每个声源依次激励，并使用频域边界元法计算入射与反射声场。所得多源多接收器压力数据集采用ℓ_1-正则化求解器（最小绝对值收缩和选择算子[16]）进行处理，作为估计反射系数矩阵 $\mathbf{C}_r$的一种实用方法；该矩阵表示波数域中入射与反射波分量之间的方向映射关系。

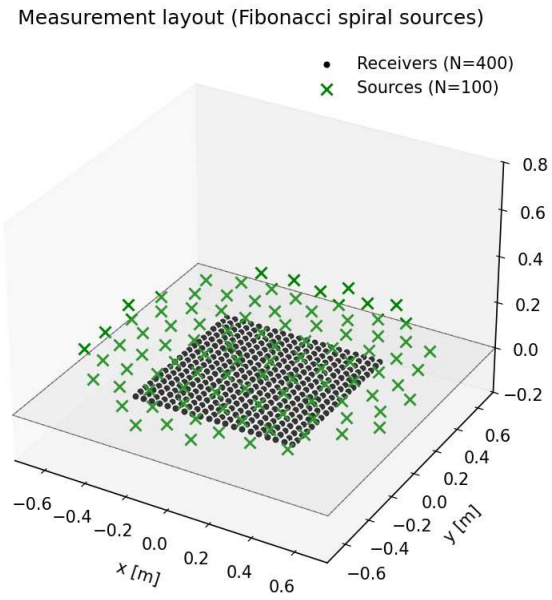
狭缝边界由宽度为 0.05 m、以 0.10 m 节距周期排列的刚性条杆构成。两种边界条件均采用相同的声源和接收器配置，以便进行直接比较。

激励频率设为 3.4 kHz，使声学波长与狭缝几何形状的特征长度尺度处于同一量级。这一选择能够清晰呈现周期结构引起的衍射和多方向散射效应，同时仍处于数值离散能够准确分辨的频率范围内。

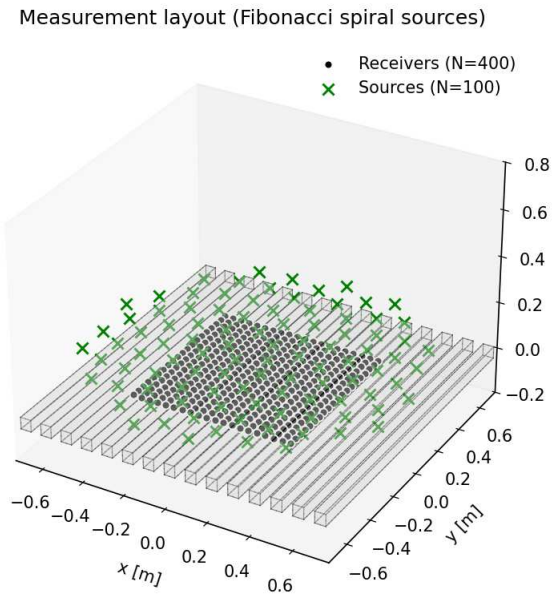
声速设为 $c = 343.5$ m/s，空气密度设为 $\rho = 1.205$ kg/m^3。

4.2 结果

图 3(a) 和图 3(b) 分别展示了平板和周期性狭缝边界的估计波数域反射系数矩阵 $\mathbf{C}_r$ 。横轴表示入射波数模态索引，纵轴表示反射模态索引。



(a) 平板边界条件



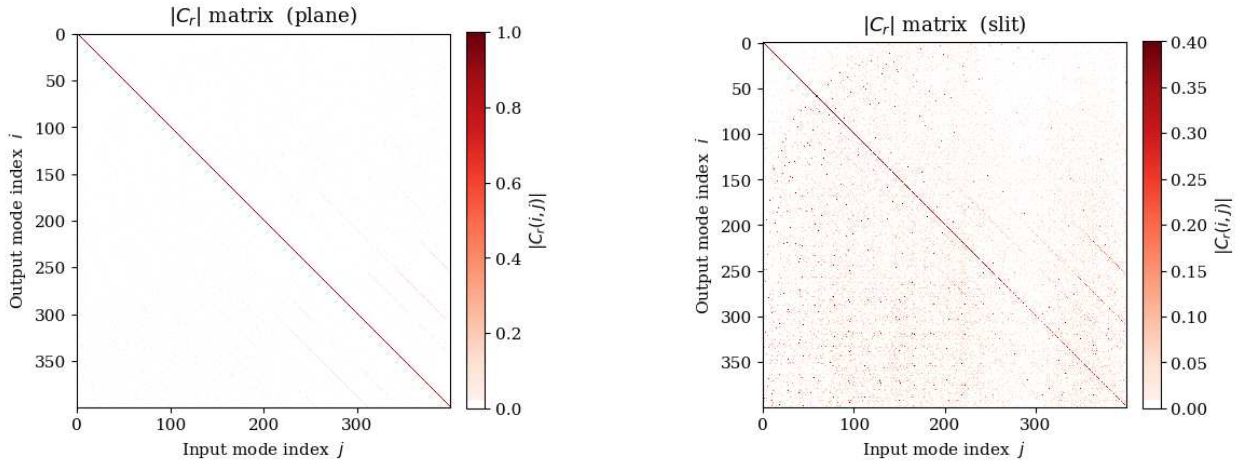
(b) 周期狭缝边界条件

图2：两种边界条件的数值分析设置（单位：米）。全向点声源（白色三角形）放置在边界面上方0.10 m的平面上。共布置100个声源，距中心的径向距离固定为 $r = 0.75$ m，并采用斐波那契采样，以确保角度分布近似均匀且无方向偏差。接收点（白色圆圈）位于边界上方0.01 m的平面上，并按规则网格排列，共400个点，间距为0.04 m。(a) 平板边界条件；(b) 周期狭缝边界条件。两种边界均建模为声学刚性（Neumann）表面。

为便于观察，波数分箱数设为 400。对于图 3(a) 所示的平板条件，矩阵能量高度集中在主对角线上，证实了理论预期的镜面反射占主导地位。相比之下，图 3(b) 所示的周期狭缝条件呈现出明显的非对角分量，清晰地捕捉到了周期结构引起的多方向散射。

为检验所估计的C_r的有效性，利用这些矩阵重建了反射指向性图 $|P_r|$ 。图4(a)展示了平板的反射声压分布，图4(b)则展示了周期狭缝在入射角 $\theta_i = 0°$、$30°$和 $60°$下的相应结果。蓝色十字标记表示入射方向，可直观地呈现声能如何重新分布至镜面反射方向和散射方向。用于重建的入射波矢$\hat{p}_i$ 定义为独热向量，其中仅与入射方向对应的分量设为1。此形式可直接评估所估计的波数域反射矩阵C_r 能否准确再现方向反射行为。为确保足够的角分辨率，重建采用了包含2401个波数分箱的斐波那契格点。得益于均匀的角度采样，整个角度范围内的镜面反射分量和散射分量均得以平滑呈现。

这些结果表明，对于多种边界条件，从纯镜面反射表面到强散射周期结构，所提出的方法都能稳健、准确地估计波数域反射矩阵 C_r 。此外，重建的反射图证实，使用估计得到的算子能够高保真地再现方向反射行为。



(a) 平板　　(b) 周期狭缝

图3：估计得到的波数域反射矩阵 C_r。对于平板，能量集中在主对角线上，表明以镜面反射为主。相比之下，周期狭缝呈现出明显的非对角分量，对应于多方向散射。

5 数值实验II：使用波数域声学导纳进行声场仿真

5.1 仿真条件

本节将上一章估计得到的波数域声反射系数转换为导纳表示，并将其纳入边界元法（BEM），以评估声场再现性能。本文比较了两种边界元法:

(i) 传统边界元法，其中平板和狭缝反射体均进行详细的显式网格划分；以及 (ii) 所提出的边界元法，其中仅对平面表面进行网格划分，并将波数域导纳作为边界条件施加。

反射面的位置设定为其上边界对应于 $z = 0$ m。在 (x, y, z) =(0 m, 0 m 0.4 m) 处放置了一个单极子声源，以激发频率为 3400 Hz 的稳态声场。

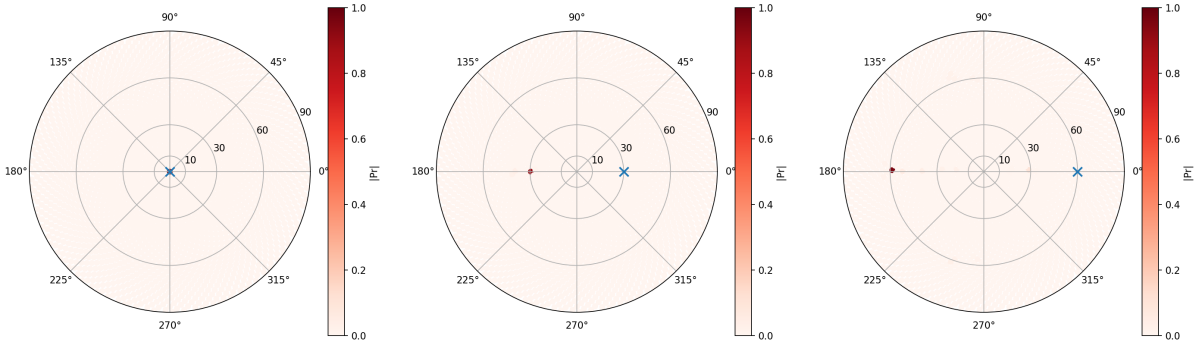
在传统边界元法中，采用约 30 mm 的网格尺寸对反射体几何形状进行离散后，平板包含 5,830 个边界单元，狭缝反射体则包含 15,180 个单元。相比之下，所提出的边界元法仅使用包含 5,830 个单元的平面网格；即使在狭缝条件下也使用相同网格，同时施加上一章估算的波数域导纳。

在两个相互正交的横截面（$x = 0$和 $y = 0$）上，对 1.5 m $\times$ 1.0 m 区域内的声压进行评估，观测点间距为 0.05 m。声速设为$c = 343.5$m/s。

5.2 结果

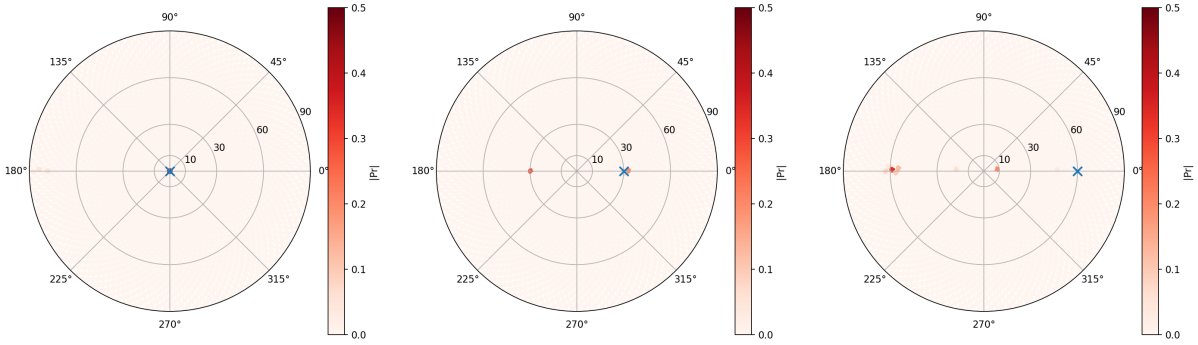
图5比较了采用传统边界元法和所提出的边界元法，在平坦边界条件和狭缝边界条件下得到的总声场（入射声场 + 反射声场）幅值分布。

对于平板　　条件下，两种方法产生的声场几乎完全一致，表明　　-



$\theta_{\mathrm{i}} = 0°$ $\theta_{\mathrm{i}} = 30°$ $\theta_{\mathrm{i}} = 60°$

(a) 平板



$\theta_{\mathrm{i}} = 0°$ $\theta_{\mathrm{i}} = 30°$ $\theta_{\mathrm{i}} = 60°$

(b) 周期狭缝

图4：使用估计的 C_{r} 计算得到的重建反射指向性图 $|P_{\mathrm{r}}|$。蓝色叉号表示入射方向。

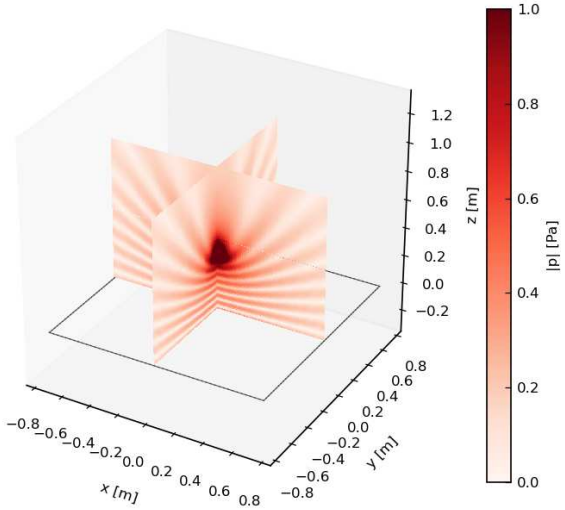
镜面反射得到了高精度再现。在狭缝条件下，由开口引起的衍射和干涉形成了高度复杂的散射场。所提出的边界元法能够成功重构这些特征，其精度与传统边界元法相当。

通过计算余弦相似度和相对于传统边界元法结果的均方误差 (MSE)，进行了定量比较。对于平板情形，相似度为 0.982，均方误差为 5.73×10^{-3}。对于狭缝情形，相似度为 0.981，均方误差为 5.74×10^{-3}。这两项结果均表明吻合度极高。

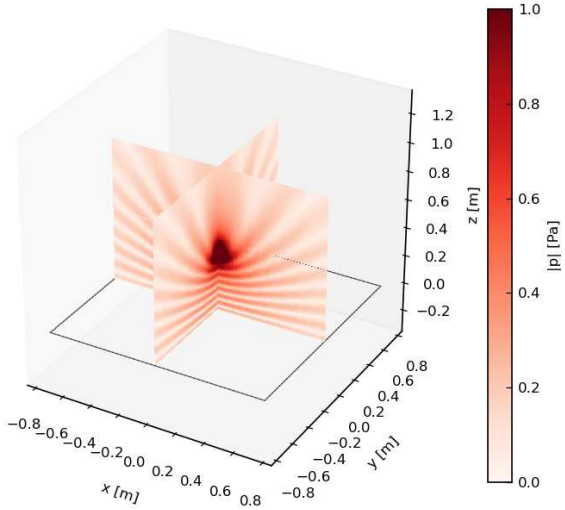
特别值得注意的是，所提出的边界元法仅需使用少得多的边界单元，便达到了这一精度。传统边界元法在平板情形下需要 5,830 个单元，在狭缝几何形状下需要 15,180 个单元；而所提出的方法仅使用包含 5,830 个单元的简单平面网格，便再现了狭缝引起的衍射和散射。该网格与平板情形所用网格完全相同。

这证明了通过估算的波数域导纳来外部设定散射行为是有效的，而无需对精细的几何细节进行显式网格划分。

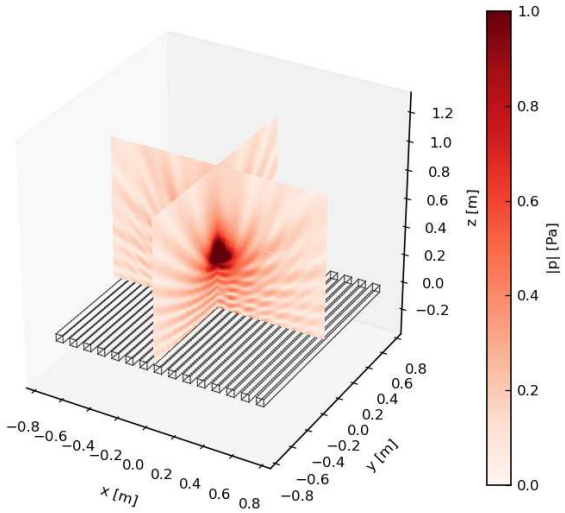
这些结果证实，所提出的基于波数域导纳的边界元法能够以与传统完整几何边界元法相当的精度再现声场，同时将单元数量减少一半以上。



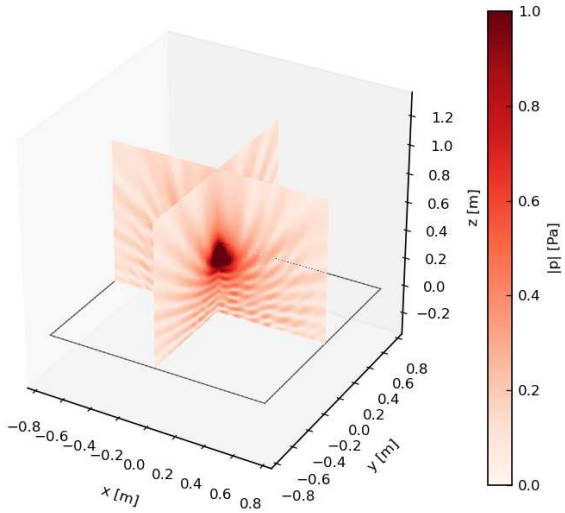
(a) 传统边界元法（完整几何网格，平板）



(b) 所提出的边界元法（仅表面网格，平板）



(c) 传统边界元法（完整几何网格，狭缝）



(d) 所提出的边界元法（仅表面网格，狭缝）

图5：传统的基于几何的边界元法与所提出的基于表面的边界元法所得总声压幅值分布的比较。考虑了两种边界条件：平板和狭缝结构。传统边界元法对平板采用5,830个边界单元，对狭缝几何形状采用15,180个单元；而所提出的方法仅使用包含5,830个单元的平面网格，即可重现这两种情况，获得与完整几何边界元法预测结果相当的声场。

6 结论

本研究引入了一种波数域声反射系数 C_r ，并将其表述为一种线性算子，用于表示声学边界处具有方向依赖性的反射与散射行为。通过专注于边界处入射与反射波分量之间的关系，所提出的框架无需显式建模材料的内部结构，即可对反射现象进行宏观描述。

我们开发了一种估计框架，通过空间傅里叶变换，从多源多接收器声压数据中提取入射声场和反射声场的方向谱，并直接根据这些方向谱估计反射矩阵 C_r 。尽管稀疏性促进求解器对结构化或周期性边界可能具有优势，但该表述本身不依赖于特定的估计算法。

估计得到 C_r 后，可将其转换为波数域声导纳，并作为非局部边界条件纳入传统边界元法表述中。这样无需显式对精细几何特征进行网格划分，即可进行声场分析，并直接在边界处施加复杂的反射和散射特性。

三维边界元法验证表明，所提出的方法能够准确再现平板的镜面反射，以及周期性狭缝结构的多方向散射。所得声场与采用几何解析边界元法得到的结果高度吻合，同时显著降低了建模复杂度。

与针对每个入射角分别定义的传统标量反射模型不同，所提出的矩阵值表述能够在统一框架下同时捕捉方向依赖性和散射诱导耦合。未来的工作将聚焦于真实材料的实验估计，以及向更复杂声学边界的扩展。

致谢

本研究获得JSPS KAKENHI资助项目编号JP24K03222的支持。

参考文献

[1] D. L. Johnson、J. Koplik 和 R. Dashen，《流体饱和多孔介质中的动态渗透率与曲折度理论》，《流体力学杂志》，1987年。[2] Y. Champoux 和 J.-F. Allard，《空气饱和多孔介质中的动态曲折度与体积模量》，《应用物理学杂志》，1991年。[3] M. A. Biot，《流体饱和多孔固体中的弹性波传播理论：I. 低频范围》，《美国声学学会杂志》，1956年。[4] M. A. Biot，《流体饱和多孔固体中的弹性波传播理论：II. 高频范围》，《美国声学学会杂志》，1956年。[5] M. S. Kushwaha、P. Halevi、L. Dobrzynski 和 B.Djafari-Rouhani，《周期性弹性复合材料声学能带结构理论》，《物理评论B》，1993年。[6] J.-P. Groby、W. Dante 和 C. Depollier，《用于吸声与隔声的声学超多孔板》，《美国声学学会杂志》，2011年。[7] M. Tamura，《斜入射反射系数测量的空间傅里叶变换方法。I：理论与数值示例》，《美国声学学会杂志》，1990年。[8] M. Tamura、J.-F. Allard 和 D. Lafarge，《斜入射反射系数测量的空间傅里叶变换方法。II：实验结果》，《美国声学学会杂志》，1995年。

[9] S.Hoshika、T. Iwami、A. Omoto 和 S. Sugie，《利用多点脉冲响应和空间傅里叶变换进行声反射角谱估计》，《声学科学与技术》，2025年。[10] S. Hoshika、T. Iwami 和 A. Omoto，《基于波数域导纳的声散射特性数值建模》，INTER-NOISE 2024 论文集，2024年。[11] E. G. Williams，《傅里叶声学》，学术出版社，1999年。[12] P. M. Morse 和 K. U. Ingard，《理论声学》，普林斯顿大学出版社，1986年。[13] J.-F. Allard 和 N. Atalla，《多孔介质中的声传播》，威利出版社，2009年。[14] A. J. Burton 和 G. F. Miller，《积分方程方法在若干外部边值问题数值求解中的应用》，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》，1971年。[15] S. Kirkup，《声学中的边界元法》，Whittles 出版社，1998年。[16] R. Tibshirani，《通过最小绝对值收缩和选择算子进行回归收缩与选择》，《皇家统计学会杂志 B 辑》，1996年。