考虑晶格对称性的尖锐界面能的相场近似

SERGIO CONTI ，VI谨献给 CRISMALE、ADRIANA GARRONI、ANNALISA MALUSA

arXiv:2601.07497v1 [math.FA] 12 Jan 2026

摘要。我们提出一种定义在分割上的尖锐界面能的相场近似，旨在模拟多晶体中的晶界。自变量取值于正交群 O(d) 对晶格点群 $\mathcal{G}$ 取商所得的空间中，以反映底层晶格的晶体学对称性。在尖锐界面极限下，表面能对于较小的取向差角呈现 Read-Shockley型行为，其缩放形式为 $\theta|\log\,\theta|$。正则化泛函可用于晶粒生长模拟，以及根据成像数据重建晶界。

目录

1. 引言 1 2. 取值于度量空间的 Sobolev 函数表述 7 3. 紧性 16 4. 表面能密度 20 5. Γ-收敛的证明 28 致谢 38 参考文献 39

1. 引言

我们研究多晶材料的尖锐界面变分模型，该模型完全遵循底层晶格的对称性。能量定义在区域的划分上，其中每个子集——代表一个独立晶粒——都赋予一个取向，并将其建模为商空间 O(d)/$\mathcal{G}$ 中的元素。这里，$\mathcal{G}\subset$O(d) 是描述参考晶格对称性的有限点群，局部取向相对于该参考晶格测量。总能量由相邻晶粒之间界面上的积分给出。被积函数，即表面能密度，取决于两个相邻晶粒的取向以及界面的单位法向量。为确保分片常值取向场的类是闭合的，我们假设能量密度在取向差角趋于零时超线性增长。

该模型的一个显著特征是，取向变量的取值属于流形，而非线性空间。因此，正则化、近似和插值等经典分析工具无法直接适用，需要为流形值场建立专门的理论框架。

这类模型广泛用于研究金属和合金中的多晶结构，参见例如 [13, 8, 26, 37] 及其中的参考文献。对取向和晶格对称性的依赖，同样是相关问题的核心，例如具有给定

日期：2026年1月13日。

面积和最小周长的多边形分割 [24], ，以及最优量化或测度定位 [11, 12]。点群对称性也会出现在分数缺陷的变分模型中，例如参见[6, 5, 31]。半连续性和松弛等分析问题——尽管未明确处理对称群 $\mathcal{G}$ ——已在 [2, 34, 15]中得到研究。

本文的主要目标是为上述尖锐界面模型构建一种弥散界面（即相场）近似。具体而言，我们为表面能构建相场近似，其密度在晶粒间的取向差趋于零时也趋于零，但趋于零的速度呈超线性。我们的方法以 [36, 1] 中为黏聚断裂引入的模型为基础。分析依赖于两个关键的抽象要素。首先，按照 [36, 1] 中的研究，在度量空间值的索伯列夫空间及有界变差函数空间的推广框架内表述紧性性质。其次，恢复序列的构造基于一项针对取值于紧流形的 BV 函数的提升定理，该定理由 [14] 建立（这里我们针对具体情形给出一个更简洁的证明，见定理 2.12）。这些工具使我们能够严格证明相场近似收敛到尖锐界面极限。

为更详细地描述尖锐界面模型，设 $\{E_i\}_i$ 是区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 的一个划分，该区域表示材料体。每个集合 E_i 对应一个具有指定取向 $R_i \in \mathrm{O}(d)$ 的晶粒，从而得到一个以序参量 $\beta = \sum_i \chi_{E_i} R_i$ 表示的分段常数函数。晶界包含在 β 的不连续集 J_β 中，相应的能量定义为

$$\int_{J_\beta} \Psi(R^-, R^+, \nu_\beta)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} = \sum_{i \neq j} \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E_i \cap \partial^* E_j) \Psi(R_i, R_j, \nu_{ij}), \tag{1.1}$$

其中， $\Psi : \mathrm{O}(d) \times \mathrm{O}(d) \times \mathbb{S}^{N-1} \to [0, \infty)$ 是表面能密度， ν_β 表示 J_β的测度论意义下的法向量，而 ν_{ij} 是约化边界$\partial^* E_i \cap \partial^* E_j$交集的法向量。对于这类能量，一个自然的函数空间是取值于 $\mathrm{O}(d)$、梯度的绝对连续部分为零的特殊有界变差函数空间，

$$\mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)) := \{\beta \in \mathrm{SBV}(\Omega; \mathrm{O}(d)) \colon \nabla \beta = 0\}. \tag{1.2}$$

为了使与 (1.1) 相关的变分问题在该空间中适定，需要对 Ψ施加某些条件。具体而言，能量的下半连续性可由 Ψ 的 BV椭圆性推出（见 [3, 定理 5.14]）。此外，$\mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d))$ 在相关收敛下序列闭至关重要。这要求有界能量的序列不能收敛到具有弥散梯度的场。一个充分条件是 Ψ 在零点处具有无穷斜率，

$$\lim_{|R^+ - R^-| \to 0} \frac{\Psi(R^+, R^-, \nu)}{|R^+ - R^-|} = +\infty$$

在 ν 中一致成立，见 [3, 定理 4.7]。将 $\theta = |R^+ - R^-|$ 记为相邻晶粒取向之间的相对失配，对于较小的 θ， Ψ 的特定增长律 $\theta|\log \theta|$ 最早由 Read 和 Shockley 于 20 世纪 50 年代提出 [35]。在二维情形下，最近已严格推导出这一缩放关系：它是一个模型的极限，该模型考虑了边界处不相容性和晶体缺陷所诱发的弹性畸变，见 [33, 28] 和 [27]。

由于 β 被解释为取值于 $\mathrm{O}(d)$ 的场，因此必须强制要求 Ψ在$\mathcal{G}$ 的作用下保持不变。特别是，取向相差一个 $\mathcal{G}$ 元素倍数的区域之间的边界是多余的，因为它们代表相同的物理状态，且不贡献能量。因此，我们要求 $\Psi(R,\ GR,\ \nu) = 0$ 对所有 $R \in \mathrm{O}(d)$、 $G \in \mathcal{G}$、$\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$均成立，并且更一般地，

$$\Psi(GR, G'R', \nu) = \Psi(R, R', \nu) \qquad \text{for all } R,\, R' \in \mathrm{O}(d),\, G,\, G' \in \mathcal{G},\, \nu \in \mathbb{S}^{N-1}. \tag{1.3}$$

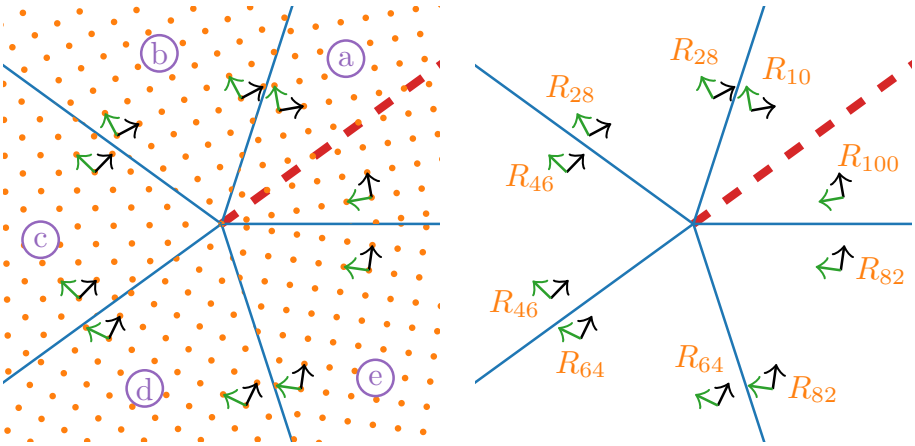

图1. 一种可能构型的示意图。左图：圆点表示由五个晶粒组成的多晶体中的局部晶格取向，分别标记为 (a)、(b)、(c)、(d)、(e)。图中示意了每个界面两侧基向量的一种可能取向；每个界面处的取向变化均为18度。然而，这些变化会累积；若从给定取向（界面 (a) –(b)）开始，那么经过五个界面后，取向将与初始取向相差90度，从而产生一个虚假的界面，例如沿晶粒 (a) 中的红色虚线所示。右图标出了相应的显式旋转矩阵（角度以度为单位）。

需要注意的是，即使在简单的例子中，也无法通过为每个取向类指定一致的代表元来消除这种不变性。示意图见图1。

本文旨在构造变分相场模型，使其收敛到形如 (1.1) 的尖锐界面能量。我们的近似尊重晶格点群 $\mathcal{G}$ 下的不变性，并再现小错配角下的 Read-Shockley 超线性标度 $\theta|\log\,\theta|$。该方法的动机和灵感来自 [8, 26] 中用于多晶图像分割的算法。

相场方法广泛应用于尖锐界面能的数值模拟，更一般地，也用于自由间断问题。通过用窄的弥散层替代不连续集，这些方法无需显式追踪界面，并可使用专为 Sobolev 函数设计的标准有限元离散。典型应用包括图像重建 [17, 9, 10] 和断裂力学 [29, 25, 16, 30, 38, 32]。

这一策略源于 Mumford-Shah 泛函的 Ambrosio-Tortorelli 近似 [4], ，其中表面能密度仅取决于跳跃集的测度，而与跳跃幅度无关。近年来，针对黏聚断裂和分割能量（其表面能可能取决于张开量）的多种相场近似已得到严格发展，参见例如 [22, 19, 18, 20, 21]。

我们采用 [19, 21], 中提出的方法来近似具有超线性能量密度 Ψ的尖锐界面能，关键的额外挑战在于纳入群不变性，下面将对此作更详细的说明。还有两点技术上的区别值得注意：首先，为了恢复 Read-Shockley 缩放律，我们对 [19, 第 7]–[21], 节中的构造作了调整；该构造原本是为小张开量下具有一般超线性幂律增长的情形设计的。其次，我们

引入一个惩罚项——类似于 [18]中为近似具有脆性界面能的分段刚性运动而采用的惩罚项——以确保弥散梯度在极限下消失。

1.1. 主要结果的表述。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ 为具有 Lipschitz边界的有界连通集，且 $\mathcal{G} \subset \mathrm{O}(d)$，其中 $d \geq 2$，是一个有限群，可能具有 $d \neq N$。我们定义编码晶格对称性的可容许序参量空间如下:

$$\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}) := \{\beta \in \mathrm{SBV}^2(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d})\colon \beta^+(x) \in \mathcal{G}\,\beta^-(x) \text{ for } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } x \in J_\beta\}, \tag{1.4}$$

即，所有满足 $\mathcal{H}^{N-1}(J_\beta) < \infty$, $\nabla\beta \in L^2$ 的 SBV 函数构成的集合，并且跳跃集两侧的迹仅相差群 $\mathcal{G}$ 中的一个元素（为简洁起见，我们有时简称为"在 $\mathcal{G}$ 中跳跃"）。

对于 $\varepsilon > 0$ 和开集 $A \subset \Omega$，我们考虑能量

$$\mathcal{F}_\varepsilon^{\mathrm{red}}(\beta, v; A) := \begin{cases} \displaystyle\int_A f_\varepsilon^2(v)\,|\nabla\beta|^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{PF}_\varepsilon(v;A) & \text{in } \mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}) \times H^1(\Omega;[0,1]), \\ +\infty & \text{otherwise in } L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}) \times L^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 PF_ε 是一种 Modica-Mortola型能量，定义为

$$\mathrm{PF}_\varepsilon(v;A) := \int_A \left(\frac{(1-v)^2}{4\varepsilon} + \varepsilon|\nabla v|^2\right)\mathrm{d}x, \qquad v \in H^1(\Omega;[0,1]). \tag{1.6}$$

我们注意到， $\mathcal{F}_\varepsilon^{\mathrm{red}}$ 在空间 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}$ 上是有限的，而且序参量 β 在 $\mathcal{G}$ 中的跳跃不会对能量产生贡献。与 [19, 21], 中提出的模型一样， $|\nabla\beta|^2$ 前面的前因子 f_ε （即所谓的损伤系数）的选择，对于刻画极限表面能密度的预期行为至关重要。不同于 [19, 21], , 并遵循 [18], , 我们允许 f_ε 取较大值，从而确保极限场没有弥散梯度。更准确地说，我们设

$$f_\varepsilon(s) := M_\varepsilon \wedge \sqrt{\varepsilon} f(s) \text{ for } s \in [0,1[, \quad f_\varepsilon(1) = M_\varepsilon, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} M_\varepsilon = +\infty, \tag{1.7}$$

其中， $f \in C([0,1[;\,[0,+\infty[)$ 是一个非递减函数，满足 $f^{-1}(0) = \{0\}$，且

$$\ell := \lim_{s\to 1^-} \frac{1-s}{|\log(1-s)|} f(s) > 0, \tag{1.8}$$

例如

$$f(s) = \ell\frac{|\log(1-s)|}{1-s}.$$

f 在 1 处的奇异性导致表面张力在小张开量下呈现对数超线性行为（参见命题 4.4）；而通过发散序列 M_ε 进行截断，则确保了 $\nabla\beta = 0$ 条件在 Γ-极限的区域内成立（参见定理 3.2 和定理 3.3）。

最后，我们引入一个惩罚项，使极限场渐近地取值于 $\mathrm{O}(d)$。为此，我们考虑一个额外的正参数 $\delta_\varepsilon \to 0^+$ ，并定义修正后的能量

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\beta, v; A) := \mathcal{F}_\varepsilon^{\mathrm{red}}(\beta, v; A) + \frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_A \mathrm{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))\,\mathrm{d}x. \tag{1.9}$$

W我们将证明，能量 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 的极限行为仅取决于渐近比值

$$\lambda := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \in [0,+\infty], \tag{1.10}$$

我们假设其存在。鉴于能量 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 在对称群 $\mathcal{G}$作用下的不变性，自然可以采用以下关于 $\mathcal{G}$的收敛概念。一个

族 $(\beta_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d})$ 被称为以 $L^1_{\mathcal{G}}$意义收敛到 β，如果存在一个序列$G_\varepsilon \in L^\infty(\Omega;\mathcal{G})$ 使得

$$G_\varepsilon \beta_\varepsilon \to \beta \quad \text{in } L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}). \tag{1.11}$$

关于这一收敛概念，我们证明了一致有界能量序列的紧性结果，并刻画了 $\mathcal{F}_\varepsilon$的 Γ-极限。更确切地说，对于任意 $\lambda \in [0,+\infty]$，我们定义锐界面泛函

$$\mathcal{F}^\lambda(\beta, v) := \begin{cases} \displaystyle\int_{J_\beta} g_\lambda(\beta^-, \beta^+)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} & \text{if } \beta \in \mathrm{SBV}_0(\Omega;\mathrm{O}(d)),\ v = 1, \\ +\infty & \text{otherwise in } L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}) \times L^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.12}$$

其中，表面能密度 g_λ 由渐近单胞问题确定，该问题将在第 4 节中介绍并详细分析。

由于能量 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{G}$的作用下具有不变性，极限密度 g_λ 也具有相同的不变性。也就是说，对于每个 R^+, $R^- \in \mathrm{O}(d)$，我们有

$$g_\lambda(R^+, R^-) = g_\lambda(GR^+, G'R^-) \qquad \forall\, G, G' \in \mathcal{G}, \tag{1.13}$$

（见命题 Proposition 4.1）。特别地，泛函 $\mathcal{F}^\lambda$ 仅取决于等价类 of β i 在商空间 $\mathrm{O}(d)/\mathcal{G}$ 中，即，

$$\mathcal{F}^\lambda(\beta, v) = \mathcal{F}^\lambda(G\beta, v) \quad \text{for every } (\beta, v, G) \in L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}) \times L^1(\Omega) \times \mathrm{BV}(\Omega;\mathcal{G}). \tag{1.14}$$

本文的主要结果如下 .

定理 1.1。 以下性质成立：

(C) *For any* $(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d} \times [0,1])$ *satisfying*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon) < +\infty \tag{1.15}$$

存在 $\beta \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d))$ 使得，取某个子列后，

$$\beta_\varepsilon \to \beta \text{ in } L^1_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}), \qquad v_\varepsilon \to 1 \text{ in } L^1(\Omega); \tag{1.16}$$

(LB) 对于任意 $(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d} \times [0,1])$ 以及满足 (1.16) 的 $\beta \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d))$，有

$$\mathcal{F}^\lambda(\beta, 1) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon);$$

(UB) *For any* $\beta \in \mathrm{SBV}_0(\Omega;\mathrm{O}(d))$ *there exists* $(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}\times[0,1])$ *satisfying* (1.16) *and*

$$\mathcal{F}^\lambda(\beta, 1) \ge \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon). \tag{1.17}$$

1.2. 图像分割的应用。 为将定理 1.1 应用于多晶体图像的分割，我们假设 $N = d$ 并引入一个受 [8, 26] 启发的保真项。令$w \in C(\Omega;\mathbb{R})$ 表示多晶体的灰度图像，并令 $\sigma > 0$ 为与晶格间距同阶的小参数。我们固定有限个晶格向量 $v_1, \dots, v_K \in \mathbb{R}^d$，其中 $|v_k| \le \sigma$，以及正权重 $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, K$。

对于给定的区域 Ω'，满足 $\{x\colon \mathrm{dist}(x,\ \Omega') < 2\sigma\} \subset\subset \Omega$，我们将保真项定义为

$$\mathrm{FT}(\beta;\Omega') := \int_{E_\beta\cap\Omega'} \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \sum_{G\in\mathcal{G}} (w(x + \big(\beta(x)\big)^{-1} G v_k) - w(x))^2\, \mathrm{d}x, \tag{1.18}$$

其中

$$E_\beta := \{x \in \Omega\colon\ \det(\beta(x)) \ne 0,\ \|\big(\beta(x)\big)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \le 2\},$$

且 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 表示算子范数（即最大的奇异值）。该定义确保积分中包含的点 x 满足 $x + \big(\beta(x)\big)^{-1} G v_k \in \Omega$，从而使 FT 有良好定义。

由于向量 v_k 属于晶格，且 $\mathcal{G}$ 是相应的点群，因此向量 Gv_k也属于晶格。于是，如果 w 是取向为 $R \in \mathrm{O}(d)$ 的晶格图像，则对于所有 G 和 k，$w(x + RGv_k) = w(x)$，并且保真项 FT 在 $\beta = R^T$ 时达到最小。

保真项 FT 的定义确保其在群 $\mathcal{G}$ 的作用下具有不变性。特别地，对于任意 $\beta \in \mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d})$ 和任意 $G \in L^\infty(\Omega; \mathcal{G})$，有

$$\mathrm{FT}(G\beta; \Omega') = \mathrm{FT}(\beta; \Omega'). \tag{1.19}$$

此外，由于 w 的连续性，以及任何有界能量序列都收敛到一个取值于 $\mathrm{O}(d)$ 的极限这一事实（这意味着 $|\Omega \setminus E_{\beta_\varepsilon}| \to 0$），保真项 FT 关于沿有界能量序列的 $L^1_{\mathcal{G}}$ 收敛具有连续性。因此，根据定理 1.1，对于任意固定的 $\gamma > 0$，泛函序列

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\beta, v) := \mathcal{F}_\varepsilon(\beta, v; \Omega) + \gamma\,\mathrm{FT}(\beta; \Omega') \tag{1.20}$$

Γ-收敛（关于 $(\beta,\ v)$ 的 $L^1_{\mathcal{G}} \times L^1$ 收敛）至

$$\mathcal{H}^\lambda(\beta, v) := \mathcal{F}^\lambda(\beta, v; \Omega) + \gamma\,\mathrm{FT}(\beta; \Omega'). \tag{1.21}$$

鉴于定理 1.1 中已证明的等度强制性，这也意味着 $\mathcal{H}_\varepsilon$ 的极小值和近似极小化子收敛到 $\mathcal{H}^\lambda$ 的极小值和近似极小化子。显然，对于其他类型的保真项，只要它们在群 $\mathcal{G}$ 的作用下具有适当的不变性，并且关于沿有界能量序列的 $L^1_{\mathcal{G}}$ 收敛具有连续性，同样的结论也适用。

1.3. 主要困难与创新之处。 本文的关键创新在于引入了点群 $\mathcal{G}$，在其作用下，尖锐界面模型保持不变。尤为重要的是，我们能够在逼近泛函层面也纳入这种不变性。这要求在适当的空间中，采用一种特设的 场收敛概念，使其与群作用相容。

一个基本的前期挑战是为序参量选择合适的函数空间。在陈述定理和给出证明时，主要有两种可行的方法。在上述介绍中，我们选择了式 (1.4) 中定义的空间 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}$，它是经典空间 SBV 的子集。该空间的一个变体（采用不同记号）也自然出现在二维分数位错的建模中 [5, 31]。

另一种方法是直接在取值于商空间 $\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$ 的函数上定义泛函。在这一框架下，可以利用 $\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$ 的度量结构，并采用更抽象的框架，即研究取值于度量空间的 Sobolev 函数空间和有界变差函数空间；这一框架由 Ambrosio 在 [1] 中提出（另见 [36]）。值得注意的是，在这种度量空间方法中，逼近泛函仍像相场近似中通常的做法一样定义在 Sobolev 函数上，特别是这些场属于空间 $H^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$。然而，这种更抽象的设定也带来了显著困难。商空间缺乏线性结构，限制了许多标准分析和数值工具的适用性，例如有限元法。这给理论分析和数值模拟都带来了重大障碍。

因此，我们所选择的方法在捕捉基本的群不变性与保持便于分析和近似的结构之间取得了平衡。

为了比较这两种方法，重要的是澄清 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d})$ 与 $H^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 之间的关系。显然，对于 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d})$ 中的任意函数，逐点转化为等价类后，可得到 $H^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 中的一个函数（参见注记 2.4）。反之，在维数 $d \geq 2$ 下，$H^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 中的任意函数并不一定有一个（逐点的）$\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d})$ 代表元，因为一般来说，重构出的跳跃集可能具有无限测度，如引理 2.6 的反例所示。因此，一般而言，

在 $H^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 中定义的逼近泛函小于在 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d})$ 中定义的泛函，参见 (2.31)。

相反，当参考域 Ω 的维数为 1 时，其全序允许我们证明这两个空间是等价的，具体意义如上所述，并且可适当地表示为取值于 $\mathrm{M}^{d\times d}$ 的 H^1 函数，参见引理 2.5。此外，如果限制函数的目标集，类似的性质仍然成立，尤其是对于极限泛函的定义域，即空间 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathrm{O}(d))$ 和 $H^1(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$：事实上，在这种情况下，可以在取值于流形的 Sobolev 函数或 BV函数的框架下进行研究，并且可以实现提升，见下文定理 2.12。

基于上述关系，我们以一种使两种方法都能彼此独立地展开的方式进行论述，特别地，定理 1.1 可以无需使用取值于度量空间的 Sobolev 函数或 BV函数理论即可证明，下面对此进行描述。

对于紧性（C），我们利用具有一致有界能量的场 β_n 收敛到取值于 $\mathrm{O}(d)$ 的函数这一事实，并结合函数 $\det \beta_n$ 在 $W^{1,1}$ 对于 $\{v_n \geq c\}$ 是一致有界的这一事实，其中 $c > 0$。后者源于行列式的 $\mathcal{G}$ 不变性，以及 $\nabla\beta_n$ 在 $\{v_n \geq c\}$ 中的一致积分界。接着，根据定理 2.12 中的提升结果，我们得到 BV 中的一致有界性，但允许在具有有界周长的集合上作修改。

无论是在对极限域 SBV_0 的刻画中，还是在下界（LB）中，都可以化归为一维切片，因此，根据引理 2.5，只需处理标准 Sobolev 函数，并将 [19] 中的类似性质加以调整。在极限域的刻画中，我们采用了与 [21] 中类似的策略。上界（UB）利用 SBV_0 中的稠密性结果，通过跳跃集为若干超平面 [7]，片段有限并的函数来实现；这使得在跳跃平坦处可以使用针对 g_λ 的一维胞元公式中的最优剖面，而对于不同面交汇形成的 $N-2$ 维邻域，则采用精细构造加以处理。

利用 [1]，中的抽象理论，可以按照 [19]，中“经典”BV情形的类似论证，证明定理 2.15 中更一般的紧性（C）’（回顾 (2.31)）；而更一般的下界（LB）’则可借助引理 2.5 中的一维等价关系以及 [1] 中的一些精细性质，按照与（LB）类似的方式得到。反过来，最强的上界是（UB），因此（UB）’也随之成立。

本文结构如下。第 2 节介绍一些记号，并回顾取值于度量空间的 Sobolev 函数和 BV函数的基本理论，讨论它们与 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}$ 子空间对应形式之间的关系，并介绍取值于等价类的函数的表述，以及主要结果定理 2.15。随后，我们在第 3 节证明紧性，并刻画极限场的区域。第 4 节旨在定义、描述并刻画表面张力。这些分析对于在第 5 节证明下界和上界至关重要。

2. 取值于度量空间的 Sobolev 函数表述

本节讨论取值于度量空间的 Sobolev 函数问题表述。我们先介绍一些与全文相关的技术预备知识和记号。

2.1. 记号。在整篇论文中，Ω 是 $\mathbb{R}^N$，$N \geq 1$ 的一个有界连通开子集，其边界为 Lipschitz 边界；$\mathcal{A}(\Omega)$ 和 $\mathcal{B}(\Omega)$ 分别表示 Ω 的开子集和 Borel 子集的集合。当 Ω 是一维时，我们通常将其记作 I。$\mathbb{R}^N$ 中的 Lebesgue 测度和 k 维 Hausdorff测度分别记作 $\mathcal{L}^N$ 和 $\mathcal{H}^k$。我们用 $\mathrm{M}^{d\times d}$ 表示 $d\times d$ 矩阵空间，其中 $d \geq 2$。对于 $\beta \in \mathrm{M}^{d\times d}$，$\beta^T$ 和 $|\beta|$ 分别表示其转置矩阵和欧几里得范数。

给定 $\mathrm{O}(d)$ 的一个有限子群 $\mathcal{G}$，该子群在整篇论文中固定不变。我们将 $\mathrm{M}^{d\times d}$ 关于 $\mathcal{G}$ 的商空间记作 $\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$，其元素记作

$$[\beta] = \mathcal{G}\beta := \{G\beta \colon G \in \mathcal{G}\}, \qquad \beta \in \mathrm{M}^{d\times d}.$$

空间 $\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$ 是一个配备度量的可分完备度量空间

$$\mathrm{d}_{\mathcal{G}}([\beta],[\widetilde{\beta}]) := \min_{G\in\mathcal{G}} |\beta - G\widetilde{\beta}| \qquad \text{for every } [\beta],[\widetilde{\beta}] \in \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}. \tag{2.1}$$

2.2. **函数框架 I：度量空间值 Sobolev 函数。** 在下文中，我们始终假设

$$(X,\, \mathrm{d}_X) \text{ is a separable locally compact metric space,}$$

着眼于将其应用于 $X = \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$ 或 $X = \mathrm{O}(d)/\mathcal{G}$。此处将后者视为前者的子集，并赋予与前者相同的度量，如 (2.1) 中所定义。我们注意到，$\mathrm{O}(d)/\mathcal{G}$也可以视为一个流形，因此自然的做法是在每个切空间上采用 $\mathrm{O}(d)$ 从 $\mathrm{M}^{d\times d}$继承的度量，或 $\mathrm{O}(d)/\mathcal{G}$ 从 $\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$继承的度量，然后利用测地线将其延拓至每个连通分支；所得度量与 (2.1) 中的度量不同，但等价。 X 局部紧这一性质将在定义空间 $\mathrm{BV}(\Omega; X)$ 时用到，而定义 Sobolev 空间时则不需要。

对于每个 $p \in [1,+\infty]$，我们将空间 $L^p(\Omega;\, X)$ 定义为所有博雷尔函数$u : \Omega \to X$的集合，其中存在一个 $z_0 \in X$，使得 $\mathrm{d}_X(u(\cdot)\ z_0)\colon \Omega \to \mathbb{R}$属于 $L^p(\Omega)$。

注 2.1： $L^1_{\mathcal{G}}$–收敛对应于$L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$中等价类的收敛，即

$$\beta_\varepsilon \to \beta \text{ in } L^1_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}) \quad \text{if and only if} \quad [\beta_\varepsilon] \to [\beta] \text{ in } L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}),$$

这也等价于

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \mathrm{d}_{\mathcal{G}}([\beta_\varepsilon(x)],[\beta(x)])\,\mathrm{d}x = 0.$$

考虑函数 $\beta \in \mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}$，其定义见（1.4）。则 $\nabla\beta \in L^2$，并且在几乎每个跳跃点处都有 $\beta^+ \in \mathcal{G}\beta^-$。因此，如果我们考虑与 β相对应的等价类，即由 $[\beta] : \Omega \to \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$, $x \mapsto [\beta(x)]$, 定义的等价类，跳跃便消失了。特别地，预期该函数属于 $H^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$（该空间尚未定义）。

为使这一框架形式化，我们回顾文献 [36] 中关于取值于度量空间的 Sobolev函数的概念。用 $\mathrm{Lip}_1(X;\mathbb{R}^m)$ 表示从 X 到 $\mathbb{R}^m$ 的 Lipschitz 函数集合，其 Lipschitz 常数 $\mathrm{Lip}(\varphi)$ 不大于 1；对于 $m = 1$，记作 $\mathrm{Lip}_1(X)$。

定义 2.2. 空间 $W^{1,p}(\Omega;\, X)$，$p \geq 1$, 由满足以下条件的函数 $u \in L^p(\Omega;\, X)$ 组成：对于每个 $\varphi \in$ 利普希茨(X)，都有 $\varphi \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$。对于 $m \in \mathbb{N}_{>0}$，若我们设

$$|\nabla u|_{(m)} := \operatorname{ess\,sup}\{|\nabla(\varphi\circ u)| :\ \varphi \in \mathrm{Lip}_1(X;\mathbb{R}^m)\}, \tag{2.2}$$

则有 $|\nabla u|_{(m)} \in L^p(\Omega)$。我们主要取 $m = d^2$，并在含义明确时简写为 $|\nabla u| := |\nabla u|_{(d^2)}$。在维数为 $N = 1$ 时，我们用记号 $|u'|$ 表示 $|\nabla u|_{(1)}$。

注 2.3. 注意到，对于任意 $m \in \mathbb{N}_{>0}$

$$|\nabla u|_{(1)} \leq |\nabla u|_{(m)} \leq \sqrt{N\wedge m}\,|\nabla u|_{(1)} \qquad \text{pointwise almost everywhere.} \tag{2.3}$$

为证明第一个不等式，我们将 $\mathrm{Lip}_1(X)$ 中的任意函数扩展为 $\mathrm{Lip}_1(X;\mathbb{R}^m)$ 中的函数，并添加恒等于零的 $m-1$ 个分量。为证明第二个不等式中的 $\sqrt{m}$ 界，我们注意到，若 $\varphi = (\varphi_1, \ldots\ldots, \varphi_m) \in \mathrm{Lip}_1(X;\mathbb{R}^m)$，则对每个 $i \in \{1,\ldots,m\}$ 都有$\varphi_i \in \mathrm{Lip}_1(X)$，且 $|\nabla(\varphi\circ u)| = |(\nabla(\varphi_1\circ u)\ldots\ldots,\ \nabla(\varphi_m\circ u))| \leq \sqrt{m}\max_i |\nabla(\varphi_i\circ u)|$。为证明

最后一个不等式，令 $\varphi \in \mathrm{Lip}_1(X;\mathbb{R}^m)$，固定 $v \in \mathbb{S}^{N-1}$，并注意到对几乎处处的 $x \in \Omega$ 以及足够小的 t，记 I_t 为端点是 0 和 t 的线段，则有

$$\begin{aligned}|\varphi(u(x+tv)) - \varphi(u(x))| \leq & |\mathrm{d}_X(u(x+tv), u(x))| \leq \int_{I_t} |\nabla(\mathrm{d}_X \circ u)|(x+sv)\,\mathrm{d}s \\ & \leq \int_{I_t} |\nabla u|_{(1)}(x+sv)\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{2.4}$$

因此，如果 x 是 $|\nabla u|_{(1)}$ 切片的一个勒贝格点，那么

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|\varphi(u(x+tv)) - \varphi(u(x))|}{|t|} \leq \limsup_{t\to 0} \frac{1}{|t|} \int_{I_t} |\nabla u|_{(1)}(x+sv)\,\mathrm{d}s = |\nabla u|_{(1)}(x) \tag{2.5}$$

并且我们得到 $|\nabla_v(\varphi \circ u)| \leq |\nabla u|_{(1)}$ 几乎处处成立。最后，对于任意 $g \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$，我们有

$$|\nabla g|^2(x) = \sum_i |\partial_i g|^2(x) \leq N \max_i |\partial_i g|^2(x). \tag{2.6}$$

将其应用于 $g = \varphi \circ u$，我们得到 $|\nabla(\varphi \circ u)|_{(m)} \leq \sqrt{N}|\nabla u|_{(1)}$ 几乎处处成立，从而完成了对 (2.3) 的证明。

接下来我们证明

$$\text{if } X \subset \mathbb{R}^m, \text{ then } |\nabla u|_{(m)} = |\nabla u|_{\mathbb{R}^{m\times N}}, \tag{2.7}$$

其中，最后一个范数是弱梯度通常的欧几里得范数。为此，注意到任意 $\varphi \in \mathrm{Lip}_1(X;\mathbb{R}^m)$ 都存在一个扩展 $\widehat{\varphi} \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$，并且根据链式法则，$|\nabla(\widehat{\varphi} \circ u)| = |(\nabla\widehat{\varphi}) \circ u\, \nabla u| \leq |\nabla u|$。同时，对于 $\varphi(x) = x$，该不等式是等式，这就证明了 (2.7)。类似的论证表明，(2.3) 中的界是最优的。

注记 2.4。$\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d})$ 中的函数与取值于 Sobolev 空间 $H^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 的函数有着密切联系 $= W^{1,2}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$。为此，对于博雷尔函数 $\beta\colon \Omega \to \mathrm{M}^{d\times d}$，我们定义

$$[\beta]\colon \Omega \to \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}, \qquad [\beta](x) := [\beta(x)],\ x \in \Omega.$$

根据有界变差中的链式法则，若 $\beta \in \mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d})$ 且 $\varphi \in$ 利普希茨$(\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G};\mathbb{R}^m)$，则 $\varphi \circ [\beta]$ 属于 $H^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$，并且

$$|\nabla(\varphi \circ [\beta])| \leq \mathrm{Lip}(\varphi)|\nabla\beta|, \qquad \text{a.e. in } \Omega, \tag{2.8}$$

因此 $[\beta] \in H^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$，由 (2.8) 可得

$$|\nabla[\beta]|_{(m)} \leq |\nabla\beta|, \quad m \in \mathbb{N}_{>0}. \tag{2.9}$$

因此，$\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}$ 中的函数可以与取值于商空间 $\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$ 的 Sobolev 函数对应起来。

如果区域是一维的，那么两个空间 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(I;\mathrm{M}^{d\times d})$ 和 $H^1(I;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 实际上是等价的。此外，我们可以对一个 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(I;\mathrm{M}^{d\times d})$ 函数“清除跳跃”，从而得到 $H^1(I;\mathrm{M}^{d\times d})$ 中的一个代表元，如下面的引理 2.5 所示。该结果对于我们的证明至关重要。

如果区域的维数至少为二，这两个空间并不等价，见下文引理 2.6。不过，该反例基于这样一个事实：$\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(I;\mathrm{M}^{d\times d})$中的函数要求其跳跃集具有有限测度。若从定义中去掉这一性质，那么我们预期可以将这两个空间视为相同（见下文注 2.14）。

引理 2.5. 设 $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ 为一个有界区间，且 $\beta\colon I \to \mathrm{M}^{d\times d}$ 为博雷尔函数。则有以下结论：

i) 若 $[\beta] \in H^1(I;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$，则存在 $G_\beta \in L^\infty(I;\mathcal{G})$ 使得 $G_\beta\beta \in H^1(I;\mathrm{M}^{d\times d})$，$G_\beta\beta(a) = \beta(a)$，并且 $|[\beta]'|_{(m)} = |(G_\beta\beta)'|$ 在 I 中几乎处处对任意 $m \in \mathbb{N}_{>0}$成立；

ii) 此外，若 $\beta \in \mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(I;\mathrm{M}^{d\times d})$，则 $(G_\beta\beta)' = G_\beta\beta'$ 在 I 中几乎处处成立。

证明。设 $\beta\colon I\to \mathrm{M}^{d\times d}$ 满足 $[\beta](x) := [\beta(x)]$ 属于 $H^1(I;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$，因此它存在一个连续代表元（例如参见 [1, 备注 2.2]）。首先，我们证明 $[\beta]\in C^{1/2}(I;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$。为此，固定 $x\in I$，并考虑 $\varphi_x(U) := \mathrm{d}_{\mathcal{G}}(U,[\beta](x))$，$U\in \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$。由于 φ_x 是 1-Lipschitz 连续的，且 $[\beta]\in H^1(I;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{\mathcal{G}}([\beta](x),[\beta](y)]) =&\varphi_x([\beta](y)) - \varphi_x([\beta](x)) \le \int_{[x,y]} |(\varphi_x\circ[\beta])'|\,\mathrm{d}t\\ \le&|x-y|^{1/2}\|(\varphi_x\circ[\beta])'\|_{L^2(I)} \le |x-y|^{1/2}\| \,|[\beta]'|_{(m)}\,\|_{L^2(I)}.\end{aligned}$$

为了证明 i)，我们先构造一个函数序列 $(\beta_k)_k$，其中各函数属于 $H^1(I;\mathrm{M}^{d\times d})$，使得 at

$$\|\beta_k'\|_{L^2(I)}^2 \le \| \,|[\beta]'|_{(m)}\,\|_{L^2(I)}^2, \qquad \beta_k(a)=\beta(a), \qquad \|\mathrm{d}_{\mathcal{G}}([\beta_k],[\beta])\|_{L^\infty(I)}\to 0. \tag{2.10}$$

为此，我们将区间 I 细分为 k 个子区间，并选择 $a_0 := a < a_1 < \cdots < a_k := b$，使得对所有 i，都有 $|a_{i+1}-a_i|\le 2(b-a)/k$。此外，对于 $i\ge 1$，由 $\phi_i(U) := \mathrm{d}_{\mathcal{G}}([\beta(a_{i-1})],U)$ 定义的函数 $\phi_i\colon \mathrm{M}^{d\times d}\to\mathbb{R}$ 是 1-Lipschitz，因此 $\phi_i\circ[\beta]\in H^1(I)$，并且由 (2.2) 可得，

$$\phi_i^2([\beta(a_i)]) \le (a_i-a_{i-1})\int_{a_{i-1}}^{a_i}\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_i\circ[\beta])\Big|^2\,\mathrm{d}t \le (a_i-a_{i-1})\int_{a_{i-1}}^{a_i}|[\beta]'|_{(m)}^2\,\mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

令 $\beta_k(a_0) = \beta(a_0)$，然后归纳地选取 $\beta_k(a_i)\in[\beta](a_i)$，使得

$$|\beta_k(a_i)-\beta_k(a_{i-1})| = \mathrm{d}_{\mathcal{G}}([\beta(a_i)],[\beta(a_{i-1})]) = \phi_i([\beta(a_i)]), \tag{2.12}$$

并将函数 β_k 定义为在每个区间上的仿射插值。由（2.12）和（2.11）可得

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i}|\beta_k'|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a_i-a_{i-1}}|\beta_k(a_i)-\beta_k(a_{i-1})|^2 \le \int_{a_{i-1}}^{a_i}|[\beta]'|_{(m)}^2\,\mathrm{d}t, \tag{2.13}$$

于是（2.10）中的第一个条件成立。根据 $\beta_k(a_0)$ 的选取，第二个条件也成立。第三个条件由 H^1 嵌入 $C^{1/2}$得到，计算与（2.11）类似。更明确地，对于任意 $t\in(a_{i-1},\ a_i)$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{\mathcal{G}}([\beta_k](t),[\beta](t)) \le& |\beta_k(t)-\beta_k(a_{i-1})| + \phi_i([\beta(t)]) \le \phi_i([\beta(a_i)]) + \phi_i([\beta(t)])\\ \le& 2\sqrt{a_i-a_{i-1}}\left(\int_{a_{i-1}}^{a_i}|[\beta]'|_{(m)}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12} \le \frac{C}{\sqrt{k}}\end{aligned}$$

因此，（2.10）中的一致收敛于零得以证明。

现在由紧性可知，$(\beta_k)_k$ 在 $H^1(I;\mathrm{M}^{d\times d})$ 中存在一个弱收敛子列（并且在 I 上几乎处处收敛）至某个 $\beta_*\in H^1(I;\mathrm{M}^{d\times d})$，且 $\beta_*(a) = \beta(a)$。由距离 $\mathrm{d}_{\mathcal{G}}$ 的连续性可得，$[\beta_*] = [\beta]$ 几乎处处成立，因此存在 $G_\beta\colon I\to\mathcal{G}$，使得 $\beta_* = G_\beta\beta$ 几乎处处成立。由于 $\mathcal{G}$ 是有限的，立即可知 G_β 可以取为可测函数。由范数的下半连续性以及（2.13），我们得到

$$\int_I|\beta_*'|^2\,\mathrm{d}t \le \int_I|[\beta]'|_{(m)}^2\,\mathrm{d}t = \int_I|[\beta_*]'|_{(m)}^2\,\mathrm{d}t$$

结合（2.9）（应用于 β_*），可推出在 I 中 $|\beta_*'| = |[\beta]'|_{(m)}$ 几乎处处成立，从而完成引理第一部分的证明。

现在我们进一步假设 β 属于 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(I;\mathrm{M}^{d\times d})$，并证明在 I 中 $(G_\beta\beta)'=G_\beta\beta'$ 几乎处处成立。为此，任取一点 $t\in I$，它是 β 和 β_* 的近似可微点，使得

$$\lim_{r\to 0}\int_{t-r}^{t+r}\frac{|\beta(s)-\beta(t)-\beta'(t)(s-t)|}{r^2}+\frac{|\beta_*(s)-\beta_*(t)-\beta_*'(t)(s-t)|}{r^2}\,\mathrm{d}s=0. \tag{2.14}$$

若 t 也是 G_β的勒贝格点，由于 $\mathcal{G}$ 是离散的，我们得到集合

$$E_r:=\{s\in(t-r,t+r):G_\beta(s)=G_\beta(t)\}$$

满足 $|E_r|/r\to 2$，其中 $r\to 0$。利用 E_r 中的 $\beta_*(s)=G_\beta(t)\beta(s)$以及 (2.14)，我们得到

$$\lim_{r\to 0}\int_{E_r}\frac{|(G_\beta(t)\beta'(t)-\beta_*'(t))(s-t)|}{r^2}\,\mathrm{d}s=0$$

这就推出所需的恒等式 $G_\beta(t)\beta'(t)=\beta_*'(t)$。 □

下一个引理通过一个例子表明，存在 $\mathrm{SBV}(\Omega;\mathrm{M}^{2\times 2}/\mathcal{G})$ 中的函数，满足 N、 $d\geq 2$，但我们无法为其找到一个跳跃集具有有限测度的代表元。因此，在维数至少为二时，引理 2.5 中证明的结论不成立。

引理 2.6。若 $N\geq 2$、 $d\geq 2$，且 $\mathcal{G}\cap\mathrm{SO}(d)\neq\{\mathrm{Id}\}$，则存在 $u\in H^1((0,1)^N;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$，使得不存在满足 $u=[\beta_0]$ 的 $\beta_0\in\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}((0,1)^N;\mathrm{M}^{d\times d})$。

证明。我们在情形 $N=2$下给出一个显式构造；情形 $N>2$ 可通过扩展该构造得到，使其不依赖变量 $x_3,\dots,x_N$，也就是说， $u^{(N)}(x)=u^{(2)}(x_1,x_2)$。

选取 $G\in\mathcal{G}\cap\mathrm{SO}(d)$、 $G\neq\mathrm{Id}$，然后选取一条曲线 $\gamma\in C^1([0,2\pi];\mathrm{SO}(d))$，使得$\gamma(0)=\mathrm{Id}$，$\gamma(2\pi)=G$。由于 $\mathrm{SO}(d)$ 是连通的，这样的曲线存在。固定 $\varphi\in C_c^1((0,1);[0,1])$，使得$\{\varphi>0\}=(1/4,3/4)$。我们从单位球 B_1 着手，并使用极坐标。对于 $t\in(0,1)$ 和 $\theta\in[0,2\pi)$，定义

$$\beta_1(te^{i\theta}):=\varphi(t)\gamma(\theta).$$

我们注意到 $\beta_1\in\mathrm{SBV}(B_1;\mathrm{M}^{d\times d})$，其中 $\beta_1=0$ 约为 ∂B_1，$\nabla\beta_1\in L^\infty(B_1)$， $J_{\beta_1}=(1/4,3/4)e_1$， $\beta_1^-(te_1)=\varphi(t)G$； $\beta_1^+(te_1)=\varphi(t)\mathrm{Id}$，因此 $\beta_1\in\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(B_1;\mathrm{M}^{d\times d})$。我们定义

$$c_2:=\|\nabla\beta_1\|_{L^2(B_1)}^2\in(0,\infty),\qquad c_J:=\mathcal{H}^1(J_{\beta_1}\cap B_1)=\frac{1}{2},\qquad c_D:=\int_0^1|\beta_1^+-\beta_1^-|(te_1)\,\mathrm{d}t\in(0,\infty).$$

考虑可数多个两两不交的球 $B_k:=B_{r_k}(x_k)$，它们包含于单位正方形$Q:=(0,1)^2$，且满足

$$\sum_k r_k=\infty.$$

例如，可以取单位正方形的任意一个二进分解，将其分成可数多个子正方形，并考虑内切于每个子正方形的圆。对于下文选取的 $a:\mathbb{N}\to(0,\infty)$ 以及 $K\in\mathbb{N}$，我们定义

$$\beta_K(x):=\sum_{k=1}^K a_k\chi_{B_k}(x)\beta_1\left(\frac{x-x_k}{r_k}\right)$$

并验证 $\beta_K\in\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(Q;\mathrm{M}^{d\times d})$，且 $[\beta_K]\in H^1(Q;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$。我们计算

$$\|\nabla\beta_K\|_{L^2(Q)}^2=c_2\sum_{k=1}^K a_k^2,\qquad \mathcal{H}^1(J_{\beta_K}\cap Q)=c_J\sum_{k=1}^K r_k,\qquad \int_{J_{\beta_K}}|\beta_K^+-\beta_K^-|\,d\mathcal{H}^1=c_D\sum_{k=1}^K a_k r_k.$$

显然 $r_k \to 0$；我们选择 $a_k = 2^{-k}$。于是序列 $(\beta_K)_K$ 一致收敛，并在 BV 中强收敛到某个 β_∞。在每个球 B_k 中，对于任意 $h \geq k$，都有 $\beta_\infty = \beta_h$；在这些球的并集之外，$\beta_\infty = 0$。容易验证 $u := [\beta_\infty] \in H^1(Q; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$。

还需证明不存在满足 $[\beta] = u$ 的 $\beta \in \mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(Q; \mathrm{M}^{d\times d})$。

假设存在这样的函数，任取 $h \in \mathbb{N}$，并考虑球 B_h。我们声称必然有

$$\mathcal{H}^1(J_\beta \cap B_h) \geq \frac{1}{2} r_h. \tag{2.15}$$

若此结论成立，则 $\mathcal{H}^1(J_\beta \cap Q) \geq \frac{1}{2}\sum_h r_h = \infty$，因此 $\beta \notin \mathrm{SBV}^2(Q;\mathrm{M}^{d\times d})$，证明得证。

还需证明 (2.15)。假设结论不成立。则根据切片，存在集合 $E \subset (0,1)$，满足 $\mathcal{L}^1(E) > 1/2$，使得对于任意 $t \in E$，2π-周期函数

$$v(\theta) := \beta(x_h + r_h t e^{i\theta})$$

满足 $v \in W^{1,\,1\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \mathrm{M}^{d\times d})$，我们将其视为它的连续代表。根据定义，$[v(\theta)] = a_h\varphi(t)[\gamma(\theta)]$。取 $t \in E$，使得 $\varphi(t) > 0$，并寻求矛盾。我们定义$w\colon [0,2\pi] \to \mathrm{M}^{d\times d}$ 为

$$w(\theta) := v(\theta)(\gamma(\theta))^{-1}.$$

此函数取值于 $a_h\varphi(t)\mathcal{G}$。回想一下，$a_h\varphi(t) \neq 0$，因此该集合由可逆矩阵组成。利用 v 的周期性以及 γ 上的边界条件，我们得到

$$w(0) = v(0)(\gamma(0))^{-1} = v(0), \qquad w(2\pi) = v(2\pi)(\gamma(2\pi))^{-1} = v(0)G^{-1}.$$

然而，由于 w 在 $[0,2\pi]$上连续，因此它是常值函数。因为 $v(0)$ 是一个可逆矩阵，所以得到 $G = \mathrm{Id}$，这就产生了矛盾。□

2.3. **函数框架 II：取值于度量空间的** 有界变差 **函数**。我们回顾 [1] 中关于取值于一般可分局部紧度量空间（X，d_X）的有界变差函数的定义。

定义 2.7。令 $u \in L^1(\Omega; X)$。我们称 u 属于$\mathrm{BV}(\Omega; X)$，若对每个 $\varphi \in \mathrm{Lip}(X;\mathbb{R}^m)$，都有 $\varphi \circ u \in \mathrm{BV}(\Omega; \mathbb{R}^m)$，并且存在一个有限博雷尔测度 σ（它可以依赖于 m，但不依赖于 φ），使得

$$|D(\varphi \circ u)| \leq \mathrm{Lip}(\varphi)\,\sigma. \tag{2.16}$$

在此情况下，$m \in \mathbb{N}_{>0}$ u 的全变差测度定义为

$$|Du|_{(m)} := \sup\{|D(\varphi \circ u)| \,:\, \varphi \in \mathrm{Lip}_1(X;\mathbb{R}^m)\}, \tag{2.17}$$

其中，测度的上确界按照 [3]中的定义 *1.68* 取。

至于 Sobolev函数的情形，$|Du|_{(m)}$ 的取值取决于 m（见注 2.3）。

$|Du|$ 的通常分解在 $\mathrm{BV}(\Omega; X)$ 中成立（见定理 2.2 和 2.3，以及 [1]中的注 2.3）：

$$|Du|_{(m)} = |\nabla u|_{(m)}\,\mathcal{L}^N + \mathrm{d}_X(u^+, u^-)\,\mathcal{H}^{N-1}\llcorner J_u + |Du|^c_{(m)}, \tag{2.18}$$

其中 $|\nabla u|_{(m)}(x) = \sup\{|\nabla(\varphi \circ u)|(x)\colon\ \varphi \in$ 利普希茨$(X; \mathbb{R}^m)\} \in L^1(\Omega)$，$J_u$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的可数 $\mathcal{H}^{N-1}$–可求 rectifiable 子集，其单位法向量 $\nu(x)$对 $\mathcal{H}^{N-1}$-几乎处处的点 $x \in J_u$有定义，且迹$u^\pm(x) = u^\pm(x,\ \nu(x))$ 由下式刻画

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{B_\rho(x) \cap \{y \in \Omega\colon\ \pm(y-x)\cdot\nu(x) > 0,\ \mathrm{d}_X(u(y), u^\pm(x)) > \varepsilon\}}{\rho^d} = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.19}$$

注 2.8. 根据 [1]，$u \in$，若 $u \in$ BV(Ω; X)且$|Du|^c_{(m)} = 0$，则 $u \in$ SBV(Ω; X)。这等价于要求 $u \in$ BV(Ω; X)且对每个 $\varphi \in$ Lip(X; $\mathbb{R}^m$)，都有 $\varphi \circ u \in$ SBV(Ω; $\mathbb{R}^m$)（见 [1, 注 2.4]）。

与取值于 X 的 Sobolev 函数情形相同，范数依赖于 m，但空间本身不依赖。讨论 $\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$ 时，我们通常取 $m = d^2$；若不会引起混淆，则简记$|Du|_{(d^2)}$为 $|Du|$。

注 2.9。分解 (2.18) 和定义 (2.17) 也可用于刻画 BV(Ω; X) 的子空间。

为此，我们回顾测度导数的一条基本性质，[1]中也用到了这条性质：若 σ 是正测度，且 μ 是一个可数正测度族 μ_h 的上确界，其中 $\mu(\Omega) < +\infty$，并且 $\mu_h = f_h\sigma + \mu_h^s$，这里 μ_h^s 表示 μ_h 关于 σ 的奇异部分，而 $f_h \in L^1(\Omega;\sigma)$（即 f_h 关于测度 σ 属于 L^1），则

$$\mu = f\sigma + \mu^s\,, \qquad \text{with } f = \sup f_h \qquad \sigma\text{-a.e. in } \Omega. \tag{2.20}$$

因此，由注 2.8 可得

$$u \in \mathrm{SBV}(\Omega;X) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi\circ u \in \mathrm{SBV}(\Omega;\mathbb{R}^m) \text{ for all } \varphi \in \mathrm{Lip}(X;\mathbb{R}^m). \tag{2.21}$$

此外，我们还将空间 SBV_0(Ω; X) 定义为满足 $|\nabla u| = 0$ 的函数 $u \in$ SBV(Ω; X) 的集合，这也等价于

$$\varphi\circ u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega;\mathbb{R}^m) \text{ for all } \varphi \in \mathrm{Lip}(X;\mathbb{R}^m). \tag{2.22}$$

最后，当 $u \in$ SBV(Ω; X) 没有跳跃，且 $|\nabla u|_{(m)} \in L^p$(Ω) 时，上述概念与 [36] 在定义 2.2 中回顾的 $W^{1,\,p}$(Ω; X) 的定义一致。

我们在此回顾 [1, 定理 2.4] 中证明的有界变差空间紧性结果。

定理 2.10。设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 BV(Ω; X) 中的一个函数序列，且 $m \in \mathbb{N}_{>0}$。若存在 $z_0 \in X$ 使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(|Du_n|_{(m)}(\Omega) + \int_\Omega \mathrm{d}_X(u_n(x), z_0)\, \mathrm{d}x \right) < +\infty,$$

则存在一个子列 $(u_{n_k})_k$ 和一个函数 $u \in$ BV(Ω; X)，使得 u_{n_k} 几乎处处收敛到 u，且收敛于 Ω 上

$$|Du|_{(m)}(\Omega) \le \liminf_{k\to+\infty} |Du_{n_k}|_{(m)}(\Omega).$$

我们还回顾一下，如何通过切片刻画 BV(Ω; X) 中的函数。固定$\xi \in \mathbb{S}^{N-1} := \{\xi \in \mathbb{R}^N\colon\ |\xi| = 1\}$，并设

$$\Pi^\xi := \{y \in \mathbb{R}^N\colon\ y\cdot\xi = 0\}, \quad \Omega_y^\xi := \{t \in \mathbb{R}\colon\ y + t\xi \in \Omega\}, \quad \Omega^\xi := \{y \in \Pi^\xi\colon \Omega_y^\xi \neq \emptyset\}.$$

对于任意函数 $u\colon \Omega \to X$，我们定义切片 $u_y^\xi\colon \Omega_y^\xi \to X$ 如下：

$$u_y^\xi(t) := u(y + t\xi).$$

以下结果是 [1, 命题 2.1], 的直接推论，采用了我们的记号，并且也针对 Sobolev 函数进行了表述。

命题 2.11。以下结论成立：

i) 若 $u \in$ BV(Ω; X)，则对于每个 $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$，我们有

$$u_y^\xi \in \mathrm{BV}(\Omega_y^\xi;X) \quad \text{and} \quad |Du|_{(1)} \ge |D(u_y^\xi)| \quad \text{作为 } \Omega_y^\xi \text{ 中的测度，对于 } \mathcal{H}^{N-1}\text{-几乎处处的 } y \in \Omega^\xi; \tag{2.23}$$

ii) *if* $u \in W^{1,p}(\Omega; X)$, *then for every* $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ *we have* $u_y^\xi \in W^{1,p}(\Omega_y^\xi; X)$ *and*

$$|\nabla u(x)| \geq |(u_y^\xi)'(t_x)| \quad \text{for } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } y \in \Omega^\xi \quad \text{and} \quad \text{a.e. } x \in \Omega,$$

where $t_x \in \Omega_y^\xi$ *is such that* $x = y + t_x \xi$.

证明。 i) 的证明由 [1, 命题 21] 和局部化论证得出。性质 ii) 由 i) 以及式 (2.18) 中给出的 $|Du|$ 的刻画得到。□

我们证明，SBV(Ω; O(*d*)/$\mathcal{G}$) 中的映射具有一个属于 SBV(Ω; O(*d*)) 的提升，并且其范数有界。这可以容易地由 Canevari 和 Orlandi[14] 关于取值于带有万有覆盖的紧流形的映射的一般结果推出。在我们的情形中，流形为 O(*d*)/$\mathcal{G}$，因此可以采用更简单的论证。我们指出，在 $d = 2$的情形下，这也可由 [23] 中针对取值于 $\mathbb{S}^1$的映射所给出的简洁证明推出。然而，在高维情形下，则需要像 [14]中那样进行局部化。我们的证明对于 SO(*d*) 和 O(*d*) 均无需重大修改即可适用；这里只讨论 O(*d*) 的情形，因为下面将用到这一情形。

定理 2.12。 设 $u \in$ SBV(Ω;O(*d*)/$\mathcal{G}$)，且 Ω $\subset \mathbb{R}^N$ 开且有界。则存在 $\beta \in$SBV(Ω; O(*d*)) 使得

$$u = [\beta] \text{ pointwise a.e. in } \Omega, \text{ and } |D\beta|(\Omega) \leq C|Du|_{(d^2)}(\Omega). \tag{2.24}$$

该常数仅取决于 d 和 $\mathcal{G}$。

证明。令 $r_0 := \frac{1}{4}\min\{|G - G'| : G, G' \in \mathcal{G}, G \neq G'\}$。

步骤 *1*。我们可以将$B_{r_0}([Z])$ 与$B_{r_0}(Z)$等同。固定 $Z \in$ O(*d*)/$\mathcal{G}$。我们验证 $Y \mapsto [Y]$ 是一个等距双射，将$B_{r_0}(Z) \subset$ O(*d*)映到$B_{r_0}([Z]) \subset$ O(*d*)/$\mathcal{G}$。为此，关键事实是，若$Y, Y' \in B_{r_0}(Z)$且 $G \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$，则

$$|GY - Y'| > |Y - Y'|, \tag{2.25}$$

这意味着 d$_{\mathcal{G}}$([Y], [Y']) $= |Y - Y'|$。进而，要证明 (2.25)，只需注意到，由于 $Y \in$ O(*d*)且 $|Y - Y'| \leq |Y - Z| + |Y' - Z| < 2r_0$,

$$|GY - Y'| = |(G - \mathrm{Id})Y + (Y - Y')| \geq |G - \mathrm{Id}| - |Y - Y'| \geq 4r_0 - 2r_0 > |Y - Y'|. \tag{2.26}$$

我们将 $\psi_Z : B_{r_0}([Z]) \to B_{r_0}(Z) \subset$ O(*d*) 记作 $Y \mapsto [Y]$ 的逆映射。

步骤 *2*。通过余面积公式进行局部化。我们声称，对于任意 $Z \in$O(d) 存在 $r \in (r_0/2, r_0)$ 使得

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial^*(u^{-1}(B_r([Z])))) < c|Du|(\Omega). \tag{2.27}$$

为此，考虑由 $\varphi(Y) :=$ d$_{\mathcal{G}}$(Y, [Z]) 定义的 $\varphi :$ O(*d*)/$\mathcal{G} \to \mathbb{R}$，并注意到 $u^{-1}(B_t([Z])) = \{x : \varphi(u(x)) < t\}$。函数 φ 显然是 1-Lipschitz，因此 $\varphi \circ u \in$ SBV(Ω)，且 $|D(\varphi \circ u)|(\Omega) \leq |Du|(\Omega)$。对 SBV 函数 $\varphi \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ 应用余面积公式，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\partial^*(\{\varphi \circ u < t\}))\, \mathrm{d}t = |D(\varphi \circ u)|(\Omega), \tag{2.28}$$

因此，我们可以选择 (2.27) 中的 r，其中 $c = 2/r_0$ 仅依赖于 $\mathcal{G}$。

步骤 *3*. 区域分解。 取 Z_1、……、$Z_M \in$O(*d*)，使得 O(*d*)/$\mathcal{G} \subset \bigcup_i B_{r_0/2}([Z_i])$（这一选择仅依赖于 $\mathcal{G}$），并令 r_i 为满足性质 (2.27) 的相应取值（它们还依赖于 u）。我们迭代定义

$$\omega_1 := u^{-1}(B_{r_1}([Z_1])), \text{ and } \omega_i := u^{-1}(B_{r_i}([Z_i])) \setminus \bigcup_{j<i} \omega_j.$$

这些集合构成 Ω 的一个划分，并且对每个 i， $\mathcal{H}^{N-1}(\partial^*\omega_i) \leq c|Du|(\Omega)$，其中 c 仅取决于群 $\mathcal{G}$。

步骤 *4.* 结论。我们在每个 ω_i 中设定 $\beta := \psi_{Z_i} \circ u$。显然 $[\beta] = u$，并且在每个 ω_i 内，我们都有 $|D\beta| \le C|Du|_{(d^2)}$ 作为测度。我们计算

$$|D\beta|(\Omega) \le \sum_{i=1}^{M} |D\beta|(\omega_i) + \sum_{i=1}^{M} \|\beta\|_{L^\infty} \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* \omega_i) \le C|Du|_{(d^2)}(\Omega), \tag{2.29}$$

再次，其中 C 仅依赖于 $\mathcal{G}$ 和 d。 □

注 2.13。通过局部化论证，容易看出，若 $u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$，则定理 2.12 保证存在的函数 β 满足 $\beta \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d))$。此外，若存在具有此性质的其他 β_*，则对某个 $G \in \mathrm{BV}(\Omega; \mathcal{G})$，有 $\beta_* = G\beta$。

注 2.14。将定理 2.12 中用于构造从 $\mathrm{SBV}(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$ 到 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega; \mathrm{O}(d))$ 的映射提升的方法加以扩展，可以证明，若 $\mathcal{G} \subset \mathrm{SO}(2)$，则 $\mathrm{SBV}(\Omega; \mathrm{M}^{2\times 2}/\mathcal{G})$ 中的任意映射都存在一个 $\mathrm{SBV}(\Omega; \mathrm{M}^{2\times 2})$ 中的代表元。高维情形的处理更为复杂，超出了本文的讨论范围。因此，我们将对空间 $\mathrm{SBV}(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 与 $\mathrm{SBV}(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d})$ 之间关系的更详细分析留待未来工作。

2.4. 度量空间值相场模型。有了上述泛函框架，我们可以用取值于等价类的序参量来表述近似相场模型。其自然定义域为取值于 $\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$ 的 Sobolev 函数。我们定义

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(u, v; A) := \int_A f_\varepsilon^2(v)\, |\nabla u|^2_{(d^2)}\, \mathrm{d}x + \mathrm{PF}_\varepsilon(v; A) + \frac{1}{\delta_\varepsilon} \int_A \mathrm{d}^2_{\mathcal{G}}(u, \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})\, \mathrm{d}x \tag{2.30}$$

对于 $A \subset \Omega$ 为开集且

$$(u, v) \in H^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}) \times H^1(\Omega; [0, 1]),$$

且在 $L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}) \times L^1(\Omega)$ 中其他情况下取值为 $+\infty$。

根据注 2.4，任意 $\beta \in \mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d})$ 都满足 $[\beta] \in H^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$，其中 $|\nabla[\beta]|_{(d^2)} \le |\nabla\beta|$，并且显然 $\mathrm{d}_{\mathcal{G}}([\beta], \mathrm{O}(d)/\mathcal{G}) = \mathrm{dist}(\beta, \mathrm{O}(d))$。由此可得

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon([\beta], v; A) \le \mathcal{F}_\varepsilon(\beta, v; A). \tag{2.31}$$

最后，鉴于不变性 (1.14) 和注 2.13，我们可以定义

$$\widetilde{\mathcal{F}}^\lambda(u, 1) := \mathcal{F}^\lambda(\beta, 1) \quad \text{for every } u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G}) \tag{2.32}$$

并且 $\widetilde{\mathcal{F}}^\lambda(u, v) := +\infty$ 在 $L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}) \times L^1(\Omega)$ 中其他情况下取值为 $u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$，$\beta \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d))$ 是如定理 2.12 所述的 u 的提升。不变性 (1.14) 保证结果不依赖于所选的提升。

在这一一般框架下，我们现在可以陈述定理 1.1 的对应形式。

定理 2.15。以下性质成立：

(C)' 对于任意满足条件的 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G} \times [0, 1])$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) < +\infty \tag{2.33}$$

存在 $u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$ 使得，除去一个子列后，

$$u_\varepsilon \to u \text{ in } L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}), \qquad v_\varepsilon \to 1 \text{ in } L^1(\Omega). \tag{2.34}$$

(LB)' 对于任意满足 (2.34) 的 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G} \times [0, 1])$ 和 $u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$，有

$$\widetilde{\mathcal{F}}^\lambda(u, 1) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon).$$

(UB)' 对于任意 $u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$，存在满足 (2.34) 且 $\times L^1(\Omega; [0,1])$ 的 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 和

$$\widetilde{\mathcal{F}}^\lambda(u,1) \geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon). \tag{2.35}$$

这一结果的证明是对论文其余部分所进行分析的推论。紧性（C'）在定理 3.2 中陈述并证明。下界（LB'）在定理 5.1 中陈述并证明。上界则是定理 1.1 中相应~上界的推论，该上界在第 5 节的定理 5.6 中得到证明；此外，还有事实 $\mathcal{F}_\varepsilon \leq \mathcal{F}_\varepsilon$ 如（2.31）所示。

3. 紧性

我们先采用截断论证，以便将注意力限制在 L^∞中一致有界的序列上。我们用 $\Phi(\xi)$ 表示矩阵 $\xi \in \mathrm{M}^{d\times d}$ 在闭球 $B_{\sqrt{d}} := \{\eta \in \mathrm{M}^{d\times d}: |\eta| \leq \sqrt{d}\}$上的正交投影，

$$\Phi(\xi) := \begin{cases} \xi & \text{if } |\xi| \leq \sqrt{d}, \\ \sqrt{d}\dfrac{\xi}{|\xi|} & \text{if } |\xi| > \sqrt{d}. \end{cases} \tag{3.1}$$

由于对所有 $G \in \mathrm{O}(d)$, $\Phi(G\xi) = G\Phi(\xi)$，因此 Φ 可视为从 $\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}$ 到其自身的映射。**引理 3.1.** 设 $(u_\varepsilon)_\varepsilon \subset H^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \mathrm{d}^2_{\mathcal{G}}(u_\varepsilon, \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.2}$$

那么，对于每个$(v_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega; [0,1])$，我们有

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(\Phi(u_\varepsilon), v_\varepsilon) \leq \widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \|\Phi(u_\varepsilon) - u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})} = 0. \tag{3.3}$$

对于 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 以及任意$(\beta_\varepsilon) \subset \mathrm{SBV}\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d})$，也有相应的结论。

证明。由 Φ的定义，以及对任意矩阵 ξ都有 $\mathrm{dist}(\Phi(\xi),\mathrm{O}(d)) \leq \mathrm{dist}(\xi,\mathrm{O}(d))$ 这一事实，可立即得到结论。此外，Φ 是 1–Lipschitz，因此根据定义 2.2，我们可推得 $|\nabla\Phi(u_\varepsilon)| \leq |\nabla u_\varepsilon|$。最后，由于 $\mathrm{O}(d) \subset B_{\sqrt{d}}$ 且 Φ 是一个投影，

$$|\Phi(\xi) - \xi| \leq \mathrm{dist}(\xi, \overline{B}_{\sqrt{d}}) \leq \mathrm{dist}(\xi, \mathrm{O}(d)). \qquad \square$$

我们首先利用取值于度量空间的 BV函数理论以及 [21]中的策略，证明定理 2.15 中的紧性。

定理 3.2。对于满足(2.33) 的任意$(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G} \times [0,1])$，存在 $u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$，使得在取某个子列后，

$$u_\varepsilon \to u \ in\ L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}), \qquad v_\varepsilon \to 1 \ in\ L^1(\Omega).$$

特别地，定理 *2.15* 中的 *(C)'* 成立。

~ ~证明。固定一个趋于零的序列 $(\varepsilon_n)_n$，并对每个 $n \in \mathbb{N}$ 记 $\mathcal{F}_n \equiv \mathcal{F}_{\varepsilon_n}$。设 $(u_n, v_n)_n \subset L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G} \times [0,1])$ 满足

$$\sup_n \widetilde{\mathcal{F}}_n(u_n, v_n) \leq K. \tag{3.4}$$

v_n 收敛到 1 可直接由以下估计得出

$$\int_\Omega \frac{(1-v_n)^2}{4\varepsilon_n}\,\mathrm{d}x \leq K. \tag{3.5}$$

此外，根据 (3.4)， $u_n \in H^1(\Omega; \mathsf{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$；并且根据引理 3.1，我们可以假设

$$\|u_n\|_{L^\infty} \le \sqrt{d} \qquad \text{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

我们遵循 [21, 命题 4.11] 中的策略。首先，我们需要找出 Ω 的一些小子集，其测度趋于零且周长有界，而能量界无法为 $|\nabla u_n|$ 提供任何一致界。更确切地说，固定 $\rho \in (0, 1/2)$，对每个 n，我们都可以选取 $t_n^\rho \in (1-\rho, 1-\rho/2)$，使得

$$E_n^\rho := \{v_n < \lambda_n^\rho\} \quad \text{obeys} \quad \mathrm{Per}(E_n^\rho, \Omega) \le C_\rho K \quad \text{and} \quad \mathcal{L}^N(E_n^\rho) \le C_\rho \varepsilon_n K. \tag{3.7}$$

也就是说，对于 $\phi(t) := (1-t)^2/2$，由余面积公式、杨氏不等式和 (3.4)，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Per}(\{\phi(v_n) > t\}, \Omega)\, \mathrm{d}t = \int_\Omega |\nabla(\phi(v_n))|\, \mathrm{d}x \le \int_\Omega \left(\frac{(1-v_n)^2}{4\varepsilon_n} + \varepsilon_n |\nabla v_n|^2 \right) \mathrm{d}x \le K, \tag{3.8}$$

只需选取 $\lambda_n^\rho = \phi^{-1}(t_n^\rho)$，使得 $t_n^\rho \in (\phi(1-\rho/2)\ \phi(1-\rho))$，从而

$$(\phi(1-\rho) - \phi(1-\rho/2)) \,\mathrm{Per}(\{\phi(v_n) > t_n^\rho\}, \Omega) \le \int_{\phi(1-\rho/2)}^{\phi(1-\rho)} \mathrm{Per}(\{\phi(v_n) > t\}, \Omega)\, \mathrm{d}t.$$

于是，(3.7) 中的第二个估计由以下事实得到：

$$\mathcal{L}^N(\{v_n < \lambda_n\}) \frac{(1-\lambda_n)^2}{4\varepsilon_n} \le \int_{\{v_n < \lambda_n\}} \frac{(1-v_n)^2}{4\varepsilon_n}\, \mathrm{d}x \le K.$$

现在我们再次利用 (3.4)，在 $\Omega \setminus E_n^\rho$ 中为 u_n 得到一致估计，并利用这样一个事实：在该集合中 $v_n \ge 1-\rho$。也就是说，令 $B_n := \{f(v_n) > M_{\varepsilon_n} \varepsilon_n^{-2}\}$，我们有

$$\begin{aligned} K \ge & \widetilde{\mathcal{F}}_n(u_n, v_n; \Omega \setminus E_n^\rho) \ge M_{\varepsilon_n}^2 \int_{B_n \setminus E_n^\rho} |\nabla u_n|^2\, \mathrm{d}x \\ & + \int_{\Omega \setminus B_n \setminus E_n^\rho} \left(\varepsilon_n f^2(v_n) |\nabla u_n|^2\, \mathrm{d}x + \frac{(1-v_n)^2}{4\varepsilon_n} \right) \mathrm{d}x \\ & \ge M_{\varepsilon_n}^2 \int_{B_n \setminus E_n^\rho} |\nabla u_n|^2\, \mathrm{d}x + \int_{\Omega \setminus B_n \setminus E_n^\rho} f(v_n)(1-v_n) |\nabla u_n|\, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

从而

$$\int_{\Omega \setminus E_n^\rho} |\nabla u_n|\, \mathrm{d}x \le \frac{(K\mathcal{L}^N(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{M_{\varepsilon_n}} + \frac{K}{m_\rho}, \tag{3.9}$$

其中 $0 < m_\rho := \min_{s \in [1-\rho, 1)} (1-s) f(s)$ 满足 $\lim_{\rho \to 0} m_\rho = \infty$。总之，令

$$\overline{u}_n^\rho := u_n \chi_{\Omega \setminus E_n^\rho} + [\mathrm{Id}]\, \chi_{E_n^\rho}, \tag{3.10}$$

我们有 $\overline{u}_n^\rho \in \mathrm{SBV}(\Omega; \mathsf{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$，满足

$$J_{\overline{u}_n^\rho} \subset \partial^* E_n^\rho, \qquad |\nabla \overline{u}_n^\rho| = |\nabla u_n| \chi_{\Omega \setminus E_n^\rho} = |\nabla (u_n \chi_{\Omega \setminus E_n^\rho})|. \tag{3.11}$$

由 (3.6)、(3.7)、(3.11)、(3.9) 以及定理 2.10 可得，存在一个函数 $u^\rho \in \mathrm{BV}(\Omega; \mathsf{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 以及一个子列 $(u_{n_k}^\rho)_k$，其在 $L^1(\Omega; \mathsf{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 中收敛于 u^ρ。由于 (3.4) 蕴含 (3.2)，我们得到 u^ρ 几乎处处取值于 $\mathrm{O}(d)/\mathcal{G}$。

此外，由于 $\mathcal{L}^N(E_n^\rho) \le C_\rho \varepsilon_n K \to 0$ 且 $\|u_n\|_{L^\infty} \le \sqrt{d}$，我们有 $\|u_n - u_n^\rho\|_{L^1} \to 0$，因此子列 $(u_{n_k})_k$ 也收敛于同一个 u^ρ。特别地，取一个对角子列，我们可以确保极限不依赖于 ρ，将其记为 u。

设 $\varphi \in \mathrm{Lip}_1(\mathsf{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$。那么，对于任意 ρ 和 n，我们有 $\varphi \circ u_n^\rho \in BV(\Omega)$；由 (3.7) 和 (3.11) 可得 $\sup_n \mathcal{H}^{N-1}(J_{\varphi \circ u_n^\rho}) < \infty$。因此，回顾 (3.9)，并利用一个标准的

局部化论证，例如通过切片将问题化归到一个一维定义域，在该定义域上逼近函数具有相同（有限个）的跳跃点数，我们得到

$$\begin{aligned}|D^c(\varphi\circ u)|(\Omega)+\|\nabla(\varphi\circ u)\|_{L^1(\Omega)} &\le \liminf_{k\to\infty}\|\nabla(\varphi\circ \overline{u}^{\rho}_{n_k})\|_{L^1(\Omega)}\\ &\le \liminf_{k\to\infty}\|\nabla u_{n_k}\|_{L^1(\Omega\setminus E^{\rho}_n)} \le \frac{K}{m_\rho}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

我们回顾一下 $\lim_{\rho\to 0} m_\rho = \infty$。由于左侧与 ρ 无关，因此它为零，于是得到 $\varphi\circ u \in \mathrm{SBV}_0$。由注 2.9， $u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega;\mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$。□

我们指出，定理 1.1 中的紧性是定理 3.2 的直接推论，这是基于注 2.4 和定理 2.12 中关于将 BV 函数提升为取值于 $\mathrm{O}(d)/\mathcal{G}$ 的函数的性质，并将其应用于任意极限场 u。

尽管如此，我们仍给出定理 1.1 的另一种证明，该证明不借助度量空间中取值的 BV 函数理论。我们利用这样一个事实：可以将定理 2.12 应用于取值于 $\mathrm{O}(d)/\mathcal{G}$ 的函数，其中 $\mathrm{O}(d)/\mathcal{G}$ 是极限的目标集。关键步骤是对原序列进行修改，使修改后的序列取值于 $\mathrm{O}(d)/\mathcal{G}$ ，且能量仍一致有界。通过这种方法，我们证明了在微小扰动下 BV 中的弱* 收敛。

定理 3.3. 设 $(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}\times[0,1])$ 满足 (1.15)。则存在 $\beta \in \mathrm{SBV}_0(\Omega;\mathrm{O}(d))$、一个子列 $(\varepsilon_n)_n$ 以及 $G_n \in L^\infty(\Omega;\mathcal{G})$，使得 $G_n\beta_{\varepsilon_n}$ 属于 $\mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d})$，并且在 $L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d})$ 中收敛到 β，且 $v_{\varepsilon_n}\to 1$ 在 $L^2(\Omega)$ 中。特别地，定理 *1.1* 中的 *(C)* 成立。

证明。 由引理 3.1，我们可以假设

$$|\beta_\varepsilon| \le \sqrt{d} \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{3.13}$$

在取子列 $(\beta_{\varepsilon_n})_n \equiv (\beta_n)_n$ 之后，由 (1.15) 得到

$$\sup_n \mathcal{F}_{\varepsilon_n}(\beta_n, v_n) \le K. \tag{3.14}$$

我们如同定理 3.2 的证明中那样处理 $(v_n)_n$ ；特别地， $v_n \to 1$ 在 Ω 中几乎处处成立，并且对于任意 $\rho \in (0, 1/2)$，存在适当的 $t_n^\rho \in (1-\rho, 1-\rho/2)$，使得 $E_n^\rho := \{v_n < t_n^\rho\}$ 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都满足性质 (3.7)；与 (3.9) 相同的计算给出

$$\int_{\Omega\setminus E_n^\rho} |\nabla\beta_n|\,\mathrm{d}x \le \frac{(K\mathcal{L}^N(\Omega))^{\frac12}}{M_{\varepsilon_n}} + \frac{K}{m_\rho}. \tag{3.15}$$

论证的下一部分与定理 3.2 中的论证不同。我们考虑函数

$$h_n(x) := \beta_n^T(x)\beta_n(x), \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{3.16}$$

我们有 $h_n \in \mathrm{SBV}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}_{\mathrm{sym}})$，其中 $\|h_n\|_{L^\infty}\le d$，$\mathrm{M}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$ 表示对称矩阵的集合，且 $J_{h_n}\subset J_{\beta_n}$。此外，若 $x\in J_{h_n}$，且 $G\in\mathcal{G}$ 满足 $\beta_n^+(x) = G\beta_n^-(x)$，则

$$h_n^+(x) = \left(\beta_n^+(x)\right)^T\beta_n^+(x) = \left(G\beta_n^-(x)\right)^T G\beta_n^-(x) = \left(\beta_n^-(x)\right)^T\beta_n^-(x) = h_n^-(x),$$

因此 $h_n \in W^{1,1}(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}_{\mathrm{sym}})$，其中 $|\nabla h_n| \le C|\nabla\beta_n|$ 在 Ω 中几乎处处成立。

类似的计算表明

$$w_n := |\det\beta_n| \in W^{1,1}(\Omega),$$

且在 Ω 中几乎处处满足 $|\nabla w_n| \le C|\nabla\beta_n|$。根据余面积公式，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，存在 $\lambda_n' \in (\frac14, \frac12)$，使得

$$\mathrm{Per}(\{|\det\beta_n| < \lambda_n'\}, \Omega) \le C. \tag{3.17}$$

此外，由于 $\lambda_n' \le 1/2$，且 $\min\{\operatorname{dist}(A,\ \mathrm{O}(d)) :\ |\det A| \le 1/2\} > 0$,

$$\mathcal{L}^N\big(\{|\det \beta_n| < \lambda_n'\}\big) \le C\int_\Omega \operatorname{dist}^2(\beta_n, \mathrm{O}(d))\,\mathrm{d}x \le CK\delta_{\varepsilon_n}.$$

因此，集合 $F_n^\rho := E_n^\rho \cup \{|\det\ \beta_n| < \lambda_n'\}$ 满足

$$\operatorname{Per}(F_n^\rho, \Omega) \le C + C_\rho K \quad \text{and} \quad \mathcal{L}^N(F_n^\rho) \le C_\rho \varepsilon_n K + CK\delta_{\varepsilon_n} \tag{3.18}$$

以及函数

$$\overline{h}_n := h_n \chi_{\Omega\setminus F_n^\rho} + \mathrm{Id}\,\chi_{F_n^\rho} \tag{3.19}$$

满足 $\overline{h_n} \in \mathrm{SBV}(\Omega;\, \mathrm{M}^{d\times d}_{\mathrm{sym}})$，且

$$|D\overline{h}_n|(\Omega) + \|\overline{h}_n\|_{L^\infty(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d})} \le C, \qquad \det(\overline{h}_n) \ge \frac{1}{16} \text{ a.e. in } \Omega. \tag{3.20}$$

映射 $A \mapsto A^2$ 和 $A \mapsto A^{-1}$ 是 $\mathrm{M}^{d\times d}_{\mathrm{sym},+}$ 上的光滑双射，即 $\mathrm{M}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$ 中严格正定矩阵的集合到其自身的光滑双射，且具有光滑逆映射；特别地，它们的逆映射$A \mapsto A^{1/2}$ 和 $A \mapsto A^{-1/2}$ 是光滑的，因而在紧集上 Lipschitz 连续。因此，由 $(h_n)^{-\frac12}(x) := \big((h_n(x)^{-1})\big)^{\frac12}$ 定义的函数 $(h_n)^{-\frac12}$ 属于 $\mathrm{SBV}(\Omega;\, \mathrm{M}^{d\times d}_{\mathrm{sym}})$，并且

$$J_{(\overline{h}_n)^{-\frac12}} = J_{\overline{h}_n} \subset \partial^* F_n^\rho, \qquad |\nabla\big((\overline{h}_n)^{\frac12}\big)| + |\nabla\big((\overline{h}_n)^{-\frac12}\big)| \le C|\nabla \overline{h}_n| \quad \text{a.e. in } \Omega\setminus F_n^\rho. \tag{3.21}$$

In 特别地，函数 $k_n\colon \Omega \to \mathrm{O}(d)$ 定义 d by

$$k_n := \beta_n (h_n)^{-\frac12}\chi_{\Omega\setminus F_n^\rho} + \mathrm{Id}\chi_{F_n^\rho}, \tag{3.22}$$

由 (3.20)、(3.21) 满足

$$|\nabla k_n| \le C|\nabla \beta_n| \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

由 (3.15)，且由于 k_n =Id 属于 F_n^ρ（因此特别属于 $E_n^\rho \subset F_n^\rho$），我们推得 $k_n \in \mathrm{SBV}(\Omega;\mathrm{O}(d))$，并且

$$\int_\Omega |\nabla k_n|\,\mathrm{d}x \le \frac{CK^{\frac12}}{M_{\varepsilon_n}} + \frac{CK}{m_\rho}, \qquad J_{k_n} \subset J_{\beta_n} \cup \partial^* F_n^\rho, \qquad k_n^+ \in \mathcal{G} k_n^- \text{ on } J_{\beta_n}\setminus F_n^\rho. \tag{3.23}$$

转到像上的等价类后，由 $[k_n](x) := [k_n(x)]$ for$x \in \Omega$ 定义的函数属于 $\mathrm{SBV}(\Omega;\mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$，并且

$$|D([k_n])|_{(d^2)}(\Omega) \le \int_\Omega |\nabla k_n|\,\mathrm{d}x + \|k_n\|_\infty \operatorname{Per}(F_n^\rho) \le C.$$

By 根据定理 2.12，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们可找到 $G_n \in L^\infty(\Omega;\, \mathcal{G})$，使得 $G_n k_n \in \mathrm{SBV}(\Omega;\, \mathrm{O}(d))$，并且 $|D(G_n k_n)|(\Omega) \le C$，因此这些函数

$$\widehat{\beta}_n^\rho := G_n k_n h_n^{\frac12}\chi_{\Omega\setminus F_n^\rho} + \mathrm{Id}\chi_{F_n^\rho} = G_n\beta_n\chi_{\Omega\setminus F_n^\rho} + \mathrm{Id}\chi_{F_n^\rho} \tag{3.24}$$

属于 $\mathrm{SBV}(\Omega;\, \mathrm{M}^{d\times d})$，且对几乎处处的 $x \in \Omega$，有 $\det\ \widehat{\beta}_n(x) \neq 0$，并且 BV 范数一致有界。因此，存在函数 $\beta^\rho \in \mathrm{BV}(\Omega;\, \mathrm{M}^{d\times d})$，使得在取一个子列后，$(\widehat{\beta}_n)$ 在 $\mathrm{BV}(\Omega;\, \mathrm{M}^{d\times d})$ 的弱*拓扑下收敛到 β^ρ。回顾 (3.18)，我们推得

$$G_n\beta_n\chi_{\Omega\setminus F_n^\rho} + \beta_n\chi_{F_n^\rho} \to \beta^\rho \quad \text{in } L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}), \tag{3.25}$$

因此，陈述中的函数 G_n 可以取为在 F_n 中等于 Id。注意，由 (3.24) 和 (3.14) 可知 $G_n\beta_n \in \mathrm{SBV}^{\mathcal{G}}(\Omega;\, \mathrm{M}^{d\times d})$。最后，由于 (3.14)

$$\frac{1}{\delta_{\varepsilon_n}}\int_A \operatorname{dist}^2(\beta_n, \mathrm{O}(d))\,\mathrm{d}x \le K,$$

我们得到 $\beta^\rho \in$ 有界变差$(\Omega;\, \mathrm{O}(d))$。

与定理 3.2 证明的最后部分一样，我们可以通过对角线论证确保 $\beta^\rho =: \beta$ 不依赖于 ρ，并且 $\beta \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d))$。我们注意到，也可以通过直接使用切片来证明 $\beta \in SBV_0(\Omega;\mathrm{O}(d))$这一事实。□

4. 表面能密度

极限能量定义在纯跳跃部分的函数上，即定义在 SBV_0 中。本节给出表面能密度的定义，并证明其主要性质。

表面能密度由一维单胞公式表示。它依赖于参数 $\lambda \in [0, +\infty]$，该参数由逼近泛函定义中 ε 与 δ_ε 的渐近比值确定，参见第 1 节中的 (1.10)。为证明其主要性质，例如小张开量时的 $s|\log s|$ 增长（见命题 4.4），方便起见，我们通过一个在时间重参数化下不变的一维单胞公式来重新表述能量密度（命题 4.2）。

本节最后给出一个技术性结果——引理 4.5，该结果用于证明 $\lambda = +\infty$ 时的上界。

令 $I_T := (-T,\ T)$，其中 $T > 0$,

$$F^T(\beta, v) := \int_{-T}^{T} \left(f^2(v)|\beta'|^2 + \frac{(1-v)^2}{4} + |v'|^2 \right) \mathrm{d}t, \qquad (\beta, v) \in H^1(I_T; \mathrm{M}^{d\times d} \times [0,1]),$$

and

$$F_\lambda^T(\beta, v) := F^T(\beta, v) + \lambda \int_{-T}^{T} \mathrm{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))\, \mathrm{d}t \quad \text{for } \lambda \in [0, +\infty).$$

对于 $R^-, R^+ \in \mathrm{O}(d)$，我们令

$$\mathcal{U}^T[R^-, R^+] := \{(\beta, v) \in H^1(I_T; \mathrm{M}^{d\times d} \times [0,1]) \colon \beta(-T) = R^-,\ \beta(T) = R^+,\ v(\pm T) = 1\} \quad (4.1)$$

be 在 I_T 中连接 R^- 和 R^+、且满足固定边界条件的可容许路径集合 s, $v = 1$，作为损伤系数。对于 $\lambda \in [0, +\infty)$，我们定义

$$g_\lambda^*(R^-, R^+) := \lim_{T\uparrow+\infty} \inf \left\{ F_\lambda^T(\beta, v) \colon (\beta, v) \in \mathcal{U}^T[R^-, R^+] \right\}, \quad (4.2)$$

然后

$$g_\infty^*(R^-, R^+) := \sup_{\lambda>0} g_\lambda^*(R^-, R^+). \quad (4.3)$$

容易验证，(4.2) 中的极限存在，且等于对所有 $T > 0$ 取下确界。为了恢复群作用下的不变性，我们接着对 $\lambda \in [0, \infty]$ 定义

$$g_\lambda(R^-, R^+) := \min_{G\in\mathcal{G}} g_\lambda^*(R^-, GR^+). \quad (4.4)$$

由于该群是有限群，在 g_∞ 的定义中，对 $\mathcal{G}$ 取最小值与对 λ 取上确界可以交换:

$$g_\infty(R^-, R^+) := \min_{G\in\mathcal{G}} g_\infty^*(R^-, GR^+) = \sup_{\lambda>0} g_\lambda(R^-, R^+). \quad (4.5)$$

我们首先证明 g_λ 的一些基本性质。

命题 4.1。 对于每个 $\lambda \in [0, +\infty]$、R、R^-、$R^+ \in \mathrm{O}(d)$，$G \in \mathcal{G}$ 均成立

(i) $g_\lambda(R, GR) = 0$; (ii) $g_\lambda(R^-, R^+) = g_\lambda(R^-, GR^+)$; (iii) $g_\lambda(R^-, R^+) = g_\lambda(R^-(R^+)^T, \mathrm{Id})$; (iv) $g_\lambda(R^-, R^+) = g_\lambda(R^+, R^-)$;
(v) $g_\lambda(R^-, R^+) \le g_\lambda(R^-, R) + g_\lambda(R, R^+)$，$g^*$ 也同样如此。

证明。 性质 (i) 和 (ii) 由 (4.4) 以及如下事实立即得出：若 β 是恒定旋转，则 $F^T(\beta,1)$ 为零。

断言 (iii) 由以下事实得出：对于每个 $(\beta,v)\in\mathcal{U}^T(R^-,R^+)$，令 $\widetilde{\beta}(t):=\widetilde{\beta}(t)(R^+)^T$，则有 $(\beta,v)\in\mathcal{U}^T[R^-(R^+)^T,\mathrm{Id}]$；又由于 $R^+\in\mathrm{O}(d)$，$|\beta'|=|\beta'|$，且 $\operatorname{dist}(\beta,\mathrm{O}(d))=\operatorname{dist}(\beta,\mathrm{O}(d))$，因此 $F^T_\lambda(\beta,v)=F^T_\lambda(\widetilde{\beta},v)$。类似的论证也适用于 $\widehat{\beta}(t):=\beta(-t)$，从而证明 (iv) 成立。

为证明 (v)，对于任意 $T>0$ 以及任意 $(\beta_1,v_1)\in\mathcal{U}^T[R^-,R]$ 和 $(\beta_2,v_2)\in\mathcal{U}^T[R,R^+]$，我们定义这一对

$$(\beta,v)(t):=\begin{cases}(\beta_1,v_1)(t+T), & \text{if } t\le 0,\\ (\beta_2,v_2)(t-T), & \text{if } t>0.\end{cases}$$

容易验证 $(\beta,v)\in\mathcal{U}^{2T}[R^-,R^+]$；在 (β_1,v_1) 和 (β_2,v_2) 中取下确界，并取极限 $T\to\infty$，即可证明关于 g^*_λ 的断言。再对 $\mathcal{G}$ 取最小值，即得关于 g_λ 的结果。□

为了证明 g_λ 的主要性质，采用另一种刻画会更方便：通过对关于时间重参数化不变的剖面进行最小化来获得这种刻画。对于固定的 $R^-,R^+\in\mathrm{O}(d)$，我们定义

$$\begin{aligned}\mathcal{U}[R^-,R^+]:=\{&(\beta,v)\in H^1((0,1);\mathrm{M}^{d\times d}\times[0,1]):\\ &\beta(0)=R^-,\ \beta(1)=R^+,\ v(0)=v(1)=1\},\end{aligned}\tag{4.6}$$

and

$$\begin{aligned}\overline{g}_\lambda(R^-,R^+):=\inf\Bigg\{&\int_0^1\sqrt{(1-v)^2+4\lambda\operatorname{dist}^2(\beta,\mathrm{O}(d))}\sqrt{f^2(v)|\beta'|^2+|v'|^2}\,\mathrm{d}t:\\ &(\beta,v)\in\mathcal{U}[R^-,R^+]\Bigg\}\end{aligned}\tag{4.7}$$

对于 $\lambda\in[0,+\infty)$，以及

$$\overline{g}_\infty(R^-,R^+):=\sup_{\lambda>0}\overline{g}_\lambda(R^-,R^+).\tag{4.8}$$

命题 4.2. 对于每个 $\lambda\in[0,+\infty]$，都有 $g^*_\lambda=g_\lambda$。

证明。 证明沿用命题 4.3 的证明思路。我们讨论 $\lambda\in[0,+\infty)$ 的情形；情形 $\lambda=+\infty$ 则可直接由定义得出。

事实 $g^*_\lambda\ge g_\lambda$ 可直接由杨氏不等式以及式 (4.7) 中积分泛函关于导数的一次齐次性推出。具体而言，对于每个 $(\beta,v)\in\mathcal{U}^T[R^-,R^+]$，我们有

$$\begin{aligned}F^T_\lambda(\beta,v)&\ge\int_{-T}^T\sqrt{(1-v)^2+4\lambda\operatorname{dist}^2(\beta,\mathrm{O}(d))}\sqrt{f^2(v)|\beta'|^2+|v'|^2}\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^1\sqrt{(1-\widetilde{v})^2+4\lambda\operatorname{dist}^2(\widetilde{\beta},\mathrm{O}(d))}\sqrt{f^2(v)|\widetilde{\beta}'|^2+|\widetilde{v}'|^2}\,\mathrm{d}t\ge\overline{g}_\lambda(R^-,R^+)\end{aligned}$$

对于 $\beta(t)=\beta(2Tt-T)$，$\widetilde{v}(t)=v(2Tt-T)$，$t\in(0,1)$，该不等式由 g^*_λ 的定义得出。

为证明反向不等式，我们首先指出，通过更规则的 (β,v) 所作的逼近论证，对于任意 R^-,R^+，$\eta\in(0,1)$，我们都可以找到属于 $W^{1,\infty}((0,1);\mathrm{M}^{d\times d}\times[0,1])\cap\mathcal{U}[R^-,R^+]$ 的竞争函数 (β,v)，并满足

$$\int_0^1\sqrt{(1-v)^2+4\lambda\operatorname{dist}^2(\beta,\mathrm{O}(d))}\sqrt{f^2(v)|\beta'|^2+|v'|^2}\,\mathrm{d}t<\overline{g}_\lambda(R^-,R^+)+\eta.\tag{4.9}$$

令

$$v_\eta(t) := v(t) \wedge (1-\eta), \quad \psi_\eta(t) := 2\int_0^t \sqrt{\frac{\eta + f^2(v_\eta)|\beta'|^2 + |v_\eta'|^2}{(1-v_\eta)^2 + 4\lambda \operatorname{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1], \tag{4.10}$$

得到一个双 Lipschitz 映射 $\psi_\eta\colon [0,1] \to [0, \psi_\eta(1)]$。然后我们为 $g_\lambda^*(R^-, R^+)$ 选择如下竞争函数:

$$\widehat{\beta}_\eta(t) := \begin{cases} R^-, & t \in [-1-\psi_\eta(1), 0], \\ \beta(\psi_\eta^{-1}(t)) & t \in [0, \psi_\eta(1)], \\ R^+, & t \in [\psi_\eta(1), 1+\psi_\eta(1)]; \end{cases} \quad \widehat{v}_\eta := \begin{cases} 1, & t \in [-1-\psi_\eta(1), -1], \\ (1-\eta) - t\eta, & t \in [-1, 0], \\ v_\eta(\psi_\eta^{-1}(t)), & t \in [0, \psi_\eta(1)], \\ 1 + (t - \psi_\eta(1) - 1)\eta, & t \in [\psi_\eta(1), 1+\psi_\eta(1)]. \end{cases}$$

也就是说，令 $T_\eta := \psi_\eta(1) + 1$，则有 $(\widehat{\beta}_\eta, \widehat{v}_\eta) \in \mathcal{U}^{T_\eta}[R^-, R^+]$，因此

$$g_\lambda^*(R^-, R^+) \le F_\lambda^{T_\eta}(\widehat{\beta}_\eta, \widehat{v}_\eta), \tag{4.11}$$

这是因为定义 $g_\lambda^*(R^-, R^+)$ 的优化问题关于 T 单调递减。现在我们证明

$$F_\lambda^{T_\eta}(\widehat{\beta}_\eta, \widehat{v}_\eta) < \int_0^1 \sqrt{(1-v)^2 + 4\lambda \operatorname{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\sqrt{f^2(v)|\beta'|^2 + |v'|^2}\,\mathrm{d}t + o_{\eta\to 0}(1).$$

利用变量代换 $t = \psi_\eta(s)$，显然有

$$\begin{aligned} &\int_0^{\psi_\eta(1)} \left(f^2(\widehat{v}_\eta)|\widehat{\beta}_\eta'|^2 + |\widehat{v}_\eta'|^2\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\psi_\eta(1)} \left(\frac{(1-\widehat{v}_\eta)^2}{4} + \lambda \operatorname{dist}^2(\widehat{\beta}_\eta, \mathrm{O}(d))\right)\mathrm{d}t \\ &\quad = \int_0^1 \left(f^2(v_\eta)|\beta'|^2 + |v_\eta'|^2\right)\frac{1}{\psi_\eta'}\,\mathrm{d}s + \int_0^1 \left(\frac{(1-v_\eta)^2}{4} + \lambda \operatorname{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))\right)\psi_\eta'\,\mathrm{d}s \\ &\quad = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(f^2(v_\eta)|\beta'|^2 + |v_\eta'|^2\right)\sqrt{\frac{(1-v_\eta)^2 + 4\lambda \operatorname{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}{\eta + f^2(v_\eta)|\beta'|^2 + |v_\eta'|^2}}\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\eta + f^2(v_\eta)|\beta'|^2 + |v_\eta'|^2}\sqrt{(1-v_\eta)^2 + 4\lambda \operatorname{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\,\mathrm{d}s \\ &\quad \le c_\lambda \frac{\sqrt{\eta}}{2} + \int_0^1 \sqrt{f^2(v_\eta)|\beta'|^2 + |v_\eta'|^2}\sqrt{(1-v_\eta)^2 + 4\lambda \operatorname{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

其中 $c_\lambda = \sqrt{1 + 8\lambda d}$（此处用到了平方根的次可加性以及 $\operatorname{dist}(\beta, \mathrm{O}(d)) \le 2\sqrt{d}$ 这一界）。记 $E_\eta := I_{T_\eta} \setminus [0, \psi_\eta(1)]$，则有

$$\begin{aligned} &\int_{E_\eta} \left(f^2(\widehat{v}_\eta)|\widehat{\beta}_\eta'|^2 + |\widehat{v}_\eta'|^2 + \frac{(1-\widehat{v}_\eta)^2}{4} + \lambda \operatorname{dist}^2(\widehat{\beta}_\eta, \mathrm{O}(d))\right)\mathrm{d}t \\ &\quad = \int_{E_\eta} \left(|\widehat{v}_\eta'|^2 + \frac{(1-\widehat{v}_\eta)^2}{4}\right)\mathrm{d}t = 2\eta^2 + \frac{\eta^2}{6}, \end{aligned}$$

因此

$$F_\lambda^{T_\eta}(\widehat{\beta}_\eta, \widehat{v}_\eta) \le c_\lambda\sqrt{\eta} + 3\eta^2 + \int_0^1 \sqrt{f^2(v_\eta)|\beta'|^2 + |v_\eta'|^2}\sqrt{(1-v_\eta)^2 + 4\lambda \operatorname{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\,\mathrm{d}t.$$

由于在集合 $\{v_\eta \neq v\}$ 中 $v'_\eta = 0$ 几乎处处成立，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sqrt{f^2(v_\eta)|\beta'|^2 + |v'_\eta|^2}\,\sqrt{(1-v_\eta)^2 + 4\lambda\,\mathrm{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\{v_\eta = v\}} \sqrt{f^2(v)|\beta'|^2 + |v'|^2}\,\sqrt{(1-v)^2 + 4\lambda\,\mathrm{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{\{v_\eta \neq v\}} f(1-\eta)\,|\beta'|\,\sqrt{\eta^2 + 4\lambda\,\mathrm{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

最后，令 $\omega(\eta)$ 为 $\left|\frac{\log(1-s)|}{1-s}\right|^{f}(s)$ 在 1 附近的连续模，则

$$\frac{|\log(1-s)|}{1-s}(\ell - \overline{\omega}(\eta)) \leq f(s) \leq \frac{|\log(1-s)|}{1-s}(\ell + \overline{\omega}(\eta)), \qquad s \in [1-\eta, 1). \tag{4.12}$$

由于对于每个 $a \geq 0$，函数 $s \mapsto \left|\frac{\log(1-s|}{1-s}\right|\sqrt{(1-s)^2 + a} = |\log(1-s)|\sqrt{1 + a(1-s)^{-2}}$ 在 $[0,1$ 上递增，且 $v \geq 1-\eta$ 属于集合 $\{v_\eta \neq v\}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\{v_\eta \neq v\}} f(1-\eta)\,|\beta'|\,\sqrt{\eta^2 + 4\lambda\,\mathrm{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \leq \frac{\ell + \overline{\omega}(\eta)}{\ell - \overline{\omega}(\eta)} \int_{\{v_\eta \neq v\}} f(v)\,|\beta'|\,\sqrt{(1-v)^2 + 4\lambda\,\mathrm{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \leq \frac{\ell + \overline{\omega}(\eta)}{\ell - \overline{\omega}(\eta)} \int_{\{v_\eta \neq v\}} \sqrt{f^2(v)|\beta'|^2 + |v'|^2}\,\sqrt{(1-v)^2 + 4\lambda\,\mathrm{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

综上，结合 (4.11) 和上述计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&g^*_\lambda(R^-, R^+) \leq \overline{g}_\lambda(R^-, R^+) \\
&\quad + c_\lambda\sqrt{\eta} + 4\eta^2 + \frac{2\overline{\omega}(\eta)}{\ell - \overline{\omega}(\eta)} \int_0^1 \sqrt{f^2(v)|\beta'|^2 + |v'|^2}\,\sqrt{(1-v)^2 + 4\lambda\,\mathrm{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

由 $\eta > 0$ 的任意性，我们可以据此得出结论。 □

下文的多个步骤中，我们需要将轨迹映射到 O(d) 上。这里给出基本计算，以估计所得曲线的长度。

引理 4.3. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间，$\gamma \in W^{1,1}(I; \mathrm{M}^{d\times d})$ 满足 $\mathrm{dist}(\gamma(t), \mathrm{O}(d)) \leq 1/2$ 几乎处处成立。则存在与 γ 无关的 $C > 0$，以及 $\widehat{\gamma} \in W^{1,1}(I; \mathrm{O}(d))$，使得

$$|\widehat{\gamma}'|(t) \leq (1 + C\mathrm{dist}(\gamma(t), \mathrm{O}(d)))|\gamma'|(t) \text{ for a.e. } t \in I, \qquad \text{and} \qquad \widehat{\gamma} = \gamma \text{ on } \{\gamma \in \mathrm{O}(d)\}. \tag{4.15}$$

证明。 如同推导（3.21）时的论证，我们利用 $\psi(A) := A(A^TA)^{-1/2}$ 是从 $\mathrm{M}^{d\times d} \setminus \{\det = 0\}$ 到 O(d)的光滑映射，因此在集合 $\{\mathrm{dist}(\cdot, \mathrm{O}(d)) \leq 1/2\}$上 Lipschitz 连续。同时，对于 $R \in \mathrm{O}(d)$，有 $\psi(R) = R$；而对任意 $|\eta| \leq 1/2$，若 $\eta \in \mathrm{M}^{d\times d}$，泰勒展开给出

$$\begin{aligned}
\psi(R+\eta) =& (R+\eta)\left((R^T + \eta^T)(R+\eta)\right)^{-1/2} = (R+\eta)(\mathrm{Id} + \eta^T R + R^T\eta + \eta^T\eta)^{-1/2} \\
=& R + \eta - \frac{1}{2}R\eta^T R - \frac{1}{2}\eta + O(|\eta|^2),
\end{aligned} \tag{4.16}$$

因此 $|D\psi(R)\eta| \leq |\eta|$，进而 $|D\psi(R)|_{\mathrm{op}} \leq 1$。由 ψ 的正则性可知，只要 $\mathrm{dist}(\xi, \mathrm{O}(d))$，就有 $|D\psi(\xi)|_{\mathrm{op}} \leq 1 + C\mathrm{dist}(\xi, \mathrm{O}(d))$。令 $\widehat{\gamma} := \psi\circ\gamma$。于是 $|\widehat{\gamma}'(t)| \leq |D\psi(\gamma(t))|_{\mathrm{op}}|\gamma'(t)|$，证明至此完成。□

现在我们可以证明 g_λ 的主要性质，这些性质汇总于以下结果中 ult.

命题 4.4。 对于每个 $\lambda \in [0,+\infty]$，函数 $g_\lambda^*\colon \mathrm{O}(d)\times\mathrm{O}(d)\to[0,+\infty)$ 满足以下性质：

(i) 存在仅取决于 d 和 f 的 $\kappa \geq 1$，使得

$$g_\lambda^*(R^-,R^+) \leq 1 \wedge \kappa\Big(|R^+-R^-|\,\big|\log|R^+-R^-|\big| + |R^+-R^-|\Big), \tag{4.17}$$

对于每个 R^+、$R^- \in \mathrm{O}(d)$，都有 $\lambda \in [0,\infty]$；

(ii) 对于每个 $R\in\mathrm{O}(d)$ 以及每个收敛到 R 的序列 $(R_n)_n \subset \mathrm{O}(d)$，其中 $R_n \neq R$，存在

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g_\lambda^*(R_n,R)}{|R_n-R|\,\big|\log|R_n-R|\big|} = \frac{\ell}{2};$$

(iii) $g_\lambda^* \in C^0(\mathrm{O}(d)\times\mathrm{O}(d))$.

所有性质都可由 g_λ 立即继承。

证明。*(i)* 的证明。只需证明 $\lambda \in [0,\infty)$ 的界，其中 κ 不依赖于 λ。对于每个 R^-、$R^+ \in \mathrm{O}(d)$，令

$$\overline{\beta}(t) := \begin{cases} R^-, & t\in\left[0,\frac{1}{3}\right],\\ R^- + (R^+-R^-)(3t-1), & t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\\ R^+, & t\in\left[\frac{2}{3},1\right]; \end{cases} \qquad \overline{v}(t) := \begin{cases} 1-3t, & t\in\left[0,\frac{1}{3}\right],\\ 0, & t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\\ 3t-2, & t\in\left[\frac{2}{3},1\right]. \end{cases}$$

应用命题 4.2，并通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned} g_\lambda^*(R^-,R^+) = \overline{g}_\lambda(R^-,R^+) &\leq \int_0^1 \sqrt{(1-\overline{v})^2 + 4\lambda\,\mathrm{dist}^2(\overline{\beta},\mathrm{O}(d))}\sqrt{f^2(\overline{v})|\overline{\beta}'|^2+|\overline{v}'|^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{(0,1/3)\cup(2/3,1)} (1-\overline{v})|\overline{v}'|\,\mathrm{d}t = 1. \end{aligned} \tag{4.18}$$

这就完成了 $|R^+-R^-|\geq 1$ 情况下的证明。

现在假设 $|R^+-R^-|<1$。我们将再次利用 $g_\lambda^* = g_\lambda$ 这一事实，并适当选取定义 g_λ 的优化问题中的竞争函数，从而完成 (4.17) 的证明。对连接 R^- 与 R^+ 的仿射映射应用引理 4.3，其像包含在 $\mathrm{O}(d)$ 的一个大小为 $|R^- - R^+|/2 < 1/2$ 的邻域内，由此得到一条曲线 $\gamma \in C^1([\frac{1}{3},\frac{2}{3}];\mathrm{O}(d))$，使得 $\gamma(\frac{1}{3}) = R^-$，$\gamma(\frac{2}{3}) = R^+$，并且

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leq |R^- - R^+| + C|R^- - R^+|^2.$$

对于下文选取的 $s\in(0,1)$，我们令

$$\beta(t) := \begin{cases} R^-, & t\in\left[0,\frac{1}{3}\right],\\ \gamma(t), & t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\\ R^+, & t\in\left[\frac{2}{3},1\right], \end{cases} \qquad v(t) := \begin{cases} 1-3ts^{1/2}, & t\in\left[0,\frac{1}{3}\right],\\ 1-s^{1/2}, & t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\\ 1+3(t-1)s^{1/2}, & t\in\left[\frac{2}{3},1\right]. \end{cases}$$

类似于 (4.18) 的显式计算给出

$$\begin{aligned}\overline{g}_\lambda(R^-,R^+) &\le \int_{(0,1/3)\cup(2/3,1)} (1-v)|v'|\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} s^{1/2} f(1-s^{1/2})|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= s + (|R^- - R^+| + C|R^- - R^+|^2) s^{1/2} f(1-s^{1/2})\end{aligned}$$

因此，选择 $s = |R^- - R^+|$ 可得

$$\overline{g}_\lambda(R^-,R^+) \le |R^- - R^+| + |R^- - R^+|^{3/2}(1 + C|R^- - R^+|) f(1 - |R^- - R^+|^{1/2}). \tag{4.19}$$

回顾 (1.8) 和命题 4.2，即可得到结论。

（*ii*）的证明。设 $(R_n)_n \subset \mathsf{O}(d)$ 收敛于 R。注意到 R_n、R 属于 $\mathsf{O}(d)$ 的同一个连通分支，记为 $\mathsf{SO}(d)$，即对于每个 $n \in \mathbb{N}$、$R \in \mathsf{SO}(d)$，都有 $R_n \in \mathsf{SO}(d)$。我们首先证明下界：

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{g_\lambda(R_n,R)}{|R_n - R|\,\big|\log|R_n - R|\big|} \ge \frac{\ell}{2}. \tag{4.20}$$

根据单调性，只需对 $\lambda = 0$ 证明即可。若 (4.20) 不成立，则存在 $\delta > 0$ 和 $R_n \in \mathsf{SO}(d)$，其中 $s_n := |R_n - R| \to 0$，以及 $(\beta_n, v_n) \in \mathcal{U}[R_n, R]$，使得

$$\int_0^1 (1-v_n)\sqrt{f^2(v_n)|\overline{\beta}_n'|^2 + |v_n'|^2}\,\mathrm{d}t \le \frac{\ell-\delta}{2} s_n |\log s_n|. \tag{4.21}$$

对于每个 n，由于 $v_n(0) = v_n(1) = 1$，可得

$$(1 - v_n(t))^2 \le \int_0^1 (1-v_n)|v_n'|\,\mathrm{d}t \le \frac{\ell}{2} s_n |\log s_n|, \qquad t \in (0,1). \tag{4.22}$$

此外，利用 (4.21) 和 $\int_0^1 |\beta_n'|\mathrm{d}t \gtrsim s_n$，我们得到

$$\frac{\ell-\delta}{2} s_n |\log s_n| \ge \int_0^1 (1-v_n) f(v_n) |\overline{\beta}_n'|\,\mathrm{d}t \ge s_n \min_{[0,1]} (1-v_n) f(v_n). \tag{4.23}$$

先使用 (4.23)，再使用 (4.22)，

$$\frac{\ell-\delta}{2} \ge \min_{[0,1]} \frac{(1-v_n)f(v_n)}{|\log(1-v_n)|} \frac{|\log(1-v_n)|}{|\log s_n|} \ge \min_{[0,1]} \frac{(1-v_n)f(v_n)}{|\log(1-v_n)|} \frac{|\log(\frac{\ell}{2} s_n |\log s_n|)|}{2|\log s_n|}. \tag{4.24}$$

现在令 $n \to \infty$ 趋于极限。由 (4.22)，$v_n \to 1$ 一致收敛。因此（回忆 (1.8)），第一个分式收敛到 ℓ。与此同时，由于 $s_n \to 0$，第二个分式收敛到 $1/2$。这就产生了矛盾，因为我们假设 $\delta > 0$。由此证明了 (4.20)，进而得到下界。

依次使用 (4.19) 和 (1.8)，即可立即得到上界。具体而言，令 $s_n := |R_n - R| \to 0$，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \frac{g_\lambda(R_n,R)}{|R_n - R|\,\big|\log|R_n - R|\big|} &\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{s_n + (1 + C s_n) s_n^{3/2} f(1 - s_n^{1/2})}{s_n\,\big|\log s_n\big|} \\ &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{s_n^{1/2} f(1 - s_n^{1/2})}{2\big|\log s_n^{1/2}\big|} = \frac{\ell}{2}.\end{aligned}$$

由于我们只用到了 (4.19) 中的界，而该界与 λ 无关，因此极限关于 λ 一致，所以 (ii) 对 $\lambda = \infty$ 也成立。

（*iii*）的证明。这可由 (4.17)（它保证了原点处的连续性）以及命题 4.1(v) 中陈述的次可加性推出。

□

对于 $\lambda = \infty$，构造一个导出上界的恢复序列需要单独处理（见第 5.2 节）。若 R^+ 和 R^- 的行列式相同，则可以找到连接它们且始终处于 $\mathrm{O}(d)$ 范围内的可容许路径。然而，如果行列式不同，这样的曲线便不存在，因此需要采用不同的构造。事实上，逼近用的可容许路径更简单，并且可以显式构造；但它们依赖于 δ_ε，因此在整体构造中，不能在取极限 $T \to \infty$ 之前先取极限 $\varepsilon \to 0$。下一个引理将介绍这一构造。

引理 4.5。设 $R^+,\ R^- \in \mathrm{O}(d)$。

(i) 如果 $\det R^+ \neq \det R^-$，则不存在 $(\beta, v) \in \mathcal{U}^T[R^-, R^+]$ 使得 $\beta(t) \in O(d)$ 几乎处处成立。*(ii)* 如果 $g^*_\infty(R^-, R^+) < 1$，则 $\det R^+ = \det R^-$，并且存在序列 $(\beta_T, v_T) \in \mathcal{U}^T[R^-, R^+]$使得 $\beta_T(t) \in O(d)$ 几乎处处成立，

$$\lim_{T\to\infty} F^T(\beta_T, v_T) \le g^*_\infty(R^-, R^+), \tag{4.25}$$

and

$$\|\beta_T'\|^2_{L^2((-T,T))} \le C(R^+, R^-). \tag{4.26}$$

(iii) 对于任意 $T, \lambda \ge 1$，存在 $(\beta_{T,\lambda}, v_{T,\lambda}) \in \mathcal{U}^T[R^-, R^+]$ 使得

$$F^T_\lambda(\beta_{T,\lambda}, v_{T,\lambda}) \le g^*_\infty(R^-, R^+) + \omega(T) + \omega(\lambda) \tag{4.27}$$

and

$$\|\beta'_{T,\lambda}\|^2_{L^2((-T,T))} \le C\lambda T, \tag{4.28}$$

其中 $\omega(s) \to 0$ 当 $s \to +\infty$时。

在 $\lambda = \infty$ 的上界中，我们将对序列 $\lambda_\varepsilon = \varepsilon/\delta_\varepsilon$ 和 $T_\varepsilon \to +\infty$使用 (iii)。还可以很容易地得到 (4.27) 是等式，但这并非必要。

证明。*(i)* 的证明。由于 $\beta \in H^1$，它有一个连续代表元，$\det\beta$ 也有一个连续代表元。一个取值于 $\{\pm 1\}$ 的连续函数必为常数。

(ii) 的证明。对于每个 $\lambda \ge 1$，我们选取 T_λ，然后选取 $(\beta_\lambda, v_\lambda) \in \mathcal{U}^{T_\lambda}[R^-, R^+]$，使得

$$F^{T_\lambda}_\lambda(\beta_\lambda, v_\lambda) \le g^*_\lambda(R^-, R^+) + \frac{1}{\lambda}. \tag{4.29}$$

我们可以假设 β_λ 和 v_λ 连续。利用 $v_\lambda(\pm T_\lambda) = 1$，以及在 $(-T_\lambda, t)$ 和 (t, T_λ) 上的微积分基本定理，我们估计得：

$$\max_{I_{T_\lambda}} (1 - v_\lambda)^2 \le \int_{-T_\lambda}^{T_\lambda} |1 - v_\lambda|\,|v'_\lambda|\,\mathrm{d}t \le g^*_\lambda(R^-, R^+) + \frac{1}{\lambda}. \tag{4.30}$$

右侧收敛到 $g^*_\infty(R^-, R^+) < 1$，当 $\lambda \to \infty$ 时。令 $\delta := \frac{1}{4}(1 - g^*_\infty(R^-, R^+)) > 0$，则当 λ 足够大时，有

$$(1 - v_\lambda(t))^2 \le 1 - 2\delta \qquad \text{for all } t \in I_{T_\lambda}. \tag{4.31}$$

根据 f的单调性，这意味着处处有 $f(v_\lambda) \ge f(\delta)$。因此，由（4.29）可得

$$\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda} |\beta'_\lambda|^2 + |v'_\lambda|^2\,\mathrm{d}t \le C, \tag{4.32}$$

其中， $C>0$ 可能通过 δ依赖于 R^-、 R^+ ，但不依赖于 λ。通过与（4.30）相同的计算，并利用 $\operatorname{dist}(\beta_\lambda(\pm T_\lambda), \mathrm{O}(d)) = 0$,

$$\begin{aligned} 2\lambda^{1/2} f(\delta) \max_{t\in I_{T_\lambda}} \operatorname{dist}^2(\beta_\lambda(t), \mathrm{O}(d)) &\le \int_{-T_\lambda}^{T_\lambda} 2\lambda^{1/2} f(v_\lambda) \operatorname{dist}(\beta_\lambda, \mathrm{O}(d)) |\beta_\lambda'| \,\mathrm{d}t \\ &\le g_\lambda^*(R^-, R^+) + \frac{1}{\lambda} + C \le C+1, \end{aligned} \tag{4.33}$$

因此 $\|\operatorname{dist}(\beta_\lambda, \mathrm{O}(d))\|_{L^\infty} \le C\lambda^{-1/4}$ （回忆一下， C 依赖于 δ，但不依赖于 λ）。

Let $\widehat{\beta}_\lambda$ 是将引理 4.3 应用于 β_λ所得的结果，它满足

$$|\widehat{\beta}_\lambda'| \le (1 + C\operatorname{dist}(\beta_\lambda, \mathrm{O}(d)))|\beta_\lambda'|. \tag{4.34}$$

因此，由 (4.32)， $\widehat{\beta}_\lambda \in H^1(I_{T_\lambda}; \mathrm{O}(d))$，从而由 (i) $\det R^+ = \det R^-$。此外，有

$$F_\lambda^{T_\lambda}(\widehat{\beta}_\lambda, v_\lambda) \le \left(1 + \frac{C}{\lambda^{1/4}}\right)^2 F_\lambda^{T_\lambda}(\beta_\lambda, v_\lambda) \le g_\lambda^*(R^-, R^+) + \frac{C}{\lambda^{1/4}} + \frac{1}{\lambda}, \tag{4.35}$$

并且，取 $\lambda \to \infty$，得到

$$\limsup_{\lambda\to\infty} F_\lambda^{T_\lambda}(\widehat{\beta}_\lambda, v_\lambda) \le g_\infty^*(R^-, R^+). \tag{4.36}$$

由 T 中的单调性，同样的结论对任意序列 $T \to \infty$ 都成立。

（*iii*）的证明：如果 $g_\infty^*(R^-, R^+) < 1$，则由 (ii) 结合 $(\beta_{T,\lambda}, v_{T,\lambda}) = (\beta_T, v_T)$ 可得。

若非如此，我们将为任意$T>4$显式构造一个适当的序列 $(\beta_{T,\lambda}, v_{T,\lambda}) \in \mathcal{U}^T[R^-, R^+]$。固定 $\eta \in (0, 1)$，其选取将在下文根据 λ和 T确定，并令

$$v_{T,\lambda}(t) := \begin{cases} 0, & \text{if } |t| < \eta, \\ 1 - e^{-(|t|-\eta)/2}, & \text{if } \eta \le |t| < T-2+\eta, \\ 1 - e^{-(T-2)/2}(T-1+\eta-|t|), & \text{if } T-2+\eta \le |t| < T-1+\eta, \\ 1, & \text{if } |t| \ge T-1+\eta. \end{cases} \tag{4.37}$$

相应地，我们令

$$\beta_{T,\lambda}(t) := \begin{cases} R^-, & \text{if } t \le -\eta, \\ \dfrac{\eta+t}{2\eta} R^+ + \dfrac{\eta-t}{2\eta} R^-, & \text{if } |t| < \eta, \\ R^+, & \text{if } t \ge \eta, \end{cases} \tag{4.38}$$

从而对于 $|t| \ge \eta$，有$\beta_{T,\lambda}'(t) = 0$，且 $(\beta_{T,\lambda}, v_{T,\lambda}) \in \mathcal{U}^T[R^-, R^+]$。我们估计

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T} \frac{(1-v_{T,\lambda})^2}{4} + |v_{T,\lambda}'|^2 \,\mathrm{d}t &\le \frac{2\eta}{4} + 2\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{-t}}{4} \,\mathrm{d}t + 2e^{-(T-2)}\left(\frac{1}{4}+1\right) \\ &\le 1 + 3e^{-T/2} + \frac{\eta}{2} \le g_\infty^*(R^-, R^+) + 3e^{-T/2} + \frac{\eta}{2}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

$f(v_{T,\lambda})|\beta_{T,\lambda}'| = 0$ 几乎处处，

$$\int_{-T}^{T} \lambda \operatorname{dist}^2(\beta_{T,\lambda}, \mathrm{O}(d)) \,\mathrm{d}t \le 2\eta\,\lambda\, 4d, \tag{4.40}$$

and

$$\|\beta_{T,\lambda}'\|_{L^2((-T,T))}^2 = \frac{|R^+ - R^-|^2}{(2\eta)^2} 2\eta \le \frac{d}{\eta}. \tag{4.41}$$

此时我们选择 $\eta := 1/(\lambda T)$，并结束证明。 □

5. Γ 收敛的证明

在最后这一节中，我们分别证明 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 的下界~和 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 的上界（回顾式 (2.31) 和 (2.32)），从而得到 Γ-收敛结果。

5.1. 下界。 本节旨在证明以下下界结果（参见定理 2.15 中的 (LB)'）。

T定理 5.1。 对于任意 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G} \times [0,1])$ 以及 $u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$ 满足条件 ng

$$u_\varepsilon \to u \ in\ L^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}), \qquad v_\varepsilon \to 1 \ in\ L^1(\Omega).$$

有

$$\widetilde{\mathcal{F}}^\lambda(u,1) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon).$$

证明首先使用放大论证，将问题化归为界面平坦且极限 u 仅取两个值的情形；随后对 $H^1(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 中的函数使用切片论证，将问题化归为区间 $I := \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上的一维问题。在一维情形下，我们可以利用引理 2.5 中讨论的 $H^1(I; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G})$ 与 $H^1(\overline{I}; \overline{\mathrm{M}}^{d\times d})$ 之间的关系。处理这些一维截面的主要额外难点（将在主证明前的一系列引理中加以处理）在于，泛函 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 不具有缩放不变性，因为前因子 f_ε 中带有 M_ε 的截断，其缩放方式与其余部分不同。事实上，第 4 节定义的表面能 g_λ 不包含任何截断。

为处理这一问题，我们引入一个中间步骤，对前因子进一步进行截断，并对每个 $j \in \mathbb{N}$，将 f 替换为

$$h_j(s) := \frac{js}{1-s} \wedge f(s), \qquad s \in [0,1), \tag{5.1}$$

并引入相应的表面能密度

$$\begin{aligned} g_{j,\lambda}(R^-, R^+) := \inf \Bigg\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1-v)^2 + 4\lambda \operatorname{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\, \sqrt{h_j^2(v)|\beta'|^2 + |v'|^2}\, \mathrm{d}t : \\ (\beta, v) \in \mathcal{U}^{1/2}[R^-, R^+] \Bigg\} \end{aligned} \tag{5.2}$$

对于 $\lambda \in [0, +\infty)$，并且

$$g_{j,\infty}(R^-, R^+) := \sup_{\lambda > 0} g_{j,\lambda}(R^-, R^+). \tag{5.3}$$

可容许对 $\mathcal{U}^{1/2}[R^-, R^+]$ 的集合定义见 (4.1)。如下文引理 5.2 所示，这些是对g_λ 的良好逼近。这样做的原因是，它使我们能够用截断版本 $\widetilde{v}_\varepsilon$ 替换相场 v_ε，且误差很小，同时去掉前因子中的截断。

引理 5.2。 对于任意 $\lambda \in [0, +\infty]$, R^+, $R^- \in \mathrm{O}(d)$，下式成立：

$$g_\lambda(R^-, R^+) \le \lim_{j\to+\infty} g_{j,\lambda}(R^-, R^+). \tag{5.4}$$

证明。 该证明与 [19, 命题 7.3 (iii)]的证明基本相同。这里我们概述 $\lambda \in [0, +\infty)$情形下的主要步骤，$\lambda = +\infty$ 情形则通过对$\lambda > 0$取上确界得到。对于固定的 R^-, $R^+ \in \mathrm{O}(d)$，对任意博雷尔集 $E \subset \mathbb{R}$，我们考虑定义于$H^1(J; \mathrm{M}^{d\times d}) \times H^1(J; [0,1])$上的泛函，其中任意区间 J包含 E，其定义为

$$\begin{aligned} H_{j,\lambda}(\beta, v; E) &:= \int_E \sqrt{(1-v)^2 + 4\lambda \operatorname{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\, \sqrt{h_j^2(v)|\beta'|^2 + |v'|^2}\, \mathrm{d}t, \\ H_\lambda(\beta, v; E) &:= \int_E \sqrt{(1-v)^2 + 4\lambda \operatorname{dist}^2(\beta, \mathrm{O}(d))}\, \sqrt{f^2(v)|\beta'|^2 + |v'|^2}\, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{5.5}$$

从而

$$g_{j,\lambda}(R^-,R^+)=\inf_{(\beta,v)\in\mathcal{U}^{1/2}[R^-,R^+]}H_{j,\lambda}(\beta,v,I),\qquad g^*_\lambda(R^-,R^+)=\inf_{(\beta,v)\in\mathcal{U}^{1/2}[R^-,R^+]}H_\lambda(\beta,v,I).$$

首先注意到，由 (5.1) 和命题 4.4(i),

$$g_{j,\lambda}(R^-,R^+)\le g_{j+1,\lambda}(R^-,R^+)\le g^*_\lambda(R^-,R^+)\le 1,$$

因此我们需要证明

$$g_\lambda(R^-,R^+)\le\sup_j g_{j,\lambda}(R^-,R^+). \tag{5.6}$$

对于任意 $j\in\mathbb{N}$，令 $(\beta_j,v_j)\in\mathcal{U}^{1/2}[R^-,R^+]$ 满足

$$H_{j,\lambda}(\beta_j,v_j;I)\le g_{j,\lambda}(R^-,R^+)+\frac{1}{j}. \tag{5.7}$$

若 $\liminf_j\min_{[0,1]}v_j=0$，则与 (4.30) 中相同的论证可轻易得到

$$\limsup_{j\to+\infty}H_{j,\lambda}(\beta_j,v_j;I)\ge 1$$

由此证明得证。

现在假设 $\liminf_j\min_{[0,1]}v_j>0$，并取 $0<\eta<\liminf_j\min_{[0,1]}v_j$。定义 $v_j^\eta:=v_j\wedge(1-\eta)$。将 β_j 在 I 外延拓为常数，并在区间 $(-1,1)$ 内进行线性插值，以满足边界条件 1；再利用 H_λ 的重参数化不变性，我们立即得到

$$g_\lambda(R^+,R^-)\le g^*_\lambda(R^+,R^-)\le H_\lambda(\beta_j,v_j^\eta;(-1,1))\le H_\lambda(\beta_j,v_j^\eta;I)+\eta^2. \tag{5.8}$$

我们将 I 划分为三个子集：

$$\begin{aligned}A_j&:=\{t\in I:\ v_j(t)\le 1-\eta\},\\ B_j&:=\{t\in I:\ 1-\eta<v_j(t)\le 1,\ h_j(v_j(t))=f(v_j(t))\},\\ C_j&:=\{t\in I:\ 1-\eta<v_j(t)\le 1,\ h_j(v_j(t))<f(v_j(t))\}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

我们从 A_j 开始。这里 $v_j=v_j^\eta$，并且由于对于足够大的 j，$h_j=f$ 属于 $[\eta,1-\eta]$，

$$H_\lambda(\beta_j,v_j^\eta;A_j)=H_{j,\lambda}(\beta_j,v_j;A_j)\qquad\text{for all } j \text{ large enough.} \tag{5.10}$$

为了处理第二个集合，我们采用与 (4.12) 和 (4.13) 中相同的论证，得到

$$H_\lambda(\beta_j,v_j^\eta;B_j)\le\frac{\ell+\varpi(\eta)}{\ell-\varpi(\eta)}H_{j,\lambda}(\beta_j,v_j;B_j)\qquad\text{for all } j,\qquad \varpi(\eta)\to 0 \text{ as } \eta\to 0. \tag{5.11}$$

最后我们注意到，如果 $t\in C_j$，那么 $(1-v_j(t))h_j(v_j(t))=jv_j(t)\ge j(1-\eta)$，因此

$$(1-v_j(t))h_j(v_j(t))\ge\eta f(1-\eta)=(1-v_j^\eta)f(v_j^\eta)$$

对于所有 $j\ge\frac{\eta f}{(1-\eta)\ 1-\eta}$。采用与处理 B_j 时相同的论证，我们得出

$$H_\lambda(\beta_j,v_j^\eta;C_j)\le H_{j,\lambda}(\beta_j,v_j;C_j)\qquad\text{for all } j\ge\tfrac{\eta f(1-\eta)}{1-\eta}. \tag{5.12}$$

由 (5.8)、(5.10)、(5.11)、(5.12) 和 (5.7)，先取极限 $j\to\infty$，再取 $\eta\to 0$，即可得到 (5.6)。□

接下来，我们证明，在能量的定义中$g_{j,\ \lambda}$ 也可以考虑仅渐近满足边界条件的测试函数。

引理 5.3。固定 $j \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [0,+\infty)$、 R^+, $R^- \in \mathrm{O}(d)$。考虑一个序列 $(\beta_k, v_k) \in H^1(I; \mathbf{M}^{d\times d}\times[0,1])$，使得

$$\beta_k \xrightarrow{L^1_{\mathcal{G}}} R^-\chi_{(-\frac{1}{2},0)} + R^+\chi_{(0,-\frac{1}{2})} \text{ and } v_k \to 1 \text{ in } L^1. \tag{5.13}$$

那么，在(5.5) 中定义的泛函 $H_{j,\lambda}$ 满足

$$\min_{G^+,G^-\in\mathcal{G}} g_{j,\lambda}(G^-R^-, G^+R^+) \le \liminf_{k\to\infty} H_{j,\lambda}(\beta_k, v_k; I). \tag{5.14}$$

证明。照例，为了对场 β_k 进行插值，我们需要使 v_k 远离 1。可能需要取一个子列，此时几乎处处逐点收敛，因此我们可以选取 $z \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 和 $G_k^\pm \in \mathcal{G}$，使得

$$\alpha_k := |G_k^+R^+ - \beta_k(z)| + |G_k^-R^- - \beta_k(-z)| + |1-v_k(z)| + |1-v_k(-z)| \to 0; \tag{5.15}$$

当 k 充分大时，对于所有 $s \in [1-\alpha_k, 1)$，都有 $h_j(s) = js/(1-s)$。因此，在集合$\{v_k \ge 1-\alpha_k\}$ 上，泛函 $H_{j,\lambda}(v_k, \beta_k; I)$ 中的被积函数可改写为

$$\sqrt{1 + \frac{4\lambda}{(1-v_k)^2}\operatorname{dist}^2(\beta_k, \mathrm{O}(d))}\,\sqrt{j^2v_k^2|\beta_k'|^2 + (1-v_k)^2|v_k'|^2} \tag{5.16}$$

并令 $\widehat{v}_k := v_k \wedge (1-\alpha_k)$，可得

$$H_{j,\lambda}(\beta_k, \widehat{v}_k; (-z,z)) \le H_{j,\lambda}(\beta_k, v_k; (-z,z)). \tag{5.17}$$

我们将 $\widehat{v}_k$ 延拓为在 $[-1,1]$的其余部分上等于 $1-\alpha_k$，在 $(-2,2)$ 之外等于 1，并在两者之间作仿射插值。随后延拓 β_k，使其在 $(1,\infty)$ 上为 $\beta_k = G_k^+R^+$，在 $(-\infty,-1)$ 上为 $\beta_k = G_k^-R^-$，并在 $(-1,-z)$ 和 $(z,1)$ 上作仿射插值。注意，这两个函数在 $(-2,2)$ 上都属于 H^1。我们计算

$$H_{j,\lambda}(\beta_k, \widehat{v}_k; (z,1)) \le (1-z)\sqrt{\alpha_k^2 + 4\lambda\alpha_k^2}\sqrt{\frac{j^2}{\alpha_k^2}4\alpha_k^2} = 2j\alpha_k\sqrt{1+4\lambda}, \tag{5.18}$$

$$H_{j,\lambda}(\beta_k, \widehat{v}_k; (1,2)) = \int_1^2 \alpha_k(2-t)\alpha_k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\alpha_k^2, \tag{5.19}$$

另一侧也同理。由于 $H_{j,\lambda}$ 在重参数化下不变，我们得到

$$g_{j,\lambda}(G_k^-R^-, G_k^+R^+) \le H_{j,\lambda}(\beta_k, \widehat{v}_k; (-2,2)) \le H_{j,\lambda}(v_k, \beta_k; I) + \alpha_k^2 + 4j\alpha_k\sqrt{1+4\lambda} \tag{5.20}$$

对所有充分大的 k；取极限 $k\to\infty$，证明得证。 □

最后，我们给出由放大过程得到的一维泛函的一个下界。

引理 5.4。设 $\varepsilon_k/\delta_k \to \lambda \in [0,+\infty]$、 $M_k \to +\infty$，并假设 $(\beta_k, v_k) \in H^1(I; \mathbf{M}^{d\times d}\times[0,1])$、$I = [-1/2, 1/2]$ 满足

$$\beta_k \to R^-\chi_{[-1/2,0)} + R^+\chi_{[0,1/2]} \text{ in } L^1_{\mathcal{G}}(\Omega, \mathrm{M}^{d\times d}), \quad v_k \to 1 \text{ in } L^1(I)$$

对于某些 R^-、$R^+ \in \mathrm{O}(d)$。于是

$$\begin{aligned}&\min_{G^+,G^-\in\mathcal{G}} g_{j,\lambda}(G^-R^-, G^+R^+)\\ &\le \liminf_{k\to+\infty}\int_I (M_k^2 \wedge \varepsilon_k f^2(v_k))\,|\beta_k'|^2\,\mathrm{d}t + \mathrm{PF}_{\varepsilon_k}(v_k; I) + \frac{1}{\delta_k}\int_I \operatorname{dist}^2(\beta_k, \mathrm{O}(d))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证明。我们先假设 $\lambda < +\infty$。对于(5.1)中定义的 h_j，有

$$\int_I (M_k^2 \wedge \varepsilon_k f^2(v_k))\,|\beta_k'|^2\,\mathrm{d}t \geq \int_I (M_k^2 \wedge \varepsilon_k h_j^2(v_k))\,|\beta_k'|^2\,\mathrm{d}t. \tag{5.21}$$

取 $\gamma_k := 1 - j\sqrt{\varepsilon_k}/M_k$ 并定义 $\widetilde{v}_k := v_k \wedge (1-\gamma_k)$。那么 $\varepsilon_k^{1/2} h_j(\gamma_k) \leq \varepsilon_k^{1/2} j\gamma_k/(1-\gamma_k) \leq M_k$ 且

$$\begin{aligned}
&\int_I (M_k^2 \wedge \varepsilon_k h_j^2(v_k))\,|\beta_k'|^2 + \frac{(1-v_k)^2}{4\varepsilon_k} + \varepsilon_k |v_\varepsilon'|^2\,\mathrm{d}t \\
&\quad \geq \int_I \varepsilon_k h_j^2(\widetilde{v}_k)\,|\beta_k'|^2 + \frac{(1-\widetilde{v}_k)^2}{4\varepsilon_k} + \varepsilon_k |\widetilde{v}_k'|^2\,\mathrm{d}t - \int_{\{v_k > \gamma_k\}} \frac{(1-\gamma_k)^2}{4\varepsilon_k}\,\mathrm{d}t \\
&\quad \geq \int_I \varepsilon_k h_j^2(\widetilde{v}_k)\,|\beta_k'|^2 + \frac{(1-\widetilde{v}_k)^2}{4\varepsilon_k} + \varepsilon_k |\widetilde{v}_k'|^2\,\mathrm{d}t - \frac{j^2}{4M_k^2}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\int_I (M_k^2 \wedge \varepsilon_k f^2(v_k))\,|\beta_k'|^2\,\mathrm{d}t + \mathrm{PF}_{\varepsilon_k}(v_k; I) + \frac{1}{\delta_k}\int_I \mathrm{dist}^2(\beta_k, \mathrm{O}(d))\,\mathrm{d}t \\
&\geq \int_I \sqrt{(1-\widetilde{v}_k)^2 + 4\frac{\varepsilon_k}{\delta_k}\mathrm{dist}^2(\beta_k, \mathrm{O}(d))}\sqrt{h_j^2(\widetilde{v}_k)|\beta_k'|^2 + |\widetilde{v}_k'|^2}\,\mathrm{d}t - \frac{j^2}{4M_k^2}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

当 $k \to \infty$ 时，最后一项趋于零。为了估计该积分，我们分三种情况讨论。若 $\lambda = 0$，则该方程右端的积分大于或等于 $H_{j,\,0}(\beta_k,\ \widetilde{v}_k)$，由此利用引理 5.3 得出结论。若 $\lambda \in (0,\ \infty)$，同一积分大于或等于 $\rho_k^{1/2} H_{j,\,\lambda}(\beta_k,\ \widetilde{v}_k)$，其中 $\rho_k := 1 \wedge \frac{\varepsilon_k}{\lambda\delta_k} \to 1$，结论也可类似得出。事实上，对任意 $a,\ b \geq 0$,

$$\rho_k^{1/2}\sqrt{a+\lambda b} = \sqrt{\rho_k a + \rho_k \lambda b} \leq \sqrt{a + \frac{\varepsilon_k}{\delta_k} b}.$$

剩下需要处理的情形是 $\varepsilon_k/\delta_k \to \infty$。固定 $\lambda' > 1$。当 k 充分大时，我们有 $\varepsilon_k/\delta_k \geq \lambda'$，因此 (5.23) 中的积分大于或等于 $H_{j,\,\lambda'}(\beta_k,\ \widetilde{v}_k)$。由 (5.3)（并再次回顾 (5.2)），对 λ' 取上确界即可得出结论。□

我们将通过放大和切片来证明下界。

定理 *5.1* 的证明。如果 $\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon,\ v_\varepsilon) = +\infty$，则无需证明。另一方面，如果 $\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon,\ v_\varepsilon) < +\infty$，根据定理 3.2，我们可以假设（必要时取一个子列，并稍微滥用一下记号），$v = 1$ 在 Ω 中几乎处处成立，$u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$，并且

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon).$$

我们定义非负拉东测度

$$\mu_\varepsilon := \left(f_\varepsilon^2(v_\varepsilon)\,|\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{(1-v_\varepsilon)^2}{4\varepsilon} + \varepsilon|\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\delta_\varepsilon}\mathrm{d}_{\mathcal{G}}^2(u_\varepsilon, \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})\right)\mathcal{L}^N, \tag{5.24}$$

使得 $\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon,\ v_\varepsilon) = \mu_\varepsilon(\Omega)$，并且能量的一致有界性对应于测度 μ_ε 全变差的一致有界性，因此存在 Ω 上的一个非负 Radon 测度 μ，它是 μ_ε 的弱*极限（提取进一步的子列后，仍用原符号表示）。由测度弱*收敛下全变差的下半连续性可知，

$$\mu(\Omega) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon(\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon),$$

因此，只需证明

$$\mu(\Omega) \geq \widetilde{\mathcal{F}}^{\lambda}(u,1), \tag{5.25}$$

或者，等价地，对于 $\mathcal{H}^{N-1}$-几乎处处的 $x_0 \in J_u$，有

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}(\mathcal{H}^{N-1}\llcorner J_u)}(x_0) \geq g_\lambda(R^-, R^+) \tag{5.26}$$

其中 $R^{\pm} \in u^{\pm}(x_0)$ 是该等价类的任意代表元；由于 g_λ 在 $\mathcal{G}$ 分别作用于其两个自变量时具有不变性，因此代表元的选择无关紧要。

接下来，对于满足极限存在且有限的 $x_0 \in J_u$，我们证明最后一个不等式

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\mu(Q_\rho^\nu(x_0))}{\mathcal{H}^{N-1}(J_u \cap Q_\rho^\nu(x_0))} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}(\mathcal{H}^{N-1}\llcorner J_u)}(x_0) \tag{5.27}$$

存在且有限，并且

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(J_u \cap Q_\rho^\nu(x_0))}{\rho^{N-1}} = 1, \tag{5.28}$$

其中 $\nu := \nu_u(x_0)$，且 $Q_\rho^\nu(x_0) = x_0 + \rho Q^\nu$ 是以 x_0 为中心、一个面垂直于 ν、边长为 ρ 的立方体。

根据 [1, 定理 2.3]，J_u 是一个可数可求 rectifiable 集，因此 (5.27) 和 (5.28) 在 J_u 中对 $\mathcal{H}^{N-1}$- 几乎处处成立。固定上述的 x_0，由测度的弱 *– 收敛可知，对于每个满足 $\mu(\partial Q_\rho^\nu(x_0)) = 0$ 的 ρ，都有 $\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon(Q_\rho^\nu(x_0)) = \mu(Q_\rho^\nu(x_0))$。接着，通过对角化，我们可以找到序列 $\rho_k \to 0$、$\varepsilon_k \to 0$，使得 $\varepsilon_k/\rho_k \to 0$、$\delta_{\varepsilon_k}/\rho_k \to 0$，并且令 $u_k := u_{\varepsilon_k}$、$v_k := v_{\varepsilon_k}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}(\mathcal{H}^{N-1}\llcorner J_u)}(x_0) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\mu_{\varepsilon_k}(Q_{\rho_k}^\nu(x_0))}{\rho_k^{N-1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\rho_k^{N-1}} \widetilde{\mathcal{F}}_{\varepsilon_k}(u_k, v_k; Q_{\rho_k}^\nu(x_0))$$

and

$$\rho_k^{-N} \| \mathrm{d}_{\mathcal{G}}(u_k, [\overline{R}](\cdot + x_0)) + |v_k - 1| \,\|_{L^1(Q_{\rho_k}^\nu(x_0))} \to 0,$$

其中

$$\overline{R} := R^- \chi_{\{x\cdot\nu<0\}} + R^+ \chi_{\{x\cdot\nu>0\}}.$$

~在定义 $\mathcal{F}_{\varepsilon_k}(u_k, v_k; Q_{\rho_k}^\nu(x_0))$ 的积分中作变量替换 $y := (x - x_0)/\rho_k \in Q^\nu$，并按惯例将缩放函数记为

$$\widehat{u}_k(y) := u_k(x_0 + \rho y), \quad \widehat{v}_k(y) := v_k(x_0 + \rho y), \qquad y \in Q^\nu,$$

我们得到 $\mathrm{d}_{\mathcal{G}}(\widehat{u}_k, [\overline{R}]) \to 0$, $\widehat{v}_k \to 1$ 在 $L^1(Q^\nu)$ 中，且

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho_k^{N-1}} \widetilde{\mathcal{F}}_{\varepsilon_k}(u_k, v_k; Q_{\rho_k}^\nu(x_0)) \\
&\qquad = \int_{Q^\nu} (\widehat{M}_k^2 \wedge \widehat{\varepsilon}_k f^2(\widehat{v}_k)) \, |\nabla \widehat{u}_k|^2 + \frac{(1-\widehat{v}_k)^2}{4\widehat{\varepsilon}_k} + \widehat{\varepsilon}_k |\nabla \widehat{v}_k|^2 + \frac{1}{\widehat{\delta}_k} \mathrm{d}_{\mathcal{G}}^2(\widehat{u}_k, \mathrm{O}(d)/\mathcal{G}) \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

for

$$\widehat{M}_k := \frac{M_{\varepsilon_k}}{\sqrt{\rho_k}} \quad \widehat{\varepsilon}_k := \frac{\varepsilon_k}{\rho_k}, \quad \widehat{\delta}_k := \frac{\delta_{\varepsilon_k}}{\rho_k}, \quad \text{so that} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\widehat{\varepsilon}_k}{\widehat{\delta}_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_k}{\delta_k} = \lambda.$$

因此，若我们考虑这些函数沿方向 ν 的切片，对 $z \in \Pi^\nu \cap Q^\nu := \{z \in Q^\nu : \ z \cdot \nu = 0\}$ 定义如下：

$$(\widehat{u}_k)_z^\nu(t) := \widehat{u}_k(z + t\nu), \quad (\widehat{v}_k)_z^\nu(t) := \widehat{v}_k(z + t\nu), \qquad t \in I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

那么，根据命题 2.11，对于 $\mathcal{H}^{N-1}$–几乎处处的 $z \in \Pi^\nu \cap Q^\nu$，

$$((\widehat{u}_k)^\nu_z, (\widehat{v}_k)^\nu_z) \in H^1(I; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G} \times [0,1]), \tag{5.29}$$

and

$$\begin{aligned} &(\widehat{u}_k)^\nu_z \to [R^-]\chi_{[-1/2,0)} + [R^+]\chi_{[0,1/2]} \quad \text{in } L^1(I; \mathrm{M}^{d\times d}/\mathcal{G}), \\ &(\widehat{v}_k)^\nu_z \to 1 \quad \text{in } L^1(I). \end{aligned} \tag{5.30}$$

由引理 2.5，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，以及每个满足 (5.29) 的 $z \in \Pi^\nu \cap Q^\nu$，存在 $\beta_{k,z} \in H^1(I; \mathrm{M}^{d\times d})$，使得 $[\beta_{k,z}] = (\widehat{u}_k)^\nu_z$ 且 $|\beta'_{k,z}| = |((\widehat{u}_k)^\nu_z)'|$，因此

$$\begin{aligned} &\widehat{F}_k((\widehat{u}_k)^\nu_z, (\widehat{v}_k)^\nu_z; I) \\ &:= \int_I (\widehat{M}_k^2 \wedge \widehat{\varepsilon}_k f^2((\widehat{v}_k)^\nu_z))\, |((\widehat{u}_k)^\nu_z)'|^2 + \frac{(1-(\widehat{v}_k)^\nu_z)^2}{4\widehat{\varepsilon}_k} + \widehat{\varepsilon}_k |((\widehat{v}_k)^\nu_z)'|^2 + \frac{1}{\widehat{\delta}_k} \mathrm{d}^2_{\mathcal{G}}((\widehat{u}_k)^\nu_z, \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})\, \mathrm{d}t \\ &= \int_I (\widehat{M}_k^2 \wedge \widehat{\varepsilon}_k f^2((\widehat{v}_k)^\nu_z))\, |\beta'_{k,z}|^2 + \frac{(1-(\widehat{v}_k)^\nu_z)^2}{4\widehat{\varepsilon}_k} + \widehat{\varepsilon}_k |((\widehat{v}_k)^\nu_z)'|^2 + \frac{1}{\widehat{\delta}_k} \mathrm{dist}^2(\beta_{k,z}, \mathrm{O}(d))\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

此外，由 (5.30)，

$$\beta_{k,z} \xrightarrow{L^1_{\mathcal{G}}} R^- \chi_{[-1/2,0)} + R^+ \chi_{[0,1/2]}, \qquad \text{for } \mathcal{H}^{N-1} - \text{a.e. } z \in \Pi^\nu \cap Q^\nu.$$

由引理 5.2 和引理 5.4，可得

$$\liminf_{k\to+\infty} \widehat{F}_k((\widehat{u}_k)^\nu_z, (\widehat{v}_k)^\nu_z; I) \geq g_\lambda(R^-, R^+),$$

对于 $\mathcal{H}^{N-1}$–几乎处处的 $z \in \Pi^\nu \cap Q^\nu$。

(5.26) 的成立性以及由此得到的结论，现在可通过对 Π^ν 积分，并利用 Fubini 定理、命题 2.11 中的估计以及 Fatou 引理得出：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}(\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_u)}(x_0) &= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\rho_k^{N-1}} \widetilde{\mathcal{F}}_{\varepsilon_k}(u_k, v_k; Q^\nu_{\rho_k}(x_0)) \geq \lim_{k\to+\infty} \int_{\Pi^\nu \cap Q^\nu} \widehat{F}_k((\widehat{u}_k)^\nu_z, (\widehat{v}_k)^\nu_z; I)\, \mathrm{d}z \\ &\geq \int_{\Pi^\nu \cap Q^\nu} \liminf_{k\to+\infty} \widehat{F}_k((\widehat{u}_k)^\nu_z, (\widehat{v}_k)^\nu_z; I)\, \mathrm{d}z \geq g_\lambda(R^-, R^+). \end{aligned}$$

□

注 5.5。 我们已在上文证明了定理 2.15 中的 (LB)'。定理 1.1 中类似的 (LB) 可以直接按照定理 5.1 中给出的相同证明方法得到，也可以由注 2.1、(2.31)、(2.32) 和定理 5.1 推出。

5.2. **上界**。 本节证明定理 1.1(UB) 中所述泛函 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 的上界。

定理 5.6。 对于任意 $\beta \in \mathrm{SBV}_0(\Omega;\mathrm{O}(d))$，存在 $(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \subset \mathrm{SBV}_{\mathcal{G}}(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}) \times H^1(\Omega)$，使得

$$\beta_\varepsilon \to \beta \ \textit{in}\ L^1_{\mathcal{G}}(\Omega; \mathrm{M}^{d\times d}), \qquad v_\varepsilon \to 1 \ \textit{in}\ L^1(\Omega),$$

并且满足

$$\mathcal{F}^\lambda(\beta, 1) \geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon). \tag{5.31}$$

此外，对于任意满足以下条件的序列 $\eta_\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta_\varepsilon}{\varepsilon} = 0 \ \textit{and}\ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta_\varepsilon}{\delta_\varepsilon} = 0 \tag{5.32}$$

可以选择序列 $(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon)$ 使得 $\eta_\varepsilon \|\nabla \beta_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \to 0$。

若 $\lambda<\infty$，则只需考虑 (5.32) 中的第一个条件；若 $\lambda=\infty$，则只需考虑第二个条件。

定理 *5.6* 的证明。 首先指出，引理 4.1]，中的稠密性结果对于依赖于跳跃的尖锐界面能量成立，对于依赖于两个迹的能量也同样成立。也就是说，沿用引理 4.1] 的完全相同的证明可得：对于任意给定的 $\beta\in \mathrm{SBV}_0(\Omega;\mathrm{O}(d))$，存在 $\beta_k\in \mathrm{SBV}_0(\Omega_k;\mathrm{O}(d))$，使得

$$\Omega\subset\subset\Omega_k\qquad \beta_k\to\beta\quad \text{in } L^1(\Omega;\mathrm{O}(d)),\qquad \mathcal{F}^\lambda(\beta,1)=\lim_{k\to+\infty}\mathcal{F}^\lambda(\beta_k,1;\Omega_k),$$

J_{β_k} 是维数为 $N-1$ 的单纯形的有限并。

T在 [7, 引理 4.1] 中构造的映射 β_k 取值于 O(d)，因为它在任意点上都与某个合适的值一致 nt of Ω 中的某个合适的 β 值。

因此，我们可以假设 $\Omega\subset\subset\Omega'$，$\beta\in \mathrm{SBV}_0(\Omega';\mathrm{O}(d))$ 在有限个凸多面体上分片常值，这些多面体的面由维数为 $N-1$ 的单纯形组成，记为 F_l。我们需要在 $L^1(\Omega)$ 中找到序列 $(\beta_\varepsilon,\ v_\varepsilon)\to(\beta,\ 1)$，使得

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon,v_\varepsilon)\le\mathcal{F}^\lambda(\beta,1;\Omega')=\sum_l\mathcal{H}^{N-1}(F_l)g_\lambda(R_l^-,R_l^+),$$

其中 $R_l^\pm\in$O(d) 是 β 在面 F_l上的两个迹。我们先对区域进行分解，图 2 给出了示意图。记 ν_l 为 F_l 的法向量，记 $\partial' F_l$为 F_l的相对边界，即将 F_l 视为超平面子集时的边界。对某些面作细分后，可以确保它们的（$N-1$）维内部两两不相交，也就是说，集合 $F_l\setminus\partial' F_l$ 两两不相交。对于 $y\in F_l$，我们将到边界的距离记为 $d_l(y)$，$d_l(y):=\mathrm{dist}(y,\partial' F_l)$，并简记为 $\Gamma:=\bigcup_l\partial' F_l$。

下文中，我们用 $(E)_r$ 表示集合 $E\subset\mathbb{R}^N$的 r-邻域。

由于每个 $\partial' F_l$ 都是有限个（$N-2$）维多面体的并，因此有（例如，参见 [3, 第 2.13] 节）

$$\lim_{r\to0}\frac{|(\partial' F_l)_r|}{\pi r^2}=\mathcal{H}^{N-2}(\partial' F_l)<\infty,\tag{5.33}$$

从而存在 C 使得

$$|(\Gamma)_r|\le Cr^2\text{ for all }r\in(0,1).\tag{5.34}$$

固定 $L\ge1$，最后我们将取 $\varepsilon\to0$、$L\to\infty$，满足 $L\varepsilon\to0$ 以及稍后将会明确的其他条件。注意到，由于这些 F_l 是内部互不相交的（$N-1$）维单纯形，因此存在 $c_*\in[1,\infty)$，使得这些集合

$$E_\varepsilon^l:=\{y+t\nu_l:y\in F_l,d_l(y)>c_*L\varepsilon,\ t\in(-L\varepsilon,L\varepsilon)\}\tag{5.35}$$

ar当 $L\varepsilon$ 充分小时两两不相交，见图 2。在这些区域中，我们可以使用 he op最优剖面；随后我们需要在 Γ周围进行插值。

我们固定 $M:=(1+c_*)L$，使得每个 E_ε^l 的侧边界都包含于 $(\partial' F_l)_{M\varepsilon}$中，其含义是

$$\partial E_\varepsilon^l\subset(F_l+L\varepsilon\nu_l)\cup(F_l-L\varepsilon\nu_l)\cup(\partial' F_l)_{M\varepsilon}\tag{5.36}$$

（这一条件的重要性将在下文 (5.41) 之后显现），并定义 $v_\varepsilon^0\in H^1(\Omega;\ [0,1])$ 如下

$$v_\varepsilon^0(x):=1\wedge\frac{1}{M\varepsilon}\mathrm{dist}(x,(\Gamma)_{2M\varepsilon}).$$

我们注意到 $\|\nabla v_\varepsilon^0\|_{L^\infty}\le1/(M\varepsilon)$，并且 $v_\varepsilon^0=1$外部 $(\Gamma)_{3M\varepsilon}$，因此 (5.34) 意味着 s

$$\mathrm{PF}_\varepsilon(v_\varepsilon^0)\le|(\Gamma)_{3M\varepsilon}|\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{(M\varepsilon)^2}\right)\le CL^2\varepsilon.\tag{5.37}$$

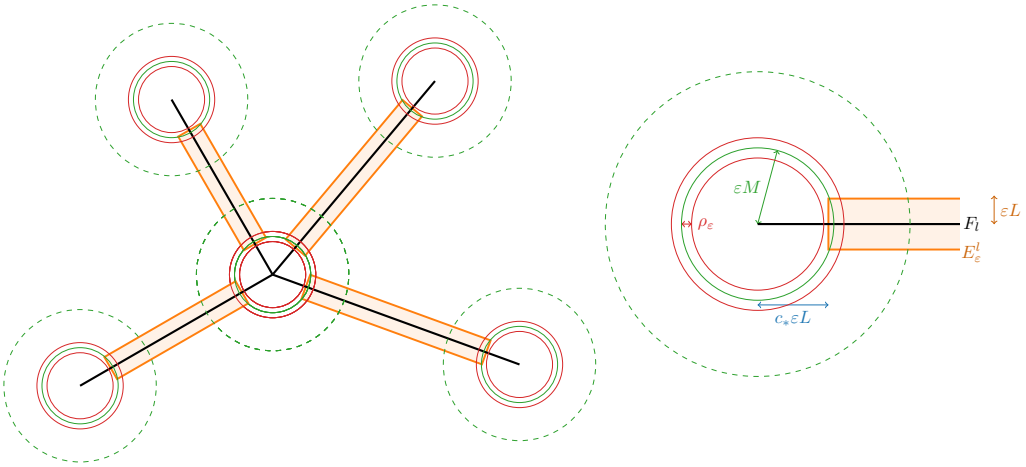

图 2. 上界构造示意图。黑线表示面 F_l，橙色子集为 E^l_ε。以 $\partial' F_l$ 为中心、半径为 $2M\varepsilon$ 的虚线绿圈表示集合 $\{v^0_\varepsilon = 0\}$；两个半径为 $M\varepsilon \pm \rho_\varepsilon$ 的红圈表示式 (5.47) 中两处插值发生的区域。右侧面板展示了该集合一部分的放大图，并标注了若干标签。

对于每个 l，我们选取 $G_l \in \mathcal{G}$，使得 $g_\lambda(R_l^-, R_l^+) = g^*_\lambda(R_l^-, G_l^{-1}R_l^+)$（见 (4.4) 和 (4.5)）。如果 $\lambda < \infty$，根据 (4.2)，我们可以选取 $(\widetilde{\beta}_l, \widetilde{v}_l) \in H^1((-L, L); \mathbf{M}^{d\times d} \times [0,1])$，使得

$$\begin{aligned} &\widetilde{v}_l(\pm L) = 1, \quad \widetilde{\beta}_l(-L) = R_l^-, \quad G_l\widetilde{\beta}_l(L) = R_l^+, \quad \|\widetilde{\beta}_l\|_{L^\infty} \le \sqrt{d}, \\ &\|\widetilde{\beta}_l'\|^2_{L^2((-L,L))} \le C(L), \qquad \mathcal{F}^L_\lambda(\widetilde{\beta}_l, \widetilde{v}_l) \le g_\lambda(R_l^+, R_l^-) + \omega(L), \end{aligned} \tag{5.38}$$

其中 $\omega(L) \to 0$ 作为 $L \to \infty$，而 $C(L)$ 是一个只依赖于 L的正数。若 $\lambda = \infty$，则使用引理 4.5(iii)，并对任意固定的 $\varepsilon > 0$ 和 $L > 1$，取

$$\lambda_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \tag{5.39}$$

并选取 $(\widetilde{\beta}_l, \widetilde{v}_l) \in H^1((-L, L); \mathbf{M}^{d\times d} \times [0,1])$，使其依赖于 ε和 L，从而式 (5.38) 的第一行仍然成立，而第二行则替换为

$$\|\widetilde{\beta}_l'\|^2_{L^2((-L,L))} \le C\lambda_\varepsilon L, \qquad \mathcal{F}^L_{\lambda_\varepsilon}(\widetilde{\beta}_l, \widetilde{v}_l) \le g_\infty(R_l^+, R_l^-) + \omega(L) + \omega(\lambda_\varepsilon), \tag{5.40}$$

其中 $\omega(s) \to 0$ 为 $s \to +\infty$。我们利用 (5.35) 中的 y 和 t，定义 $v^l_\varepsilon : E^l_\varepsilon \to [0,1]$，如下：

$$v^l_\varepsilon(y + t\nu_l) := \widetilde{v}_l(t/\varepsilon), \tag{5.41}$$

接着定义 v_ε 如下：

$$v_\varepsilon(x) := \begin{cases} v^0_\varepsilon(x) \wedge v^l_\varepsilon(x), & \text{if } x \in E^l_\varepsilon, \\ v^0_\varepsilon(x), & \text{if } x \in \Omega \setminus \bigcup_l E^l_\varepsilon. \end{cases} \tag{5.42}$$

接下来我们证明，任何 E^ε_l 的边界上都不会引入跳跃。事实上，设 $x = y + t\nu_l \in \partial E^\varepsilon_l$。若 $d_l(y) > c_* L\varepsilon$ 则 $|t| = L\varepsilon$，这意味着 $v^l_\varepsilon(x) = \widetilde{v}_l(t/\varepsilon) = 1$。若 $d_l(y) < c_* L\varepsilon$则 $\operatorname{dist}(x, \partial' F_l) \le L(1 + c_*)\varepsilon = M\varepsilon$，因此 $v^0_\varepsilon(x) = 0$。在这两种情况下，(5.42) 第一行中的最小值都等于 $v^0_\varepsilon(x)$，从而得到 $v_\varepsilon \in H^1(\Omega; [0,1])$。单调性条件 $\mathrm{PF}_\varepsilon(v' \wedge v''; A) \le \mathrm{PF}_\varepsilon(v'; A) + \mathrm{PF}_\varepsilon(v''; A)$ 直接推出

$$\mathrm{PF}_\varepsilon(v_\varepsilon) \le \mathrm{PF}_\varepsilon(v^0_\varepsilon) + \sum_l \mathrm{PF}_\varepsilon(v^l_\varepsilon; E^l_\varepsilon). \tag{5.43}$$

现在我们转向 β_ε 的构造，这更为微妙。为清楚说明策略，我们分别处理每个难点，并定义一列中间函数。

为了重新缩放并考虑矩阵 G_l，我们将 (5.38) 中确定的函数 β_l 替换为

$$\beta_\varepsilon^l(y+t\nu_l) := \begin{cases} G_l\widetilde{\beta}_l(\frac{t}{\varepsilon}), & \text{if } t\in[0,L\varepsilon], \\ \widetilde{\beta}_l(\frac{t}{\varepsilon}), & \text{if } t\in[-L\varepsilon,0). \end{cases} \tag{5.44}$$

我们可以轻松地在内部区域 E_ε^l中使用这一轮廓。对于 $t=\pm L\varepsilon$，它会自动与 $R_l^\pm$ 匹配，~它只会在 0 处发生跳跃；由于 β_l 连续，迹之间相差一个因子 G_l。关键在于对侧边界处的插值，这些边界包含在 $(\partial' F_l)_{M\varepsilon}$ 中。SBV$\mathcal{G}$ 对跳跃的条件不是线性的（也就是说，两个 SBV$\mathcal{G}$ 函数之和不一定属于 SBV$\mathcal{G}$），因此我们无法进行插值。不过，SBV$\mathcal{G}$ 是一次齐次的，也就是说，如果 $f\in$ 属于 SBV$\mathcal{G}$(Ω; M$^{d\times d}$) 且 $\psi\in C^1$属于 (Ω)，那么~ $\psi f\in$ 属于 SBV$\mathcal{G}$(Ω; M$^{d\times d}$)。另一方面，能量中的项 δ_ε^{-1}dist^2(·, O(d)) 可能会因这一操作而显著增大，因此我们必须确保 $\{\psi\neq 1\}$ 足够小。

由于 $v_\varepsilon^0=0$ in $(\Gamma)_{2M\varepsilon}$，我们通过先与 0、再与恒等映射进行插值来修改函数 β_ε^l 。固定 $\varphi\in C^\infty$(ℝ; $[0,1]$)，使得 $\varphi(t)=0$ for $t<0$ and $\varphi(t)=1$ for $t\geq 1$，令 $\rho_\varepsilon\in$ (0, ε] 为一个待定参数，并在下文中选取，然后设

$$\psi_\varepsilon^{\mathrm{out}}(x) := \varphi\left(\frac{\mathrm{dist}(x,\Gamma)-M\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\right) \qquad \psi_\varepsilon^{\mathrm{in}}(x) := \varphi\left(\frac{M\varepsilon-\mathrm{dist}(x,\Gamma)}{\rho_\varepsilon}\right), \tag{5.45}$$

接着定义

$$\widehat{\beta}_\varepsilon(x) := \begin{cases} \beta_\varepsilon^l(x), & \text{if } x\in E_\varepsilon^l, \\ \beta(x), & \text{if } x\in\Omega\setminus\bigcup_l E_\varepsilon^l, \end{cases} \tag{5.46}$$

并将其与上述函数结合

$$\beta_\varepsilon(x) := \psi_\varepsilon^{\mathrm{out}}(x)\widehat{\beta}_\varepsilon(x)+\psi_\varepsilon^{\mathrm{in}}(x)\mathrm{Id}, \tag{5.47}$$

它仅可能在 $\bigcup_l F_l$ 上发生跳跃，其中 $\beta_\varepsilon^\pm=\psi_\varepsilon^{\mathrm{out}}\widehat{\beta}_\varepsilon^\pm$。

我们已经证明 $v_\varepsilon\in H^1$(Ω; $[0,1]$)；由能量估计可得 $v_\varepsilon\to 1$ inL^2(Ω)。根据构造，我们还有 $\beta_\varepsilon\in$ SBV(Ω; M$^{d\times d}$)，其中 $J_{\beta_\varepsilon}\subset\bigcup_l F_l$ and $\beta_\varepsilon^+=G_l\beta_\varepsilon^-$on F_l；为证明 $\beta_\varepsilon\in$ SBV$\mathcal{G}$(Ω; M$^{d\times d}$)，只需证明 $\nabla\beta_\varepsilon\in L^2$(Ω)，这将在下文的 (5.58) 中完成。最后注意到，由于 $\rho_\varepsilon\leq M\varepsilon$，在 $\big[\Omega\setminus\bigcup_l E_\varepsilon^l\big]\setminus(\Gamma)^{M\varepsilon+\rho_\varepsilon}$中有 $\beta_\varepsilon=\beta$，因此 $\nabla\beta_\varepsilon=0$。由于 $\|\beta_\varepsilon\|_{L^\infty}\leq\sqrt{d}$，我们立即得到 $\beta_\varepsilon\to\beta$ inL^1(Ω; M$^{d\times d}$)。

现在我们估计能量的各个项。在 $(\Gamma)_{2M\varepsilon}$ 中，我们有 $v_\varepsilon^0=0$ ，因此$f_\varepsilon(v_\varepsilon)=0$，所以项 $f_\varepsilon^2(v_\varepsilon)|\nabla\beta_\varepsilon|^2$ 在 $\{\psi^{\mathrm{out}}=1\}\cap\bigcup_l E_l^\varepsilon$之外消失。由 (5.43) 得

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon,v_\varepsilon)\leq\sum_l\mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon^l,v_\varepsilon^l;E_l^\varepsilon)+\mathrm{PF}_\varepsilon(v_\varepsilon^0)+\frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_{(\Gamma)_{M\varepsilon+\rho_\varepsilon}}\mathrm{dist}^2(\beta_\varepsilon,\mathrm{O}(d))\,\mathrm{d}x. \tag{5.48}$$

接下来我们估计这三项，先从固定 l 时的 $\mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon^l,\ v_\varepsilon^l;\ E_\varepsilon^l)$ 开始。

我们用 $\widehat{\lambda}$ 表示 $\lambda=+\infty$ 情况下的 $\lambda<+\infty$ 或 λ_ε。回忆一下，$|\beta_\varepsilon^l|\leq\sqrt{d}$ 逐点成立，我们得到

$$\frac{1}{\delta_\varepsilon}\mathrm{dist}^2(\beta_\varepsilon^l(y+t\nu_l),\mathrm{O}(d))\leq\frac{\widehat{\lambda}}{\varepsilon}\mathrm{dist}^2(\beta_\varepsilon^l(y+t\nu_l),\mathrm{O}(d))+\frac{2d}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}-\widehat{\lambda}\right)_+. \tag{5.49}$$

利用 (5.49)、Fubini 定理，并作变量代换 $s:=t/\varepsilon$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon^l, v_\varepsilon^l; E_\varepsilon^l) \le \int_{\{y\in F_l : d_l(y)>c_* L\varepsilon\}} \int_{-L}^{L} \Big[\frac{f_\varepsilon^2(\widetilde{v}_l)}{\varepsilon} |\widetilde{\beta}_l'|^2 + \widehat{\lambda}\,\mathrm{dist}^2(\widetilde{\beta}_l, \mathrm{O}(d)) \\ + 2d\left(\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon} - \widehat{\lambda}\right)_+ + \frac{(1-\widetilde{v}_l)^2}{4} + |\widetilde{v}_l'|^2 \Big] \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}(y).\end{aligned} \tag{5.50}$$

E估计 $f_\varepsilon^2(\widetilde{v}_l) \le \varepsilon f^2(\widetilde{v}_l)$，然后使用 (5.38) 和 (5.40)（在 $\lambda = +\infty$ 的情况下），得到

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon^l, v_\varepsilon^l; E_\varepsilon^l) \le \mathcal{H}^{N-1}(F_l) \left[g_\lambda(R_l^-, R_l^+) + 4dL\left(\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon} - \widehat{\lambda}\right)_+ + \omega(L) + \omega(\lambda_\varepsilon) \right], \tag{5.51}$$

其中，只有当 $\lambda = \infty$ 时才会出现项 $\omega(\lambda_\varepsilon)$。为供后文参考，我们指出，类似但更简单的计算再次使用 (5.38) 和 (5.40)，可得

$$\|\nabla\beta_\varepsilon\|_{L^2(E_\varepsilon^l)}^2 \le \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{H}^{N-1}(F_l)\|\widetilde{\beta}_l'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le C(L)\frac{1+\widehat{\lambda}}{\varepsilon}. \tag{5.52}$$

(5.48) 中的第二项已在 (5.37) 中处理。在第三项中，我们利用界 $\|\beta_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \sqrt{d}$ 以及 Γ 是有限个 $(N-2)$ 维多面体之并这一事实，得到

$$\frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_{(\Gamma)_{M\varepsilon+\rho_\varepsilon}} \mathrm{dist}^2(\beta_\varepsilon, \mathrm{O}(d))\,\mathrm{d}x \le \frac{C}{\delta_\varepsilon}|(\Gamma)_{M\varepsilon+\rho_\varepsilon} \setminus (\Gamma)_{M\varepsilon-\rho_\varepsilon}| \le C\frac{\rho_\varepsilon L\varepsilon}{\delta_\varepsilon}. \tag{5.53}$$

现在我们可以得出能量估计的结论。

我们先考虑 $\lambda < +\infty$ 的情形，令 $\varepsilon \to 0$ 先取极限，同时固定 L。由 (5.53)，若 we c选择 ρ_ε 使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\rho_\varepsilon\varepsilon}{\delta_\varepsilon} = 0, \tag{5.54}$$

then

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_{\Omega\setminus\bigcup_l E_\varepsilon^l} \mathrm{dist}^2(\beta_\varepsilon, \mathrm{O}(d))\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5.55}$$

从（5.48）出发，令 $\varepsilon \to 0$ 取极限，并利用（5.51）、（5.37）和（5.55），得到

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon) \le \sum_l \mathcal{H}^{N-1}(F_l)\left(g_\lambda(R_l^-, R_l^+) + \omega(L)\right),$$

从而

$$\limsup_{L\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon) \le \sum_l \mathcal{H}^{N-1}(F_l) g_\lambda(R_l^-, R_l^+) = \mathcal{F}^\lambda(\beta, 1),$$

结论由对角线论证得出。

接下来需要处理关于 $\nabla\beta_\varepsilon$ 的 L^2 估计。回顾（5.47）和（5.45）中的定义，以及界 $|\widehat{\beta}_\varepsilon| \le \sqrt{d}$，可得逐点估计

$$|\nabla\beta_\varepsilon| \le \sqrt{d}(|\nabla\psi_\varepsilon^{\mathrm{out}}| + |\nabla\psi_\varepsilon^{\mathrm{in}}|) + |\psi_\varepsilon^{\mathrm{out}}\nabla\widehat{\beta}_\varepsilon|. \tag{5.56}$$

我们分别处理这两项。首先，

$$\|\nabla\psi_\varepsilon^{\mathrm{out}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\psi_\varepsilon^{\mathrm{in}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \frac{C}{\rho_\varepsilon^2}|(\Gamma)_{M\varepsilon+\rho_\varepsilon} \setminus (\Gamma)_{M\varepsilon-\rho_\varepsilon}| \le C\frac{M\varepsilon}{\rho_\varepsilon}, \tag{5.57}$$

这里我们用到了 Γ 是有限个 $N-2$ 维多面体的并。对于第二个，由 (5.46) 和 $\nabla\beta = 0$ 可知，我们可以将范围限制在 $\bigcup_l E_\varepsilon^l$，它们已在前文处理过。回顾 (5.56)、(5.52) 和 (5.57)，

$$\|\nabla\beta_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C\left(\frac{L\varepsilon}{\rho_\varepsilon} + C(L)\frac{1+\widehat{\lambda}}{\varepsilon}\right). \tag{5.58}$$

剩下的就是选择 ρ_ε。回顾 (5.54) 可知，我们需要选择 $\rho_\varepsilon \to 0$、$0 < \rho_\varepsilon \le \varepsilon$，使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho_\varepsilon \varepsilon}{\delta_\varepsilon} = 0 \text{ and } \lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\right] = 0. \tag{5.59}$$

我们固定 $\rho_\varepsilon := \varepsilon$，并注意到只要满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta_\varepsilon}{\varepsilon} = 0, \tag{5.60}$$

假设中的条件。

采用这一选择的 η_ε，我们便得到

$$\limsup_{L\to+\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon \|\nabla \beta_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{5.61}$$

因此，通过对角线论证，我们得以完成 $\lambda < +\infty$ 情形下的证明。

现在转向情形 $\lambda = +\infty$。我们固定一个如下选择的序列 $L_\varepsilon \to +\infty$，使得 W ill de依赖于式 (5.39) 中定义的序列 λ_ε。

现在从 (5.48) 出发，结合 (5.51)、(5.37) 和 (5.53)，得到

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon) \le \sum_l \mathcal{H}^{N-1}(F_l) \left[g_\infty(R_l^-, R_l^+) + \omega_\varepsilon\right] + CL_\varepsilon^2 \varepsilon + C\,\frac{\rho_\varepsilon L_\varepsilon \varepsilon}{\delta_\varepsilon} \tag{5.62}$$

其中 $\omega_\varepsilon = \omega(L_\varepsilon) + \omega(\lambda_\varepsilon)$。接着选择 $L_\varepsilon \to \infty$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时，$L_\varepsilon^2 \varepsilon \to 0$；再回顾 (5.54)，我们得出

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon) \le \sum_l \mathcal{H}^{N-1}(F_l) g_\infty(R_l^-, R_l^+) = \mathcal{F}^\infty(\beta, 1).$$

为了得到梯度的估计，根据 (5.58)，只需将条件 (5.59) 替换为

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho_\varepsilon L_\varepsilon \varepsilon}{\delta_\varepsilon} = 0 \text{ and } \lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon \left[C(L_\varepsilon)\frac{\lambda_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{L_\varepsilon \varepsilon}{\rho_\varepsilon}\right] = 0. \tag{5.63}$$

W固定 $\rho_\varepsilon := \delta_\varepsilon \wedge \varepsilon$，使得 (5.63) 中的第一个条件成立。我们可以选择 $L_\varepsilon \to \infty$，使得 at th第二个条件成立，当且仅当

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon \frac{\lambda_\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta_\varepsilon}{\delta_\varepsilon} = 0, \text{ and } \lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon \frac{\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = 0. \tag{5.64}$$

□

注 5.7。定理 2.15 中的上界（UB）'直接由定理 5.6 和定理 2.12 得出。具体而言，给定 $u \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d)/\mathcal{G})$，根据注 2.1、(2.31) 和 (2.32)，$\widetilde{\mathcal{F}}^\lambda(u, 1)$ 的一个恢复序列为 $([\beta_\varepsilon], v_\varepsilon)_\varepsilon$；对于 $(\beta_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon$，$\mathcal{F}^\lambda(\beta,1)$ 的恢复序列中，$\beta \in \mathrm{SBV}_0(\Omega; \mathrm{O}(d))$ 是定理 2.12 中给出的 u 的提升（另见注 2.13）。

因此，定理 1.1 和 2.15 的证明已完成。

致谢

我们感谢 Luigi Ambrosio 对本工作的初稿提出了有益的意见。S.C. 谨向罗马第一大学圭多·卡斯特尔诺沃数学系致谢，本工作的大部分内容即在此完成，并感谢其热情接待。本工作部分由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，资助项目为 CRC 1720 项目 – 539309657。V.C.、A.G.、A.M. 感谢意大利大学与研究部（MUR）—PRIN 项目 2022J4FYNJ CUP B53D23009320006“带奇点和界面的定常与演化问题的变分方法”的支持。该项目属于意大利国家复苏与韧性计划“意大利明日”，由欧盟通过下一代欧盟计划资助。V.C. 还感谢 SEED-PNR 的支持

项目 CUP B87G22001200001。V.C.、A.G.、A.M. 是国家数学分析、概率及其应用研究组（INdAM-GNAMPA）的成员。

参考文献

[1] *L. Ambrosio*，《度量空间值有界变差函数》，比萨高等师范学院科学类年刊，*17*（*1990*），第*439–478*页。[2] *L. Ambrosio*与*A. Braides*，《有限周长集划分上定义的泛函 *II*：半连续性、松弛、均匀化》，纯粹与应用数学杂志，*69*（*1990*），第*307–333*页。[3] *L. Ambrosio*、*N. Fusco*与*D. Pallara*，《有界变差函数与自由间断问题》，牛津数学专著，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，*2000*年。[4] *L. Ambrosio*与*V. M. Tortorelli*，《通过椭圆泛函利用 Γ-收敛逼近依赖于跳跃的泛函》，《纯粹与应用数学通讯》，*43*（*1990*），第*999–1036*页。[5] *R. Badal*与*M. Cicalese*，《二维黎曼流形上具有拓扑诱导的自由不连续性的分数涡旋之间的重整化能量》，《变分法与偏微分方程》，*64*（*2025*），论文第*83*号，共*67*页。[6] *R. Badal*、*M. Cicalese*、*L. De Luca*与*M. Ponsiglione*，广义 Γ-收敛分析 XY 模型：分数涡旋与弦缺陷，《数学物理通讯》，*358*（*2018*），第*705–739*页。[7] *G. Bellettini*、*A. Chambolle*与*M. Goldman*，《任意维数中*Perona-Malik*型奇异扰动泛函的 Γ-极限》，《数学模型与方法及其应用科学》，*24*（*2014*），第*1091–1113*页。[8] *B. Berkels*、*A. Rätz*、*M. Rumpf*与*A. Voigt*，《从原子尺度图像中提取晶界与宏观变形》，《科学计算杂志》，*35*（*2008*），第*1–23*页。[9] *B. Bourdin*、*G. A. Francfort*与*J.-J. Marigo*，《重新审视脆性断裂的数值实验》，《固体力学与物理学杂志》，*48*（*2000*），第*797–826*页。[10] *B. Bourdin*、*G. A. Francfort*与*J.-J. Marigo*，《断裂的变分方法》，《弹性学杂志》，*91*（*2008*），第*5–148*页。[11] *D. P. Bourne*、*M. A. Peletier*与*S. M. Roper*，《嵌段共聚物简化模型中的六边形图案》，《工业与应用数学学会应用数学杂志》，*74*（*2014*），第*1315–1337*页。[12] *E. Caglioti*、*F. Golse*与*M. Iacobelli*，《二维空间中概率分布的量子化与梯度流》，《庞加莱研究所年刊 *C* 辑：非线性分析》，*35*（*2018*），第*1531–1555*页。[13] *J. W. Cahn*与*J. E. Taylor*，《晶界运动、晶界上的相对切向平移以及晶粒旋转的统一方法》，《材料学报》，*52*（*2004*），第*4887–4898*页。[14] *G. Canevari*与*G. Orlandi*，《有界变差流形值映射的提升》，《泛函分析杂志》，*278*（*2020*），第*108453–108469*页。[15] *D. G. Caraballo*，《群 *G* 中的晶体与多晶体：下半连续性与存在性》，《几何分析杂志》，*18*（*2008*），第*68–88*页。 $\mathbb{R}^n$*P. Carrara*、*M. Ambati*、*R. Alessi*与*L. De Lorenzis*，《基于变分相场方法的脆性材料疲劳行为建模框架》，《计算方法与应用力学及工程程》，*361*（*2020*），第*112731*号，共*29*页。[16] *A. Chambolle*，《变分方法的图像分割：*Mumford–Shah* 泛函与离散近似》，《工业与应用数学学会应用数学杂志》，*55*（*1995*），第*827–863*页。[17] *M. Cicalese*、*M. Focardi*与*C. I. Zeppieri*，《分片刚性映射上定义的泛函的相场近似》，《非线性科学杂志》，*31*（*2021*），论文第*78*号，共*25*页。[18] *S. Conti*、*M. Focardi*与*F. Iurlano*，《内聚断裂模型的相场近似》，《庞加莱研究所非线性分析年刊》，*33*（*2016*），第*1033–1067*页。[19]《矢量值几何非线性内聚断裂能的相场近似》，《理性力学与分析档案》，*248*（*2024*），第*1–60*页。[20]，《超线性自由间断模型：松弛与相场近似》，预印本 *arXiv:2505.00852*，（*2025*）。[21]，*G. Dal Maso*与*F. Iurlano*，《作为[22] -极限的损伤模型的断裂模型》，《纯粹与应用分析通讯》，*12*（*2013*），第*1657–1686*页。 Γ*J. Dávila*与*R. Ignat*，《取值于[23] 的*BV*函数的提升》，《数学报告》，*337*（*2003*），第*159–164*页。 S^1 *G. Del Nin*，《关于平面簇整体形状的一些渐近结果》，博士论文，比萨大学，（*2019*）。[24] *G. Del Piero*，《一维延性—脆性转变、屈服与结构化变形》，载于《固体力学中的区域变分与自由边界问题》（巴黎，*1997*），《固体力学应用》第*66*卷，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，*1999*年，第*203–210*页。

[26] *M. Elsey*与*B. Wirth*，《多晶体图像中晶体畸变与晶体缺陷的快速自动检测》，《多尺度建模与模拟》，*12*（*2014*），第*1–24*页。[27] *S. Fanzon*、*M. Palombaro*与*M. Ponsiglione*，《从二维刃型位错系统推导线性化多晶体》，《*SIAM*数学分析杂志》，*51*（*2019*），第*3956–3981*页。[28] *M. Fortuna*、*A. Garroni*与*E. Spadaro*，《多晶体晶界的*Read-Shockley*能量》，《纯粹与应用数学通讯》，*78*（*2025*）。[29] *G. A. Francfort*与*J.-J. Marigo*，《重新审视作为能量最小化问题的脆性断裂》，《固体力学与物理学杂志》，*46*（*1998*），第*1319–1342*页。[30] *F. Freddi*与*F. Iurlano*，《内聚断裂的变分弥散方法的数值分析》，《固体力学与物理学杂志》，*98*（*2017*），第*156–171*页。[31] *M. Goldman*、*B. Merlet*与*V. Millot*，《具有拓扑诱导自由不连续性的*Ginzburg-Landau*模型》，《庞加莱研究所年刊》，*70*（*2020*），第*2583–2675*页。[32] *H. Lammen*、*S. Conti*与*J. Mosler*，《适用于内聚断裂的有限变形相场模型》，《固体力学与物理学杂志》，*178*（*2023*），第*105349*页。数字对象标识符：*10.1016/j.jmps.2023.105349*。[33] *G. Lauteri*与*S. Luckhaus*，《位错构型的能量估计及金属塑性中*Cosserat*型结构的出现》，预印本，*https://arxiv.org/abs/1608.06155v2*，（*2016*）。[34] *F. Morgan*，《能量簇的下半连续性》，《爱丁堡皇家学会会刊*A*辑：数学》，*127*（*1997*），第*819–822*页。[35] *W. Read*与*W. Shockley*，《晶体晶界的位错模型》，《物理评论》，*78*（*1950*），第*275–289*页。[36] *Y. G. Reshetnyak*，《取值于度量空间的函数的*Sobolev*型类》，《西伯利亚数学杂志》，*38*（*1997*），第*567–583*页。[37] *B. Runnels*、*I. Beyerlen*、*S. Conti*与*M. Ortiz*，《基于晶格匹配原子间能的界面能解析模型》，《固体力学与物理学杂志》，*89*（*2016*），第*174–193*页。[38] *J.-Y. Wu*、*V. P. Nguyen*、*C. T. Nguyen*、*D. Sutula*、*S. Sinaie*与*S. P. Bordas*，《断裂的相场建模》，《应用力学进展》，*53*（*2020*），第*1–183*页。

Sergio Conti：应用数学研究所，波恩大学，德国波恩53115；Vito Crismale、ADRIANA GARRONI、ANNALISA MALUSA：数学系，罗马第一大学，阿尔多·莫罗广场5号，罗马00185