arXiv:2601.07486v1 [physics.plasm-ph] 12 Jan 2026

用于模拟等离子体-液体相互作用的辐射两相流模型

Ke-Jian Qian[1]†、Zhu-Jun Li[1]†、Tao Tao[2,3], De-Hua Zhang[1], Rui Yan[1,3]‡和 Hang Ding[1]‡

[1]高温气体动力学国家重点实验室，工程科学学院，中国科学技术大学，合肥 230026，中国 [2]等离子体物理与聚变工程系，中国科学技术大学，合肥 230026，中国[3]双锥点火方案联合团队

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

在激光产生的等离子体（LPP）极紫外（EUV）源中，锡液滴变形成最佳靶形，取决于其与预脉冲激光产生的等离子体之间的相互作用。这种相互作用由瞬态烧蚀压力介导，其复杂的时空演化目前仍无法通过实验测得。现有建模方法存在局限：经验压力-冲量模型忽略了动态等离子体反馈，而先进的辐射流体力学代码往往无法解析液滴流体动力学的后期演化。为弥补这一不足，我们提出了一种基于弥散界面方法的辐射两相流模型。该模型将等离子体的辐射流体力学与弱可压缩液体的欧拉方程相结合，并扩展五方程弥散界面公式，将辐射输运、热传导和电离纳入其中。该公式确保弥散界面区域内压力和速度平衡，并构建闭合模型，使其在界面处满足正确的跃迁条件，且在体相区域渐近恢复纯相方程。随后，我们将该模型用于模拟一个基准预脉冲场景，其中一个 $50\ \mu\mathrm{m}$ 锡液滴受到 10 ns 激光脉冲照射。模拟捕捉到了等离子体的快速膨胀，以及液滴随后在微秒时间尺度内因惯性展平而形成薄而弯曲的片状结构。值得注意的是，该模型再现了实验观测到的特征，例如轴向射流——此前的模拟很少能再现这一现象。与实验数据在片状结构尺寸和速度方面的定量吻合验证了该方法。该模型自洽地耦合激光等离子体物理与可压缩液滴动力学，为研究 LPP-EUV 源优化中的等离子体-液体相互作用提供了有力工具。

关键词：LPP-EUV、弥散界面模型、等离子体-液体相互作用

1. 引言

激光产生的等离子体（LPP）是纳米光刻所用极紫外（EUV）光的源项（Versolato 2019）。现代激光产生等离子体极紫外装置（LPP-EUV）产生极紫外光包含两个步骤：首先，利用强度相对较低的预脉冲激光使锡液滴变形为合适的锡片，以此制备靶材；随后，主脉冲对其加热

† 作者对本文的贡献相同。
‡ 电子邮箱：ruiyan@ustc.edu.cn（R. Yan）、hding@ustc.edu.cn（H. Ding）

使其产生EUV发射等离子体（Mizoguchi 等2010；van de Kerkhof等2020）。为提高转换效率并尽量减少锡碎屑，精确控制预脉冲诱导的液滴形状至关重要（Versolato等2022），而这需要深入理解液滴-等离子体动力学（Meijer 等 2022）。预脉冲作用时，局部激光能量吸收导致等离子体不对称膨胀，在液滴受光照射的表面产生极高压力（Basko 等2015；Kurilovich等2018；Sheil 等 2024）。这种压力通常称为烧蚀压力，它不仅会激发在液滴内部传播的声波（Reijers 等 2017），还会推动液滴，并使其同时变形成薄片，最终碎裂（Gelderblom等2016）。烧蚀压力体现了等离子体与液滴之间的相互作用，其空间分布会随时间显著变化。然而，烧蚀压力分布仍无法通过实验测量。

为对液滴动力学进行数值研究，人们提出了不同的烧蚀压力模型，以模拟等离子体的冲击作用（Klein 等，2015年；Gelderblom 等，2016年；França 等，2025年）。在数值模拟中，假设液滴不可压缩且无黏。Gelderblom 等（2016）采用边界积分法，并结合简化的烧蚀压力模型，模拟液滴受到激光脉冲冲击后的变形。研究发现，不同的烧蚀压力分布，包括高斯形、余弦形和聚焦于一点的分布，会使液滴形成不同形状。为确定在总动量恒定时液滴变形对压力脉冲持续时间的依赖关系，研究人员进一步推导出一个解析声学模型（假设密度涨落较小），用于描述内部压力、压力冲量和速度场（Reijers 等，2017年）。然而，据报道，实验中产生的锡片以及大多数先进 EUV光源中的锡片，往往会朝着与理论预测相反的方向弯曲（Kurilovich 等，2016年；Hernandez- Rueda 等，2022年；França 等，2025年）。为在模拟中再现曲率反转，研究人员引入了由升余弦函数描述的瞬时压力冲量（França 等，2025年）。研究人员还在对不可压缩液滴施加压力冲量的框架下，通过双流体模拟研究了液滴破碎（Nykteri 和 Gavaises，2022年）。结果显示，在液态薄片的扩展以及多分散碎片云团的形成方面，模拟结果与 Klein 等（2015）的实验观测吻合良好。尽管压力冲量建模便于用于液滴动力学模拟，但压力冲量分布（空间和时间分布）需要通过经验预先设定。此外，难以考虑液滴对等离子体的动态反馈；预计这种反馈会在飞行过程中调整压力分布。

另一方面，液滴动力学可以通过直接数值模拟获得，这些模拟综合考虑了所有重要的物理过程。诸如 FLASH（Fryxell等 2000年）、HEIGHTS（Sizyuk&Hassanein 2015）、HELIOS-CR（MacFarlane 等 2006）、RALEF（Basko 等 2012年）和 RHDLPP（Min等2024）等辐射流体力学（RHD）代码，对激光等离子体生产相关过程中的关键过程进行了详细建模，包括激光吸收、辐射输运和热传导，并已用于激光等离子体生产极紫外模拟（Sheil 等 2023）。Kurilovich 等（2018）使用二维（2D）RALEF代码模拟了纳秒预脉冲与锡液滴之间的相互作用，获得了推进速度与激光能量之间的幂律标度关系，该关系与实验数据吻合良好。RALEF模拟（Hernandez-Rueda 等2022）给出的推进速度与初始径向膨胀速率之比涵盖了广泛的参数范围（包括激光能量、光斑尺寸和液滴尺寸），结果显示其与实验吻合良好；液滴变形与推进之间的能量分配

与Gelderblom等人 （2016年）基于瞬时压力驱动的液滴模拟结果一致。然而，RHD建模基于单流体框架，并需要采用统一的状态方程（EOS），例如法兰克福状态方程（FEOS）（Faik等 2012年），以模拟预脉冲阶段处于各种状态的共存锡。尽管已有研究表明，RHD代码能够有效模拟激光等离子体相互作用以及液滴变形的早期阶段，但最近有报道称，RHD代码无法充分模拟液滴变形的晚期阶段（França 等 2025年）。这一不足可能解释了为何对后期液滴动力学（如薄片形成和破碎）（Klein 等2020；Liu 等 2022）的研究仍主要依赖纯流体动力学模拟（Liu 等 2017）。因此，开发一种能够模拟等离子体物理、液滴的长期演化及其相互作用的辐射两相流模型，是激光等离子体生产极紫外研究的关键目标。

本文基于弥散界面方法，提出了一种用于等离子体-液体相互作用的辐射两相流模型。具体而言，我们将等离子体的辐射流体力学与可压缩液体的欧拉方程相结合，并扩展五方程弥散界面公式（Allaire 等 2002；Kapila 等2001），纳入辐射输运、热传导和电离等关键物理过程。该模型尤其能够确保弥散界面区域两侧的压力和速度处于平衡，并可处理密度差异很大的两种流体。为确保物理真实性，我们建立了界面区域内能量通量和源项的闭合模型。这些闭合关系保证了界面处满足正确的跃迁条件，并确保模型在体相区域渐近恢复为纯相控制方程。我们通过验证模型对辐射输运和热传导的准确处理来检验其有效性，并确认在不存在辐射效应时，该模型能够正确退化为可压缩两相流。最后，为评估该模型在自洽耦合激光等离子体物理与可压缩液滴动力学方面的能力，我们将辐射两相流模型用于模拟一个基准预脉冲场景，其中一个 50 μ米 锡液滴受到一个 10 纳秒 激光脉冲的照射。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍体流体的控制方程和状态方程。第 3 节通过统一液相和等离子体相的控制方程，推导出一种新的弥散界面模型，并提出适当的混合物闭合关系。第 4 节介绍一种适用于求解该模型的数值格式。第 5 节通过若干测试案例进行验证：将辐射等离子体流和液-气两相流的模拟结果与文献中的已有结果进行比较。随后，应用该模型模拟纳秒激光脉冲辐照下锡液滴的变形。最后，第 6 节总结本文的结论。

2. 体流体的控制方程和状态方程

本节介绍所研究等离子体和液体的控制方程及状态方程。具体而言，我们对等离子体采用辐射流体力学模型，对液体采用欧拉方程。

2.1. 等离子体的辐射流体力学

存在辐射光子的等离子体可以用以下形式的一组辐射流体动力学方程进行建模:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_g + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g) = 0, \\ \partial_t (\rho_g \mathbf{u}_g) + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g) + \nabla (p_g + p_r) = 0, \\ \partial_t (\rho_g e_g) + \nabla \cdot (\rho_g e_g \mathbf{u}_g) + p_g \nabla \cdot \mathbf{u}_g = \nabla \cdot (\kappa_g \nabla T_g) + \omega_{r,g} \left(T_r^4 - T_g^4\right), \\ \partial_t E_r + \nabla \cdot (E_r \mathbf{u}) + p_r \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \left(\chi_{r,g} \nabla T_r^4\right) + \omega_{r,g} \left(T_g^4 - T_r^4\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

下标 g 和 r 此后分别表示等离子体（即电离气体）和辐射。 t 表示时间，等离子体的物理量包括 ρ_g 质量密度、$\mathbf{u}_g$宏观速度、 p_g 压力、 T_g 温度、 e_g 比内能以及 κ_g 热传导系数。在此模型中，假设等离子体的两个组分，即电子和离子，具有相同的宏观流体速度和温度，并作为单流体处理。辐射采用扩散近似建模，即假设介质光学厚（ Castor 2004）。辐射光子被视为一种没有静止质量的特殊理想气体，并产生辐射压力 p_r。假设辐射光子服从普朗克（黑体）分布，其辐射温度 T_r 可以不同于局部等离子体温度 T_g。由普朗克分布给出的辐射能 $E_r = aT_r^4$（$a = 7.5657 \times 10^{-16}\,\mathrm{J \cdot m^{-3} \cdot K^{-4}}$ 为辐射常数）与 p_r 的关系为 $p_r = E_r/3$ ，这是由爱丁顿近似得出的（Castor 2004）。当 T_r 与 T_g不同时，辐射光子会以能量交换率ω_r、$_g$与等离子体交换能量。在扩散近似下，辐射光子携带的部分能量传输实际上表现为能量扩散，其系数为χ_r、$_g$；另一部分则如式（2.1）最后一个方程所示，与等离子体一起表现为能量对流。

式（2.1）中的最后两个方程分别是等离子体和辐射的能量方程。或者，将这两个方程组合起来可得系统总能量方程，

$$\partial_t \left[\rho_g \left(e_g + |\mathbf{u}_g|^2/2\right) + E_r\right] + \nabla \cdot \left[\rho_g \left(e_g + |\mathbf{u}_g|^2/2\right) \mathbf{u}_g + E_r \mathbf{u}_g\right] + \nabla \cdot \left[\left(p_g + p_r\right) \mathbf{u}_g\right] = \nabla \cdot (\kappa_g \nabla T_g) + \nabla \cdot \left(\chi_{r,g} \nabla T_r^4\right). \tag{2.2}$$

2.2. 液体的欧拉方程

假设液体为无黏且弱可压缩，其动力学由欧拉方程控制:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_l + \nabla \cdot (\rho_l \mathbf{u}_l) = 0, \\ \partial_t (\rho_l \mathbf{u}_l) + \nabla \cdot (\rho_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l) + \nabla p_l = 0, \\ \partial_t [\rho_l (e_l + |\mathbf{u}_l|^2/2)] + \nabla \cdot [\rho_l (e_l + |\mathbf{u}_l|^2/2) \mathbf{u}_l] + \nabla \cdot (p_l \mathbf{u}_l) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中，下标 l 在本文后续部分均表示液体。 ρ_l、$\mathbf{u}_l$、 p_l和 e_l 分别表示液体的密度、速度、压力和比内能。为与辐射流体动力学方程保持一致，式（2.1）中，式（2.3）的能量方程改写为非守恒形式:

$$\partial_t (\rho_l e_l) + \nabla \cdot (\rho_l e_l \mathbf{u}_l) + p_l \nabla \cdot \mathbf{u}_l = 0. \tag{2.4}$$

假设液体对辐射高度不透明，且由于温度较低，液体的自发射极其微弱。尽管处于辐射环境中，液体的辐射能及其内部的辐射输运

流体	γ_l	$\mathrm{P}_{\infty,l}$ (帕)	$c_{v,\,l}$ (J/(kg · K))
水	4.4	6×10^8	1816
液态锡	30	1.421×10^9	210

表 1. 本文研究的两种液体的 SG 参数。

均被忽略，因此未出现在方程（2.3）中。液体中的热传导也同样被忽略，因为与等离子体中的热传导相比，它也可以忽略不计。

2.3. 状态方程

等离子体和液体具有不同的材料性质，因此遵循不同的状态方程。我们对两种流体均采用刚性气体（SG）模型（Shyue 1998），该模型通过调整参数，能够以统一的形式描述不同材料的状态方程。

液体的状态方程为

$$\begin{cases} p_l + \gamma_l \mathrm{P}_{\infty,l} = (\gamma_l - 1)\,\rho_l e_l, \\ \rho_l e_l = \rho_l c_{v,l} T_l + \mathrm{P}_{\infty,l}, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中，比热比 γ_l、参考压力 $\mathrm{P}_{\infty,\,l}$以及指定的定容热容 $c_{v,\,l}$ (Le Métayer 等 2004)是需要赋值的三个常数。 γ_l 和 $\mathrm{P}_{\infty,\,l}$ 的取值通常使液体内部的声速

$$C_l = \sqrt{\gamma_l \left(p_l + \mathrm{P}_{\infty,l}\right)/\rho_l} \tag{2.6}$$

接近真实值（Shyue 1998）。本文中几种液体的 γ_l、$\mathrm{P}_{\infty,\,l}$ 和 $c_{v,\,l}$ 的典型取值列于表 1，以恢复标准大气压下的参考状态：水为 $T_l = 300$ K、 $\rho_l = 1000$ kg/m^3、 $C_l = 1450$ m/s；液态锡为 $T_l = 593$K、 $\rho_l = 6980$ kg/m^3、 $C_l = 2471$ m/s。

等离子体被建模为理想气体，对应于一种特定的 SG，其中参考压力 $\mathrm{P}_{\infty,\,g}$ 设为零。其状态方程为

$$\begin{cases} p_g = (\gamma_g - 1)\,\rho_g e_g, \\ \rho_g e_g = \rho_g c_{v,g} T_g, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中，比热比 γ_g 设为 5/3。$c_{v,\,g}$ 是考虑平均电离度（Z_g）后指定的定容热容，表示为

$$c_{v,g} = \frac{R\,(1+Z_g)}{(\gamma_g - 1)\,M_g}. \tag{2.8}$$

其中 $R = 8.314$ J/(摩尔 · K) 是普适气体常数，而 M_g 是该元素的摩尔质量（锡为 118.71 g/摩尔 ）。等离子体中的声速可用与式（2.6）类似的形式表示：

$$C_g = \sqrt{\gamma_g p_g/\rho_g}. \tag{2.9}$$

请注意， C_g 可能比 C_l大一个数量级。例如，发射目标极紫外光的典型锡等离子体具有 T_g 范围为 10^5 至 5×10^5 K (Nishihara 等， 2008)， 产生的 C_g 范围为11000至25000 m/s。

3. 弥散界面模型

本节将建立一个用于描述等离子体-液体相互作用的弥散界面模型，并重点关注等离子体与液体之间的动量和能量交换。

3.1. 界面处的跃迁条件

在本研究中，我们将等离子体与液体之间的界面建模为尖锐接触间断，不发生相变或化学反应，如图 1(a) 所示。两个相在空间上彼此分隔且互不相溶，其材料性质显著不同，因此界面处会产生跃迁条件。由于该界面本质上是接触间断，必须严格满足Rankine-Hugoniot条件，这是间断处守恒定律的体现。具体而言，界面两侧的法向速度和压力连续：$\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n}$ 且$p_l = p_g$，其中 $\mathbf{n}$ 是界面的单位法向量。除了Rankine-Hugoniot条件外，由于液体的热传导系数相对可忽略，假设等离子体中的热通量在界面处为零。同样，由于液体具有较高的不透明度，辐射能通量也预期在界面处为零。在本研究中，所提出的弥散界面模型妥善处理了所有这些条件，详见 § 3.2，并结合§ 3.3 和 § 3.4中介绍的混合规则。

3.2. 弥散界面

在弥散界面模型中，两个不相溶流体之间的尖锐界面被具有有限厚度的弥散界面所取代，在该区域内两种流体相互混合；同时，界面处的跃迁条件通过弥散界面区域中的混合规则来实现。受弥散界面概念，尤其是输运五方程模型（Allaire 等 2002）的启发，我们提出了一种用于液体-等离子体相互作用的弥散界面模型，其中液体的体积分数（α_l）用于表示界面位置，如图 1（b）所示。可以看到，α_l 在一层薄层内从液体一侧的 1 快速变化到等离子体一侧的 0，该薄层在下文中称为弥散界面区域。在弥散界面区域内，流体被视为液体与等离子体的均匀混合物。

与 Allaire 等人 （2002）的模型类似，所提出的模型假设弥散界面区域内两相的速度和压力处于平衡状态（即力学平衡），也就是说，混合物速度 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l = \mathbf{u}_g$以及混合物压力 $p = p_l = p_g$处于平衡状态，但可能处于热非平衡状态（$T_l \neq T_g$）。界面处的这种力学平衡确保声波能够适当地穿过材料界面传播，同时允许流体具有不同的密度、内能和状态方程。因此，我们可以尝试写出用于液体—等离子体相互作用的弥散界面模型，该模型由一个界面演化方程、两个相质量方程、一个混合物动量方程、一个混合物能量方程和一个辐射能方程组成（注意，液相区域也被辐射场覆盖

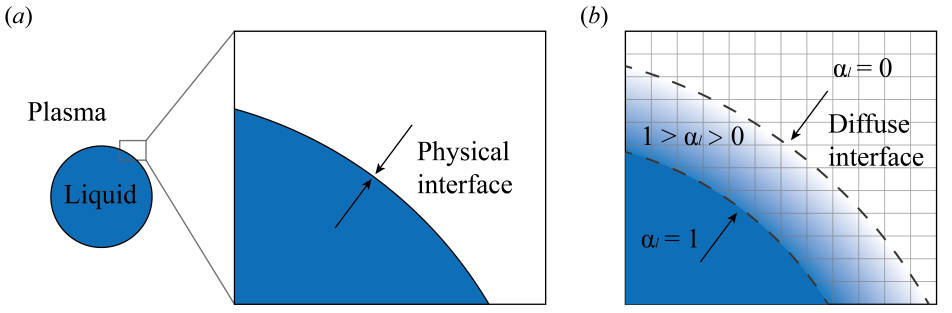

图 1。（a）不互溶等离子体与液体分界面的示意图，其中蓝色相代表液体，白色相代表等离子体；（b）在笛卡尔网格上用弥散界面替代物理界面，并采用液体的体积分数 α_l 表示界面位置，其中 $0 \leqslant \alpha_l \leqslant 1$。

并将辐射能设为零），

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_l + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_l = 0, \\ \partial_t \left(\rho_l \alpha_l\right) + \nabla \cdot \left(\rho_l \alpha_l \mathbf{u}\right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho_g \alpha_g\right) + \nabla \cdot \left(\rho_g \alpha_g \mathbf{u}\right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho \mathbf{u}\right) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u}\mathbf{u}\right) + \nabla \left(p + p_r\right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho e\right) + \nabla \cdot \left(\rho e \mathbf{u}\right) + p \nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + S_r, \\ \partial_t E_r + \nabla \cdot \left(E_r \mathbf{u}\right) + p_r \nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot \mathbf{F}_r - S_r, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 ρ 和 e 分别为混合物的密度和比内能。由热传导引起的能量通量 $\mathbf{q}$、辐射向混合物的能量沉积率 S_r以及由辐射扩散引起的能量通量 $\mathbf{F}_r$均作用于混合物；其详细表达式见 § 3.4。值得注意的是，在不存在热传导和辐射输运时（即 3.1）所提出的模型会退化为原始的可压缩两相流输运五方程模型（Allaire 等 2002）（ p_r、 E_r、 S_r、 $\mathbf{q}$和 $\mathbf{F}_r$ 均为零）。在给出混合物的状态方程之前，式（3.1）尚未闭合。

3.3. 弥散界面区域中的状态方程

在不存在相变和化学反应的情况下，我们以与 Allaire 等人 (2002类似的方式建立混合物的状态方程。在弥散界面区域内，质量守恒和能量守恒可直接得出 ρ 和 e 分别具有以下形式

$$\rho = \rho_l \alpha_l + \rho_g \alpha_g, \tag{3.2}$$

$$\rho e = \rho_l \alpha_l e_l + \rho_g \alpha_g e_g, \tag{3.3}$$

。采用等压闭合（Allaire 等人 2002），即假设混合物处于力学（压力）平衡状态：

$$p = p_l\left(\rho_l, e_l\right) = p_g\left(\rho_g, e_g\right). \tag{3.4}$$

将液体的状态方程（式（2.5））和等离子体的状态方程（式（2.7））代入满足式（3.3）压力平衡条件的式（3.4），即可得到混合物的状态方程

：

$$\left(\frac{\alpha_l}{\gamma_l-1}+\frac{\alpha_g}{\gamma_g-1}\right)p=\rho e-\left(\frac{\alpha_l\gamma_l\mathrm{P}_{\infty,l}}{\gamma_l-1}+\frac{\alpha_g\gamma_g\mathrm{P}_{\infty,g}}{\gamma_g-1}\right), \tag{3.5}$$

其　也可以写成类似刚化气体模型的更简洁形式：

$$p+\gamma\mathrm{P}_\infty=(\gamma-1)\,\rho e, \tag{3.6}$$

其中，混合物的比热比 γ 和参考压力 P_∞ 定义如下：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-1}=\dfrac{\alpha_l}{\gamma_l-1}+\dfrac{\alpha_g}{\gamma_g-1}\,,\\[2ex] \dfrac{\gamma\mathrm{P}_\infty}{\gamma-1}=\dfrac{\alpha_l\gamma_l\mathrm{P}_{\infty,l}}{\gamma_l-1}+\dfrac{\alpha_g\gamma_g\mathrm{P}_{\infty,g}}{\gamma_g-1}\,.\end{cases} \tag{3.7}$$

混合物的声速（C），后文讨论的数值求解器将把它作为特征速度使用 § 4，其构造方式与 Allaire等人（2002）类似：

$$\frac{\rho C^2}{\gamma-1}=\frac{\alpha_l\rho_l C_l^2}{\gamma_l-1}+\frac{\alpha_g\rho_g C_g^2}{\gamma_g-1}. \tag{3.8}$$

本研究中的这一公式保证了声速在弥散界面区域内从一个相到另一相单调过渡。

3.4. 弥散界面区域的通量和源项

为补全方程（3.1），除了状态方程之外，还需要构建混合物的能量通量和源项（即 $\mathbf{q}$、$\mathbf{F}_r$和S_r）。此外，这些表达式必须满足 § 3.1中描述的跃迁条件，即这些量在界面处均为零。

为在方程（ S_r 和 $\mathbf{q}$ 的混合物能量方程中获得物理上合理的表达式，我们从各相各自的能量方程入手：3.1

$$\partial_t\left(\rho_l\alpha_l e_l\right)+\nabla\cdot\left(\rho_l\alpha_l e_l\mathbf{u}\right)+\alpha_l p\nabla\cdot\mathbf{u}=-\nabla\cdot\left(\mathbf{q}_{ll}+\mathbf{q}_{lg}\right)+S_{r,l}+Q_{lg}, \tag{3.9}$$

$$\partial_t\left(\rho_g\alpha_g e_g\right)+\nabla\cdot\left(\rho_g\alpha_g e_g\mathbf{u}\right)+\alpha_g p\nabla\cdot\mathbf{u}=-\nabla\cdot\left(\mathbf{q}_{gl}+\mathbf{q}_{gg}\right)+S_{r,g}+Q_{gl}, \tag{3.10}$$

此处暂时保留液相的通量和源项，而不失一般性；换言之，液体也被视为一种等离子体。请注意，能量交换既发生在相内，也发生在相间。这里，$\mathbf{q}^{ij}$ $(i,\quad j\in\{l,\ g\})$表示由周围相携带并施加于内部相的热能通量，其中周围相为 j ，内部相为 i；　$S_{r,\ i}$ ($i\in\{l,\ g\}$)表示向相 i沉积的辐射能沉积率；而 $Q_{ij}(i,\quad j\in\{l,\ g\},\quad i\neq j)$表示从内部相 j 到内部相 i 的能量交换率，其中 $Q_{lg}=-Q_{gl}$。为保持一般性，我们最初保留液相的所有项，实际上将其视为具有自身输运系数的等离子体：热导率为 κ_l，辐射能交换率为$\omega_{r,\ l}$，辐射能扩散系数为$\chi_{r,\ l}$，尽管这些系数通常远小于等离子体相对应的系数。

每个相的辐射能源项建模为

$$S_{r,i}=\alpha_i\omega_{r,i}\left(T_r^4-T_i^4\right).\quad i\in\{l,\ g\} \tag{3.11}$$

因此，混合物的源项是$S_{r,g}$ 和$S_{r,l}$ 之和，写作：

$$S_r=\alpha_g\omega_{r,g}\left(T_r^4-T_g^4\right)+\alpha_l\omega_{r,l}\left(T_r^4-T_l^4\right). \tag{3.12}$$

根据其定义，等离子体间的导热热通量$\mathbf{q}_{gg}$ 应与内部等离子体和周围等离子体接触的局部面积成正比

。对于等离子体与液体的均匀混合物，等离子体之间接触面积的局部占比等于两侧体积分数的乘积，即 $\alpha_g^+\alpha_g^-$，其中上标 $+$ 和 $-$ 分别表示接触面的内侧和外侧。根据均匀性，$\alpha_g = \alpha_g^+ = \alpha_g^-$和$\alpha_l = \alpha_l^+ = \alpha_l^-$。因此，我们可以得到

$$\mathbf{q}_{gg} = -\alpha_g^2 \kappa_g \nabla T_g. \tag{3.13}$$

同样，内部等离子体与周围液体之间的接触面积分数可表示为 $\alpha_g^+\alpha_l^-$。相间热传导预计由两相共同决定，因此我们从现象学角度将有效相间热传导系数设为 $\sqrt{\kappa_g \kappa_l}$，即 κ_g 和 κ_l的几何平均值。假设在小长度尺度 $\delta\mathbf{x}$上存在局部温差 $T_g^+ - T_l^-$，则液体到等离子体的通量$\mathbf{q}^{gl}$ 可估算为

$$\mathbf{q}_{gl} = -\alpha_g^+ \alpha_l^- \sqrt{\kappa_g \kappa_l} \left(T_g^+ - T_l^-\right)/\delta\mathbf{x}. \tag{3.14}$$

方程（3.14）可用两种等价形式重新表述：

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{gl} &= -\alpha_g^+ \alpha_l^- \sqrt{\kappa_g \kappa_l} \left(\nabla T_g + (T_g^- - T_l^-)/\delta\mathbf{x}\right), \qquad \text{or} \\ &= -\alpha_g^+ \alpha_l^- \sqrt{\kappa_g \kappa_l} \left(\nabla T_l + (T_g^+ - T_l^+)/\delta\mathbf{x}\right). \end{aligned}$$

在这些形式中，等离子体与液相之间的局部温差（$T_g^+ - T_l^+$或 $T_g^- - T_l^-$）意味着$\mathbf{q}^{gl}$也与等离子体向液体的内能交换率 Q_{gl}有关，分别在接触面的内侧和外侧进行评估。

为保持符号上的对称性，由热传导引起的液体到液体以及等离子体到液体的能量通量可表示为

$$\mathbf{q}_{ll} = -\alpha_l^2 \kappa_l \nabla T_l, \qquad \mathbf{q}_{lg} = -\alpha_l^+ \alpha_g^- \sqrt{\kappa_g \kappa_l} \left(T_l^+ - T_g^-\right)/\delta\mathbf{x}. \tag{3.15}$$

混合物热通量由相内及相间的所有通量共同贡献，即$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{gg} + \mathbf{q}_{gl} + \mathbf{q}_{lg} + \mathbf{q}_{ll}$。值得注意的是，$\mathbf{q}^{lg}$ 和$\mathbf{q}^{gl}$ 中等离子体相与液相之间的温度差在求和时相互抵消。因此，$\mathbf{q}$ 的最终表达式可相应简化，

$$\mathbf{q} = -\alpha_g^2 \kappa_g \nabla T_g - \alpha_g \alpha_l \sqrt{\kappa_g \kappa_l} (\nabla T_g + \nabla T_l) - \alpha_l^2 \kappa_l \nabla T_l, \tag{3.16}$$

这种建模方法具有一个理想特性：当两个相完全相同时，它会简化为菲克定律$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$，从而确保与单相理论的一致性。

辐射扩散引起的能量通量在某种程度上类似于传导热通量。在光学厚极限下，辐射可描述为扩散场，此时辐射扩散通量与相间接触面积及相应的辐射扩散系数成正比（$\chi_{r,g}$，$\chi_{r,l}$）。直接类比式（3.16）中推导出的传导热通量形式，可将混合物的辐射能通量写为

$$\mathbf{F}_r = -(\alpha_g^2 \chi_{r,g} + 2\alpha_g \alpha_l \sqrt{\chi_{r,g}\chi_{r,l}} + \alpha_l^2 \chi_{r,l}) \nabla T_r^4. \tag{3.17}$$

由于液体的热传导系数相对可忽略且不透明度较高，本文设定 $\kappa_l \approx 0$、$\omega_{r,l} \approx 0$ 和 $\chi_{r,l} \approx 0$。因此，辐射能源项、传导热通量和辐射扩散通量得以简化为

适用于弥散界面区域的模型

$$\begin{cases} \mathbf{q} = -\alpha_g^2 \kappa_g \nabla T_g, \\ S_r = \alpha_g \omega_{r,g} \left(T_r^4 - T_g^4 \right), \\ \mathbf{F}_r = -\alpha_g^2 \chi_{r,g} \nabla T_r^4. \end{cases} \tag{3.18}$$

该简化公式通过等离子体体积分数 α_g控制，使能量通量和源项从等离子体向液体连续过渡。同时，它满足界面处所需的跃迁条件。

3.5. 等离子体-液体相互作用模型总结

通过应用方程（3.18）中的能量通量和源项表达式，我们现在将方程（3.1）中的辐射两相流模型改写为

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_l + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_l = 0, \\ \partial_t \left(\rho_l \alpha_l \right) + \nabla \cdot \left(\rho_l \alpha_l \mathbf{u} \right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho_g \alpha_g \right) + \nabla \cdot \left(\rho_g \alpha_g \mathbf{u} \right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho \mathbf{u} \right) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \nabla \cdot \left((p + p_r) \mathbf{I} \right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho e \right) + \nabla \cdot \left(\rho e \mathbf{u} \right) + p \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \left(\alpha_g^2 \kappa_g \nabla T_g \right) + \alpha_g \omega_{r,g} \left(T_r^4 - T_g^4 \right), \\ \partial_t E_r + \nabla \cdot \left(E_r \mathbf{u} \right) + p_r \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \left(\alpha_g^2 \chi_{r,g} \nabla T_r^4 \right) - \alpha_g \omega_{r,g} \left(T_r^4 - T_g^4 \right), \end{cases} \tag{3.19}$$

尽管该模型是针对混合物推导的，但在 α_g的极限下，它通过约化为标准单相模型而表现出正确的渐近行为。显然，当等离子体和辐射趋于消失时，方程（3.19）中的方程组收敛为纯液体的欧拉方程（2.3）；而当 $\alpha_g \to 1$时，它恢复为纯等离子体的辐射流体动力学方程（方程2.1）。

4. 数值方法

为对式（3.19）所述的等离子体–液体相互作用辐射两相流进行数值求解，我们采用算子分裂数值算法（McLachlan& Quispel 2002）。这种方法特别适用于处理方程的多物理场特性，因为对流输运所涉及的特征时间尺度和数值刚性与扩散过程的差异显著。该方法将完整系统分解为依次求解的两个子问题：双曲步和抛物步，从而可以采用高效的数值技术，分别处理各子问题不同的数学特性。在双曲步中，我们对控制流体和辐射对流的子系统进行积分，见式（4.1）。

$$\partial_t \alpha_l + \nabla \cdot \left(\alpha_l \mathbf{u} \right) = \alpha_l \nabla \cdot \mathbf{u}, \tag{4.1a}$$
$$\partial_t \left(\rho_l \alpha_l \right) + \nabla \cdot \left(\rho_l \alpha_l \mathbf{u} \right) = 0, \tag{4.1b}$$
$$\partial_t \left(\rho_g \alpha_g \right) + \nabla \cdot \left(\rho_g \alpha_g \mathbf{u} \right) = 0, \tag{4.1c}$$
$$\partial_t \left(\rho \mathbf{u} \right) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \nabla \cdot \left(\left(p + p_r \right) \mathbf{I} \right) = 0, \tag{4.1d}$$
$$\partial_t \left(\rho e \right) + \nabla \cdot \left(\rho e \mathbf{u} \right) + p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{4.1e}$$
$$\partial_t E_r + \nabla \cdot \left(E_r \mathbf{u} \right) + p_r \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{4.1f}$$

在抛物步中，我们对控制热传导和辐射扩散的子系统进行积分，见式（4.2）。

$$\begin{cases} \partial_t\left(\rho e\right) = \nabla\cdot\left(\alpha_g^2\kappa_g\nabla T_g\right) + \alpha_g\omega_{r,g}\left(T_r^4 - T_g^4\right), \\ \partial_t E_r = \nabla\cdot\left(\alpha_g^2\chi_{r,g}\nabla T_r^4\right) + \alpha_g\omega_{r,g}\left(T_g^4 - T_r^4\right). \end{cases} \tag{4.2}$$

具体而言，流体和辐射的对流采用显式格式，而热传导和辐射扩散采用隐式格式；详情见以下各小节。

4.1. 双曲步：流体和辐射的对流

请注意，流体和辐射对流的能量方程，即式（4.1*e*）和（4.1*f*），并非守恒形式，这主要是由于流体可压缩性相关的压力功项所致。为实现严格的能量守恒，我们转而考虑总能量密度 $\rho e + E_r + \rho\left|\ \right|^2/2$ ρe_t，其定义为 $\mathbf{u}$。其控制方程为

$$\partial_t\left(\rho e_t\right) + \nabla\cdot\left(\rho e_t\mathbf{u}\right) + \nabla\cdot\left(p_t\mathbf{u}\right) = 0, \tag{4.3}$$

其中，总压力为 $p_t = p + p_r$。式（4.3）由式（4.1*e*）、式（4.1*f*）以及式（4.1*d*）与速度向量的点积相加得到；更多详情见附录A。

因此，由式（4.1*a*-*d*）和式（4.3）构建了一个新的双曲子系统，并采用二阶有限体积格式进行离散，数值通量由 HLLC 近似黎曼求解器计算（Toro 2013）。特征波速 C_s 由完整系统式（4.1）的特征值求得，该特征值通过其雅可比矩阵计算；详情见附录B。体积分数平流方程（式 4.1*a*）中的速度散度项采用 adapt-HLLC 格式计算（Johnsen 与 Colonius 2006）。时间步 Δt 采用自适应方式选取，以严格满足 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件，

$$\Delta t = \mathrm{CFL}\cdot\min_{i\in D}\left\{\frac{\sqrt[3]{V_i}}{|\mathbf{u}_i| + C_{s,i}}\right\}, \tag{4.4}$$

其中，CFL 数（$= 0.44$）为给定常数，下标 i 表示计算域 D 中的一个笛卡尔网格单元，$C_s = \sqrt{C^2 + 4p_r/(3\rho)}$ 为局部波速，V 为该单元的体积。

显式求解流体和辐射对流后，我们将守恒变量更新至中间状态，并用上标 $*$ 表示：$[\alpha_l^*,\ (\rho_l\alpha_l)^*,\ (\rho_g\alpha_g)^*,\ (\rho\mathbf{u})^*,\ (\rho e_t)^*]^T$。中间状态对应的原始变量也随之更新。根据$(\rho e_t)^*$，随后即可计算混合物的内能$(\rho e)^*$ 和辐射能$(E_r)^*$；详见附录 C。

4.2. 抛物步：热传导和辐射扩散

采用隐式格式对式（4.2）中的热传导和辐射扩散进行时间积分。方程中的所有系数均使用中间状态下的流动变量进行线性化：

$$\begin{cases} \dfrac{(\rho e)^{n+1} - (\rho e)^*}{\Delta t} = \nabla\cdot\left(\left(\alpha_g^2\kappa_g\right)^*\nabla\left(T_g\right)^{n+1}\right) + \left(\alpha_g\omega_{r,g}\right)^*\left(T_r^4 - T_g^4\right)^{n+1}, \\ \dfrac{(E_r)^{n+1} - (E_r)^*}{\Delta t} = \nabla\cdot\left(\left(\alpha_g^2\chi_{r,g}\right)^*\nabla\left(T_r^4\right)^{n+1}\right) + \left(\alpha_g\omega_{r,g}\right)^*\left(T_g^4 - T_r^4\right)^{n+1}. \end{cases} \tag{4.5}$$

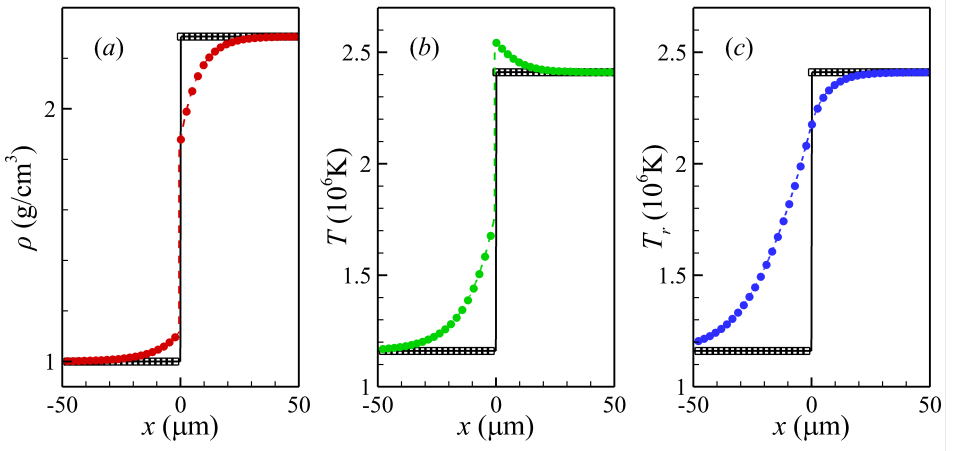

图 2. 辐射激波问题在 0 ns（黑色线条和空心方块）和 4.2 ns（虚线和实心圆点）时的密度（a）、等离子体温度（b）和辐射温度（c）分布。符号和线条分别表示数值解和半解析解。为便于观察，符号仅在每隔 8 个网格点处采样。

梯度项和散度项采用中心有限差分格式进行离散。通过迭代求解式（4.5），ρe 和 E_r 从中间状态更新至 $n+1$ 时间步。随后，利用状态方程，计算 p、p_r、T_g和 T_r 等与能量相关的其余所有守恒变量和原始变量在 $n+1$ 时间步的值，而与质量和动量相关的变量则保留中间状态的值。至此，完成了等离子体–液体相互作用辐射两相流系统的数值求解。

5. 模型验证与数值算例

本节首先通过模拟两种流动来验证辐射两相流模型：等离子体单相流和液气两相流。将每种流动的数值结果与文献中的基准解进行比较。随后，我们应用所提出的模型模拟一个与 LPP-EUV 相关的情景：纳秒激光脉冲照射锡液滴，使其变形为薄片。

5.1. 辐射激波管

为了验证模型中的辐射输运，我们考虑一个一维辐射激波管问题，其中辐射能通量和辐射压力会显著影响流体动力学。如图2所示，低温低密度等离子体（密度为 ρ^L、温度为 T^L 、速度为 u^L）最初撞击高温高密度等离子体（密度为 ρ^R、温度为 T^R 、速度为u^R）。这种配置旨在于 $x=0$ μm处产生稳定的辐射激波，其解可与Lowrie 与 Edwards (2008）的半解析结果进行比较。

由于流体系统只有一个相，即等离子体，因此我们在整个计算域内设置 $\alpha_g=1$ 。等离子体的性质为：绝热指数为 $\gamma_g=5/3$，摩尔质量为 $M_g=2$ g/mol，且电离度恒定为 $Z_g=1$，这些参数决定了 $c_{v,g}=$

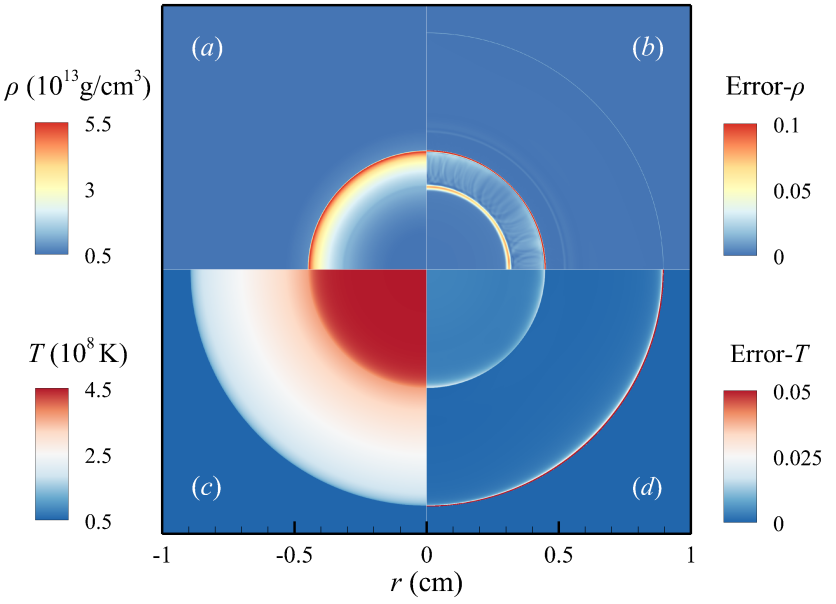

图3. Reinicke 与 Meyer-ter-vehn 爆炸波问题在 0.52 ns 时的密度（a）、相对密度误差 $\left|\rho^N-\rho^A\right|/\rho^A$（$b$）、温度（$c$）和相对温度误差 $\left|T^N-T^A\right|/T^A$（d），其中上标 N和 A分别表示数值结果和半解析结果。

$1.247\times10^8\ \mathrm{cm}^2/(\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{K})$。忽略热传导（即 $\kappa_g=0$）。辐射能的扩散系数和交换率分别为 $\chi_{r,\ g}=1.268\times10^7\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$和 $\omega_{r,\ g}=1.268\times10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}$。初始条件由 $x=0\ \mu\mathrm{m}$处的阶跃函数定义，如图 2所示。初始时，辐射与等离子体处于热平衡（即 $T_r=T$）。等离子体的初始流动参数如下：

$$\begin{cases}\rho^R=2.286\ \mathrm{g/cm}^3,\ T^R=2.411\times10^6\ \mathrm{K},\ u^R=1.11\times10^7\ \mathrm{cm/s};\\ \rho^L=1\ \mathrm{g/cm}^3,\ T^L=1.16\times10^6\ \mathrm{K},\ u^L=2.536\times10^7\ \mathrm{cm/s}.\end{cases}\tag{5.1}$$

计算在大小为 $[-300,\ 300]\ \mu\mathrm{m}$ 的区域内进行，并使用包含 2000 个点的均匀网格进行离散。

图 2 展示了 $t=4.2$ ns 时的数值结果，包括密度、等离子体温度和辐射温度。这些结果与 Lowrie 与 Edwards (2008) 的半解析解叠加对比。显然，数值结果与理论预测高度吻合，无论是定常激波的位置，还是间断两侧的扩散剖面均如此。这一比较成功表明，所提出的辐射两相模型能够准确捕捉复杂的等离子体流动结构，包括辐射激波。

5.2. 具有热传导的爆炸波

为了验证模型中的热传导，我们考虑包含非线性热传导的 Sedov-Taylor 点爆炸，也称为 Reinicke&Meyer- ter-vehn 问题。该问题仅涉及等离子体相，并且其爆炸波有半解析解（Reinicke 与 Meyer-ter Vehn 1991）。为避免点爆炸奇点，模拟的初始条件取自半解析解

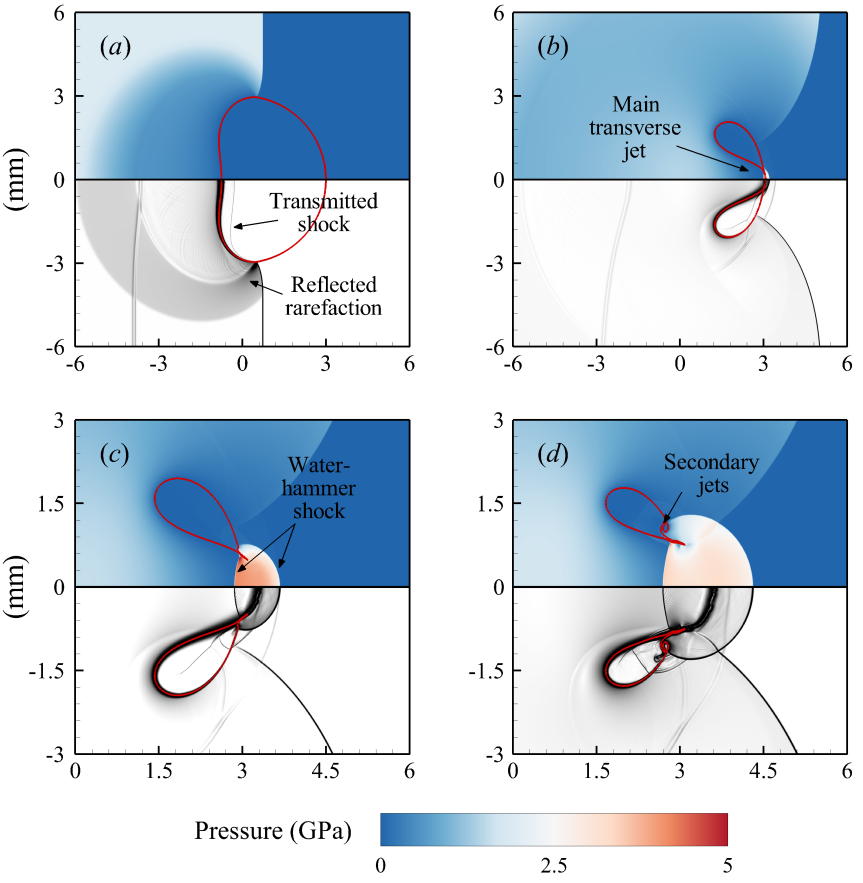

图4. 平面激波诱导气泡塌缩的数值结果：压力（上半部分）和数值纹影（下半部分），分别对应 2.2 μs (*a*)、 3.7 μs (*b*)、 3.9 μs (*c*) 和 4.1 μs (*d*)。红线表示气泡界面（由 $\alpha_g = 0.5$ 给出）。

在爆炸时刻之后的瞬间。此时，静止且均匀的环境等离子体即将被一个微小且迅速膨胀的球形爆炸波扫过。

等离子体被建模为理想气体，其绝热指数为 $\gamma_g = 1.25$，摩尔质量为 $M_g = 1$ g/mol，电离度为零，因此定容比热容为 $c_{v,g} = 3.326 \times 10^8\,\mathrm{cm}^2/(\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{K})$。本问题未排除辐射输运；因此，等离子体的辐射能 E_r、辐射压力 p_r、辐射能交换率 $\omega_{r,g}$ 以及辐射能扩散系数 $\chi_{r,g}$ 均设为零。热传导系数遵循 Reinicke & Meyer-ter Vehn (1991) 推荐的密度和温度非线性幂律函数，即 $\kappa_g = \rho_g^{-2} T_g^{6.5}$(g · cm · s^{-3} · K^{-1})，其中 ρ_g 的单位为 g/cm^3，T_g 的单位为 K。采用二维柱坐标（r, z 平面）进行轴对称模拟。初始条件对应于 $t = 0.2$ ns 时的半解析解，此时激波前沿半径为 0.225 cm，热前沿半径为 0.45 cm。计算域为 $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ cm，并离散为 1024×1024 个网格点。

图 3（*a*）和3（*c*）展示了在 t =0.52 纳秒时密度和温度的分布。正如Reinicke & Meyer-ter Vehn （1991）所预测，激波前沿到达了

	t_c (μ秒)	v_j (毫/秒)	p_w (吉帕)
当前	3.71	2844	4.75
Lin (2016年)	3.70	2832	5.90
Hawker& Ventikos (2012年)	3.66	2810	5.89
Bo 与 Grove(2014)	3.70	2830	-
Nourgaliev等 (2006年)	3.69	2850	10.1

表 2. 激波诱导的气泡塌缩 与先前的模拟相比：碰撞时间（t_c）、碰撞速度（v_j）以及水锤冲击压力（p_w）

et

半径为0.45 厘米，热前沿则到达0.9 厘米。密度和温度的相对误差分别见图3（b）和3（d）。最大误差不超过10%，集中在激波和热前沿的不连续处，这归因于有限网格分辨率。与半解析解的良好吻合表明，所提出的模型能够准确处理非线性热传导。

5.3. 冲击波诱导的气泡塌缩

水中气泡在冲击作用下发生塌缩的现象，即平面激波在水中传播并与水下气泡相互作用，已通过模拟得到广泛研究（Nourgaliev 等 2006；Hawker & Ventikos 2012；Bo 与 Grove 2014）。此经典问题在此用于验证所提出模型的控制方程能否正确化简为可压缩两相流的控制方程。在此情形下，忽略热传导和辐射输运。因此，所有相关变量和系数，包括辐射能 E_r、辐射压力 p_r、热传导系数 κ_g、辐射能扩散系数$\chi_{r,\ g}$以及辐射能交换率$\omega_{r,\ g}$，均设为零。对于状态方程，水采用 SG 模型描述（参数列于表1），而气相则视为理想气体，其 $\gamma_g = 1.4$。

模拟在二维笛卡尔坐标系中进行。初始时，圆形气泡中心位于 (0，0) mm，半径为 3 mm。气泡内部的密度和压力分别为 1 kg/m^3 和 10^5 Pa。初始时，入射激波位于气泡中心左侧 5.4 mm 处，并沿 $x+$ 方向传播。激波右侧（上标为 R）和左侧（上标为 L）的初始条件如下：

$$\begin{cases} \rho^R = 1000\ \text{kg/m}^3,\ p^R = 10^5\ \text{Pa},\ u^R = 0; \\ \rho^L = 1323.65\ \text{kg/m}^3,\ p^L = 1.9 \times 10^9\ \text{Pa},\ u^L = 681.58\ \text{m/s}. \end{cases} \tag{5.2}$$

计算域范围为 $[-15,\ 15] \times [-15,\ 15]$ mm，气泡半径（3 mm）最初由 400 个网格点离散化。

图4 展示了模拟中冲击波诱导的气泡塌陷的不同阶段，并通过压力等值线和数值纹影进行可视化。激波冲击后，液体中形成反射稀疏波，气泡内部则产生透射激波，如图4(a所示。与此同时，气泡左侧形成回入液体射流，并沿入射激波的同一方向传播，如图4(b所示。射流撞击气泡后界面时，会产生水锤激波（例如参见图 $t = 3.9$ μ中的 4(c）。该过程的特征参数包括碰撞时间 t_c、水锤冲击压力p_w以及撞击瞬间的射流速度 v_j。随后，射流穿透

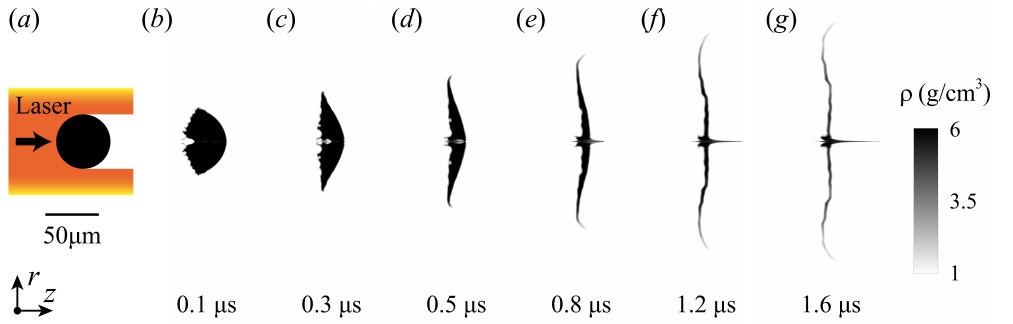

图 5. (*a*) 激光-液滴相互作用轴对称模拟示意图。(*b*-*g*) 不同时刻液滴的横截面阴影图，时间范围为 $t = 0.1$ 至 1.6 μs。所有图版的空间尺度相同，每个图版下方均标注了时间。

气泡并与周围液体融合，同时逐渐形成次级射流（见图4(*d*）。这些流动特征与 Hawker & Ventikos (2012年报道的数值结果十分相似。文献中与 t_c、 v_j和 p_w 的定量比较见表2。对于 t_c 和 v_j，结果吻合良好；而本次模拟中的 p_w 相对较低，主要是由于空间分辨率较粗。结果证实，关闭辐射专属项后，所提出的辐射两相流模型可正确退化为标准的可压缩两相流公式。此外，结果与预期流动动力学吻合良好，验证了核心流动求解器以及状态方程的实现，之后才引入与辐射输运和热传导的耦合。

5.4. 纳秒激光脉冲照射锡液滴

最后，我们使用所提出的模型，模拟激光等离子体产生极紫外光刻（LPP-EUV）中一个与实验相关的预脉冲场景：锡液滴受到纳秒激光脉冲照射并变形成薄片。模拟采用二维轴对称配置，参数与 Kurilovich 等人(2016年) 的系统性实验研究相匹配。初始配置示于图 5(*a*) 中。具体而言，采用一束 7 mJ Nd:YAG 激光器脉冲，波长为 1064 nm，持续时间为 10 ns （半高全宽，FWHM），目标上的焦斑尺寸为 115 μm（FWHM）。激光采用光线追踪方法建模，其中光束由 20,000 多条独立光线表示，这些光线以几何方式穿过等离子体传播，每条光线携带总脉冲能量的一部分。为此，我们采用了早期工作中详述的光线追踪方法（Tao 等人 2025年）。等离子体中的能量沉积主要通过逆韧致辐射吸收实现，该过程作为源项纳入式（3.19）中混合物能量方程的右端。

一个直径为$\rho_l = 6.92$克/厘米^{3}的锡液滴被放置在激光轴线上，周围环境中充满了密度为10^{-6} 克/厘米^3 、压力为 10 Pa的低密度锡等离子体。为近似表示汽化和电离形成的激光诱导等离子体（尚未在所提出的模型中进行自洽处理），我们在液滴左侧（受激光照射）表面指定一层高密度锡等离子体（厚度为1 μ米，密度为 1 克/厘米^3，压力为 10^7 帕）。该层中的质量与实验观测相符，即在激光-等离子体相互作用阶段，烧蚀的质量不到液滴质量的 1%（Kurilovich 等人2016年）。锡液滴采用刚性气体模型，其参数列于表 1；而锡

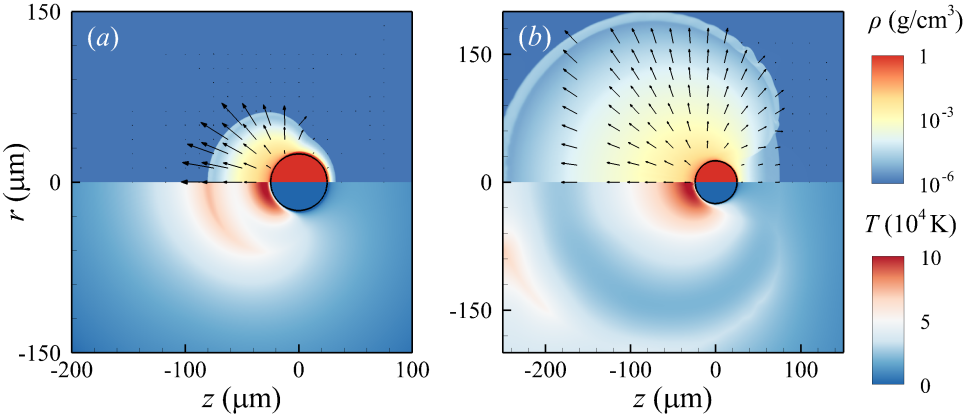

图6. 以密度（上半部分）和温度（下半部分）表示的激光-液滴相互作用数值结果，时间分别为2 ns（a）和10 ns（b）。箭头表示速度矢量，黑线表示液滴形状（由 $\alpha_l = 0.5$提供）。

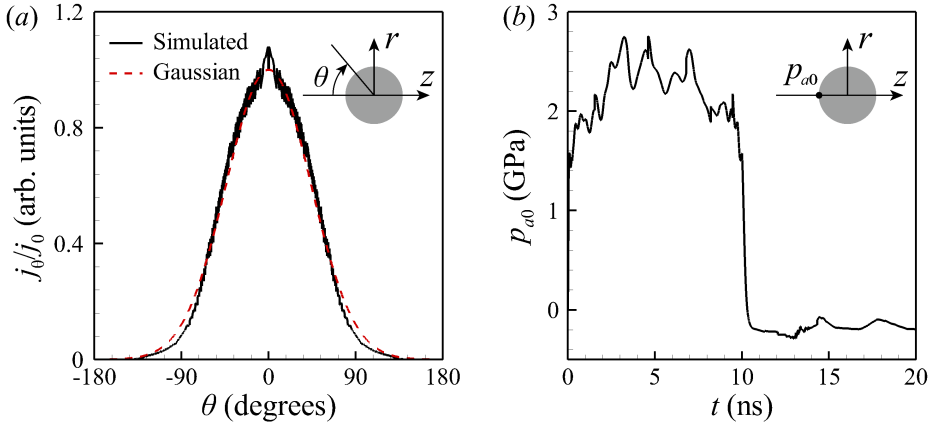

图7. （a）归一化表面冲量分布：模拟结果（黑色实线）和高斯拟合（红色虚线）。插图显示了 r-z 坐标系中的极角 θ。（b） $\theta = 0$、 p_{a0}处液滴表面所受压力的时间演化。

等离子体则视为理想气体，其参数为 $\gamma_g = 5/3$ 和 $M_g = 118.71$ 克/摩尔。电离度（Z_g）采用托马斯-费米模型（More 1985）确定，热传导系数（κ_g）遵循 Spitzer-Harm 理论（Spitzer 与 Härm 1953），辐射输运系数（χ_r、 g、 ω_r、 g）则根据 Tsakiris 与 Eidmann（1987）的经验公式计算；详情见附录 D。初始时，辐射与材料处于热平衡。计算域在径向（r）上的范围为 $[0, 300]$ μ米，在轴向（z）上的范围为 $[-300, 300]$ μ米；初始使用 400 个网格点来解析液滴直径。

图6 展示了模拟中激光-等离子体相互作用阶段 $t = 2$ ns 和 10 ns 时的激光诱导等离子体膨胀。在左侧照射下，等离子体迅速膨胀，其中最快的运动沿轴向发生。持续的激光能量沉积使液滴受照表面附近的等离子体维持在极高温度（$\sim 10^5$ K）。激光在临界密度以下被吸收，因此形成准稳态烧蚀前沿，这与Basko 等人 (2015)的模拟一致。相比之下，液滴本身仍处于低

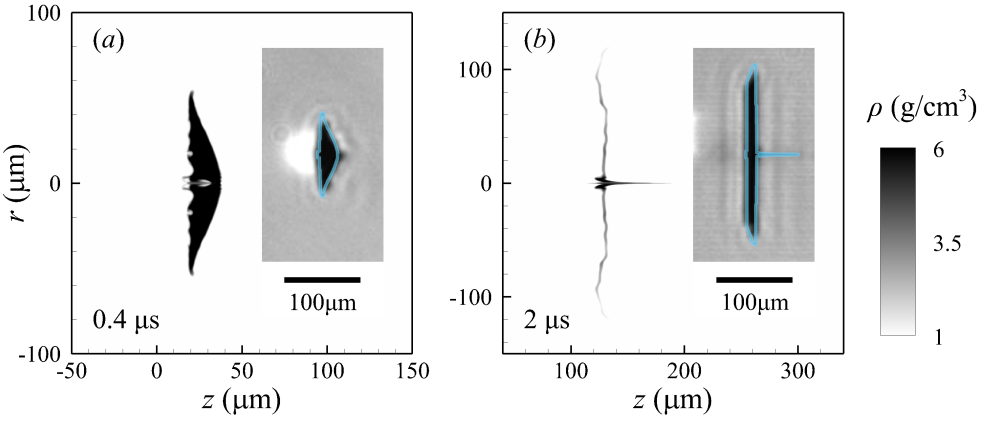

图8。 锡片在 0.4 μs (*a*) 和 2 μs (*b*) 时的密度等值线。插图显示了侧视实验阴影图（改编自 Kurilovich 等 (2016年)，并叠加了模拟液滴形状（相对于 $\rho = 1.2\ \mathrm{g/cm^3}$ 的等值线），表示侧视投影。

温度、高密度液态，如图6所示。由于激光脉冲持续时间（10 ns）远短于液滴动态响应的惯性时间尺度（$\sim D/U \approx 1\ \mu\mathrm{s}$，其中 U 是取自表3的轴向推进速度），因此在激光脉冲期间液滴形状几乎不会发生变形。预计烧蚀前沿的高压会在更长的时间尺度上引起显著变形。

球形液滴在惯性时间尺度内变形为平片的飞行中变形过程如图 5(*b*-*g*) 所示。变形始于激光照射的（左侧）表面，并在那里形成精细结构（见图 5*b*）。随后，液滴呈现水母帽状形状（图 5*c*），并逐渐变平，同时向远离激光束的方向弯曲（图 5*d*-5*g*）。在这一变平阶段，一个显著特征是形成了轴向射流（图 5*e*-5*g*），这与 Meijer 等 (2022) 的实验观测一致。值得注意的是，我们提出的模型成功捕捉到了这一轴向射流和表面精细结构；在以往的不可压缩或单相辐射流体动力学模拟中，这些现象很少得到再现。

在激光-等离子体相互作用阶段，膨胀等离子体在液滴表面施加了极高的烧蚀压力；激光关闭后，该压力迅速衰减，这与先前的单相模拟结果一致（Kurilovich 等，2018 年）。由烧蚀压力产生的表面冲量可定义为 $j_\theta = \int_\tau p_a(t,\ \theta)\ \mathrm{d}t$，其中 $p_a(t,\theta)$ 为表面压力，θ 为图 7(*a*) 所示的极角，积分区间 τ 涵盖激光脉冲的持续时间（本例中为 $\tau = 10$ 纳秒）。这一表面冲量模型已被广泛用于（Gelderblom 等，2016年；Reijers 等，2017年；França 等（2025））评估展平阶段随后发生的液滴变形，例如作为不可压缩液滴模拟的输入。图 7(*a*) 展示了归一化 j_θ/j_0的模拟分布，其中 $j_0 = j_{\theta=0}$ 为 21.9 Pa · s。我们注意到，该分布与高斯函数拟合良好。França 等（2025）的理论研究指出，在不可压缩液滴模型中，高斯冲量分布可能不足以诱发曲率反转，即液态薄片向远离激光一侧弯曲。然而，我们的模拟显示，在有效高斯冲量作用下确实会发生这种反转（见图 5*d*）。图 7(*b*) 展示了在 $\theta = 0$、p_{a0}处的表面压力 p_a 的时间演化。在激光照射期间，p_{a0} 的数值大致介于

	t (μ秒)	l_r (μ米)	d_z (μ米)	U (米/秒)
当前	0.4	110	26	58.81
Kurilovich 等（2016年）		100	30	54
目前	2	220	20	
Kurilovich 等（2016年）		210	22	

表3。变形锡液滴形状与实验观测的对比： 0.4 μs 和 2 μs 时的径向宽度（l_r）、轴向厚度（d_z）和推进速度（U）。

1.5 吉帕至 2.8吉帕，其时间演化呈现多次上升和下降，这可能是由压力波在烧蚀前沿传播所致。

图8 显示了变形液滴在 $t = 0.4$ μs 和 2 μs 时的密度等值线。为便于直接比较，插图将通过绕方位角旋转模拟液滴轮廓获得的投影轮廓，叠加在相应的实验结果上，实验结果来自 Kurilovich 等 （2016年）。可以明显看出，液滴形状之间具有极好的一致性。包括径向宽度 l_r、轴向厚度d_z和轴向推进速度 U 在这两个时刻的定量结果列于表 3 中，并与实验测量结果进行了比较。尽管模拟中对状态方程、热传导、电离和辐射采用了简化模型，结果仍显示出相当良好的定量一致性。

6. 结论

我们采用弥散界面框架，开发了一种用于等离子体-液体相互作用的辐射两相流模型。该方法用具有有限厚度的过渡层近似物理上的锐界面。在这一弥散区域内，我们建立了相容的能量通量闭合关系，使其在锐界面极限下满足正确的物理跃迁条件，特别是要求来自等离子体的热通量和辐射能通量在液体表面处为零。此外，我们引入了适当的状态方程混合规则，以确保声波能够在整个混合物中以物理合理的方式传播。模型采用算子分裂数值算法进行时间推进，依次处理双曲对流和抛物扩散。通过与文献中的三个测试案例进行全面验证，模型在单相等离子体流和液-气两相流方面均表现出优异性能。随后，我们采用所提出的模型模拟了一个与 LPP-EUV 相关的预脉冲场景：锡液滴受到纳秒激光脉冲照射，并变形成薄片。结果与Kurilovich等人（2016年）的实验发现吻合良好。模拟成功捕捉到了实验中观察到的关键特征，例如轴向射流，而这一特征在以往的模拟中鲜有捕捉。此外，模型还对锡片的径向半径、轴向厚度和轴向推进速度等关键动力学性质给出了定量准确的预测。

通过成功模拟这一复杂的 LPP-EUV 场景，所提出的模型为激光等离子体物理与液滴动力学的耦合自洽模拟建立了框架。该框架非常适合纳入其他关键物理过程，例如相变和更详尽的材料描述（如表列状态方程），从而能够开展关于等离子体-液体相互作用的基础研究，这对于优化先进的激光产生等离子体极紫外光源至关重要。

经费支持。我们感谢国家自然科学基金委员会（项目编号：12388101、12375243）和中国战略性先导科技专项

中国科学院（项目编号：XDA0380601）以及科学挑战项目（项目编号：TZ2025016）的支持

利益声明。 作者声明不存在利益冲突。

附录 A. 总能量密度对流的控制方程

总能量（$\rho e_t = \rho e + E_r + \rho \left|\mathbf{u}\right|^2/2$）的控制方程可通过将混合物能量方程 Eq. (4.1*e*)、辐射能方程 Eq. (4.1*f*)与动量方程 Eq. (4.1*d*)和速度向量的点积相加得到。具体而言，将 Eq. (4.1*d*)两边与 $\mathbf{u}$：相乘取点积：

$$\mathbf{u}\cdot\left[\partial_t\left(\rho\mathbf{u}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}\right)\right]+\mathbf{u}\cdot\nabla p_t=0, \tag{A 1}$$

应用恒等式：

$$\begin{cases}\mathbf{u}\cdot\partial_t\left(\rho\mathbf{u}\right)=\partial_t\left(\rho\left|\mathbf{u}\right|^2/2\right),\\ \mathbf{u}\cdot\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}\right)=\nabla\cdot\left(\rho\left|\mathbf{u}\right|^2\mathbf{u}/2\right),\\ \mathbf{u}\cdot\nabla p_t=\nabla\cdot\left(p_t\mathbf{u}\right)-p_t\nabla\cdot\mathbf{u},\end{cases} \tag{A 2}$$

我们可以得到：

$$\partial_t\left(\rho\left|\mathbf{u}\right|^2/2\right)+\nabla\cdot\left(\rho\left|\mathbf{u}\right|^2\mathbf{u}/2\right)+\nabla\cdot\left(p_t\mathbf{u}\right)-p_t\nabla\cdot\mathbf{u}=0. \tag{A 3}$$

因此，将式（4.1*e*）、式（4.1*f*）和式（A3）相加，可得总能量密度的对流方程：

$$\partial_t\left(\rho e_t\right)+\nabla\cdot\left(\rho e_t\mathbf{u}\right)+\nabla\cdot\left(p_t\mathbf{u}\right)=0. \tag{A 4}$$

附录 B. 双曲系统的雅可比矩阵和特征值

在一维情形下，式（4.1）中的双曲子系统可用守恒变量 $\mathbf{U}=\left(\rho_l\alpha_l,\ \rho_g\alpha_g,\ \rho u,\ \rho e,\ E_r,\ \alpha_l\right)^{\mathrm{T}}$ 重写为

$$\partial_t\mathbf{U}+\mathbf{A}(\mathbf{U})\partial_x\mathbf{U}=0. \tag{B 1}$$

雅可比矩阵$\mathbf{A}$写成如下形式：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{\rho_g\alpha_g u}{\rho} & -\frac{\rho_l\alpha_l u}{\rho} & \frac{\rho_l\alpha_l}{\rho} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\rho_g\alpha_g u}{\rho} & \frac{\rho_l\alpha_l u}{\rho} & \frac{\rho_g\alpha_g}{\rho} & 0 & 0 & 0\\ -u^2 & -u^2 & 2u & \gamma-1 & \frac{1}{3} & W\\ -\frac{(\rho e+p)u}{\rho} & -\frac{(\rho e+p)u}{\rho} & \frac{\rho e+p}{\rho} & u & 0 & 0\\ -\frac{(E_r+p_r)u}{\rho} & -\frac{(E_r+p_r)u}{\rho} & \frac{E_r+p_r}{\rho} & 0 & u & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u\end{bmatrix},$$

其中 $W=\partial p/\partial\alpha_l$。应用混合物的状态方程式（3.6），可将其写为：

$$W=\frac{(\gamma-1)^2}{(\gamma_l-1)(\gamma_g-1)}\left((\gamma_l-\gamma_g)\rho e+\gamma_g \mathrm{P}_{\infty,g}-\gamma_l \mathrm{P}_{\infty,l}\right). \tag{B 2}$$

A 具有六个实特征值，即 $\lambda=\{u,\ u,\ u,\ u,\ u-C_s,\ u+C_s\}$，其中系统的特征波速 C_s 表示为：

$$C_s=\sqrt{C^2+\frac{4p_r}{3\rho}}, \tag{B 3}$$

那么，矩阵 **A** 的右特征向量为：
$\mathbf{R}_1(\mathbf{U})=(0,\ 0,\ 0,\ -W,\ 0,\ \gamma-1)^{\mathrm{T}}$,
$\mathbf{R}_2(\mathbf{U})=(0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 3(\gamma-1),\ 0)^{\mathrm{T}}$,
$\mathbf{R}_3(\mathbf{U})=(1,\ 0,\ u,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$,
$\mathbf{R}_4(\mathbf{U})=(-1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$,
$\mathbf{R}_5(\mathbf{U})=\left(\rho_l\alpha_l,\ \rho_g\alpha_g,\ \rho(u-C_s),\ \rho C^2/(\gamma-1),\ 4p_r,\ 0\right)^{\mathrm{T}}$,
$\mathbf{R}_6(\mathbf{U})=\left(\rho_l\alpha_l,\ \rho_g\alpha_g,\ \rho(u+C_s),\ \rho C^2/(\gamma-1),\ 4p_r,\ 0\right)^{\mathrm{T}}$.

附录 C. 根据总能量计算混合物内能和辐射能

将式（4.3）从 n 时间步推进至中间状态（$*$），可得总能量（ρe_t）*。然而，我们的目标变量是内能（ρe）* 和辐射能（E_r）*。我们不直接推进式（4.1*e*）和式（4.1*f*），主要是因为在存在激波的情况下，涉及 $\nabla\cdot\mathbf{u}$ 的压力功项难以计算。

方程 (4.1*e*) 和方程 (4.1*f*) 的离散形式给出了由对流（上标 adv）和压力功（上标 $work$）引起的能量增量：

$$(\rho e)^*-(\rho e)^n=\underbrace{-\nabla\cdot(\rho e\mathbf{u})^n\Delta t}_{\Delta(\rho e)^{adv}}\ \underbrace{-(p\nabla\cdot\mathbf{u})^n\Delta t}_{\Delta(\rho e)^{work}}, \tag{C 1}$$

$$(E_r)^*-(E_r)^n=\underbrace{-\nabla\cdot(E_r\mathbf{u})^n\Delta t}_{\Delta(E_r)^{adv}}\ \underbrace{-(p_r\nabla\cdot\mathbf{u})^n\Delta t}_{\Delta(E_r)^{work}}. \tag{C 2}$$

能量守恒要求

$$\Delta(\rho e_t)=\Delta(\rho e_k)+\Delta(\rho e)^{adv}+\Delta(E_r)^{adv}+\Delta(\rho e)^{work}+\Delta(E_r)^{work}, \tag{C 3}$$

其中，总能量 ($\Delta(\rho e_t)$) 和动能 ($\Delta(\rho e_k)$) 的增量通过以下方式计算

$$\begin{cases}\Delta(\rho e_t)=(\rho e_t)^*-(\rho e_t)^n,\\ \Delta(\rho e_k)=\left(\rho|\mathbf{u}|^2/2\right)^*-\left(\rho|\mathbf{u}|^2/2\right)^n.\end{cases}$$

接下来需要求出四个未知量 $\Delta(\rho e)^{adv}$，$\Delta(E_r)^{adv}$，$\Delta(\rho e)^{work}$，以及$\Delta(E_r)^{work}$。

能量对流，即 $\Delta(\rho e)^{adv}$ 和 $\Delta(E_r)^{adv}$，通过与双曲子系统（式（4.1*a-d*）和式（4.3））同步推进来计算。然后，通过应用其比值来确定压力功（$\Delta(\rho e)^{work}$ 和 $\Delta(E_r)^{work}$）

p_r/p 根据式（C1）和式（C 2）：

$$\begin{cases} \Delta(\rho e)^{work} = \dfrac{p}{p+p_r}\left(\Delta(\rho e_t) - \Delta(\rho e_k) - \Delta(\rho e)^{adv} - \Delta(E_r)^{adv}\right), \\ \Delta(E_r)^{work} = \dfrac{p_r}{p+p_r}\left(\Delta(\rho e_t) - \Delta(\rho e_k) - \Delta(\rho e)^{adv} - \Delta(E_r)^{adv}\right). \end{cases} \tag{C 4}$$

最后（ρe）* 和（E_r）* 可由方程（C1）和方程（C2）计算得到。

附录 D. 激光-液滴相互作用模拟中所采用的物理模型公式

本文采用一系列物理模型来模拟 LPP-EUV 中的预脉冲场景。具体而言，电离度（Z_g）采用托马斯-费米理论（More 1985）建模，热传导系数（κ_g）采用 Spitzer-Härm 理论（Spitzer &Härm 1953）建模，而辐射输运系数（$\chi_{r,\ g}$，$\omega_{r,\ g}$）则采用Tsakiris 与 Eidmann（1987）提出的经验公式。

D.1. 托马斯-费米模型

托马斯-费米模型（More 1985）为高密度等离子体（例如 EUV 中的 LPP）的电离度提供了一种实用的近似表达 Z_g，具体如下：

$$Z_g = \frac{x}{1+x+\sqrt{1+2x}}Z, \tag{D 1}$$

其中

$$\begin{cases} x = \eta\left(\dfrac{\rho_g}{AZ}\right)^{\zeta}\left[1+\left(a_1\left(\dfrac{T_g}{Z^{4/3}}\right)^{a_2}+a_3\left(\dfrac{T_g}{Z^{4/3}}\right)^{a_4}\right)^{L}\left(\dfrac{\rho_g}{AZ}\right)^{(N-1)L}\right]^{\beta/L}, \\ N = -\exp\left(b_0+b_1\left(\dfrac{T_g}{Z^{4/3}+T_g}\right)+b_2\left(\dfrac{T_g}{Z^{4/3}+T_g}\right)^2\right), \\ L = c_1\cdot\dfrac{T_g}{Z^{4/3}+T_g}+c_2. \end{cases} \tag{D 2}$$

其中系数为 $\eta = 14.3139$, $\zeta = 0.6624$, $a_1 = 0.003323$, $a_2 = 0.9718$, a_3 =9.26148 × 10^{-5}, $a_4 = 3.10165$, $b_0 = -1.763$, $b_1 = 1.43175$, $b_2 = 0.31546$, $c_1 = -0.366667$ 和 $c_2 = 0.983333$。ρ_g 和 T_g 分别表示等离子体的密度和温度，单位分别为 g/cm^3 和 eV。A和 Z 分别表示该元素的质量和原子序数。具体而言，对于锡，$A = 118$ 和 $Z = 50$ 。

D.2. *Spitzer-Harm* 理论

Spitzer-Harm 理论（Spitzer & Härm 1953）描述了高温等离子体中占主导地位的碰撞能量交换，从而确保局部热力学平衡。这些条件在我们的模拟域的主体区域内近似满足：

$$\kappa_g = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{3/2}\frac{k_B^{7/2}}{e^4\sqrt{m_e}}\left(\frac{1}{1+3.3/Z_g}\right)\frac{T_g^{5/2}}{Z_g\ln\Lambda}, \tag{D 3}$$

其中，$k_B = 1.3807\times10^{-16}$ g cm^2/(s^2 K) 是玻尔兹曼常数，$e = 4.8032\times10^{-10}$ statcoulomb 是电子电荷，$m_e = 9.1094\times10^{-28}$ g 是电子质量，$\ln\Lambda$ 是库仑对数，其定义如下：

$$\ln\Lambda = \ln\left[\sqrt{\frac{k_BT_g}{4\pi e^2n_e}}\Big/\max\left(\frac{Z_ge^2}{3k_BT_g},\frac{\hbar}{2\sqrt{3k_BT_gm_e}}\right)\right], \tag{D 4}$$

其中，$n_e = \rho_g Z_g N_A / M_g$ 是电子数密度（单位为 cm，mol 是阿伏伽德罗常数），$N_A = 6.022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$ 是约化普朗克常数。$\hbar = 1.0546 \times 10^{-27}$ g cm^2/s

D.3. 辐射经验公式

辐射输运系数（$\chi_{r,\,g}$,$\omega_{r,\,g}$）可写成以下形式：

$$\begin{cases} \chi_{r,g} = \dfrac{ac}{3\rho_g \sigma_R}, \\ \omega_{r,g} = ac\rho_g \sigma_P, \end{cases} \tag{D 5}$$

其中 a 为辐射常数，$c = 3 \times 10^{10}\,\mathrm{cm/s}$ 为真空光速。Rossland σ_R 和 Planck σ_P 平均不透明度由取自 Tsakiris 与 Eidmann (1987) 的经验公式给出。这些公式已被证明对研究涉及辐射能输运的流体动力学现象（例如高温高密度等离子体）有用：

$$\begin{cases} \sigma_R[\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}] = 72.19 T_g^{-1.571}[\mathrm{keV}] \rho_g^{0.16}[\mathrm{g/cm}^3], \\ \sigma_P[\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}] = 328.55 T_g^{-1.588}[\mathrm{keV}] \rho_g^{0.228}[\mathrm{g/cm}^3]. \end{cases} \tag{D 6}$$

参考文献

Allaire, G., Clerc, S. & Kokh, S. 2002 用于模拟可压缩流体之间界面的五方程模型。《计算物理学杂志》**181**, 577–616。

Basko, M. M., Novikov, V. G. & Grushin, A. S. 2015 强辐射等离子体中准稳态激光烧蚀前沿的结构。《等离子体物理》**22**, 053111. Basko, M. M., Sasorov, P. V., Murakami, M., Novikov, V. G. & Grushin, A. S. 2012 圆柱形钨等离子体柱辐射主导内爆的一维研究。*Plasma Phys. Control. Fusion* **54**, 055003. Bo, W. & Grove, J. W. 2014 一种基于幽灵流体法的流体体积法，用于可压缩多流体流动。《计算流体》**90**, 113–122. Castor, J. I. 2004 辐射流体动力学。剑桥大学出版社。Faik, S., Basko, M. M., Tauschwitz, A., Iosilevskiy, I. & Maruhn, J. A. 2012 体积加热物质经过液-汽亚稳态时的动力学。*High Energy Density Phys.* **8**, 349–359. França, H. L., Schubert, H. K., Versolato, O. & Jalaal, M. 2025 激光诱导液滴变形：由瞬时压力冲量解释曲率反转。《流体力学杂志》**1020**, A21. Fryxell, B., Olson, K., Ricker, P., Timmes, F. X., Zingale, M., Lamb, D. Q., MacNeice, P., Rosner, R., Truran, J. W. & Tufo, H. 2000 FLASH：用于模拟天体物理热核闪耀的自适应网格流体动力学代码。*Astrophys. J. Suppl. Ser.* **131**, 273. Gelderblom, H., Lhuissier, H., Klein, A. L., Bouwhuis, W., Lohse, D., Villermaux, E. & Snoeijer, J. H. 2016 **794**, 676 699 激光脉冲冲击引起的液滴变形。《流体力学杂志》– . Hawker, N. A. & Ventikos, Y. 2012 强冲击波与液体介质中气泡的相互作用：数值研究。《流体力学杂志》**701**, 59–97. Hernandez-Rueda, J., Liu, B., Hemminga, D. J., Mostafa, Y., Meijer, R. A., Kurilovich, D., Basko, M., Gelderblom, H., Sheil, J. & Versolato, O. O. 2022 激光产生的等离子体驱动锡液滴的早期流体动力学响应。*Phys. Rev. Res.* **4**, 013142. Johnsen, E. & Colonius, T. 2006 WENO格式在可压缩多组分流动问题中的实现。《计算物理学杂志》**219** (2), 715–732. Kapila, A. K., Menikoff, R., Bdzil, J. B., Son, S. F. & Stewart, D. S. 2001 双相

颗粒材料中爆燃转爆轰的建模：简化方程。《流体物理》**13**, 3002–3024. Klein, A. L., Bouwhuis, W., Visser, C. W., Lhuissier, H., Sun, C., Snoeijer, J. H., Villermaux, E., Lohse, D. & Gelderblom, H. 2015 激光脉冲冲击引起的液滴成形。《物理评论应用》**3**, 044018. Klein, A. L., Kurilovich, D., Lhuissier, H., Versolato, O. O., Lohse, D., Villermaux, E. & Gelderblom, H. 2020 激光脉冲冲击引起的液滴破碎。《流体力学杂志》**893**, A7. Kurilovich, D., Basko, M. M., Kim, D. A., Torretti, F., Schupp, R., Visschers, J. C., Scheers, J., Hoekstra, R., Ubachs, W. & Versolato, O. O. 2018 激光烧蚀锡微液滴上等离子体压力的幂律标度关系。《等离子体物理》**25**, 012709. Kurilovich, D., Klein, A. L., Torretti, F., Lassise, A., Hoekstra, R., Ubachs, W., Gelderblom, H. & Versolato, O. O. 2016 金属微液滴的等离子体推进及其在激光冲击下的变形。《物理评论应用》**6**, 014018. Le Métayer, O., Massoni, J. & Saurel, R. 2004 为双相流动模型建立液体及其蒸气的状态方程。《国际热科学杂志》**43**, 265–276. Lin, J. Y. 2016 切割单元法的发展及激波-气泡相互作用的动力学。博士论文，中国科学技术大学，中国合肥。Liu, B., Hernandez-Rueda, J., Gelderblom, H. & Versolato, O. O. 2022 膨胀的液态锡片所喷射碎片的速度。《物理评论：流体》**7**, 083601. Liu, W., Koniges, A., Gott, K., Eder, D., Barnard, J., Friedman, A., Masters, N. & Fisher, A. 2017 含自适应网格细化的多材料 ALE 代码中的表面张力模型。《计算流体》**151**, 91–101. Lowrie, R. B. & Edwards, J. D. 2008 灰体非平衡扩散条件下的辐射激波解。《激波》**18**, 129–143. MacFarlane, J. J., Golovkin, I. E. & Woodruff, P. R. 2006 HELIOS-CR——一种内置原子动力学建模的一维辐射磁流体力学代码。《定量光谱学与辐射传递杂志》**99**, 381–397. McLachlan, R. I. & Quispel, G. R. W. 2002 分裂方法。《数值学报》**11**, 341–434. Meijer, R. A., Kurilovich, D., Eikema, K. S. E., Versolato, O. O. & Witte, S. 2022 从短时标预脉冲到长时标预脉冲的转变：激光脉冲对锡微液滴的冲击。《应用物理杂志》**131**, 105905. Min, Q., Xu, Z., He, S., Lu, H., Liu, X., Shen, R., Wu, Y., Pan, Q., Zhao, C., Chen, F., Su, M. & Dong, C. 2024 RHDLPP：一种用于激光产生等离子体的多群辐射流体力学代码。《计算物理通讯》**302**, 109242. Mizoguchi, H., Abe, T., Watanabe, Y., Ishihara, T., Ohta, T., Hori, T., Kurosu, A., Komori, H., Kakizaki, K., Sumitani, A., Wakabayashi, O., Nakarai, H., Fujimoto, J. & Endo, A. 2010 用于高产能极紫外光刻的第一代激光等离子体源系统。**7636**, 763608, 国际光学工程学会。More, R. M. 1985 压致电离、共振以及束缚态和自由态的连续性。《原子与分子物理进展》**21**, 305–356. Nishihara, K., Sunahara, A., Sasaki, A., Nunami, M., Tanuma, H., Fujioka, S., Shimada, Y., Fujima, K., Furukawa, H., Kato, T., Koike, F., More, R., Murakami, M., Nishikawa, T., Zhakhovskii, V., Gamata, K., Takata, A., Ueda, H., Nishimura, H., Izawa, Y., Miyanaga, N. & Mima, K. 2008 为研制光刻用极紫外光源而开展的等离子体物理与辐射流体动力学研究。《等离子体物理》**15**, 056708. Nourgaliev, R. R., Dinh, T. N. & Theofanous, T. G. 2006 可压缩多流体动力学中的自适应特征匹配。《计算物理学杂志》**213**, 500–529. Nykteri, G. & Gavaises, M. 2022 使用多尺度双流体方法对激光脉冲冲击引起的液滴边缘破碎进行数值建模。《物理评论：流体》**7**, 103604. Reijers, S. A., Snoeijer, J. H. & Gelderblom, H. 2017 短激光诱导压力脉冲引起的液滴变形。《流体力学杂志》**828**, 374–394. Reinicke, P. & Meyer-ter Vehn, J. 1991 带热传导的点爆炸。《流体物理 *A*》**3**, 1807–1818. Sheil, J., Poirier, L., Lassise, A. C., Hemminga, D. J., Schouwenaars, S., Braaksma, N., Frenzel, A., Hoekstra, R. & Versolato, O. O. 2024 幂律标度关系

激光驱动等离子体膨胀过程中的平均电荷态和动能。《物理评论快报》**133**, 125101. J. Sheil、O. Versolato、V. Bakshi & H. Scott，2023，第一届EUV光源代码比较研讨会综述。《原子》**11**, 130. K. Shyue，1998，一种用于可压缩多组分问题的高效激波捕捉算法。《计算物理学杂志》**142**, 208–242. T. Sizyuk & A. Hassanein，2015，为先进纳米光刻拓展高效极紫外光源的发展路径。《等离子体物理》**22**, 093101. J. L. Spitzer & R. Härm，1953，完全电离气体中的输运现象。《物理评论》**89**, 977. T. Tao、Z. Li、K. Qian、X. Jiang、G. Zheng、R. Yan、H. Liu、Q. Jia、J. Li、H. Ding & J. Zheng，2025，一种用于激光等离子体相互作用的基于光栅化的光线追踪方法。《高功率激光科学与工程》**13**, e37. E. F. Toro，2013，《流体动力学中的黎曼求解器与数值方法：实用导论》。施普林格科学与商业媒体。G. D. Tsakiris & K. Eidmann，1987，一种计算高温高密度等离子体中普朗克和罗斯兰平均不透明度的近似方法。《定量光谱学与辐射传递杂志》**38**, 353 368– 。M. van de Kerkhof、F. Liu、M. Meeuwissen、X. Zhang、R. de Kruif、N. Davydova、G. Schiffelers、F. Wählisch、E. van Setten、W. Varenkamp、K. Ricken、L. de Winter、J. McNamara & M. Bayraktar，2020，高功率EUV系统的光谱纯度表现。**11323**, 1132321，国际光学工程学会。O. O. Versolato，2019，用于纳米光刻的激光驱动锡等离子体EUV辐射光源的物理学。《等离子体源科学与技术》**28**, 083001. O. O. Versolato、J. Sheil、S. Witte、W. Ubachs & R. Hoekstra，2022，固态激光器驱动的微液滴锡等离子体EUV辐射光源（专题综述）。《光学杂志》**24**, 054014.