arXiv:2601.07482v1 [cs.DS] 12 Jan 2026

秘　书问题：基于预测并采用指定顺序

r

HeliaKarisani[1], Mohammadreza Daneshvaramoli[1], Hedyeh Beyhaghi[1], Mohammad Hajiesmaili[1],和 Cameron Musco[1]

[1]马萨诸塞大学阿默斯特分校，{hkarisani，mdaneshvaram，hbeyhaghi，hajiesmaili，cmusco}@cs.umass.edu

摘要

我们研究了 Fujii 和 Yoshida（2023年）近期提出的一种学习增强型秘书问题变体。在该变体中，决策者可以提前获得机器学习生成的候选值预测。关键挑战在于平衡一致性 与鲁棒性：预测准确时，算法应聘用接近最优的秘书；而预测不准确时，算法仍应达到有界的竞争比。

我们同时研究标准的随机顺序秘书问题（*ROSP*），其中候选人以均匀随机顺序到达；以及学习增强环境下一个更自然的模型，在该模型中，决策者可以根据预测的候选值选择到达顺序。我们将这个模型称为选择顺序秘书问题（*COSP*），它可以描述由决策者安排面试日程等场景。

我们提出了一种同时适用于 ROSP 和 COSP 的新颖算法。在 Fujii 和 Yoshida 方法的基础上，当观察到预测出现大偏差时，我们的方法会从完全信任预测切换为基于阈值的规则。重要的是，与 Fujii 和 Yoshida 的算法不同，我们的算法将随机化作为其决策逻辑的一部分。我们证明，如果 $\epsilon \in [0,1]$ 表示最大的乘法预测误差，那么对于 ROSP，我们的算法可达到竞争比 $\max\left\{0.221,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$，优于 Fujii 和 Yoshida [FY23]给出的此前上界 $\max\left\{0.215,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$。对于 COSP，我们的算法可达到 $\max\left\{0.262,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$. 这超过了适用于 Fujii 和 Yoshida 方法的最坏情况竞争比 0。25 上界，并且更接近经典秘书基准 $1/e \approx 0.368$；该基准是任何算法的上界。我们关于COSP 的结果凸显了在在线决策中将预测与到达顺序控制相结合的益处。

1 引言

秘书问题由 Gardner 在其 1960年《科学美国人》专栏 [Gar60], 中推广开来，是在线决策领域研究最为广泛的问题之一。在经典设定中，候选人以均匀随机顺序到达。当一名候选人到达时，决策者会观察到该候选人的一个实值分数，并且必须立即且不可撤销地决定聘用或拒绝该候选人。经典目标是最大化从序列中选中最佳候选人的概率。或者，也可以旨在最大化被选中候选人的期望价值——我们将重点讨论这一变体。秘书问题及其众多变体已得到广泛研究 [KL15, AL19, BIKK07, BGSZ20, BJS14], ，并已应用于资源分配 [BIKK07]和机制设计 [Kle05]等领域。

尽管已有这些研究，秘书问题的基本假设——即决策者在候选人到达之前对其价值一无所知——往往并不符合现实。在实践中，决策者通常会在面试候选人之前对其价值有所估计。例如，在招聘应用中，这些预测可能基于简历、作品集或公众声誉。事实上，利用此类信息做出面试和招聘决策的机器学习方法在业界十分普遍 [AGKK20b, SZ24, RBKL20, RB18, Che23, MAB23, MASSAA19, SGIV23, SBS+21, MAB23]。

鉴于此，近期有多项研究探讨了秘书问题的变体，其中决策者可以获取预测，包括对候选人中最大值的估计 [AGKK20a] ，或对之后是否会出现更强候选人的概率预测 [BP23]。本文聚焦于 Fujii 和 Yoshida [FY23], 提出的一种变体：决策者可以事先获得对每位候选人价值的预测 $\hat{}v_i$ v_i $i \in [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$。他们为该模型设计了一种算法：等待选择预测值最高的候选人，除非任何观测值与其预测偏差过大；在这种情况下，算法便转而采用 Dynkin 的经典最坏情形 $1/e$竞争策略 [Dyn63]。

将 竞争比 定义为：对于候选值的所有可能赋值，算法所选候选人的期望价值与实际最优候选人价值之比的最坏情况。Fujii 和 Yoshida [FY23]证明，他们的算法实现了 max $\left\{0.215, \ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$ 的竞争比，其中 $\epsilon = \max_i \left|1 - \frac{\hat{}v_i}{v_i}\right|$ 表示所有候选人的最大乘法预测误差。他们的结果表明，如果预测准确（即 $\epsilon \to 0$），算法的性能就会趋近于最优（即算法是一致的）；否则，它能保证最坏情况下的常数因子近似（即算法是稳健的）。

1.1 我们的贡献

我们在 Fujii 和 Yoshida 的方法基础上，做出了以下主要贡献：

带预测的选定顺序秘书问题（COSP）。Fujii 和 Yoshida 只关注经典设定，即候选人按照均匀随机顺序到达。我们称

这种设定为随机顺序秘书问题（*ROSP*）。然而，当候选值的预测可预先获得时，自然可以利用这些预测来调整候选人的到达顺序。例如，在招聘应用中，面试顺序通常由决策者设定，并且可能根据可用的预测来选择。为描述这种设定，我们引入选定顺序秘书问题（*COSP*），其中决策者可以完全控制候选人的到达序列。COSP 类似于先知不等式中已有的选定顺序设定，在这些设定中，每位候选人价值的分布均可预先获知 [Hil83, BC23, PT22]。然而，与经典秘书问题一样，COSP 从根本上是最坏情况模型，不对输入作任何随机性假设。

改进的 COSP 界限。我们借鉴 Fujii 和 Yoshida [FY23] 的方法，为 COSP 设计了一种简单的算法。直观而言，人们或许会认为，按照预测值从高到低的顺序面试候选人是最优的。然而，很容易构造出简单的最坏情形实例，使这些相关策略失效。相反，我们的算法只有限度地利用 COSP 的优势：令 $\hat{} i \in [n]$ 为预测值最高的候选人，我们将 $\hat{} i$ 放在到达序列中的固定位置，并对所有其他候选人的顺序进行随机化。我们优化 i 的位置，以实现最大的竞争比。

固定面试顺序后，我们的算法与 Fujii 和 Yoshi 的算法类似。算法首先以预测信任模式运行，等待招聘 i，即预测值最高的候选人。如果遇到真实值与其预测值显著偏离的候选人（即超过指定的误差阈值），算法就会切换到 Dynkin 的经典阈值算法 [Dyn63]。该算法会忽略固定比例的候选人，然后招聘它所遇到的第一个（如果存在）优于所有被忽略候选人的候选人。关键在于，我们修改了 Fujii 和 Yoshida 的方法：如果算法处于 Dynkin 模式时本应招聘 i，我们并不总是将其招聘。我们引入两个参数 γ 和 δ，用于确定在不同情形下招聘 $\hat{} i$ 的概率；通过调整这些参数，我们能够获得更大的竞争比。

我们证明，我们的算法稳健且一致，竞争比至少达到

$$\max\left\{0.262,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\},$$

回顾一下，ϵ 是最大的乘法预测误差。与 Fujii 和 Yoshida 的算法一样，我们的方法不需要将 ϵ 作为输入。当 $\epsilon \to 0$时，竞争比趋近于 1；当 ϵ 较大时，竞争比仍不低于 0.262。重要的是，我们关于 COSP 的结果超过了 Fujii–Yoshida 算法在随机顺序模型中的分析所得到的 0.25 上界。[1]

[1]Fujii 和 Yoshida 证明，在随机顺序情形下，如果决策者只能看到候选者的到达顺序（而看不到其确切的随机到达时间），且决策算法是确定性的，那么上界为 0.25。通过利用到达顺序控制和随机化，我们的算法突破了这一界限。讨论请见第5节。

ROSP 的改进界。 我们证明，我们的方法也适用于经典的 ROSP ˆ 设置。在该设置中，我们不再优化最佳预测候选人 i 的到达时间，而是对该时间的均匀随机选择取平均。在这种情况下，通过优化参数 γ和 δ，我们可以证明，我们的算法达到至少为

$$\max\left\{0.221,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\},$$

优于 Fujii 和 Yoshida [FY23] 先前给出的上界 $\max\left\{0.215,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$。与 COSP 设置一样，该算法不需要将 ϵ 作为输入。我们的最坏情况竞争比更加接近 0。33 这一上界； [CL24] 证明，任何求解 ROSP 的一致性算法都满足这一上界。然而，已知最佳上界与下界之间仍存在显著差距。

1.2 技术概述

现在，我们概述针对 COSP 和 ROSP 提出的改进算法背后的关键思路。全文中（详情见第 2 节），我们假设采用连续到达模型，即每位候选人 $i \in [n]$ 都会在某个时刻 $t_i \in [0,1]$ 到达。在 ROSP 中，t_i 独立且均匀随机地选取。在 COSP 中， t_i 由算法设定。

带预测的秘书问题中，一致性的核心要求是：如果预测值最高的候选人 i 在观察到任何预测偏差较大的候选人之前到达，那么算法就必须录用该候选人。否则，如果最终所有预测都准确（即 $\epsilon \approx 0$），算法可能不会录用价值最高的候选人（$v^* \approx \hat{} v$），因此无法获得有竞争力的竞争比。

—

Fujii 和 Yoshida 的算法 [FY23] 基于这一原则。它首先进入预测模式，ˆ在该模式下，算法计划在 i 到来时聘用其候选人，并忽略此前的所有候选人。然而，如果算法在观察到 i之前，遇到一位观察值与预测值相差甚大的候选人——我们称之为“错误”或“预测误差”——它就会放弃基于预测的策略，切换至秘书模式，并采用 Dynkin [Dyn63] 的经典阈值算法。该算法提供最坏情形下的 $1/e$-竞争性保证，这是最坏情形下所能达到的最佳保证。

Fujii 和 Yoshida [FY23] 的工作面临的主要技术挑战，在于分析其算法在大 ϵ 情形下的最坏情况竞争比。一旦算法切换到 Dynkin规则，其后续表现便会复杂地取决于触发切换的候选人的时机与身份，以及其余候选人的到达时间。为了建立鲁棒性保证，他们进行了详细的分类讨论，考虑了预测中的最优候选人和实际最优候选人可能处于的所有位置，以及所有预测误差较大的候选人的到达情况。最终，他们证明，在大 ϵ 情形下，其算法的竞争比为 0.215。请注意，这里的一个自然上界是 $1/e \approx 0.368$ ——如果事先知道会出现显著的预测误差，并从一开始就遵循 Dynkin规则，便可达到这一上界。此外，在随机顺序模型中，任何算法若要

保持一致——也就是说，在预测准确时达到趋近于 1 的竞争比——其鲁棒性就不能超过 0.33；这可由 ROSP 的上界 [CL24] 推出。此上界适用于在随机到达条件下运行的一致性算法，但 COSP 是否也存在类似限制，目前尚不清楚。

ˆ固定 i 的到达时间。有趣的是，在 Fujii 和 Yoshida 的分析中，预测值最高的候选人 i 的到达位置 ˆ 对竞争比有显著影响。这一观察 ˆ 促使我们关注 COSP，尤其是策略性地固定 i 的到达时间。为 ˆ 说明这一点，假设我们将 i 的到达时间固定为 $\beta \approx 0$，并让其他所有候选人的到达时间保持均匀随机。对手可以将除实际最优候选人 i^* 之外的所有预测都设为正确，ˆ 而低估这位候选人。以概率 β，这位候选人在 i 之前到达，触发切换至 ˆ 秘书模式，并被跳过。以概率 $1-\beta$，算法在看到 i^* 之前就聘用了 i。无论哪种情况，竞争比都会趋近于零。另一方面，如果 $\beta \approx 1$，对手ˆ ˆ 可能会高估 i，导致算法跳过所有更早到达的候选人，转而选择 i，而成功概率仅为 $1-\beta$——同样接近于零。因此，将 $\beta = 0$ 或 $\beta = 1$ 设为固定值可证明是次优的；我们转而对 β 进行优化，以找到一个能平衡这些权衡并使竞争比最大化的值。我们指出，与确定性地固定 i 的到达时间 βˆ 不同，对该到达时间采用某种分布或许能进一步提升性能。不过，我们将这一可能性留待未来研究。我们猜想，控制除 ˆi 之外的候选人的到达时间（而非仅仅将其随机化）无法显著改善我们的界限；不过，这个问题同样留待未来研究。

ˆ ˆ调整招聘的概率 i。遗憾的是，仅仅优化 i 的到达时间，并直接应用 Fujii 和 Yoshida [FY23] 的算法，可能会失败。回想一下，Dynkin 最坏情况算法会忽略阈值时间 τ 之前的所有候选人，然后招聘首位在 τ 之后到达且优于此前所有候选人的人。如果我们设定 $\beta < \tau$，而ˆ最高预测候选者 i 实际上是实际最优候选人，但其预测值与真实值ˆ相差很大，那么算法会在该候选人到达时切换到秘书模式，并拒绝 i，因为它在 τ 之前到达。这可能导致竞争比接近于零。反过来，如果我们固定 $\beta > \tau$，考虑这样一种情形：预测值与真实值之间没有偏差，唯一的例外是 i 被预测为最佳候选人，但实际上它只是第二佳候选人（且远逊于最佳候选人）。如果实际最优候选人 i^* 在 β 之前到达，它会被忽略，因为算法仍处于预测模式。如果它在 β 之后到达，算法就已经选中了 i，因为在 τ 之后切换到秘书模式时，i 会是已见候选人中最佳的。再次，我们得到的竞争比接近于零。

为解决上述问题，我们设定 $\beta > \tau$，但修改算法，使其不再总是在 i 是第一个错误且迄今为止观察到的最佳候选人时录用 i。相反，我们引入参数 γˆ，指定在这种情况下录用 i 的概率。此项修改确保算法在盲目信任 i可能导致糟糕结果的情况下，仍保有灵活性。优化

γ 使我们能够避免确定性失败，同时在其他情形下保持良好的性能。

ˆ 我们引入第二个参数 δ，用于处理 i 并非第一个被观察到的错误的情形。在这种情况下，使用相同的录用概率 γ 并不合理，因为情境有所不同：算法已经观察到一个或多个错误，并在看到 ˆ ˆi 之前切换到了秘书模式。i 真正达到最优的可能性，可能高于或低于它是第一个错误时的情形，因此我们允许使用单独的录用概率 δ。这一额外的自由度使我们能够进一步优化算法的行为。

与 Fujii 和 Yoshida 的工作类似，一个关键的技术挑战是分析算法面对所有可能的对抗性输入时的竞争比。这需要考虑真实的最佳候选人 i^*、预测值最高的候选人 i，以及所有大偏差候选人的位置可能出现的每一种配置。与他们的分析一样，这会引出细致的情形分解。沿用他们的记号，设 M 为大偏差候选人的集合，并令 $m = |M|$。我们通过将高偏差集合 M 中各成员的真实值与真实的最佳预测候选人 i 的真实值进行比较，进一步细化其结构。具体而言，我们定义

$$m_2 \;=\; \big|\{\, i \in M : v_i < v_{\hat{i}} \,\}\big|, \qquad m_1 \;=\; m - m_2,$$

ˆ 因此，m_2 统计真实值小于 i真实值的“错误”数量。尽管这两个量都有明确的定义，但只有 m_2 会影响我们的竞争比界。此外，我们定义

$$k \;=\; \big|\{\, i \in [n] : v_i > v_{\hat{i}} \,\}\big|,$$

ˆ 该值表示真实值高于预测最佳候选人 i的候选人数。ˆ 参数 k 刻画了对手相对于 i安排了多少名真实表现更好的候选人，因此会直接影响算法在预测模式下的最坏情况行为。

这些参数使我们能够将分析细分为更精细的子情形，每种子情形都对应一种独特的对抗结构。随后，我们对 β、 γ和 δ 进行优化，以求得最坏情况竞争比。

尽管一般性有所增强，该算法仍保留了便于分析的简单结构。通过根据参数精心组织各个情形，我们得以数值计算最坏情况竞争比。通过这一分析，我们得到了 COSP 的可证明下界 max $\left\{0.262,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$，这表明调整 β、 γ和 δ具有益处。

扩展到 ROSP。在 COSP 设置中，对于每个固定的 β，我们先评估所有对抗性配置下的竞争比，然后针对该固定的 β 优化参数 γ 和 δ。接着再对 β 进行优化，以得到最终的 COSP 界。

然而，在 ROSP 设定中，ˆi 的到达时间本身是 $[0, 1]$, 中的一个均匀随机变量，算法无法选择该时间。因此，分析必须先对 $\beta \sim \mathrm{Unif}[0, 1]$ 上的竞争比取期望。然后，我们针对这一新的竞争比目标优化参数 γ 和 δ，

从而得到下界

$$\max\left\{0.221,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\},$$

略微改进了先前界 [FY23]。

ˆ为何只选择到达 i 的时机并在到达时做出决策? 一个自然的问题是，引入额外参数——例如，调整算法遇到预测值第二高或第三高的候选人时的行为——能否进一步提升鲁棒性。我们的分析以及 [FY23], 的结构表明，这种可能性不大：在所有决定最坏情况竞争比的对抗性情形中，唯一关键的决策时点是算法遇到ˆi 或首次出现错误（偏离预测）但仍遵循经典秘书规则之时。除非较低预测值的候选人是错误（偏离预测），否则他们绝不会对这些最坏情况配置产生实质影响。相比之下，在目标是选出前 $k > 1$ 名个体，或允许接受多个高价值候选人的秘书问题变体中，控制多个预测值最高的候选人的到达时间确实可能有所助益。开发此类多候选人调度策略是未来一个值得探索的方向。

1.3 相关工作

经典及变体秘书问题。 经典秘书问题由 Gardner [Gar60] 及其他学者 [Dyn63, GM66, Lin61, EHLM20, LMM21, KNR20, CCF+21, SG23, CSZ21, ACK18], 推广开来，启发了在线算法、经济学和决策理论领域中一系列广泛而影响深远的研究。研究者探讨了许多扩展形式，包括多重选择变体 [Kle05], 、拟阵和背包约束 [BIK07], 、在线匹配以及图拟阵／横截拟阵 [KP09], 、基数约束和装箱约束下的子模目标 [KT17], ，以及整数规划装箱问题等结构化可行性系统 [AGMS21]。关于随机顺序模型下研究成果的更全面综述，请参阅 Gupta 和 Singla 的综述文章 [GS21] 。

带预测的秘书问题。 近期工作将预测纳入秘书问题，以提升性能。在我们采用的模型中，每位候选人都带有一个预测值 ˆv_i ，用于估计其真实值 v_i，如 [FY23, CL24] 所示。其他形式的预测反馈包括二元比较 [BP23], 、关于候选人质量的概率信号 [MLM23, DLPLV21], 、对最佳候选人的单次预测 [AGKK20a], ，以及对最佳候选人与第 k 佳候选人之间价值差异的预测 [BS24]。一些工作研究了能够确保公平性的算法：即使在有偏预测下，也能保证以恒定概率接受最佳候选人 [BMM24]。此外，Amanatidis 等人 [AMS+25]在在线预算可行机制设计环境中，运用与秘书问题相关的技术，研究了带预测的价值最大化问题。

先知不等式与次序选择。 先知不等式是最优停止理论中的经典模型，可以视为秘书问题的随机版本。决策者观察一系列从已知分布中抽取的值，并旨在与事后选择最大值的基准进行竞争。经典结果保证了一个 $1/2$竞争比 [KS78, SC84], ，这一结果推动了理论计算机科学和经济学领域的大量研究；相关综述可参见 [HK92, Luc17, CFH+19]。人们研究了许多变体，包括对抗顺序模型 [KS78], 、随机顺序（先知秘书）模型 [EHLM15], ，以及次序选择（自由顺序）模型 [Hil83]。该模型与我们的选定顺序秘书问题（COSP）尤其相关，在后者中，到达顺序由预测候选项的预测值决定。次序选择模型中的相关工作包括 [CHMS10, BGL+21、PT22、BC23]。直观而言，先知不等式描述了类似的情形：决策者预先掌握有关候选值的信息；然而，它们基于随机性假设（值从已知分布中抽取），而我们的设定则完全采用最坏情形，不作任何分布假设。有趣的是，直到最近，人们仍不清楚次序选择模型与随机到达模型在先知不等式中所能达到的竞争比是否存在差异。如今，先知不等式中的这一差异已经得到证实 [BC23], ，但在我们的设定中，两者的关系仍未解决：随机到达变体（ROSP）的最佳上界目前超过了次序选择（COSP）已知的最佳竞争比。

带预测的学习增强算法与在线算法。越来越多的研究关注带预测的学习增强在线算法：这些算法利用预测指导在线决策，同时不牺牲最坏情形下的鲁棒性。典型例子包括缓存 [LV18, Roh20, Wei20],、滑雪租赁问题 [PSK18, GP19, WZ20, DKT+21]、在线调度 [LLMV20], 以及度量任务系统 [ACE+20]。带预测的学习增强方法也已应用于在线原始-对偶方法 [BMS20], 、速度调节 [BMRS20], 、在线竞价 [AGTZ25], 和拍卖 [GST24]。关于全面综述，可参阅 [MV22] 等综述。此外，带预测的学习增强方法也已应用于带预测的在线购买类问题，例如单向交易、在线转换 [aB97, SLH+21、LCS+24], 以及带预测的在线背包问题 [IKMQP21, GLR24, BFL24, DKL+25]。这些问题通常与秘书问题具有相似的结构特征——例如，具有单位大小物品和单位容量的在线背包问题，在随机到达情形下与秘书问题相似。

1.4 论文结构

本文结构安排如下。第 2 节介绍预备知识，并正式定义我们的问题设置和符号。第 3 节研究选定顺序秘书问题（COSP），提出一种竞争比为 $\max\{0.262, \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\}$ 的随机化算法。第 4 节研究随机顺序秘书问题（ROSP），将我们针对 COSP 的算法加以扩展，使其在这一设置下达到 $\max$ —— $\{0.221, \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\}$ 的竞争比。最后，第 5 节考察经典秘书

——

问题与带预测的秘书问题中确定性算法和随机化算法之间的关系，并表明在标准价值最大化表述下，这两种模型具有相同的竞争比。

2 预备知识

我们用 $N = \{1, \ldots, n\}$ 表示候选人集合。本文始终采用连续时间框架，其中每位候选人 i 都被分配一个到达时间 $t_i \in [0, 1]$。在 ROSP 中，每个 t_i 都独立地从 Unif(0，1) 中抽取 [Kle05、Bru84、FNS11]。这会产生一个均匀随机排列的到达顺序。在 COSP 中，决策者选择每位候选人的到达时间 t_i 。请注意，在 ROSP 中，对于任意子区间 $A \subseteq [0, 1]$，候选人 i 在 A 内到达的概率等于该区间的长度。

由于所有到达时间以概率 1 互不相同，连续时间模型等价于这样一种相关模型：候选人只被分配一个到达位置 $[n]$ ——在该模型中，决策者总可以根据候选人的到达顺序，抽取一组随机到达时间并将其分配给候选人。

每位候选人 $i \in [n]$ 都有一个真实值 $v_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，该值在候选人于时间 t_i出现之前对决策者来说始终未知。观察到每位候选人后，决策者必须立即且不可撤销地决定是否选中或拒绝该候选人；一旦选中某位候选人，流程便终止。我们以价值最大化目标评估性能：最大化被选中候选人的期望价值，其中期望是对到达顺序中的任何随机性以及选择算法使用的任何随机性取值。如前所述，性能度量工具是竞争比，即算法的期望奖励与最高真实值之比在所有可能的候选人价值分配中的最坏情况，也就是 $\mathbb{E}[\mathrm{ALG}]/v^*$；其中 $\mathbb{E}[\mathrm{ALG}]$ 表示算法获得的期望奖励， $v^* = \max_{i \in [n]} v_i$ 是所有候选人中的最高真实值，对应于在时间 t^*到达的候选人 i^* 。

除真实值 v_i 外，每位候选人 $i \in [n]$ 都会提前获得一个预测值 $\hat{v}_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ，作为对 v_i 的估计值。我们用 $\hat{i}$ 表示预测值最高的候选人，其到达时间为 $\hat{t}$。令 $\epsilon = \max_{i \in [n]} \left| 1 - \frac{\hat{v}_i}{v_i} \right|$ 表示所有候选人中的最大乘法预测误差。我们将经常用到以下关于预测的误差保证：

$$(1 - \epsilon) v_i \leq \hat{v}_i \leq (1 + \epsilon) v_i \quad \text{for all } i \in [n]. \tag{1}$$

不失一般性地，我们假设预测值和真实值$\hat{}$均具有唯一性；因此，最高候选人 i^* 和最高预测候选者 i 都有明确且唯一的定义。为了处理存在重复值的情形，我们可以对这些值施加轻微扰动，以打破并列值。具体而言，当同一个真实值 v_i 在序列中出现多次时，我们通过添加无穷小偏移量，将每次后续出现的值视为比前一次略大（例如， $v \mapsto v + \eta$，其中 $\eta > 0$ 任意小）。这保证了所有值各不相同，同时确保修改后的值与原始值任意接近。随后，算法相对于这一扰动后的序列具有竞争性；由于扰动后的值与真实值之间的差异至多为

一个无穷小因子，因此所得的竞争性也适用于原始序列。对于预测值$\hat{v}_i$，我们可以采用类似的方法。

3 带预测的选定顺序秘书问题（COSP）

本节分析我们算法的竞争比。首先介绍算法的直观思路，然后定义模型并设定关键参数。接着，我们分析最高预测候选者在固定到达时间 β 下的竞争比。

3.1 算法直观思路

我们介绍适用于 COSP 设置的算法，其中到达顺序会根据预测受到部分控制。具体而言，预测值最高的候选人——记为 $\hat{i} = \arg\max_i \hat{v}_i$——被安排在固定时间 $\beta \in [0,1]$ 到达，即我们设定 $\hat{t} = \beta$；其他所有候选人的到达时间则独立地从 $[0,1]$ 中均匀抽取。

算法分为两种模式：**预测模式** 和**秘书模式**。算法从预测模式开始，在观察到某个候选人 i，且其预测误差满足 $\left|1 - \frac{\hat{v}_i}{v_i}\right| \geq \theta$ 时，切换到秘书模式，这表明预测不可靠（算法 1 第 5 行）。此处，θ 规定了可接受的最大预测误差。算法希望尽可能让更多预测被视为可靠，同时仍保证在所有误差均不超过 θ 时的一致性。

在我们的算法中，如果发生模式切换，算法会在本文记为 t_M 的时刻切换到秘书模式。随后，它会采用 Dynkin规则 的一种变体。这是一种著名的 $1/e$-竞争策略：跳过所有在阈值时间 τ 之前到达的候选人，然后招聘此后首位价值高于此前所有已观察候选人价值的候选人。

我们的算法会跳过在阈值时间 τ 之前到达的所有候选人，并选择此后首位价值高于此前所有已观察候选人价值的候选人。如果 $\hat{i}$ 在秘书模式下到达，则会特别处理：若其触发模式切换（即在时间 t_M 到达），则以概率 γ 招聘；若其在模式切换后到达，则以概率 δ 招聘。这些随机化规则确保了算法的鲁棒性，避免过度依赖可能不准确的预测，同时在预测准确时仍能保持较高的性能。此外，当 θ 足够大时，算法 $\hat{}$ 不太可能切换到秘书模式，而更可能招聘 i，依赖预测并招聘 $\hat{}$ 预测值最高的候选人 i。

稍后我们将证明，通过精心选择参数，我们针对 COSP 设置的算法能够达到至少为

$$\max\left\{0.262, \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$$

对于所有最大乘法预测误差为 ϵ的实例。

算法1 COSP 的预测感知秘书算法

要求： 所有 $i \in [n]$ 的预测值 $\hat{v}_i$；阈值参数 $\theta \in [0,1]$, $\tau \in [0,1]$；最高预测候选者的固定到达时间 β；概率 γ，$\delta \in [0,1]$：

1: $\hat{i} \leftarrow \arg\max_{i \in [n]} \hat{v}_i$ ▷最高预测候选者
2: 赋值 $t_{\hat{i}} \leftarrow \beta$；对所有 $i \neq \hat{i}$，令 $t_i \sim$ 服从 Unif(0，1)
3: 模式 ←预测
4: **对**每个候选人 $i \in [n]$，按到达时间 t_i 递增排序**执行**
5: **如果** $|1 - \hat{v}_i / v_i| > \theta$ **且** 模式 $=$ 预测 **则**
6: 模式 ←秘书；$t_M \leftarrow t_i$ ▷首次出现大偏差时触发切换
7: **结束如果**
8: **如果** 模式 =预测 **和** $i = \hat{i}$ **那么**
9: **返回**雇用候选人 i
10: **否则如果** 模式 =秘书 **和** $t_i > \tau$ **和** $v_i >$ 最大值$\{v_j : t_j < t_i\}$ **那么**
11: **如果** $i = \hat{i}$ **和** $t_i = t_M$ **那么**
12: 以概率 γ雇用 i
13: **否则，如果** $i = \hat{i}$ **则**
14: 以概率 δ雇用 i
15: **else**
16: 雇用候选人 i
17: **结束 if**
18: **结束 if**
19: **结束 for**

3.2 竞争比保证

在本小节中，我们通过为算法的竞争比建立一个下界，正式分析该算法的性能。具体而言，我们将分析分为多种情形，并证明对于选定顺序秘书问题（COSP），该算法的最坏情况竞争比至少为 $\max\left\{0.262, \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$。

定理 1. 对于选定顺序秘书问题（*COSP*），带有参数 $\theta = 0.58$, $\tau = 0.37$, $\beta = 0.64$, $\gamma = 0.27$ 和 $\delta = 0.46$ 的算法*1*至少是~~max~~ $\left\{0.262, \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$-竞争的。

证明。遵循 Fujii 和 Yoshida [FY23]，的分情形分析，我们根据高偏差集合 M 的结构将证明分为七种情形。该集合包含所有预测值与实际值偏差超过阈值 θ 的候选人；算法1第 5 行会根据该阈值从预测模式切换到秘书模式。形式上，我们将该集合定义为：

$$M = \left\{ i \in [n] : \left| 1 - \frac{\hat{v}_i}{v_i} \right| > \theta \right\}.$$

我们的情形将考察：具有最高预测值 $\hat{i}$ 的候选人和/或具有最高真实值 i^* 的候选人是否属于 M。此外，我们将 i_M 定义为在 M 中第一个被看到的候选人的索引，并将其到达时间记为 t_M。我们还令 $k = \left|\{i \in [n] \mid v_i > v_{\hat{i}}\}\right|$ 表示真实值高于 $\hat{i}$ 的候选人数量，并令 $m_2 = \left|\{i \in M \mid v_i < v_{\hat{i}}\}\right|$ 表示集合 M 中真实值低于 $\hat{i}$ 的候选人数量。

ˆ 在整个分析中，我们讨论固定到达时间 β（属于 i）满足 $\beta > \tau$ 的情形，因为这与我们对参数 τ、β、γ、δ 进行优化时得到的参数一致（定理 1）。这一重点简化了表述，但下一节将对条件 $\beta > \tau$ 和 $\beta < \tau$ 进行完整分析，以便在所有参数选择下建立保证。我们将每种情形所达到的最坏情况竞争比 $j \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ 记为 $C_j(\cdot)$，其针对对手给定的任意输入集合，其中 $C_j(\cdot)$ 是由对手设定的参数函数（即 m、k、v_i 和 ˆv_i）。情形的排序遵循 [FY23] 中引入的结构。

我们将正式证明，我们的算法在所有情形下都能达到至少为 $\max\left\{0.262,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$ 的竞争比。为使论述清晰，我们将分析中用到的技术引理放在附录中，正文则着重介绍逐一讨论各情形的论证结构。

为条理清晰地展开论证，我们将七种情形分别作为独立部分，分析算法雇用候选人的条件，并推导每种情形下竞争比的下界。

情况 0： $|M| = 0$。在此情形下，所有预测值均落在可接受误差阈值内（即 $\left|1 - \frac{\hat{v}_i}{v_i}\right| < \theta$），因此高偏差集合 M 为空，且算法始终处于预测模式。

这意味着最大乘法预测误差满足 $\epsilon \leq \theta$，并且根据乘法误差保证（方程 (1)），所有预测值均处于 $(1 \pm \epsilon)$ 界限内。

ˆ 由于算法选择 $i = \arg\max_i$ ˆv_i，因此

$$v_i \geq \frac{\hat{v}_i}{1+\epsilon} \geq \frac{\hat{v}_{i^*}}{1+\epsilon}, \tag{2}$$

此外，

$$v_i \geq \frac{\hat{v}_{i^*}}{1+\epsilon} \geq \frac{(1-\epsilon)v_{i^*}}{1+\epsilon}. \tag{3}$$

综合以上不等式可知，竞争比至少为 $\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$。由于 $\epsilon \leq \theta = 0.58$，我们有

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \geq \frac{1-0.58}{1+0.58} > 0.262. \tag{4}$$

因此，在这种情形下，算法的竞争比为 $\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$，至少为 $\max\left\{0.262,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$，如所述，因为 $\epsilon \leq \theta$。

ˆ ˆ**情形 1：** $i = i^* \in M$。此处，最高预测候选者 i 同时也是真实最优候选 i^*，但它位于高偏差集合 M中。算法遇到 M中的首位候选人时切换到秘书模式，而这个候选人可能是也可能不是 i^* 本身。

我们根据 i^* 是否触发模式切换，分析两种子情形：情形 ***(1.1)*** $\beta = t_M$：也就是说，i^* 是 M 中的首位候选人，并且在时间 β 到达。该子情形发生的概率等于 M 中所有其他候选人在 β 之后到达的概率，即 $(1-\beta)^{m-1}$。此外，成功选中 i^* 的概率为 γ，因为 i^* 是第一个

观察到的错误。因此，子情形 情形*(1.1)* 对该情形竞争比的贡献为 $\gamma(1-\beta)^{m-1}$：i^* 是 M 中第一个被观察到的成员，概率为 $(1-\beta)^{m-1}$；在此条件下，算法以 γ 的概率选择它（算法1，第 11 行）。情形*(1.2)* $\beta \neq t_M$：这里，M 中的某个其他候选人在 $\hat{}i$ 之前到达，因此到 i^* 在时间 $\beta > \tau$ 到达时，我们已经处于秘书模式。该子情形发生的概率等于 $1-(1-\beta)^{m-1}$，即 M 中至少有一位候选人在 $\hat{}i$ 之前到达。现在，假设我们处于此子情形，要到达 $\hat{}i$（并接受它），算法必须在 $\hat{}i$ 之前不接受任何人。只要区间 $[0,\beta)$ 中的最佳候选人在 τ 之前到达，就足以（但并非必要）满足这一条件，因为这样在它之前就不会有人被录用。该情况发生的概率为 τ/β。此外，根据算法 1 第 13 行，$\hat{}$算法以 δ 的概率接受 i。值得一提的是，$[0,\beta)$ 中的最佳候选人在 τ 之前到达这一事件，与M中的候选人在 $\hat{}i$ 之前到达这一事件相互独立，因为 M 中在 β 之前到达的候选人也均匀分布于 $[0,\beta)$。结合这两种子情形

, 情形 1 中，任意 m 的竞争比下界为:

$$C_1(m,\cdot) \geq \frac{\tau}{\beta}\cdot\delta\cdot\left(1-(1-\beta)^{m-1}\right)+\gamma\cdot(1-\beta)^{m-1}. \tag{5}$$

情形 2：$\hat{} \; i = i^* \notin M$。在此条件下，最高预测候选者 $\hat{}i$ 也是真正的最优候选人 i^*，且对它的预测足够准确，因此它不属于高偏差集合M。算法在观察到 i^* 之前，可能已经进入秘书模式，也可能尚未进入，这取决于 M 中是否有其他候选人更早出现。

为了在此情形下得到悲观的下界，我们假设 $i^* \in M$，尽管根据情形 2 的条件，我们知道 $i^* \notin M$。这一假设会降低招聘 i^* 的概率。如果算法在看到 i^* 时已经处于秘书模式，那么无论 $i^* \in M$ 与否，都不会产生影响——选择行为和概率都相同（参见算法 1 第 13 行）。但是，如果 i^* 到来时算法仍处于预测模式，那么：（1）如果 $i^* \notin M$，算法会确定性地选择它。（2）如果 $i^* \in M$，算法不会立即选择它，而是转入秘书模式，在该模式下，它只有概率为 $\gamma \leq 1$ 时才会被选中。因此，悲观假设 $i^* \in M$ 会降低招聘 i^* 的概率；由此可知，其结果始终优于上文所述的情形 *1*，其中 M 中多了一个候选人:

$$C_2(m,\cdot) \geq C_1(m+1,\cdot). \tag{6}$$

$\hat{}\hat{}$ **$\hat{}$情况3：$i \neq i^*$，$i \in M$，$i^* \in M$**。在这种情形下，最高预测候选者 i 和真实最优候选 i^* 都属于高偏差集合 M。我们通过情形 4 给出该情形的下界，其中 $\hat{}i \neq i^*$、$\hat{}i \in M$ 和 $\hat{}\; i \notin M$。这两种情形之间唯一的区别是，这里 $i^* \in M$。我们进一步根据 t^* 是大于还是小于 β，将此情形分为两个子情形进行分析。

情形*(3.1)*：如果 $t^* > \beta$，当 i^* 到达时，算法已经处于秘书模式，因为 $\hat{}i$ 在时间 β 到达，而该时间属于集合 M，所以 $i^* \in M$ 与否不会影响其录用资格。该算法

当 i^* 是截至目前所见的最佳候选人，并且在算法1第 16 行中尚未选出更优候选人时，选择 i^* 。

情形*(3.2)*：如果 $t^* < \beta$，那么要使 i^* 被选中，算法必须在时间 t^* 或之前已经进入秘书模式。当 $i^* \in M$ 时，它本身就能触发模式切换。然而，如果 $i^* \notin M$，则只有在 M 中的另一个候选人更早出现时，它才可能被选中。因此，在所有情形下， $i^* \notin M$ 被选中的概率都不高于 $i^* \in M$ 时的概率。

因此，情形3不比少一个成员的情形4更难（因为从 M 中移除 i^* ，从而使其规模减少1），由此我们得出，对于固定的 m，这两种情形的最坏情况竞争比满足以下关系：

$$C_3(m, \cdot) \geq C_4(m-1, \cdot).$$

情形 4：$\hat{} \; i \neq i^*$，$\hat{}i \in M$，$i^* \notin M$。在此条件下，最高预测候选者 $\hat{}i$ 属于高偏差集合 M，而真实最优候选 $i^* \notin M$ 的预测是可靠的。因此，算法在预测模式下不会选中任何候选人，并会在遇到首位候选人 $i \in M$ 时切换到秘书模式。我们根据 i^* 的到达时间 t^* 分析两种主要子情形。第一种子情形是 $t^* \in (\tau, \beta)$，第二种则是 $t^* \in (\beta, 1]$）。我们进一步将第二种子情形分为两部分：**(i)** $[0, t^*)$ 中的最佳候选不是 $\hat{}i$；**(ii)** $[0, t^*)$ 中的最佳候选是 $\hat{}i$。综合所有这些子情形的分析，可得情形4的总体竞争比。

情形*(4.1)* 当 $t^* \in (\tau, \beta)$ 时：在这个子情形中，只有当算法在时间 t^* 之前已经切换到秘书模式时，才会考虑 i^* 。这要求 M 中至少有一位候选人在 t^* 之前到达，其发生概率为 $1-(1-t^*)^{m-1}$。此外， $[0, t^*$ 中的最佳候选人在 τ 之前到达也是一个充分（但非必要）条件，因为这样一来，在 i^* 之前就不会有人被录用；这种情况发生的概率为 τ/t^*。与情形 1 类似，这两个概率相互独立，因为 M 中任何在 t^* 之前到达的候选人，也会在 $[0, t^*$ 之间均匀到达。由此得到以下界：

$$C_{4.1}(m, \cdot) \geq \int_{\tau}^{\beta} \left(1 - (1-t^*)^{m-1}\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} \, dt^*. \tag{7}$$

利用引理 5 计算这个积分，可得：

$$C_{4.1}(m, \cdot) \geq \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i}. \tag{8}$$

情形*(4.2)* 当 $t^* \in (\beta, 1]$：在这个子情形中，算法已经看到了 $\hat{}i \in M$，我们将考察在不同条件下是否仍能观察到并选中 i^* 。我们进一步将此情形分为两个子情形：

情形*(4.2.1)* $[0, t^*)$ 中的最佳候选不是 $\hat{}i$：这种情况发生的概率为 $1-(1-t^*)^k$，其中 $k\hat{}$ 是真实值高于 i 的候选人数。要使 i^* 被选中，只需 $[0, t^*)$ 中的最佳候选在 τ 之前到达，发生这种情况的概率为 τ/t^*。与前面的情形类似，这两个事件相互独立，因为知道某个候选人优于官网娱乐

ˆi 先于 t^* 到达这一事实并不会影响所有早于 t^* 的到达均匀分布在$[0, t^*$上的结论）。因此，我们得到以下方程：

$$C_{4.2.1}(m.\cdot) \geq \int_{\beta}^{1} \left(1 - (1-t^*)^k\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} dt^*. \tag{9}$$

利用引理 6 计算积分，我们得到：

$$C_{4.2.1}(m) \geq \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\beta^i}{i}. \tag{10}$$

情形*(4.2.2)* $[0, t^*$中的最佳候选人是 ˆi：在这种情形下，发生的概率为 $(1-t^*)^k$，算法必须在不招聘 ˆi 的情况下到达时刻 t^*，才能使 i^* 被选中。这会导致两种可能的结果：

情形*(4.2.2.1)* M 中除 ˆi 以外的候选人促使算法在 β之前切换到秘书模式：这种情况发生的概率为 $1-(1-\beta)^{m_2}$，其中 m_2 是 M 中数值 ˆ 小于 i的候选人数。此处使用 m_2，因为根据假设，ˆi 是 $[0, t^*$中的最佳候选人，因此 M 中所有数值大于 ˆi 的候选人都必须在 t^*之后到达。此外，还要求 $[0, \beta$中的最佳候选人在 τ之前到达，发生这种情况的概率为 τ/β。在这种情形下，我们在看到 i之前不会选中任何候选人；而当 i 到达时，也不能招聘他，其发生概率为 $1-\delta$（算法 1 第 13 行）。由于候选人在 β 之前到达这一事件，与 $[0, \beta$中的到达顺序均匀分布这一事实相互独立，因此 $[0, \beta$中的任何最佳候选人都会均匀随机地到达。结合陈述 情形*(4.2.2)* 并将这些独立概率相乘，得到：

$$C_{4.2.2.1}(m) \geq \int_{\beta}^{1} (1-t^*)^k \left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta} dt^*. \tag{11}$$

情形*(4.2.2.2)* 候选人 ˆi 本身触发切换到秘书模式：该事件发生的概率为 $(1-\beta)^{m_2}$，而未被录用的概率为 $1-\gamma$。因此，结合 (4.2.2) 中的因子 $(1-t^*)^k$，我们得到：

$$C_{4.2.2.2}(m) \geq \int_{\beta}^{1} (1-t^*)^k (1-\beta)^{m_2}(1-\gamma) dt^*. \tag{12}$$

结合方程 (11) 和 (12)，并利用引理 7 求解积分，我们得到：

$$\begin{aligned} C_{4.2.2}(m) &\geq \int_{\beta}^{1} (1-t^*)^k \left[\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta} + (1-\beta)^{m_2}(1-\gamma)\right] dt^* \\ &= \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta} + (1-\beta)^{m_2}(1-\gamma)\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

结合各子情形中的方程 (8)、(10) 和 (13)，我们得到

此情形的总下界:

$$C_4(m) \geq \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i} \tag{14}$$
$$+ \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\beta^i}{i}$$
$$+ \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[\left(1 - (1-\beta)^{m_2}\right) (1-\delta) \frac{\tau}{\beta} + (1-\beta)^{m_2} (1-\gamma) \right]$$

情形 5：$\hat{} \; i \neq i^*, \; \hat{}i \notin M, \quad i^* \in M$。 在此情形中，最高预测候选者 $\hat{}i$ 是准确的，且不属于高偏差集合 M，而真实最优候选 $i^* \in M$。算法在观察到来自 M 的首位候选人时切换到秘书模式。我们根据 i^* 的到达时间 t^* 以及最佳候选人在 t^* 之前到达的时机来分析结果。

情形（*5.1*） $t^* \in [\tau, \beta]$: 在此子情形中，竞争比取决于 i^* 是否是 M 中的首位候选人，即它是否触发切换到秘书模式。此子情形还可进一步分为两个子情形:

情形（*5.1.1*） $i^* = t_M$: 在此条件下， M 中没有其他候选人在 t^* 之前到达，且 i^* 是在 M 中观察到的首位候选人。在此情形中，算法在 t^* 切换到秘书模式，并立即选择 i^*。这种情况发生的概率为 $(1-t^*)^{m-1}$，因为 M 中所有其他 $m-1$ 位候选人都必须在 t^* 之后到达。

情形（*5.1.2*） $i^* \neq t_M$: 在这种情形下， M 中的某位其他候选人必须先于 t^*到达，导致算法在看到 i^*之前切换模式。要使 i^* 被选中，它必须在切换后到达，且 $[0, t^*)$ 中的最佳候选人必须在 τ之前到达，这一事件发生的概率为τ/t^*。此外， M 中至少有一位候选人在 t^* 之前到达的概率为 $1 - \left(1 - t^*\right)^{m-1}$。因此，这种情形的贡献为 $\left(1 - \left(1 - t^*\right)^{m-1}\right) \cdot \frac{\tau}{t^*}$. 结合两个子情形情形（*5.1.1*）和情形（*5.1.2*），并使用引理 8 求解积分，我们得到:

$$C_{5.1}(m, \cdot) \geq \int_{\tau}^{\beta} \left[\left(1 - (1-t^*)^{m-1}\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} + (1-t^*)^{m-1} \right] dt^*$$
$$= \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i} + \frac{(1-\tau)^m - (1-\beta)^m}{m}. \tag{15}$$

情形（*5.2*） $t^* \in [\beta, 1]$: 这里，最优候选人在预测的最佳候选人之后到达。我们根据 $[0, t^*)$ 中的最佳候选人是否为$\hat{}i$，区分两种子情形。

情形（*5.2.1*） $[0, t^*$中的最佳候选人不是$\hat{}i$: 在这个子情形中，算法在某些有利条件下仍可能考虑$\hat{}i^*$。首先，我们来分析 i 不是 $[0, t^*$中的最佳候选人的概率。这种情况发生的概率为 $1 - (1-t^*)^k$，其中 k是指真实值超过 i的候选人$\hat{}$的数量。现在，在这一事件发生的条件下，必定存在某个候选人先于 β到达 M。已知这一点后，至少有一名候选人先于 β 到达 M 的概率至少为 $1 - (1-\beta)^{m-1}$。这是因为:

ˆ 在 t^* 之前出现一个优于 i 的候选人，只会增加来自 M 的候选人也在 β之前出现的可能性，或者至多使其保持不变。

因此，即使在此条件下，我们仍可以放心地将 M 在 β 之前出现某个候选人的概率下界设为 $1-(1-\beta)^{m-1}$。

最后，为了观察到 i^*， $[0,t^*)$中的最佳候选必须在 τ之前到达，这一事件独立发生的概率为 τ/t^*。因此，综合下界为（可利用引理 9 改写）：

$$\begin{aligned} C_{5.2.1}(m,\cdot) &\geq \int_{\beta}^{1} \left(1-(1-t^*)^k\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} \cdot \left(1-(1-\beta)^{m-1}\right) dt^* \\ &= \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\beta^i}{i} \cdot \left(1-(1-\beta)^{m-1}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

情形*(5.2.2)*： $[0,t^*)$中的最佳候选是 ˆi：在此子情形中，算法必须在秘书模式期间避免选择 $\hat{i}$，才能最终观察到并选择 i^*。这需要满足以下条件：

1. ˆi 是 $[0,t^*)$中最佳候选的概率为$(1-t^*)^k$，其中 k 是真实值大于v_i的候选人数。

ˆ 2. 为使算法在看到 i之前进入秘书模式， M 中值低于v_i 的子集里至少有一个候选人必须在 β之前到达。这一事件发生的概率为1 –$(1-\beta)^{m_2}$，其中 m_2 是此类候选人的数量。

3. 为了避免 ˆ选中 i，算法必须跳过它，这种情况发生的概率为 $1-\delta$.

4. 最后， β 之前的最佳候选必须在 τ 之前到达，这样算法就不会在观察到 ˆi 之前终止。这种情况发生的概率为 τ/β。

综合所有 这些概率后，该情形下的贡献下界为 :

$$\begin{aligned} C_{5.2.2}(m) &\geq \int_{\beta}^{1} (1-t^*)^k \cdot \left[\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta}\right] dt^* \\ &= \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta}\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

对贡献求和 方程（15）、（16）和（17）中情形（5.1）和情形（5.2）的贡献 ,

情形 5 的总竞争比下界为:

$$C_5(m,\cdot) \geq \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i} + \frac{(1-\tau)^m - (1-\beta)^m}{m}$$
$$+ \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\beta^i}{i} \cdot \left(1-(1-\beta)^{m-1}\right)$$
$$+ \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta}\right]. \tag{18}$$

情形 6：$\hat{} \; i \neq i^*$，$\hat{}i \notin M$，$i^* \notin M$。在这种情形下，预测值最高的候选人 $\hat{}i$ 和真实最优候选人 i^* 都不属于高偏差集合 M。因此，算法可能始终处于预测模式，也可能切换到秘书模式，具体取决于 M 中是否有元素在 $\hat{}i$ 之前到达。因此，总体分析综合了情形 *4*（当$t^* \in [\tau, \beta]$时）、情形 *5*（当 $t^* \in [\beta, 1]$ 时）的贡献，以及一个用于计算在预测模式下成功选出的额外项。

情形（*6.1*）：如果算法保持预测模式并聘用 $\hat{}i$，则所有 M 的成员都在 β 之后到达，发生这种情况的概率为 $(1-\beta)^m$。由于 $\hat{} \; i \notin M$，其预测值与真实值之间的倍数因子不超过 ϵ。因此，根据方程 (1)，竞争比至少为 $\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$。所以，该事件对竞争比的贡献为:

$$C_{6.1}(m,\cdot) = (1-\beta)^m \cdot \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}. \tag{19}$$

情形（*6.2*）：如果算法在遇到$\hat{}i$之前切换到秘书模式，那么对i^* 的选择取决于其到达时间 t^*。

情形（*6.2.1*）： $t^* \in [\tau, \beta]$: 此处算法已经处于秘书模式，因此适用与情形 *4*中的方程（8）相同的逻辑:

$$C_{6.2.1}(m,\cdot) \geq \tau \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i}. \tag{20}$$

情形（*6.2.2*） $t^* \in [\beta, 1]$: 此处我们沿用情形 *5*中方程（16）和（17）的分析，其中， m 分别表示 M中的候选人数，而 m_2 表示 M中真实值小于v_i的候选人数。我们得到以下两项贡献:

$$C^{(1)}_{6.2.2}(m,\cdot) \geq \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\beta^i}{i} \cdot \left(1-(1-\beta)^m\right), \tag{21}$$

$$C^{(2)}_{6.2.2}(m,\cdot) \geq \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta}\right]. \tag{22}$$

将情形（*6.1*）、情形（*6.2.1*）和情形（*6.2.2*）的贡献相加，我们得到总体

情形 6 的下界：

$$
\begin{aligned}
C_6(m,\cdot) \geq\ & (1-\beta)^m \cdot \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \\
& + \tau \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i} \\
& + \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\beta^i}{i} \cdot \left(1-(1-\beta)^m\right) \\
& + \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta} \right].
\end{aligned} \tag{23}
$$

通过情形枚举完成证明。回顾一下，对于上文分析的每个结构情形，我们都推导出了一个明确的竞争比表达式 $C_j(m,\ k,\ m_2)$，其参数为整数 m、 k 和 m_2，这些整数描述了对抗实例。算法在给定实例上的整体保证为

$$
C(m,k,m_2) \ = \ \min_{j\in\{0,\ldots,6\}} C_j(m,k,m_2),
$$

我们的目标是证明

$$
C(m,k,m_2) \ \geq \ \max\left\{0.262,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\} \qquad \text{for all } (m,k,m_2).
$$

对所有整数三元组 (m,k,m_2) 直接最小化 $C(m,k,m_2)$ 是不可行的：闭式表达式包含交错和以及诸如 $(1-\beta)^m$ 和 $(1-t^*)^k$ 这样的指数级小项，因此难以对所有整数同时分析这些公式。然而，当 m、 k 或 m_2 足够大时，这些表达式会大幅简化。对于 (m,k,m_2) 的其余较小取值，可以采用类似 [FY23] 的方法，利用有限网格精确计算各情形公式的最小值。

这促使我们采用一种结构化的枚举策略：根据每个变量是较小（至多为 20）还是较大（大于 20），将参数空间划分为八个“区间”。情形 1 对应三个参数都较小的情况，而状态 2–8 则涵盖至少一个参数较大的所有其余组合。

对于较小的取值（m、 m_2、 $k \leq 20$），我们可以利用闭式解精确计算每个 $C_j(m$、 k、 $m_2)$。对于较大的取值，诸如 $(1-\beta)^m$ 这样的项会变得可以忽略不计（例如，对于 $m > 20$ 和 $\beta = 0.64$，有 $(1-\beta)^m < 10^{-4}$），因此可以保守地将其替换为零。这些替换只会降低计算得到的竞争比，因此可以得到有效的符号下界。采用这种方法，验证便可简化为对八个区间进行有限枚举，算法2对此进行了总结。

枚举结果确认，对于所有实例，在使用参数 $\theta = 0.58$、 $\tau = 0.37$、 $\beta = 0.64$、 $\gamma = 0.27$、 $\delta = 0.46$. 时，竞争比至少为 $\max\{0.262, \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\}$

算法2 通过分类讨论证明下界

要求： 公式 C_1，C_4，C_5，C_6 由 $(m,\ k,\ m_2)$ 参数化
要求： 阈值 $T_m = 20, T_k = 20$
要求： 目标下界 $B \leftarrow \max\{0.262, \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\}$
情形 1：所有参数都很小
对于 $m = 0$ 到 T_m **do**
  对于 $k = 0$ 至 T_k **执行**
    对于 $m_2 = \max(0, m-k)$ 至 m **执行**
      $v \leftarrow \min(C_1(m,\ k,\ m_2)\ C_4(m,\ k,\ m_2)\ C_5(m,\ k,\ m_2)\ C_6(m,\ k,\ m_2))$
      断言： $v \geq B$
    结束循环
  结束循环
结束循环
状态 2–8：至少一个参数较大
对 $(m,\ k,\ m_2)$ 的所有大小状态组合（情形 1 除外）**执行**
  代入该区间对应的符号下界
  $L \leftarrow$ 在此区间下的 $\min(C_1,\ C_4,\ C_5,\ C_6)$
  断言： $L \geq B$
结束循环
结论： 所有可接受的 (m, k, m_2) 均满足 $C(m, k, m_2) \geq B$

大参数的符号下界。 下面我们列出在算法2的状态 2–8 中使用的大 m、k 和 m_2 的符号化简（根据 m、k 和 m_2 是小参数还是大参数，将情形分为 8 种，即情形 1 是它们都较小的情况）。我们还需要计算其他情形，因为公式依赖于 m、m_2 和 k，因此需要对它们进行界定。例如，假设公式（5）中的 $m > 20$ 较大，我们可以忽略右侧，而左侧 $(1-\beta)^{m-1}$小于 0.0001，因此左侧将由 $(\tau/\beta) \times \delta \times 0.9999$ 界定；对于公式（7）和其他类似方程，也采用相同的思路。一般而言，在以下公式中，我们将所有较小的数向下取整为 0，并将所有 1 –较小的数取为 0.9999。正如我们所能证明的，这些较小的数都小于 0.0001。同样，对于指数中的其他较大 $m > 20$，相应项趋近于零，因此我们可以将方程简化如下：

对于较大的 $m > 20$:

$$C_1(.) \geq 0.9999 \cdot \frac{\tau}{\beta} \cdot \delta \tag{24}$$

$$C_{4.1}(.) \geq 0.9999 \cdot \tau \cdot \ln\left(\frac{\beta}{\tau}\right) \tag{25}$$

$$C_{5.1}(.) \geq 0.9999 \cdot \tau \cdot \ln\left(\frac{\beta}{\tau}\right) \tag{26}$$

$$C_{6.1}(.) \geq 0 \tag{27}$$

$$C_{6.2.1}(.) \geq 0.9999 \cdot \tau \cdot \ln\left(\frac{\beta}{\tau}\right) \tag{28}$$

下一个参数　　要讨论的参数是 k。与 m 类似，当我们将固定数值提升到　　of

$k > 20$ 次幂时，结果会接近零。

当 $k > 20$ 较大时：

$$C_{4.2.1}(m, .) \geq 0.9999 \cdot \tau \cdot \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \tag{29}$$

$$C_{4.2.2}(m, \text{。}) \geq 0 \tag{30}$$

$$C_{5.2.1}(m, .) \geq 0.9999 \cdot \tau \cdot \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \cdot \left(1 - (1-\beta)^{m-1}\right) \tag{31}$$

$$C_{5.2.2}(m, \text{。}) \geq 0 \tag{32}$$

$$C^{(1)}_{6.2.2}(m, .) \geq 0.9999 \cdot \tau \cdot \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \cdot (1 - (1-\beta)^{m}) \tag{33}$$

$$C^{(2)}_{6.2.2}(m, .) \geq 0 \tag{34}$$

最后一个参数是 m_2，其上界为 m。然而，当 m 较大时，这个参数也可能变大。按照前两部分的相同方法，对 m_2 较大时的方程进行改写，可得：

当 m_2 较大时：

$$C_{4.2.2}(.) \geq \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[0.9999 \cdot (1-\delta) \cdot \frac{\tau}{\beta}\right] \tag{35}$$

$$C_{5.2.2}(.) \geq \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[0.9999 \cdot (1-\delta) \cdot \frac{\tau}{\beta}\right] \tag{36}$$

$$C^{(2)}_{6.2.2}(.) \geq \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[0.9999 \cdot (1-\delta) \cdot \frac{\tau}{\beta}\right] \tag{37}$$

我们还应考虑 m和 k 都较大的情形，并确定要考察哪个公式。值得一提的是，我们不必单独计算 m_2 和k 都较大的情形，因为 m_2 较大意味着 m 也较大，这会充分简化所有方程，使其便于计算。

当 m和 k较大时：

$$C_{5.2.1}(.) \geq 0.9999^2 \cdot \tau \cdot \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \tag{38}$$

$$C_{6.2.1}(.) \geq 0.9999^2 \cdot \tau \cdot \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \tag{39}$$

结合上述所有观察结果应用算法 2，可知所选参数保证了竞争比，因此定理成立。

□

4 带预测的随机顺序秘书问题（ROSP）

现在，我们在随机到达设定下分析第 3 节中的同一算法：与经典秘书模型一样，每个候选人（包括最高预测候选者 i）都会被分配一个独立的到达时间$t_i \sim \text{Unif}[0,1],$。这将对 i 的最优位置选择替换为均匀分布，与 Fujii 和 Yoshida [FY23] 等先前研究中的标准假设一致。

分析分为七种情形，使用 $j \in \{0,1,\dots,6\}$ 进行编号，相应的竞争比表示为函数 $C_j'(\cdot)$，其参数由对手设定（即 m、 k、 v_i 和 $\hat{}v_i$）。虽然本节中的算法与算法1保持不变——从预测模式开始，并在观察到与其预测存在大偏差的候选人后切换到秘书模式——但分析受到显著影响。具体而言，任何涉及 β（$\hat{}i$ 的预先确定到达时间）的项现在都必须对 $[0,1]$ 取平均，并替换为 $\hat{}t$，从而为每种情形的竞争比界限引入额外的一层积分。与第 3 节类似，我们对算法1的参数——θ、τ、γ、δ——进行数值优化，并正式验证在随机顺序输入下，我们的算法在所有情形中均能达到至少为 $\max\left\{0.221,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$ 的竞争比。

—

定理2。 参数为 $\theta = 0.63$, $\tau = 0.33$, $\gamma = 0.34$, $\delta = 0.66$ 和 β（均从 $[0,1]$ 中均匀抽取）的算法*1*，对于随机顺序秘书问题（*ROSP*）至少是 $\max\left\{0.221,\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}$-竞争的。

证明。 与第 3 节类似，我们根据最高预测候选者 $\hat{}i$ 和真实最优候选人 i^* 是否位于集合 $M = \left\{i \in [n] : \left|1 - \frac{\hat{}v_i}{v_i}\right| > \theta\right\}$ 中，将分析分为七种情形。各情形中的分析结构和算法行为保持不变。关键区别在于，$\hat{}i$ 的到达时间 $\hat{}t$ 现在是从 $[0,1],$ 中均匀随机抽取的，因此，所有依赖于 $\hat{}t$ 的表达式都需要额外进行一步平均。令 $i^* = \arg\max_{i\in[n]} v(i)$ 表示最优候选人。与第 3 节类似，我们定义 $k = \left|\left\{i \in [n] : v_i > v_{\hat{i}}\right\}\right|$ 为真实值高于 $\hat{}i$ 的候选人数，并定义 $m_2 = \left|\left\{i \in M : v_i < v_{\hat{i}}\right\}\right|$ 为真实值低于 i 且预测不可靠的 $\hat{}$ 候选人数。现在，我们按照第 3 节中的相同顺序分析各情形，并在适当之处对时间 $\hat{}t$ 的均匀分布进行积分。和第 3 节一样，相关的技术引理放在附录中，本节仅给出逐一分析各情形的主要论证。

情况 0： $|M| = 0$。 这一情形与第 3 节分析中的情况 *0* 相同。由于没有候选人的预测误差超过预测误差阈值 θ，算法始终处于预测模式，并直接选择最高预测候选者 $\hat{}i$。如方程（2）和（3）所示，此情形下的竞争比至少为 $\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$。此外，由于 $|M| = 0$意味着 $\epsilon \le \theta = 0.63$，且最终的竞争性保证定义为该下界 $\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$ 与其余情形所导出的常数下界（至少为 0.221）中的较大值，因此我们得出结论：此情形满足所需的性能阈值。 —

在证明的其余部分，我们考虑 $M \neq \emptyset$ 这一情形，此时算法在遇到 M 中的首位候选人时，会从预测模式切换到秘书模式。如上所述，此处所有候选人的到达时间（包括 i 的到达时间）均独立地取自 $[0,1]$ 上的均匀分布。为处理这一情况，我们针对每种情形，根据 $\hat{}t < \tau$ 或 $\hat{}t \geq \tau$ 对分析进行划分。对于范围 $\hat{}\, t \in [\tau, 1]$，我们沿用第 3 节中针对各情形的下界，并对其在 $\hat{}t$ 上积分，同时将每处 β 替换为随机变量 $\hat{}t$。对于范围 $\hat{}\, t \in [0, \tau]$，我们推导出反映算法在提前到达情形下行为的新表达式，并同样对其积分。将每种情形下这两部分的贡献相加，即完成证明定理 2 所需的竞争比分析。

$\hat{}$情形 1： $\boldsymbol{i = i^* \in M}$。在这里，预测值最高的候选人也是真正的最优候选人，但其预测值存在较大偏差，因此属于集合 M。算法遇到首位候选人 $i \in M$ 时将切换到秘书模式，并可能在该阶段选中 $\hat{}i = i^*$。根据 $\hat{}t$ 所处的位置，我们考察两种情况：

（*1.1*） 当 $\hat{}t < \tau$：在这种情况下，选中 i^* 的概率为零。由于 $i^* = \hat{}i$ 在阈值 τ 之前到达，算法不会在预测模式下录用它。此外，无论 i^* 是否为 M 的首位成员，算法在秘书模式下也不会考虑它，因为它在 τ 之前出现。

（*1.2*） 当 $\hat{}\, t \in [\tau, 1]$：与预先确定的 $\hat{}\, t = \beta$ 设置类似（参见第 3 节中的公式（5）），如果 $\hat{}i = i^*$ 在切换后到达（即可以被观察到），算法以概率 δ 选中它；如果它是触发切换的候选者，则算法以概率 γ 选中它，分别对应算法1的第 11 行和第 13 行。

由于时间 $\hat{}t$ 现在在 $[0,1]$，上均匀分布，我们对区间 $[\tau, 1]$ 上的下界公式（5）进行积分：

$$C_1'(m,.) \geq \delta\tau \int_\tau^1 \frac{1-(1-\hat{t})^{m-1}}{\hat{t}}\, d\hat{t} + \gamma \int_\tau^1 (1-\hat{t})^{m-1}\, d\hat{t}. \tag{40}$$

我们将上述不等式右侧的各项简化如下 s:

$$\begin{aligned}
\delta\tau \int_\tau^1 \frac{1-(1-\hat{t})^{m-1}}{\hat{t}}\, d\hat{t} &= \delta\tau \ln\left(\frac{1}{\tau}\right) - \delta\tau \int_\tau^1 \frac{(1-\hat{t})^{m-1}}{\hat{t}}\, d\hat{t} \\
&= \delta\tau \ln\left(\frac{1}{\tau}\right) - \delta\tau \left(\sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^i \cdot \frac{1-\tau^i}{i} + \ln\left(\frac{1}{\tau}\right)\right) \\
&= -\delta\tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^i \cdot \frac{1-\tau^i}{i},
\end{aligned} \tag{41}$$

对于另一项，我们有：

$$\gamma \int_\tau^1 (1-\hat{t})^{m-1}\, d\hat{t} = \gamma \frac{(1-\tau)^m}{m}. \tag{42}$$

因此，这种情形下的整体竞争比下界为方程之和以及式（42）：

(41)

$$C_1'(m,.) \geq \delta\tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\tau^i}{i} + \gamma \cdot \frac{(1-\tau)^m}{m}. \tag{43}$$

情形 2： $\hat{} \; i = i^* \notin M$。 在这种情况下，预测值最高的候选人 $\hat{}i$ 也是真正的最优候选人 i^*，且其预测误差足够小，因此不属于集合M。然而，算法可能会在时间 $\hat{}t$ 之前进入秘书模式，这是由另一位候选人 $\hat{} \; i \in M$ 在时间 $t_M < t$ 到达所触发的。

进入秘书模式后，只有当 i^* 在 τ 之后到达，且是截至其到达时观察到的最佳候选人时，算法才能选中它。为了保守地给出性能下界，我们采用第 3 节情形 *2* 中使用的相同悲观约简：悲观地假设 i^* 属于 M，从而实质上将此情形约简为情形 *1* ，其中 M 中多了一名成员。

这种约简不会提高算法的性能，反而可能降低性能，因为它可能会更早触发切换到秘书模式，从而限制招聘 i^* 的概率。在预测模式下，算法会在预定的到达时间 $\hat{}t$ 确定性地选择预测值最佳的候选人。此时， M 中还没有候选人出现（见算法 1 的第 7 行）。

然而，声明 $i^* \in M$ 会消除这种可能性，并将录用概率限制在至多 γ 或 δ，具体取决于是否触发模式切换。因此，此情形下的竞争比至少与上文 情形 *1* 中 $m+1$ 个成员位于 M 时的下界一样大：

$$C_2'(m,.) \geq C_1'(m+1,.). \tag{44}$$

$\hat{}\hat{}$ **$\hat{}$情况3：** $i \neq i^*$, $i \in M$, $i^* \in M$。 在这种情形下，最高预测候选者 i 和真正的最优候选人 i^* 的预测偏差都很大，因此二者都属于集合 M。我们通过悲观约简，将这种情况转化为 情形 *4* （接下来讨论），其中 $i_\beta \neq i^*$, $i_\beta \in M$，且 $i^* \notin M$。具体而言，我们证明，由于 $i^* \notin M$ 延迟了算法切换到秘书模式，因此 情形 *4* 中的竞争比更小。按照第 3 节中的相同结构，我们根据 i^* 的到达时间 t^* 进行分析：

(3.1) 若 $t^* > \hat{}t$：那么算法已经处于秘书模式，该模式由 $\hat{i} \in M$ 在时间 $\hat{}t$ 到达触发。在此模式下， i^* 是否属于 M 不会影响算法对其的选择；因此，在这种情形下， M 中的成员身份无关紧要。

(3.2) 若 $t^* < \hat{}t$：那么要使算法观察并选择 i^*，它必须在时间 t^* 之前就已切换到秘书模式，因为我们假设 $t^* \notin M$。只有当 M 的另一名成员在 t^* 之前到达时，这种情况才会发生。声明 $i^* \notin M$ （如情形 *4*中所示）会降低招聘 i^* 的机会，因为否则不需要 M 中的任何成员在 t^* 之前到达，而且 i^* 本身就可以充当触发切换的候选者。这会使情形 *4*的竞争比更低。

通过这一悲观约简，我们得出结论：这种情形并不比下面的 情形 *4* 更难，只是 中的候选人少一位。

因此，竞争比如下所示：

$$C_3'(m,.) \geq C_4'(m-1,.). \tag{45}$$

情形 4： $\hat{} \; i \neq i^*, \; \hat{}i \in M, \quad i^* \notin M$。这里，最高预测候选者$\hat{}i$位于 M中，而真实最优候选人 i^* 不在其中。因此，算法总是切换到秘书模式，并且绝不会在预测模式下雇用候选人。我们根据$\hat{}$ t 所处的位置，将分析分为两部分：*(4.1)*当$\hat{}t < \tau$时：在这个子情形中，$\hat{}i$在阈值 τ之前到达，算法会在时间$\hat{}t$或之前切换到秘书模式。只有当 i^* 在 τ之后到达，且最佳候选人（ $[0, t^*)$ 在 τ之前到达时，算法才可能选中 i^* ，从而确保该最佳候选人在预测模式下没有被选中。现在，我们进一步分析两种情况：

(4.1.1) $\hat{}i$ 是 $[0, t^*$中的最佳候选人：要出现这种情况，每个满足 $v_i > v_{\hat{i}}$ 的候选人 i 都必须位于区间 $[0, t^*$之外，这种情况发生的概率为$(1-t^*)^k$，其中 k 表示真实值高于i的候选人$\hat{}$ $\hat{}$的数量。算法跳过 i ，并到达 t^*，此时处于秘书模式。由于 t^* 是均匀随机抽取的，我们必须在 $t^* \in [\tau, 1]$ 范围内对这一概率积分，以涵盖在此情形下 i^* 所有可能被选中的到达时间，并计算这一部分对该情形竞争比的贡献。因此：

$$C_{4.1.1}'(m,.) \geq \int_{\tau}^{1} (1-t^*)^k \, dt^* \tag{46}$$

(4.1.2) 另一个候选人，而不是 $\hat{}i$，是 $[0, t^*)$ 中的最佳候选：该事件发生的概率为$1-(1-t^*)^k$，对应于至少有一名真实值高于 $\hat{}$ i 的候选人在 t^*之前到达。要观察到并选中 i^* ，则在t^* 之前到达的最佳候选人必须在 τ之前到达，其发生概率为$\frac{\tau}{t^*}$。这两项相乘，是因为这两个事件相互独立；出于同样的原因，我们像上文一样对 $t^* \in [\tau, 1]$ 进行积分。因此：

$$C_{4.1.2}'(m,.) \geq \int_{\tau}^{1} \frac{\tau}{t^*}(1-(1-t^*)^k) dt^* \tag{47}$$

将方程（46）和（47）相加，并对 $[0, \tau]$积分（对应于 $\hat{}t$的到达时间），即可得到此情形的竞争比：

$$C_{4.1}'(m,.) \geq \int_{0}^{\tau} \left(\int_{\tau}^{1} \frac{\tau}{t^*} \left(1-(1-t^*)^k\right) dt^* + \int_{\tau}^{1} (1-t^*)^k \, dt^* \right) d\hat{t} \tag{48}$$

利用引理 11，可将上述方程化简为：

$$C_{4.1}'(m,.) \geq \tau \left[-\tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} + \frac{(1-\tau)^{k+1}}{k+1} \right] \tag{49}$$

(4.2) 当 $\hat{}$ $t \geq \tau$ 时：此情形遵循与第 3 节中的 情形 *4* 相同的逻辑。我们使用方程（14）中的 COSP表达式，对 $\hat{}$ $t \in [\tau, 1]$ 取期望，以考虑

$\hat{}\ i$ 的随机到达时间：

$$C'_{4.2}(m,.) = \int_{\tau}^{1} C_4(m,\cdot)\, d\hat{t}$$

应用引理 12 可简化 $C'_{4.2}(m)$：

$$\begin{aligned} C'_{4.2}(m,.) =& \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \left(\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)} - \frac{\tau^i(1-\tau)}{i} \right) \\ &+ \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \left(\frac{1-\tau}{i} - \frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)} \right) \\ &+ \frac{(1-\delta)\tau}{k+1} \left[\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} - \sum_{i=1}^{k+1+m_2} \binom{k+1+m_2}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} \right] \\ &+ \frac{(1-\gamma)}{k+1} \cdot \frac{(1-\tau)^{k+2+m_2}}{k+2+m_2} \end{aligned} \tag{50}$$

求和　式 (49) 和 (50) 相加后，可得情形 *4*的总竞争比：

$$\begin{aligned} C'_4(m,.) \geq& \tau \left[-\tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} + \frac{(1-\tau)^{k+1}}{k+1} \right] \\ &+ \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \left(\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)} - \frac{\tau^i(1-\tau)}{i} \right) \\ &+ \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \left(\frac{1-\tau}{i} - \frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)} \right) \\ &+ \frac{(1-\delta)\tau}{k+1} \left[\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} - \sum_{i=1}^{k+1+m_2} \binom{k+1+m_2}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} \right] \\ &+ \frac{(1-\gamma)}{k+1} \cdot \frac{(1-\tau)^{k+2+m_2}}{k+2+m_2} \end{aligned} \tag{51}$$

情形 5：$\hat{}\ \boldsymbol{i \neq i^*}$，$\hat{}\boldsymbol{i \notin M}$，　$\boldsymbol{i^* \in M}$。这里，最高预测候选者 $\hat{}i$ 不在 M 中，而最优候选人 i^* 在 M 中。与上文情形 *4* 类似，我们将 $\hat{}$时间 t 的分析分为两个范围：

(5.1) 当 $\hat{}t < \tau$ 时：为了让决策者看到 t^*，算法不能在预测模式下选中 $\hat{}i$ 。因此，算法必须在 $\hat{}t$ 时已经切换到秘书模式，这是必要条件；否则，它会在 $\hat{}i$ 到达时决定招聘该候选人。因此，无论 $\hat{}i$ 是否是 $[0, t^*$ 中的最佳候选，算法都必须在 $\hat{}t$ 之前遇到至少一名候选人 $i \in M$ ，以触发切换到秘书模式。该一般条件发生的概率为：

$$C'_{5.1}(m,.) \;=\; 1-(1-\hat{t})^{m_2}. \tag{52}$$

其中，如前文所定义，m_2 是 M 中真实值小于 v_i 的候选人数。因此，将公式（52）与下方子情形中的两个界相结合，即可得到情形 5.1 的总体贡献：

(5.1.1) $[0,t^*)$ 中的最佳候选人是 $\hat{}i$：当所有真实值高于 $\hat{}i$ 的候选人都在 t^*之后到达时，就会出现这种情况。其发生概率为 $(1-t^*)^k$，其中 k 定义为真实值高于 v_i的候选人数。请注意，这种情况的发生独立于*(5.1)*中提到的处于秘书模式这一一般条件。因此，乘以公式（52）后，该情形发生的概率为：

$$C'_{5.1.1}(m,.)=\int_{\tau}^{1}(1-t^*)^k(1-(1-\hat{t})^{m_2})dt^*. \tag{53}$$

(5.1.2) $[0,t^*)$ 中的最佳候选人不是 $\hat{}i$：在这种情形下，必须有另一个候选人 i 在 $[0,t^*)$ 中具有最高值，并且还必须在 τ 之前到达，以避免在秘书模式下被选中。这些事件发生的概率分别为 $1-(1-t^*)^k$和 $\frac{\tau}{t^*}$，且彼此独立。考虑到如*(5.1)*所述，我们处于秘书模式，情形*(5.1.2)* 发生的概率为：

$$C'_{5.1.2}(m,.)=\int_{\tau}^{1}\frac{\tau}{t^*}(1-(1-t^*)^k)(1-(1-\hat{t})^{m_2})dt^*. \tag{54}$$

和之前一样，积分用于对所有可行的到达时间 $t^*\in[\tau,1]$ 求平均。将方程 (54) 和 (53) 相加，并在 $t\hat{}$ 所落入的范围 $[0,\tau]$ 上取平均，我们得到 *(5.1)* 的总下界：

$$\begin{aligned}C'_{5.1}(m,.)=\int_0^{\tau}\left(\int_{\tau}^{1}\left(\frac{\tau}{t^*}\left(1-(1-t^*)^k\right)(1-(1-\beta)^m)+(1-t^*)^k\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)\right)dt^*\right)d\hat{t}\\ =-\tau\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\frac{1-\tau^i}{i}\right)\left(\tau-\frac{1-(1-\tau)^{m+1}}{m+1}\right)\\ +\frac{(1-\tau)^{k+1}}{k+1}\left(\tau-\frac{1-(1-\tau)^{m_2+1}}{m_2+1}\right)\end{aligned} \tag{55}$$

(5.2) 当 $\hat{}\,t\geq\tau$ 时：这部分的分析与第 3 节中的情形 *5* 直接类似。正如本证明开头所述，我们只需计算式子 $C_5(m)$ 对 $\hat{}\,t\in[\tau,1]$ 的期望，该式来自公式（18），对应于第 3 节中的 COSP 设置：令

对 $\hat{t} \in [\tau, 1]$ 求期望，并使用引理 14 求解，得到：

$$
\begin{aligned}
C'_{5.2}(m,.) &= \int_{\tau}^{1} C_5(m)\, d\hat{t} \\
&\geq \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \left(\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)} - \frac{\tau^i(1-\tau)}{i} \right) \\
&\quad + \frac{(1-\tau)^m(1-\tau)}{m} - \frac{(1-\tau)^{m+1}}{m(m+1)} \\
&\quad + \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} \left[(1-\tau) - \frac{1-\tau^{i+1}}{i+1} - \frac{(1-\tau)^m}{m} + \frac{i!\,(m-1)!}{(i+m)!} - \int_0^{\tau} \hat{t}^i (1-\hat{t})^{m-1} d\hat{t} \right] \\
&\quad + \frac{(1-\delta)\tau}{k+1} \left[\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} - \sum_{i=1}^{k+1+m_2} \binom{k+1+m_2}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} \right]
\end{aligned} \tag{56}
$$

将方程 (55) 和 (56) 相加，得到情形 5 的竞争比：

$$
\begin{aligned}
C'_5(m,.) \geq\ & -\tau \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} \right) \left(\tau - \frac{1-(1-\tau)^{m+1}}{m+1} \right) \\
&+ \frac{(1-\tau)^{k+1}}{k+1} \left(\tau - \frac{1-(1-\tau)^{m_2+1}}{m_2+1} \right) \\
&+ \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \left(\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)} - \frac{\tau^i(1-\tau)}{i} \right) + \frac{(1-\tau)^{m+1}}{m+1} \\
&+ \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} \left[(1-\tau) - \frac{1-\tau^{i+1}}{i+1} - \frac{(1-\tau)^m}{m} + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j \frac{1-\tau^{i+j+1}}{i+j+1} \right] \\
&+ \frac{(1-\delta)\tau}{k+1} \left[\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} - \sum_{i=1}^{k+1+m_2} \binom{k+1+m_2}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} \right]
\end{aligned} \tag{57}
$$

情形 6：$\hat{} \ i \neq i^*$，$\hat{i} \notin M$，$i^* \notin M$。在此情形下，最高预测候选者 $\hat{i}$ 和最优候选人 i^* 均不在错误集合 M 中。算法可以通过保持预测模式并招聘 $\hat{i}$，或者切换到秘书模式，随后招聘 i^*（或另一位高价值候选人）来取得成功。我们分别分析这两种可能性。

(6.1)$\hat{i}$ 以预测模式到达：如果没有候选人 $i \in M$ 在时间 $\hat{t}$之前到达，也就是说，$\hat{}$ 算法从未切换模式，那么它就会在预测模式下聘用 i 。这种情况发生的概率为 $(1-\beta)^m$。由于 $\hat{i}$和 i^*都不在 M中，根据方程 (1)，这种情况下的竞争比至少为 $(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$。因此，期望贡献为：

$$
C'_{6.1}(m,.) = \int_0^1 (1-\hat{t})^m \cdot \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\, d\hat{t} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \frac{1}{m+1}. \tag{58}
$$

ˆ 尽管算法聘用的是 i ，而非真实最优候选 i^*，但这一结果仍算成功，因为聘用 ˆi 可保证竞争比至少为 $(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$。注意，ˆ$i$ 在所有错误之前到达的概率为 $1/(m+1)$。

(6.2) ˆi 以秘书模式到达：算法以概率 $1-(1-\hat{t})^m$切换模式，并按照上文的情形 *5* 继续执行。我们将这部分进一步分为两种可能的情况：

(6.2.1) 假设我们已处于上文*(6.2)* 所述的秘书模式，那么，在 t^* 之前到达的候选人中，最佳候选必须落在采样窗口 $[0,\tau]$ 内，才能被观察到并具备被选中的资格。由于到达时间服从均匀分布，该事件发生的概率为 $\frac{\tau}{t^*}$。对 i^* 所有可能的到达时间取平均，得到 $\int_\tau^1 \frac{\tau}{t^*}\,dt^*$。 —

—

请注意，*(6.2)* 中提到的切换模式的一般条件，与给定已切换模式后的条件成功概率（见 *(6.2.1)*）并不独立：*(6.2.1)*中的概率以算法已在*(6.2)*中切换到秘书模式为条件。因此，*(6.2.1)* 部分的总体竞争比通过将这两个概率相乘得到。

$$C'_{6.2.1}(m,.)=\int_0^\tau \left(1-(1-\hat{t})^m\right)\cdot\tau\ln\left(\frac{1}{\tau}\right)\,d\hat{t}=\tau\ln\left(\frac{1}{\tau}\right)\cdot\int_0^\tau\left(1-(1-\hat{t})^m\right)\,d\hat{t}. \tag{59}$$

(6.2.2) 当 ˆ $t\geq\tau$ 时：这部分的推理与第 3 节中的情形 *6* 相同。具体而言，正如证明开头所述，只需计算方程（23）中的 COSP 表达式$C_6(m)$ 在区间 ˆ $t\in[\tau,1]$ 上的期望。考虑*(6.2)*中的一般要求，我们有：

$$C'_{6.2.2}(m,.)\;=\;\int_\tau^1\left(1-(1-\hat{t})^m\right)\cdot C_6(m,\hat{t})\,d\hat{t}. \tag{60}$$

将公式（58）、（59）和（60）相加，我们有：

$$\begin{aligned}C'_6(m,.)\geq\;&\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\cdot\frac{1}{m+1}\\&+\tau\ln\left(\frac{1}{\tau}\right)\cdot\int_0^{\hat{t}}\left(1-(1-\hat{t})^m\right)\,d\hat{t}\\&+\int_\tau^1\left(1-(1-\hat{t})^m\right)\cdot C_6(m,\hat{t},.)\,d\hat{t}.\end{aligned} \tag{61}$$

最终界。为完成分析，我们计算参数值较小时 m、m_2、$k\leq 20$ 在所有六种情形下的最小竞争比。利用上述推导出的显式公式，并对 ˆt 进行均匀分布积分，即可直接检验这些情形。当 m、k 或 m_2 取较大值时，我们采用与算法2中 COSP 分析相同的界定策略：随着参数增大，诸如 $(1-\beta)^m$ 或 $(1-\beta)^k$ 这样的指数项会趋于零，从而得到易于处理的渐近界。由于 m_2 始终受 m 限制，因此无需单独处理 m_2 和 k 同时较大的情况。

将小参数的数值评估与这些适用于大参数的渐近界相结合，

我们确认了这些固定参数值

$$\theta = 0.63, \quad \tau = 0.33, \quad \gamma = 0.34, \quad \delta = 0.66$$

保证竞争比至少为

$$\max\left\{0.221,\ \tfrac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right\}.$$

因此，定理成立。

□

5 经典设定下确定性算法与随机化算法的等价性

本节分析经典随机到达模型下带预测的秘书问题，其中每位候选人的到达时间均从 $[0,1]$（ROSP）中独立、均匀地抽取。我们证明，在此模型中，确定性算法与随机化算法的能力等价。具体而言，我们正式证明，任何随机化算法都可以通过从实例本身提取随机性——特别是从首位候选人的到达时间中提取随机性——由确定性算法模拟。

乍看之下，人们可能会认为 [FY23] 的结果表明，任何确定性算法都无法达到优于 0.25 的竞争比。然而，这个上界是在随机排列 模型下证明的，在该模型中，只有候选人的排列是随机的。相比之下，我们的工作和 [FY23] 分析的是随机到达 模型，在该模型中，每位候选人的到达时间都独立地从 $[0,1]$ 上的均匀分布中抽取。随机排列设定下的确定性上界并不适用于随机到达设定。事实上，在随机到达模型中，我们证明确定性算法与随机化算法的能力等价：任何随机化算法都可以通过从实例本身提取随机性（例如，从首位候选人的到达时间中提取）由确定性算法模拟。

定理3。 在经典设定的带预测的秘书问题（*ROSP* 模型）中，任何随机算法都可以由确定性算法模拟，且不会损失任何性能。

证明。 </style}令 n 位候选人的到达时间独立地从 $[0,1]$ 中抽取。将他们的到达时间记为 $\{t_i : i \in [n]\}$，并令 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 表示排序后的到达时间（次序统计量）。令 $i_1 \in [n]$ 为最早到达的候选人的索引，因此 $t_{i_1} = \min_{i\in[n]} t_i$。注意， t_{i_1} 在 $[0,1]$ 上并非均匀分布；相反，它服从 n 个独立同分布均匀随机变量的最小值所对应的分布：

$$\Pr[t_{i_1} \le x] = 1 - (1-x)^n.$$

令 $F(x) = \Pr[t_{i_1} \le x] = 1-(1-x)^n$ 表示 t_{i_1} 的累积分布函数。根据概率积分变换，随机变量

$$U = F(t_{i_1})$$

在 $[0,1]$ 上均匀分布。因此，根据观测到的 t_{i_1} 值，算法可以确定性地计算出 U，然后提取 $U = 0.x_1x_2x_3\ldots$ 的二进制展开，从而获得一串无限的无偏随机比特。

因此，第一个到达时间 t_{i_1} 提供了一个完美的内部均匀随机性来源。任何通常依赖外部随机比特的随机化算法 A，都可以改为使用 U 的比特来模拟这些随机比特。因此，我们可以构造一个确定性算法 A'，使其:

- 观测 t_{i_1},
- 计算 $U = F(t_{i_1})$,
- 提取 U 的二进制展开，以模拟 A 使用的随机比特,
- 然后在之后的所有步骤中，其行为都与 A 完全相同。

由于 A' 和 A 在每个输入上的结果分布完全相同，因此它们的竞争比也相同。因此，在这一模型中，随机化算法并不比确定性算法更强。

□

推论 1. 在 *ROSP* 设置下，确定性算法所能达到的竞争比上界同样适用于随机化算法。

6 总结

本文研究了随机顺序（ROSP）和选择顺序（COSP）到达情况下带预测的秘书问题。我们提出了一种随机化算法：预测准确时遵循预测，而预测偏差较大时则切换到 Dynkin 经典规则，从而在预测准确时实现一致性，并在最坏情况下提供鲁棒保证。我们的分析表明，该算法在 ROSP 中达到 $\max\{0.221, (1-\epsilon)/(1+\epsilon)\}$的竞争比，在 COSP 中达到 $\max\{0.262, (1-\epsilon)/(1+\epsilon)\}$ 的竞争比，改进了已知的最佳上界，并突破了这些设置中此前的限制。请注意， ϵ 是任一预测中的最大乘法误差。我们还证明了，在随机顺序模型中，随机化算法与确定性算法能力相同，从而解决了先前提出的一项分离性主张。

未来的研究可以着重于收紧两个模型的界，例如逼近 ROSP 已知的 0.33 上限，或缩小我们得到的 COSP 0.262 下界与最佳上界之间的差距。另一条研究方向是将这些思路拓展到其他变体，例如 k-秘书问题，或具有拟阵约束和背包约束的情形。由于

实际应用中的决策者通常拥有更大的灵活性，因此，探索预测候选项的分布式调度，或根据数据校准算法参数，可能会在实践中带来更强的保证。

参考文献

[aB97] Sabah al Binali. 风险承担的竞争分析及其在在线交易中的应用。载于第*38*届*IEEE*计算机科学基础年会论文集（*FOCS*），1997年。[ACE+20] Antonios Antoniadis、Christian Coester、Marek Eli´as、Adam Polak 和 Bertrand Simon。不可信预测下的在线度量算法。载于 第*37*届国际机器学习会议论文集（*ICML*），2020年。[ACK18] Yossi Azar、Ashish Chiplunkar 和 Haim Kaplan。先知秘书问题：突破 $1-1/e$ 障碍。载于第*19*届*ACM*经济学与计算会议论文集（*EC*），2018年。[AGKK20a] Antonios Antoniadis、Themis Gouleakis、Pieter Kleer 和 Pavel Kolev。机器学习建议下的秘书与在线匹配问题。载于神经信息处理系统进展第*33*卷（*NeurIPS*），2020年。[AGKK20b] Antonios Foivos Antoniadis、Themis Gouleakis、Pieter Kleer 和 Pavel Kolev。机器学习建议下的秘-书与在线匹配问题。*arXiv:2006.01026*，2020年。[AGMS21] C. J. Argue、Anupam Gupta、Marco Molinaro 和 Sahil Singla。面向整数规划装箱问题的稳健秘书算法与先知算法。*arXiv:2112.12920*，2021年。[AGTZ25] Gagan Aggarwal、Anupam Gupta、Xizhi Tan 和 Mingfei Zhao。有预测与无预测的多平台自动竞价，2025年。[AL19] Susanne Albers 和 Leon Ladewig。 k-秘书问题的新结果。载于国际算法与计算研讨会论文集（*ISAAC 2019*），2019年。[AMS+25] Georgios Amanatidis、Evangelos Markakis、Christodoulos Santorinaios、Guido Sch¨afer、Panagiotis Tsamopoulos 和 Artem Tsikiridis。基于预测的在线预算可行机制设计。*arXiv:2505.24624*，2025年。[BC23] Archit Bubna 和 Ashish Chiplunkar。先知不等式：次序选择胜过随机次序。载于第*24*届*ACM*经济学与计算会议论文集（*EC*），2023年。

[BFL24] Joan Boyar、Lene M. Favrholdt 和 Kim S. Larsen。带预测的在线单位利润背包问题。*Algorithmica*，2024年。[BGL+21] Hedyeh Beyhaghi、Negin Golrezaei、Renato Paes Leme、Martin P´al 和 Balasubra- manian Sivan。改进的标价机制与二价机制收益界。《运筹学》，2021年。[BGSZ20] Domagoj Bradac、Anupam Gupta、Sahil Singla 和 Goran Zuzic。秘书问题的稳健算法。载于第*11*届理论计算机科学创新会议论文集（*ITCS*），2020年。[BIK07] Moshe Babaioff、Nicole Immorlica 和 Robert Kleinberg。拟阵、秘书问题与在线机制。载于第*18*届*ACM-SIAM*离散算法年会论文集（*SODA*），2007年。[BIKK07] Moshe Babaioff、Nicole Immorlica、David Kempe 和 Robert Kleinberg。带应用的背包秘书问题。载于第*10*届组合优化问题近似算法国际研讨会论文集（*APPROX*），2007年。[BJS14] Niv Buchbinder、Kamal Jain 和 Mohit Singh。通过线性规划求解秘书问题。《运筹学数学》，2014年。[BMM24] Eric Balkanski、Will Ma 和 Andreas Maggiori。带有不公平预测的公平秘书问题。载于神经信息处理系统进展第*37*卷（*NeurIPS*），2024年。[BMRS20] ´Etienne Bamas、Andreas Maggiori、Lars Rohwedder 和 Ola Svensson。通过速度调节实现学习增强型能耗最小化。载于神经信息处理系统进展第*33*卷（*NeurIPS*），2020年。[BMS20] ´Etienne Bamas、Andreas Maggiori 和 Ola Svensson。学习增强算法的原始-对偶方法。载于神经信息处理系统进展第*33*卷（*NeurIPS*），2020年。[BP23] Ziyad Benomar 和 Vianney Perchet。在线算法中预算约束下的建议查询。载于神经信息处理系统进展第*36*卷（*NeurIPS*），2023年。[Bru84] F. Thomas Bruss。针对选项数量未知的一类最佳选择问题的统一方法。《概率年刊》，1984年。[BS24] Alexander Braun 和 Sherry Sarkar。具有预测加性差距的秘书问题。载于神经信息处理系统进展第*37*卷（*NeurIPS*），2024年。

[CCF+21] Jos´e R. Correa、Andr´es Cristi、Laurent Feuilloley、Tim Oosterwijk 和 Alexandros Tsigonias-Dimitriadis。独立采样下的秘书问题。载于第*32*届 *ACM-SIAM* 离散算法年会（*SODA*）论文集，2021年。[CFH+19] Jose Correa、Patricio Foncea、Ruben Hoeksma、Tim Oosterwijk 和 Tjark Vrede- veld。先知不等式的最新进展。*SIGecom Exchanges*，2019年。[Che23] Zhisheng Chen。人工智能赋能的招聘实践中的伦理与歧视。人文与社会科学传播，2023年。[CHMS10] Shuchi Chawla、Jason D. Hartline、David L. Malec 和 Balasubramanian Sivan。多参数机制设计与顺序标价。载于第*42*届 *ACM* 计算理论年会（*STOC*）论文集，2010年。[CL24] Davin Choo 和 Chun Kai Ling。关于学习增强型秘书问题的一则简短札记，2024年。[CSZ21] Jos´e R. Correa、Raimundo Saona 和 Bruno Ziliotto。通过盲策略求解先知秘书问题。*Mathematical Programming*，2021年。[DKL+25] Mohammadreza Daneshvaramoli、Helia Karisani、Adam Lechowicz、Bo Sun、Cameron N. Musco 和 Mohammad Hajiesmaili。学习增强型在线背包问题中近乎最优的一致性—鲁棒性权衡。载于第*42*届国际机器学习会议（*ICML*）论文集，2025年。[DKT+21] Ilias Diakonikolas、Vasilis Kontonis、Christos Tzamos、Ali Vakilian 和 Nikos Zarifis。利用分布式建议学习在线算法。载于第*38*届国际机器学习会议（*ICML*）论文集，2021年。[DLPLV21] Paul D¨utting、Silvio Lattanzi、Renato Paes Leme 和 Sergei Vassilvitskii。带建议的秘书问题。载于第*22*届 *ACM* 经济学与计算会议（*EC*）论文集，2021年。[Dyn63] E. B. Dynkin。马尔可夫过程停止时刻的最优选择。*DokladyAkademii Nauk SSSR*，1963年。[EHLM15] Hossein Esfandiari、MohammadTaghi Hajiaghayi、Vahid Liaghat 和 Morteza Mon- emizadeh。先知秘书问题。载于第*23*届欧洲算法研讨会（*ESA*）论文集，2015年。[EHLM20] Hossein Esfandiari、MohammadTaghi HajiAghayi、Brendan Lucier 和 Michael Mitzenmacher。先知、秘书问题与最大化选中最优者的概率。载于第*23*届人工智能与统计国际会议（*AISTATS*）论文集，2020年。

[FNS11] Moran Feldman、Joseph Naor 和 Roy Schwartz。子模秘书问题的改进竞争比。载于第*14*届组合优化问题近似算法国际研讨会（*APPROX*）论文集，2011年。[FY23] Kaito Fujii 和 Yuichi Yoshida。带预测的秘书问题。*Mathemat-ics of Operations Research*，2023年。[Gar60] Martin Gardner。数学游戏。《科学美国人》，1960年。[GLR24] Matthias Gehnen、Henri Lotze 和 Peter Rossmanith。具有有界预测的在线简单背包问题。载于第*41*届理论计算机科学国际研讨会（*STACS*）论文集，2024年。[GM66] John P. Gilbert 和 Frederick Mosteller。识别序列中的最大值。《美国统计学会杂志》，1966年。[GP19] Sreenivas Gollapudi 和 Debmalya Panigrahi。具有专家建议的租或买在线算法。载于第*36*届国际机器学习会议（*ICML*）论文集，2019年。[GS21] Anupam Gupta 和 Sahil Singla。随机顺序模型。载于《超越算法的最坏情况分析》，2021年。[GST24] Vasilis Gkatzelis、Daniel Schoepflin 和 Xizhi Tan。由不可靠建议增强的时钟拍卖。*arXiv:2408.06483*，2024年。[Hil83] T. P. Hill。最优停止问题中的先知不等式与次序选择。《美国数学学会会刊》，1983年。[HK92] Theodore P. Hill 和 Robert P. Kertz。最优停止理论中先知不等式综述。《当代数学》，1992年。[IKMQP21] Sungjin Im、Ravi Kumar、Mahshid Montazer Qaem 和 Manish Purohit。具有频率预测的在线背包问题。载于神经信息处理系统进展 *34*（*NeurIPS*），2021年。[KL15] Anna R. Karlin 和 Eric Lei。关于竞争性秘书问题。载于*AAAI*人工智能会议论文集（*AAAI*），2015年。[Kle05] Robert D. Kleinberg。一种具有多项选择的秘书算法及其在在线拍卖中的应用。载于第*16*届 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会（*SODA*）论文集，2005年。

[KNR20] Haim Kaplan、David Naori 和 Danny Raz。带样本的竞争分析与秘书问题。载于第*31*届年度 *ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）论文集，2020年。[KP09] Nitish Korula 和 Martin P´al。图和超图上的秘书问题算法。载于第*36*届自动机、语言与编程国际研讨会（*ICALP*）论文集，2009年。[KS78] Ulrich Krengel 和 Louis Sucheston。关于半鞅、渐近鞅及有限值过程。载于巴拿赫空间上的概率，1978年。[KT17] Thomas Kesselheim 和 Andreas T¨onnis。子模秘书问题：基数、匹配与线性约束。载于第*20*届组合优化问题近似算法国际研讨会（*APPROX*）论文集，2017年。[LCS+24] Adam Lechowicz、Nicolas Christianson、Bo Sun、Noman Bashir、Mohammad Hajies-maili、Adam Wierman 和 Prashant Shenoy。带切换成本的在线转换：稳健算法与学习增强算法。*SIGMETRICS*性能评估评论，2024年。[Lin61] D. V. Lindley。动态规划与决策理论。英国皇家统计学会杂志：*C*辑，1961年。[LLMV20] Silvio Lattanzi、Thomas Lavastida、Benjamin Moseley 和 Sergei Vassilvitskii。通过学习得到的权重进行在线调度。载于第*31*届年度 *ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）论文集，2020年。[LMM21] Xujun Liu、Olgica Milenkovic 和 George V. Moustakides。马洛斯模型下最优候选人的基于查询的选择。*arXiv:2101.07250*，2021年。[Luc17] Brendan Lucier。先知不等式的经济学视角。*SIGecom Exchanges*，2017年。[LV18] Thodoris Lykouris 和 Sergei Vassilvitskii。利用机器学习建议进行竞争性缓存。载于第*35*届国际机器学习会议（*ICML*）论文集，2018年。[MAB23] Bakhtiyor Meraliyev、Balzhan Alibekova 和 Islana Bekturganova。机器学习作为招聘流程中人力资源管理的有效工具。载于电子、计算机与计算国际会议（*ICECCO 2023*），2023年。[MASSAA19] Ali A. Mahmoud、Tahani AL Shawabkeh、Walid A. Salameh 和 Ibrahim Al Amro。利用机器学习预测招聘与考核绩效。载于信息与通信系统国际会议（*ICICS 2019*），2019年。

[MLM23] G. V. Moustakides、X. Liu 和 O. Milenkovic。带随机查询的秘书问题的最优停止方法——补遗。《应用概率杂志》，2023年。[MV22] Michael Mitzenmacher 和 Sergei Vassilvitskii。带预测的算法。美国计算机学会通讯，2022年。[PSK18] Manish Purohit、Zoya Svitkina 和 Ravi Kumar。利用机器学习预测改进在线算法。载于神经信息处理系统进展第*31*卷（*NeurIPS*），2018年。[PT22] Bo Peng 和 Zhihao Gavin Tang。次序选择先知不等式：从阈值优化到到达时间设计。载于第*63*届年度 *IEEE*计算机科学基础研讨会（*FOCS*）论文集，2022年。[RB18] Aaron Rieke 和 Miranda Bogen。诚聘：审视招聘算法、公平性与偏见，2018年。[RBKL20] Manish Raghavan、Solon Barocas、Jon Kleinberg 和 Karen Levy。减轻算法招聘中的偏见。载于 *ACM*公平性、问责制与透明度会议（*FAccT 2020*），2020年。[Roh20] Dhruv Rohatgi。利用机器学习建议进行在线缓存的近最优界。载于第*31*届年度 *ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）论文集，2020年。[SBS+21] Neha Sharma、Rigzen Bhutia、Vandana Sardar、Abraham P. George 和 Farhan Ahmed。采用机器学习和自然语言处理的新型招聘流程。载于*IEEE*国际电子、计算与通信技术会议（*CONECCT 2021*），2021年。[SC84] Ester Samuel-Cahn。非负独立同分布随机变量的阈值停止规则与最大值比较。《概率年刊》，1984年。[SG23] Jad Salem 和 S wati Gupta。有偏评估下的秘书问题。管理科学，2023年。[SGIV23] Dahlia Sam、M. Ganesan、S. Ilavarasan 和 T. John Victor。利用机器学习进行招聘与招募。载于并发工程人工智能与知识发现国际会议（*ICECONF 2023*），2023年。[SLH+21] Bo Sun、Russell Lee、Mohammad Hajiesmaili、Adam Wierman 和 Danny H. K. Tsang。在线转换问题的帕累托最优学习增强算法。载于神经信息处理系统进展第*34*卷（*NeurIPS*），2021年。

[SZ24] Yuhang Shen 和 Xiaoyu Zhang。人工智能对就业的影响：虚拟集聚的作用。*Humanities and Social Sciences Communications*，2024年。[Wei20] Alexander Wei。更优、更简单的学习增强型在线缓存。载于组合优化问题近似算法第*23*届国际研讨会论文集（*APPROX*），2020年。[WZ20] Alexander Wei 和 Fred Zhang。学习增强在线算法的最优鲁棒性-一致性权衡。载于神经信息处理系统进展第*33*卷（*NeurIPS*），2020年。

A 附录

本附录收录了正文中为使表述简洁而省略的详细技术证明和辅助引理。这里给出的公式是支撑分析的一般数学表达式，并非对正文中方程的逐字复述。具体而言，我们完整推导了第 3 节和第 4 节中的情形分析，并给出了大参数范围内的符号界，从而为定理 1 和定理2中陈述的竞争比保证奠定了严谨基础。为方便起见，全文沿用正文中引入的符号；不过，此处并未使用先前定义的所有参数，而且它们在各个公式中的位置可能与最初引入时有所不同。

A.1 最早到达时间的密度函数

我们计算集合 M 中成员的最早到达时间的密度函数。
令 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 为区间 $[0,1]$ 上 m 个相互独立且均匀分布的随机变量。定义随机变量：

$$X = \min(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

累积分布函数（CDF）

X 的累积分布函数（CDF）为：

$$F_X(x) = P(X \le x).$$

这表示至少有一个 m 数不大于 x的概率。其对立事件是所有 m 数都大于 x，其概率为：

$$P(a_1 > x, a_2 > x, \ldots, a_m > x) = (1-x)^m.$$

因此，累积分布函数为：

$$F_X(x) = 1 - (1-x)^m, \quad 0 \le x \le 1.$$

概率密度函数（PDF）

概率密度函数（PDF）是对累积分布函数关于 x 求导得到的：

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left(1 - (1-x)^m\right) \\ &= m(1-x)^{m-1}, \quad 0 \le x \le 1. \end{aligned}$$

$X = \min(a_1,\ a_2、\ .....、\ a_m)$ 的概率密度函数为:

$$f_X(x) = m(1-x)^{m-1}, \quad 0 \le x \le 1. \tag{62}$$

A.2 引理

引理 1。

$$\int_a^b f_X(x)\,dx = (1-a)^m - (1-b)^m. \tag{63}$$

证明。 我们要计算的是

$$J_1 = \int_a^b m\,(1-x)^{m-1}\,dx.$$

这个积分类似于积分基本幂法则:

$$\int u^{m-1}\,du = \frac{u^m}{m}, \quad \text{for } m \neq 0.$$

使用换元法 $u = 1-x$，因此 $du = -dx$，我们将积分改写为:

$$J_1 = m\int_{1-b}^{1-a} u^{m-1}du.$$

应用幂法则:

$$J_1 = m\ \frac{u^m}{m}\Big|_{1-b}^{1-a}.$$

代入上下限 a和 b ，最终结果为:

$$J_1 = (1-a)^m - (1-b)^m.$$

□

引理 2。

$$\int_a^b x f_X(x)\,dx = (1-a)^m - (1-b)^m - \frac{m}{m+1}.(1-a)^{m+1} + \frac{m}{m+1}.(1-b)^{m+1}. \tag{64}$$

证明。 我们从以下内容开始

$$J_2 = \int_a^b \frac{x}{\beta}\,m\,(1-x)^{m-1}\,dx.$$

提出常数因子:

$$J_2 = m\int_a^b x\,(1-x)^{m-1}\,dx.$$

现在，代入:

$$u = 1-x, \quad \text{so that} \quad x = 1-u.$$

此外,

$$du = -\,dx \quad \Longrightarrow \quad dx = -\,du.$$

积分上下限变为:

$$\text{When } x = a,\ u = 1 - a; \quad \text{when } x = b,\ u = 1 - b.$$

代入积分:

$$J_2 = m \int_{u=1-a}^{1-b} (1-u)\, u^{m-1}\, (-du).$$

交换积分上下限以消去负号:

$$J_2 = m \int_{u=1-b}^{1-a} (1-u)\, u^{m-1}\, du.$$

展开被积函数:

$$(1-u)\, u^{m-1} = u^{m-1} - u^m.$$

因此,

$$J_2 = m \left[\int_{1-b}^{1-a} u^{m-1}\, du - \int_{1-b}^{1-a} u^m\, du \right].$$

逐项积分:

$$\int u^{m-1}\, du = \frac{u^m}{m},$$

$$\int u^m\, du = \frac{u^{m+1}}{m+1}.$$

代入原函数:

$$J_2 = m \left[\frac{u^m}{m}\bigg|_{u=1-b}^{1-a} - \frac{u^{m+1}}{m+1}\bigg|_{u=1-b}^{1-a} \right].$$

化简:

$$J_2 = \left[(1-a)^m - (1-b)^m - \frac{m}{m+1} \left((1-a)^{m+1} - (1-b)^{m+1} \right) \right].$$

□

引理 3。

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = ln(b/a). \tag{65}$$

证明。我们有

$$J_3 = \int_a^b \frac{1}{x}\, dx.$$

$$J_3 = ln(b) - ln(a) = ln(b/a).$$

□

引理 4。

$$\int_a^b \frac{(1-x)^m}{x}\,dx = \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i}(-1)^i \frac{(b^i - a^i)}{i} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{66}$$

证明。 我们先利用二项式定理展开分子:

$$(1-x)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}(-1)^i x^i.$$

因此,

$$\frac{(1-x)^m}{x} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}(-1)^i x^{i-1}.$$

现在在区间 $[a,b]$ 上对两边积分:

$$\int_a^b \frac{(1-x)^m}{x}\,dx = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}(-1)^i \int_a^b x^{i-1}\,dx.$$

现在计算每一项的积分。对于 $i=0$, 有

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

对于 $i \geq 1$, 有

$$\int_a^b x^{i-1}\,dx = \frac{b^i - a^i}{i}.$$

代回总和中, 得到:

$$\int_a^b \frac{(1-x)^m}{x}\,dx = \binom{m}{0}(-1)^0 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i}(-1)^i \cdot \frac{b^i - a^i}{i}.$$

由于 $\binom{m}{0} = 1$ 和 $(-1)^0 = 1$, 最终结果为:

$$\int_a^b \frac{(1-x)^m}{x}\,dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i}(-1)^i \cdot \frac{b^i - a^i}{i}.$$

□

引理 5。

$$\int_\tau^\beta \left(1 - (1-t^*)^{m-1}\right) \cdot \frac{\tau}{t^*}\,dt^* = \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i}(-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i}. \tag{67}$$

证明。 我们先从积分中提取常数 τ：

$$\int_{\tau}^{\beta} \left(1-(1-t^*)^{m-1}\right) \cdot \frac{\tau}{t^*}\, dt^* = \tau \int_{\tau}^{\beta} \left(1-(1-t^*)^{m-1}\right) \cdot \frac{1}{t^*}\, dt^*.$$

接下来，将积分拆分：

$$\tau \int_{\tau}^{\beta} \left(1-(1-t^*)^{m-1}\right) \cdot \frac{1}{t^*}\, dt^* = \tau \left[\int_{\tau}^{\beta} \frac{1}{t^*}\, dt^* - \int_{\tau}^{\beta} \frac{(1-t^*)^{m-1}}{t^*}\, dt^*\right].$$

根据引理 3，我们知道：

$$\int_{\tau}^{\beta} \frac{1}{t^*}\, dt^* = \ln\left(\frac{\beta}{\tau}\right),$$

根据引理 4 和 $m \leftarrow m-1$，我们得到：

$$\int_{\tau}^{\beta} \frac{(1-t^*)^{m-1}}{t^*}\, dt^* = \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^i \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i} + \ln\left(\frac{\beta}{\tau}\right).$$

将这两个表达式代回：

$$\begin{aligned}
&\tau \left[\ln\left(\frac{\beta}{\tau}\right) - \left(\sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^i \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i} + \ln\left(\frac{\beta}{\tau}\right)\right)\right] \\
&= -\tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^i \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i} \\
&= \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i}.
\end{aligned}$$

□

引理 6。

$$\int_{\beta}^{1} \left(1-(1-t^*)^k\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} dt^* = \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\beta^i}{i}. \tag{68}$$

证明。 证明与引理 5 的证明相同，只是积分上下限改为 $[\beta, 1]$ 而不是$[\tau, \beta]$，并用 k 代替 $m-1$。同样适用二项式展开以及引理 3 和引理 4。

□

引理 7。

$$\begin{aligned}
&\int_{\beta}^{1} (1-t^*)^k \left[\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta} + (1-\beta)^{m_2}(1-\gamma)\right] dt^* \\
&= \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta} + (1-\beta)^{m_2}(1-\gamma)\right]
\end{aligned} \tag{69}$$

证明。 我们将常数项记为：

$$C := \left[(1-(1-\beta)^{m_2})\,(1-\delta)\frac{\tau}{\beta} + (1-\beta)^{m_2}(1-\gamma) \right].$$

于是积分变为：

$$\int_\beta^1 (1-t^*)^k \cdot C\, dt^* = C \cdot \int_\beta^1 (1-t^*)^k\, dt^*.$$

现在将引理 1 应用于 $m = k+1$, $a = \beta$, $b = 1$：

$$\int_\beta^1 (1-t^*)^k\, dt^* = \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1}.$$

因此：

$$\int_\beta^1 (1-t^*)^k \cdot C\, dt^* = \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot C,$$

这就证明了该引理。 □

引理 8。

$$\begin{aligned} &\int_\tau^\beta \left[\left(1-(1-t^*)^{m-1}\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} + (1-t^*)^{m-1} \right] dt^* \\ &= \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i} + \frac{(1-\tau)^m - (1-\beta)^m}{m}. \end{aligned} \tag{70}$$

证明。 我们将积分拆分为两部分：

$$\int_\tau^\beta \left[\left(1-(1-t^*)^{m-1}\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} + (1-t^*)^{m-1} \right] dt^* = I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 = \int_\tau^\beta \left(1-(1-t^*)^{m-1}\right) \cdot \frac{\tau}{t^*}\, dt^*, \quad I_2 = \int_\tau^\beta (1-t^*)^{m-1}\, dt^*.$$

由引理 5 可得：

$$I_1 = \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i}.$$

由引理 1，结合 $f_X(x) = m(1-x)^{m-1}$，因此 $(1-x)^{m-1} = \frac{1}{m} f_X(x)$，我们得到：

$$I_2 = \int_\tau^\beta (1-t^*)^{m-1}\, dt^* = \frac{1}{m} \int_\tau^\beta f_X(t^*)\, dt^* = \frac{1}{m} \left[(1-\tau)^m - (1-\beta)^m \right].$$

将两者结合起来：

$$I_1 + I_2 = \tau \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\beta^i - \tau^i}{i} + \frac{(1-\tau)^m - (1-\beta)^m}{m}.$$

□

引理 9。

$$\begin{aligned} &\int_\beta^1 \left(1 - (1-t^*)^k\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} \cdot \left(1 - (1-\beta)^{m-1}\right) dt^* \\ &= \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\beta^i}{i} \cdot \left(1 - (1-\beta)^{m-1}\right). \end{aligned} \tag{71}$$

证明。设

$$C := \left(1 - (1-\beta)^{m-1}\right),$$

它相对于 t^*为常数。因此，积分变为：

$$\int_\beta^1 \left(1 - (1-t^*)^k\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} \cdot C \, dt^* = C \cdot \int_\beta^1 \left(1 - (1-t^*)^k\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} \, dt^*.$$

根据引理 6，代入：

$$\int_\beta^1 \left(1 - (1-t^*)^k\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} \, dt^* = \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\beta^i}{i}.$$

两边乘以 C，得到：

$$\int_\beta^1 \left(1 - (1-t^*)^k\right) \cdot \frac{\tau}{t^*} \cdot C \, dt^* = \tau \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\beta^i}{i} \cdot \left(1 - (1-\beta)^{m-1}\right).$$

□

引理 10。

$$\begin{aligned} &\int_\beta^1 (1-t^*)^k \cdot \left[\left(1 - (1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta}\right] dt^* \\ &= \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot \left[\left(1 - (1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta}\right]. \end{aligned} \tag{72}$$

证明。 我们将这个常数因子记为：

$$C := \left(1 - (1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta}.$$

那么积分可简化为:

$$\int_\beta^1 (1-t^*)^k \cdot C\, dt^* = C \cdot \int_\beta^1 (1-t^*)^k\, dt^*.$$

应用标准幂函数积分:

$$\int_\beta^1 (1-t^*)^k\, dt^* = \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1},$$

我们得到:

$$\int_\beta^1 (1-t^*)^k \cdot C\, dt^* = \frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1} \cdot C.$$

□

引理 11。

$$\int_0^\tau \left(\int_\tau^1 \frac{\tau}{t^*} \left(1-(1-t^*)^k\right) + (1-t^*)^k\, dt^* \right) d\beta = \tau \left[-\tau \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^i \frac{1-\tau^i}{i} + \frac{(1-\tau)^{k+1}}{k+1} \right] \quad (73)$$

证明。 我们首先注意到，被积函数与 β 无关，因此外层积分只需乘以 τ:

$$\int_0^\tau \left(\int_\tau^1 \left[\frac{\tau}{t^*}(1-(1-t^*)^k) + (1-t^*)^k \right] dt^* \right) d\beta = \tau \cdot \int_\tau^1 \left[\frac{\tau}{t^*}(1-(1-t^*)^k) + (1-t^*)^k \right] dt^*.$$

现在我们计算内层积分，并将其拆分为:

$$\int_\tau^1 \left[\frac{\tau}{t^*}(1-(1-t^*)^k) \right] dt^* + \int_\tau^1 (1-t^*)^k dt^*.$$

第一项应用引理 6，在 $[\tau, 1]$ 上处理:

$$\int_\tau^1 \frac{\tau}{t^*}(1-(1-t^*)^k)\, dt^* = \tau \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1-\tau^i}{i} = -\tau \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^i \cdot \frac{1-\tau^i}{i}.$$

第二项是标准的幂函数积分:

$$\int_\tau^1 (1-t^*)^k dt^* = \frac{(1-\tau)^{k+1}}{k+1}.$$

将两者结合起来:

$$\tau \cdot \left(-\tau \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^i \cdot \frac{1-\tau^i}{i} + \frac{(1-\tau)^{k+1}}{k+1} \right),$$

至此证明完毕。 □

引理 12。

$$\begin{aligned}\int_\tau^1 C_4(m)\,d\beta =&\tau\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{i+1}\left(\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)}-\frac{\tau^i(1-\tau)}{i}\right)\\&+\tau\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+1}\left(\frac{1-\tau}{i}-\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)}\right)\\&+\frac{(1-\delta)\tau}{k+1}\left[\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^i\frac{1-\tau^i}{i}-\sum_{i=1}^{k+1+m_2}\binom{k+1+m_2}{i}(-1)^i\frac{1-\tau^i}{i}\right]\\&+\frac{(1-\gamma)}{k+1}\cdot\frac{(1-\tau)^{k+2+m_2}}{k+2+m_2}\end{aligned}\tag{74}$$

证明。 我们对 $C_4(m)$ 的每一项在区间 $\beta\in[\tau,1]$ 上进行积分。根据定义：

$$C_4(m)=\tau\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{i+1}\cdot\frac{\beta^i-\tau^i}{i}+\tau\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+1}\cdot\frac{1-\beta^i}{i}+\frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1}\cdot[A(\beta)+B(\beta)]\,,$$

其中

$$A(\beta):=\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)(1-\delta)\frac{\tau}{\beta},\qquad B(\beta):=(1-\beta)^{m_2}(1-\gamma).$$

第一项：

$$\int_\tau^1\tau\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{i+1}\cdot\frac{\beta^i-\tau^i}{i}\,d\beta=\tau\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{i+1}\left(\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)}-\frac{\tau^i(1-\tau)}{i}\right).$$

第二项：

$$\int_\tau^1\tau\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+1}\cdot\frac{1-\beta^i}{i}\,d\beta=\tau\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+1}\left(\frac{1-\tau}{i}-\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)}\right).$$

第三项 （A 部分）： 将引理 6 应用于函数 $A(\beta)$，并展开 g:

$$\int_\tau^1\frac{(1-\beta)^{k+1}}{k+1}\cdot A(\beta)\,d\beta=\frac{(1-\delta)\tau}{k+1}\left[\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^i\cdot\frac{1-\tau^i}{i}-\sum_{i=1}^{k+1+m_2}\binom{k+1+m_2}{i}(-1)^i\cdot\frac{1-\tau^i}{i}\right].$$

第四项（B 部分）：

$$\int_\tau^1\frac{(1-\beta)^{k+1+m_2}}{k+1}(1-\gamma)\,d\beta=\frac{(1-\gamma)}{k+1}\cdot\frac{(1-\tau)^{k+2+m_2}}{k+2+m_2}.$$

将所有项相加即可完成证明。 □

引理 13。

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \left(\int_\tau^1 \frac{\tau}{t^*}\left(1-(1-t^*)^k\right)\left(1-(1-\beta)^m\right)+(1-t^*)^k\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)\,dt^*\right)d\beta \\ = -\tau\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\frac{1-\tau^i}{i}\right)\left(\tau-\frac{1-(1-\tau)^{m+1}}{m+1}\right) \\ +\frac{(1-\tau)^{k+1}}{k+1}\left(\tau-\frac{1-(1-\tau)^{m_2+1}}{m_2+1}\right)\end{aligned} \tag{75}$$

证明。 我们将二重积分拆分为两部分:

$$\int_0^\tau \left(\int_\tau^1 \frac{\tau}{t^*}\left(1-(1-t^*)^k\right)\left(1-(1-\beta)^m\right)\,dt^*\right)d\beta+\int_0^\tau \left(\int_\tau^1 (1-t^*)^k\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)\,dt^*\right)d\beta.$$

对于第一项，内层积分为

$$\int_\tau^1 \frac{\tau}{t^*}\left(1-(1-t^*)^k\right)\,dt^*=\tau\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+1}\cdot\frac{1-\tau^i}{i}=-\tau\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\cdot\frac{1-\tau^i}{i}.$$

外层积分为

$$\int_0^\tau \left(1-(1-\beta)^m\right)\,d\beta=\tau-\int_0^\tau(1-\beta)^m\,d\beta=\tau-\frac{1-(1-\tau)^{m+1}}{m+1}.$$

将两者相乘，得到:

$$-\tau\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\cdot\frac{1-\tau^i}{i}\right)\left(\tau-\frac{1-(1-\tau)^{m+1}}{m+1}\right).$$

对于第二项，内层积分为

$$\int_\tau^1(1-t^*)^k\,dt^*=\frac{(1-\tau)^{k+1}}{k+1},$$

外层积分为

$$\int_0^\tau\left(1-(1-\beta)^{m_2}\right)\,d\beta=\tau-\frac{1-(1-\tau)^{m_2+1}}{m_2+1}.$$

将它们相乘可得:

$$\frac{(1-\tau)^{k+1}}{k+1}\cdot\left(\tau-\frac{1-(1-\tau)^{m_2+1}}{m_2+1}\right).$$

将两部分相加即可完成证明。 □

引理 14。 设 $C_5(m)$ 如显示式中所定义。则，

$$\begin{aligned}\int_\tau^1 C_5(m)\,d\beta \geq{}& \tau\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{i+1}\left(\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)}-\frac{\tau^i(1-\tau)}{i}\right)\\&+\frac{(1-\tau)^m(1-\tau)}{m}-\frac{(1-\tau)^{m+1}}{m(m+1)}\\&+\tau\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\left[(1-\tau)-\frac{1-\tau^{i+1}}{i+1}-\frac{(1-\tau)^m}{m}+\frac{i!\,(m-1)!}{(i+m)!}-\int_0^\tau\beta^i(1-\beta)^{m-1}d\beta\right]\\&+\frac{(1-\delta)\tau}{k+1}\left[\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^i\frac{1-\tau^i}{i}-\sum_{i=1}^{k+1+m_2}\binom{k+1+m_2}{i}(-1)^i\frac{1-\tau^i}{i}\right]\end{aligned}\tag{76}$$

证明。我们分析被积函数 $C_5(m)$的每一项，具体如下：

$$C_5(m)=\tau\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{i+1}\cdot\frac{\beta^i-\tau^i}{i}+\frac{(1-\tau)^m-(1-\beta)^m}{m}+\tau\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+1}\cdot\frac{1-\beta^i}{i}\cdot\left(1-(1-\beta)^{m-1}\right)+\frac{(1-$$

我们对 $\beta\in[\tau,1]$上的每一项进行积分：

第一项：

$$\tau\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{i+1}\int_\tau^1\frac{\beta^i-\tau^i}{i}d\beta=\tau\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{i+1}\left(\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)}-\frac{\tau^i(1-\tau)}{i}\right).$$

第二项：

$$\int_\tau^1\frac{(1-\tau)^m-(1-\beta)^m}{m}\,d\beta=\frac{(1-\tau)^m(1-\tau)}{m}-\frac{(1-\tau)^{m+1}}{m(m+1)}.$$

第三项：这需要展开两部分：

$$\int_\tau^1\frac{1-\beta^i}{i}\cdot\left(1-(1-\beta)^{m-1}\right)d\beta=\left[\frac{1-\tau}{i}-\frac{1-\tau^{i+1}}{i(i+1)}\right]-\left[\frac{(1-\tau)^m}{mi}-\frac{i!(m-1)!}{(i+m)!}+\int_0^\tau\beta^i(1-\beta)^{m-1}d\beta\right].$$

乘以 $\tau\binom{k}{i}(-1)^{i+1}$ 并求和，得到第三个部分。

第四项：最后一项的积分可直接由引理 6 给出，前置因子为 $(1-\delta)\tau/(k+1)$，并利用二项式恒等式展开：

$$\int_\tau^1\frac{(1-\beta)^{k+1}}{\beta}\,d\beta=\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^i\frac{1-\tau^i}{i},\quad\int_\tau^1\frac{(1-\beta)^{k+1+m_2}}{\beta}\,d\beta=\sum_{i=1}^{k+1+m_2}\binom{k+1+m_2}{i}(-1)^i\frac{1-\tau^i}{i}.$$

相减后得到第四项。

将这四项合并，即完成证明。 □