arXiv:2601.07505v1 [math.CT] 12 Jan 2026

扩展度量拓扑空间的范畴论视角

ENRICO PASQUALETTO、TIMO SCHULTZ 和 JANNE TAIPALUS

Abstract. 受无限维度量测度结构的分析与几何研究启发，我们研究扩展度量拓扑空间范畴及其诸多重要子范畴（例如紧空间范畴）。本文的一项主要成果是证明上述范畴具有双完备性（即所有小极限与余极限均存在）。

Contents

1. 引言 1 概述 1 结果陈述 2 相关文献 4 2. 预备知识 5 2.1. 拓扑概念 5 2.2. 度量概念 6 2.3. Set、Top 和 ExtΨMet 中的极限与余极限 8 2.4. 扩展度量拓扑空间 10 3. 范畴 ExtMetTop 13 3.1. 范畴目录 13 3.2. e.m.t. 化函子 15 3.3. ExtMetTop 的双完备性 18 3.4. 紧化函子 19 3.5. Tych 和 ExtMet 是 ExtMetTop 的余反射子范畴 22 3.6. 截断、度量完备化与测地化函子 24 附录 A. 范畴论概要 26 附录 B. 扩展度量拓扑空间的等价定义 29 参考文献 33

1. Introduction

概述。为了在（可能非光滑且无限维的）度量测度结构中，为度量分析和最优传输问题建立一个稳健的框架，Ambrosio、Erbar 和 Savaré引入了 [3] 以下概念：扩展度量拓扑空间 和扩展度量拓扑测度空间，分别简称为*e.m.t.* 空间 和*e.m.t.m.*空间。前者是配备了拓扑 τ 和扩展

Date: 2026年1月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18F60，46M40，46M15，49J52，53C23。*Key words and phrases.* 扩展度量拓扑空间；极限；余极限；紧化。

距离 d 且满足适当相容条件的集合 X；后者则是带有定义在 (X τ) 的 Borel σ-代数上的（有限）拉东测度 $\mathfrak{m} \geq 0$ 的 e.m.t. 空间 (X τ,d)。

本文旨在从范畴论视角考察扩展度量拓扑空间。具体而言，我们通过构造性论证表明，扩展度量拓扑空间的范畴**ExtMetTop** 及其若干最重要的子范畴都是完备 且余完备的，即它们存在所有小极限与余极限。在上述范畴中，我们选择连续短映射 作为态射（也就是说，这些映射在给定拓扑之间连续，且相对于给定的扩展距离是非扩张的）。一类扩展度量拓扑空间的（余）完备性意味着它在多种（泛）构造下保持稳定，例如积、商以及逆极限/直接极限。

结果陈述 。 根据 [3, 定义 41], , 若满足以下条件，则称 (X τ， d) 为一个 e.m.t. 空间: :

- 拓扑 τ 与集合 $\mathrm{LIP}_{b,\,1}$(X τ， d) 的初始拓扑一致；该集合由所有从 (X τ， d) 到 $\mathbb{R}$ 的有界连续且不增距函数构成。
- 扩展距离 d 可以被 τ恢复，其含义是

$$\mathsf{d}(x,y) = \sup\big\{|f(x)-f(y)| \;\big|\; f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\big\} \quad \text{for every } x,y \in \mathrm{X};$$

参见定义 2.12。为了加深对 e.m.t.(m.) 空间这一概念的直观理解，我们来回顾一下抽象维纳空间理论。该理论是度量测度结构的典型范例，而 e.m.t. 空间的公理化正是以此为目标。考虑一个无限维可分巴拿赫空间 B，及其上的一个中心化、非退化高斯测度 γ。用 (H $|\cdot|_{\mathrm{H}}$) 表示 (B γ) 的卡梅隆–马丁空间（参见 [12]），则 B 上自然的扩展距离 d_{H} 为

$$\mathsf{d}_{\mathrm{H}}(x,y) := \begin{cases} |x-y|_{\mathrm{H}} & \text{if } x,y \in \mathrm{B} \text{ satisfy } x-y \in \mathrm{H}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

事实证明，(B τ_{B}， d_{H}， γ) 是一个 e.m.t.m. 空间 [3, 第 13 节。2], 其中 τ_{B} 表示 B 上的强拓扑或弱拓扑。这一构造说明，在试图描述无限维空间时，必须允许拓扑与距离各自发挥作用。事实上，在此背景下，用于计算长度和速度的（扩展）距离 d 所诱导的拓扑通常过于精细，无法具备有效的拓扑和测度论性质，因此需要采用更粗的拓扑 τ。除抽象维纳空间外，e.m.t.m. 空间还包括所有度量测度空间（其中拓扑恰好是距离所诱导的拓扑）、构型空间 [2, 3, 13], 扩展瓦瑟斯坦空间 [3, 第 5] 节以及海林格（–坎托罗维奇）空间 [14], 等其他重要空间。

本文的主要结果指出:

范畴 **ExtMetTop** 是双完备的（即既完备又余完备）；

参见定理3.13。下面简要概述我们证明 **ExtMetTop** 双完备性的策略:

- 我们引入范畴 **PreExtΨMetTop**，其对象为预扩展伪度量拓扑空间（定义 2.7），即配备扩展伪距离 d（除此之外没有其他要求）的拓扑空间 (X)，其态射为连续短映射。

- 利用我们对拓扑空间范畴 **Top** 以及扩展伪度量空间范畴 **ExtΨMet** 中所有极限与余极限的了解（见第 2.3节），我们证明了 **PreExtΨMetTop** 是双完备的（定理 3.11）。

- 在第 3.2 节中，我们构造了一个函子 emt: **PreExtΨMetTop** $\to$ **ExtMetTop**，并将其称为*e.m.t.* 化函子。该函子以规范（或者更确切地说，普适）的方式，为每个预扩展伪度量拓扑空间赋予一个 e.m.t. 空间。

- 函子 emt 表明 **ExtMetTop**是 *PreExt*Ψ**MetTop**的一个反射子范畴，即 emt 是包含函子 **ExtMetTop** $\hookrightarrow$**PreExtΨMetTop**的左伴随；参见定理 3.10。因此，范畴论中的一般原理（我们在命题 A.4中陈述）保证范畴**ExtMetTop** 也是双完备的。同一结果还可用于给出 **ExtMetTop** 中所有（余）极限的显式描述。

沿着同一思路，我们研究了许多 e.m.t. 空间的范畴及其相互联系。下表列出了本文将涉及的范畴：

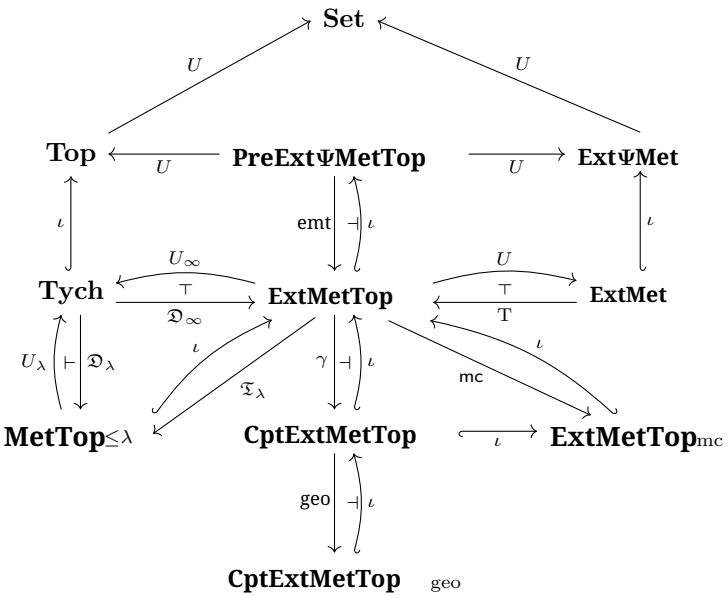
范畴列表		
范畴	对象	态射
Tych	吉洪诺夫空间	连续映射
ExtΨMet	扩展伪度量空间	短映射
ExtMet	广义度量空间	短映射
PreExtΨMetTop	预扩展伪度量拓扑空间（缩写为 *pre-e.pm.t. spaces*）	连续短映射
ExtMetTop	扩展度量拓扑空间（缩写为 *e.m.t. spaces*）	连续短映射
MetTop$^{\leq\lambda}$	直径至多为 λ 的 e.m.t. 空间	连续短映射
ExtMetTop ^{mc}	度量完备扩展度量拓扑空间	连续短映射
CptExtMetTop	紧扩展度量拓扑空间	连续短映射
CptExtMetTop ^{geo}	紧测地扩展度量拓扑空间	连续短映射

在上述所有范畴中，我们希望特别关注紧致e.m.t. 空间（即，e.m.t. 空间（X τ，d）且 τ紧致），记作**CptExtMetTop**。从几何或分析的角度来看，**CptExtMetTop**的重要性在于——结合紧化函子 γ： **ExtMetTop** $\to$ **CptExtMetTop**，第3.4 节专门讨论该函子——它使我们能够将若干问题的研究约化到紧致情形。这一过程即使在度量测度空间的框架下也无疑具有重要意义，因为不可能仅在纯度量层面定义紧化函子。还应指出，**ExtMetTop** “包含”了**Tych** 范畴，即 Tychonoff空间范畴（即完全正则豪斯多夫空间），以及**ExtMet** 范畴，即广义度量空间范畴；参见第3.5节。

在下表中，我们汇总了本文将介绍并研究的、连接不同拓扑结构和/或度量结构范畴的各种函子：

函子列表			
函子	定义域	陪域	名称/描述
emt	**PreExtΨMetTop**	**ExtMetTop**	e.m.t. 化函子
γ	**ExtMetTop**	**CptExtMetTop**	紧化函子
$\bar{\gamma}$	**PreExtΨMetTop**	**CptExtMetTop**	广义的紧化函子
			广义的紧化函子
$\mathfrak{D}_\infty$	**Tych**	**ExtMetTop**	∞ 离散化函子
$\mathfrak{D}_\lambda$	**Tych**	**MetTop**$^{\leq\lambda}$	λ-离散化函子
T	**ExtMet**	**ExtMetTop**	赋予诱导拓扑扩展度量空间
$\mathfrak{T}_\lambda$	**ExtMetTop**	**MetTop**$^{\leq\lambda}$	λ-截断函子
mc	**ExtMetTop**	**ExtMetTop** ^{mc}	度量完备化函子
geo	**CptExtMetTop**	**CptExtMetTop** ^{geo}	测地化函子

下图展示了所讨论的各个范畴之间的关系。关于图中采用的记号，ι 泛指包含函子，而 U 表示遗忘函子。还需说明，写作 $F \dashv G$ 表示函子 F 是函子 G的左伴随。



此外，我们还得到了若干关于扩展度量拓扑空间的独立结果。例如，我们在命题 2.15 中证明，所有配备下半连续扩展距离的紧豪斯多夫空间都是 e.m.t. 空间；而在附录 B 中，我们给出了 e.m.t. 空间的若干种刻画（类似于完全正则空间的各种定义）。

相关文献。正如本引言前几节所显示的，我们提出的扩展度量拓扑空间研究方法，源于几何分析和度量几何中的问题。尽管如此，类似的度量拓扑结构也在截然不同的研究领域中受到关注。首先要提到的是分离度量紧豪斯多夫空间理论。这类空间由 Hofmann 和 Reis 在 [17]中作为 Nachbin 的紧有序空间 [22]概念的度量对应物引入；另见 Tholen 的论文 [26]，该文对有序／度量／拓扑结构提出了更一般的研究方法。分离度量紧豪斯多夫空间的范畴$\mathbf{MetCH}^{\mathbf{sep}}$也已由 Gutierres 和 Hofmann [15]，、Hofmann 和 Nora [16]，以及 Abbadini 和 Hofmann [1]等人进行了全面研究。根据命题2.15，紧 e.m.t. 空间与其中对称的分离度量紧豪斯多夫空间完全一致。这种对应在范畴层面上依然成立：

$$\mathbf{CptExtMetTop} = \mathbf{MetCH}^{\mathbf{sep,sym}},$$

其中 $\mathbf{MetCH}^{\mathbf{sep,\ sym}}$ 表示以连续非扩张映射为态射的对称分离度量紧豪斯多夫空间范畴；参见注3.2。

另一种与之密切相关的理论是拓扑度量空间。紧拓扑度量空间的定义与我们对紧 e.m.t. 空间的概念一致（见注3.2），由 Ben Yaacov 和 Usvyatsov 在 [11] 中引入，作为连续一阶逻辑中出现的类型空间的一种形式化描述。随后，Ben Yacoov 在 [6]，中建立了（不一定紧致的）拓扑度量空间理论，以分析

类型空间。正如我们将在注B.3中讨论的，拓扑度量空间类严格大于 e.m.t. 空间类；后者恰好对应于那些完全正则的拓扑度量空间（按 [7, 定义 2.3]的意义）。关于拓扑度量空间的进一步研究，例如见文献 [8, 9, 10]。

致谢。 第一位署名作者获得了芬兰研究理事会 362898 号资助。第三位署名作者获得了芬兰研究理事会 354241 号资助，并通过研究小组“Quasiworld 网络”获得了埃米尔·阿尔托宁基金会的资助。作者感谢李振豪向他们介绍了一些相关文献。

2. 预备知识

2.1. 拓扑学概念。 我们首先回顾拓扑学中的若干概念和结果，例如参见 [19]，其中对这些主题作了详细介绍。

若拓扑空间 $(\mathrm{X}\ \tau)$ 满足以下性质，则称其为完全正则：若 $C \subseteq \mathrm{X}$ 是一个闭集且 $x \in \mathrm{X} \setminus C$，则存在连续函数 $f\colon \mathrm{X} \to [0,1]$，使得对每个 $y \in C$，都有 $f(y) = 0$，且 $f(x) = 1$。既是豪斯多夫空间又是完全正则的拓扑空间称为*Tychonoff*空间。每个紧豪斯多夫空间都是 Tychonoff空间。

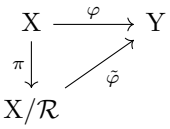
给定两个拓扑空间 $(\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}})$ 和 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$，我们用 $C((\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}});(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}))$ 表示从 $(\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}})$ 到 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 的所有连续映射所构成的集合。特别地，当 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 是赋予欧几里得拓扑的实数直线 $\mathbb{R}$ 时，我们采用简写记号 $C(\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}) := C((\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}});\mathbb{R})$。我们将 $C_b(\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}})$ 定义为所有同时有界的函数 $f \in C(\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}})$ 所构成的空间。空间 $C_b(\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}})$ 关于上确界范数构成一个巴拿赫空间

$$\|f\|_{C_b(\mathrm{X},\tau_{\mathrm{X}})} := \sup_{x\in\mathrm{X}} |f(x)| \quad \text{for every } f \in C_b(\mathrm{X},\tau_{\mathrm{X}}).$$

商拓扑。 设 $(\mathrm{X}\ \tau)$ 是一个拓扑空间，且 $\mathcal{R}$ 是 X 上的一个等价关系。记 $\pi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathcal{R}$ 为到商空间 $\mathrm{X}/\mathcal{R}$的投影。则 $\mathrm{X}/\mathcal{R}$上的 商拓扑 $\tilde{\tau}$ 定义为终拓扑

$$\tilde{\tau} := \left\{ U \subseteq \mathrm{X}/\mathcal{R} \;\middle|\; \pi^{-1}(U) \in \tau \right\}.$$

商空间（$\mathrm{X}/\mathcal{R}$，$\tilde{\tau}$）和投影映射 $\pi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathcal{R}$ 由以下泛性质刻画：若（$\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}$）是一个拓扑空间，且 $\varphi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 是一个连续映射，满足对于任意 x，$y \in \mathrm{X}$ 都有 $\varphi(x) = \varphi(y)$，则存在唯一的连续映射$\tilde{\varphi}\colon \mathrm{X}/\mathcal{R} \to \mathrm{Y}$，使得



这是一个交换图。

Stone–Čech ˇ*h* 紧化。我们回顾拓扑空间的 Stone–Čech紧化 :

定理2.1 (Stone–ˇCech 紧化)。 设$(\mathrm{X}\ \tau)$是一个拓扑空间。那么存在一个紧豪斯多夫空间$(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau)$以及一个连续映射 $i\colon \mathrm{X} \to \beta\mathrm{X}$，使得下述

泛性质成立：若$(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$是一个紧豪斯多夫空间，且 $\varphi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$是一个连续映射，则存在唯一的连续映射 $\varphi_\beta\colon\ \beta\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$，使得图式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{\ i\ } & \beta\mathrm{X} \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow{\scriptstyle \varphi_\beta} \\ & & \mathrm{Y} \end{array}$$

可交换。我们称$(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau)$为Stone–ˇCech 紧化。此外， i 的像 $i(\mathrm{X})$ 在 $\beta\mathrm{X}$中稠密。映射 $i\colon \mathrm{X} \to \beta\mathrm{X}$ 是到其像的同胚，当且仅当$(\mathrm{X}\ \tau)$是一个 ***Tychonoff***空间。

ˇ我们现在回顾自然数集 $\mathbb{N}$（赋予离散拓扑）的 Stone–Cech紧化的一种构造 $\beta\mathbb{N}$，它将在例 3.19中发挥作用。空间$\beta\mathbb{N}$ 可定义为 $\mathbb{N}$上所有超滤子的集合，并赋予其斯通拓扑（即由形如 $\{\mathcal{F}:\ E \in \mathcal{F}\}$的集合生成的拓扑，其中 E 是 $\mathbb{N}$的任意子集）。嵌入 $i\colon\ \mathbb{N} \hookrightarrow \beta\mathbb{N}$ 由如下映射给出：将自然数 $n \in \mathbb{N}$ 对应到 $\mathbb{N}$ 上的主超滤子，其主元素为 n。给定一个紧豪斯多夫空间 (Y τ_{Y})、一个（连续）映射 $\varphi\colon\ \mathbb{N} \to \mathrm{Y}$以及 $\mathbb{N}$上的一个超滤子 $\mathcal{F}$，我们有 $\varphi_\beta(\mathcal{F})$由$(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ⊆Y关于 $\mathcal{F}$ 的超极限给出（其存在性和唯一性分别由Y的紧致性和豪斯多夫性保证）。

初始拓扑。 给定一个集合 X、一组拓扑空间 $\{(\mathrm{Y}_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ 以及一组映射 $\{\varphi_i\}_{i\in I}\ \varphi_i\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_i$，我们称使所有映射 φ_i连续的 X 上最粗的拓扑为 $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ 的初始拓扑 。 $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ 的初始拓扑的一组基为

$$\left\{ \bigcap_{i\in F} \varphi_i^{-1}(U_i) \;\middle|\; F \subseteq I \text{ finite}, U_i \in \tau_i \text{ for every } i \in F \right\}.$$

拓扑 空间 (X τ) 是完全正则的，当且仅当 τ是 C_b(X τ) 的初始拓扑 .

注 2.2。 $\{\varphi_i\}_{i\in I}$的初始拓扑 τ是满足以下特征性质的唯一拓扑：给定一个拓扑空间 (Z τ_{Z}) 和一个映射 $\psi\colon \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$，映射 $\psi\colon (\mathrm{Z}\ \tau_{\mathrm{Z}}) \to (\mathrm{X}\ \tau)$ 连续，当且仅当对于每个 $i \in I$， $\varphi_i \circ \psi\colon (\mathrm{Z}\ \tau_{\mathrm{Z}}) \to (\mathrm{Y}_i, \tau_i)$ 都是连续映射。 ■

注 2.3。 设 (X τ) 是一个紧豪斯多夫空间。设 $\mathcal{S}$是 C_b(X τ) 的任意一个子集，它分离点X 中的点，即对于任意 $x, y \in \mathrm{X}$，若 $x \neq y$则存在 $f \in \mathcal{S}$使得 $f(x) \neq f(y)$。众所周知且易于验证， τ 与 $\mathcal{S}$的初始拓扑一致。■

2.2. **度量概念**。 现在我们固定一些有关（广义）度量/伪度量空间的术语，并介绍一些相关结果。设 X 是一个集合，且 d: X × X → $[0, +\infty]$是一个函数。那么：

- 如果 d 在 X × X 的对角线上取值为零（即，对于每个 $x \in \mathrm{X}$，$\mathrm{d}(x, x) = 0$），且 d 是对称的（即，对于每个 $x, y \in \mathrm{X}$，$\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$），并满足三角不等式（即，对于每个 $x, y, z \in \mathrm{X}$，$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$），我们称 d 为一个扩展伪距离，并称 (X,d) 为一个广义伪度量空间。

- 如果 d 是一种扩展距离，并且 d 是一种在 X,d 上的扩展度量空间，则称 d 恰好在 X × X 的对角线上取零值（也就是说，对于任意给定的 $x, y \in \mathrm{X}$，有 $\mathrm{d}(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$）。

- 如果 d 是一种伪距离，并且 d 是一种在 (X,d) 上的伪度量空间，则称 d 是扩展伪距离，且 $\mathrm{d}(x, y) < +\infty$ 对于每个 $x, y \in \mathrm{X}$ 均成立。
- 我们称 d 为距离，并称 (X，d) 为度量空间，如果 d 既是扩展距离，又是伪距离。

集合 X 上的扩展伪距离 d 按如下方式在 X 上诱导出一个等价关系 $\mathcal{R}_d$：对于任意 $x,\ y \in X$，我们规定 $x\mathcal{R}_d y$ 当且仅当 $d(x,\ y) = 0$。我们将相应的商空间记为 $X/d := X/\mathcal{R}_d$。此外，d 按如下方式在 X/d 上诱导出一个扩展距离 $[d]$：

$$[d](\pi_d(x), \pi_d(y)) := d(x, y) \quad \text{for every } x, y \in X,$$

其中 $\pi_d\colon X \to X/d$ 表示典范投影映射。我们称 $[d]$ 为由 d 诱导的扩展距离。注意，d 是伪距离当且仅当 $[d]$ 是距离。

短映射。如果两个扩展伪度量空间 $(X,\ d_X)$ 和 $(Y,\ d_Y)$ 之间的映射 $\varphi\colon (X,\ d_X) \to (Y,\ d_Y)$ 是非扩张的，我们就称它为短映射，也就是说

$$d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \le d_X(x, y) \quad \text{for every } x, y \in X.$$

如果该映射 φ 还满足非收缩条件（即对于所有 $x,\ y \in X$，都有 $d_Y(\varphi(x)\ \varphi(y)) = d_X(x,\ y)$），那么我们就称 φ为保距。

备注 2.4。对于任意度量空间 $(X,\ d)$，容易验证，所有有界短映射 $f\colon (X,\ d) \to \mathbb{R}$ 的集合上的初始拓扑与由 d 诱导的拓扑一致。■

完备性。设 (X,d) 是一个扩展度量空间。提醒一下，网 $(x_i)_{i\in I} \subseteq X$ 称为 (X, d) 中的柯西网，如果 $\inf_{i_0\in I}\sup\{d(x_i, x_{i'}) :\ i, i' \in I, i_0 \preceq i, i'\} = 0$。若 (X, d) 中每个柯西网 $(x_i)_{i\in I}$ 都收敛 到某个（必然唯一的）元素 $x \in X$，即 $\inf_{i_0\in I}\sup\{d(x_i, x) :\ i \in I, i_0 \preceq i\} = 0$，则称空间 (X, d) 为完备 的。扩展度量空间的完备性也可以等价地仅通过柯西序列来检验。

在给定的扩展度量空间 (X,d) 上，我们定义如下等价关系 $\mathcal{F}_d$：对任意 $x, y \in X$，规定 $x\mathcal{F}_d y$ 当且仅当 $d(x, y) < +\infty$。然后定义 $\mathscr{F}_d := X/\mathcal{F}_d$。注意，对每个 $Z \in \mathscr{F}_d$，$(Z, d|_{Z\times Z})$ 都是一个度量空间；并且对所有 $z \in Z$ 及 $x \in X \setminus Z$，都有 $d(z, x) = +\infty$。显然，(X,d) 完备，当且仅当对每个 $Z \in \mathscr{F}_d$，$(Z, d|_{Z\times Z})$ 都完备。

命题 2.5（扩展度量空间的完备化）。设 $(X,\ d)$ 是一个扩展度量空间。则存在一个完备扩展度量空间 $(X,\ d)$ 和一个短映射 $i\colon X \to X$，使得以下泛性质成立：如果 $(Y,\ d_Y)$ 是一个完备扩展度量空间，并且 $\varphi\colon X \to Y$ 是一个短映射，那么存在唯一的短映射 $\bar{\varphi}\colon X \to Y$，使得图式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ i\ } & \bar{X} \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow{\scriptstyle \bar{\varphi}} \\ & & Y \end{array}$$

可交换。

此外，映射 $i\colon X \to X$ 是保距的，其像 $i(X)$ 在 X 中稠密。

证明。对于任意 $Z \in \mathscr{F}_d$，我们将 $(Z,\ d_Z)$ 的通常度量完备化记为 $(Z,\ d|_{Z\times Z})$，并连同 $i_Z\colon Z \to Z$ 一起记。然后我们赋予 $X := \bigsqcup_{Z\in\mathscr{F}_d} Z$ 扩展距离 $\bar{d}$，其定义为

$$\bar{d}(x, y) := \begin{cases} \bar{d}_Z(x, y) & \text{if } x, y \in \bar{Z} \text{ for some } Z \in \mathscr{F}_d, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意到 $(X,\ d)$ 是一个完备扩展度量空间。我们将 $i\colon X \to X$ 记为满足以下条件的唯一映射：对每个 $Z \in \mathscr{F}_d$，$i|_Z = i_Z$。由于每个映射 $i_Z\colon Z \to Z$ 都是保距的，且具有稠密像，因此我们推出 $i\colon X \to X$ 也是保距的，并且具有稠密像。最后，让我们检验泛性质的有效性。固定一个完备扩展度量空间 $(Y,\ d_Y)$ 和一个短映射 $\varphi\colon X \to Y$。特别地，我们知道每个受限映射 $\varphi|_Z\colon Z \to Y$ 都是一个取值于某个分支 $W_Z \in \mathscr{F}_{d_Y}$ 中的短映射；因此，由于 $(W_Z,\ d_Y|_{W_Z\times W_Z})$ 是一个完备度量空间，$\varphi|_Z$ 可以唯一延拓为一个短映射 $\bar{\varphi}_Z\colon Z \to W_Z \subseteq Y$。因此，令

$\bar{\varphi}\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 定义为 $\bar{\varphi}|_{\bar{\mathrm{Z}}} := \bar{\varphi}_{\mathrm{Z}}$ 对每个 $\mathrm{Z} \in \mathscr{F}_{\mathsf{d}}$，显然，$\bar{\varphi}$ 是从 $\bar{\mathrm{X}}$ 到 Y 的唯一短映射，满足 $\bar{\varphi} \circ \mathrm{i} = \varphi$。命题得证。□

长度与测地扩展度量空间。设 (X,d) 是给定的扩展度量空间。那么，连续曲线 $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{X}$ 的 d-长度 $\ell(\gamma) \in [0,+\infty]$ 定义为

$$\ell(\gamma) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}(\gamma_{t_i}, \gamma_{t_{i-1}}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1 \right\}.$$

若 $\ell(\gamma) < +\infty$，则称曲线 γ 为 d-可求长。由 d 诱导的扩展长度距离 d_ℓ 定义为

$$\mathsf{d}_\ell(x,y) := \inf\left\{ \ell(\gamma) \;\middle|\; \gamma\colon [0,1] \to \mathrm{X} \text{ 是 d-可求长的，} (\gamma_0,\gamma_1) = (x,y) \right\} \text{对每个 } x,y \in \mathrm{X}。 \tag{2.1}$$

若 $\mathsf{d}_\ell = \mathsf{d}$，则称 (X,d) 为长度空间。显然，对于每个 $\mathrm{Z} \in \mathscr{F}_{\mathsf{d}}$，$(\mathrm{X},\mathsf{d})$ 是长度空间，当且仅当 $(\mathrm{Z},\mathsf{d}|_{\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}})$ 是长度空间。

注 2.6. 若 (X,d) 是扩展度量空间，$(\mathrm{Y},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是长度扩展度量空间，且 $\varphi\colon (\mathrm{X},\mathsf{d}) \to (\mathrm{Y},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是短映射，那么 $\varphi\colon (\mathrm{X},\mathsf{d}_\ell) \to (\mathrm{Y},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 也是短映射。证明这一点，只需验证对于任意满足 $\mathsf{d}_\ell(x,y) < +\infty$ 的 $x,y \in \mathrm{X}$，都有 $\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\varphi(x)\ \varphi(y)) \le \mathsf{d}_\ell(x,y)$。给定任意 $\varepsilon > 0$，我们可以找到一条 d-可求长曲线 $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{X}$，使得 $(\gamma_0,\gamma_1) = (x,y)$ 且 $\ell(\gamma) \le \mathsf{d}_\ell(x,y) + \varepsilon$。因此，对于区间 $[0,1]$，的任意分割 $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$，我们可以估计

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\varphi(\gamma_{t_i}), \varphi(\gamma_{t_{i-1}})) \le \sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}(\gamma_{t_i}, \gamma_{t_{i-1}}) \le \ell(\gamma) \le \mathsf{d}_\ell(x,y) + \varepsilon.$$

对 $[0,1]$ 的所有分割取上确界，并利用 d_{Y} 是长度扩展距离这一事实，可得 $\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\varphi(x)\ \varphi(y)) \le \ell(\varphi \circ \gamma) \le \mathsf{d}_\ell(x,\ y) + \varepsilon$，因此，由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性，所需的不等式 $\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\varphi(x)\ \varphi(y)) \le \mathsf{d}_\ell(x,\ y)$ 成立。■

在扩展度量空间 $(\mathrm{X},\ \mathsf{d})$ 中，称连续曲线 $[0,1] \to\colon [0,1] \to \mathrm{X}$ 为一条测地线，如果 $\ell(\gamma) = \mathsf{d}(\gamma_0,\ \gamma_1) < +\infty$。如果对于任意 $x,\ y \in \mathrm{X}$，满足 $\mathsf{d}(x,\ y) < +\infty$，都存在 $(\mathrm{X},\ \mathsf{d})$ 中的一条测地线 $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{X}$ 连接 x 和 y，即 $(\gamma_0,\ \gamma_1) = (x,\ y)$，则称 $(\mathrm{X},\ \mathsf{d})$ 为测地空间。显然，每个测地空间都是长度空间；并且，当且仅当对每个 $\mathrm{Z} \in \mathscr{F}_{\mathsf{d}}$，$(\mathrm{Z},\ \mathsf{d}|_{\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}})$ 是测地空间时，$(\mathrm{X},\ \mathsf{d})$ 才是测地空间。

2.3. **Set、Top 和 ExtΨMet 中的极限与余极限。** 本节聚焦于三个范畴：集合范畴、拓扑空间范畴以及扩展伪度量空间范畴。具体而言，我们将讨论它们的双完备性，并明确描述所有极限与余极限；有关这些术语的回顾，请参见附录A 。例如，集合范畴和拓扑空间范畴的双完备性已在 [24] 中得到证明。扩展伪度量空间范畴的双完备性似乎是一个广为人知的结果，而且很容易证明。

***Set*中的极限与余极限。** 我们用**Set**表示集合范畴，其中集合 X 和 Y 之间的态射是从 X 到 Y 的所有映射。该范畴拥有所有（余）积和（余）等化子：

- 设 $\{\mathrm{X}_i\}_{i\in I}$ 是一个集合族。那么 $(\prod \mathrm{X}_\star, \{\pi_i\}_{i\in I})$ 是 $\{\mathrm{X}_i\}_{i\in I}$ 在 **Set** 中的积，其中 $\prod \mathrm{X}_\star$ 表示笛卡尔积 $\prod_{i\in I} \mathrm{X}_i$，而 $\pi_i\colon \prod \mathrm{X}_\star \to \mathrm{X}_i$ 是典范投影映射，其定义为 $\pi_i(x_\star) := x_i$ 对每个 $x_\star = (x_i)_{i\in I} \in \prod \mathrm{X}_\star$ 均成立。
- 设 X、Y 为集合，且 $\varphi,\ \psi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 为映射。定义 $\mathrm{X}_{\varphi,\ \psi} := \{x \in \mathrm{X}\colon \varphi(x) = \psi(x)\}$，并将 $\iota_{\varphi,\ \psi}\colon \mathrm{X}_{\varphi,\ \psi} \to \mathrm{X}$ 记为包含映射。则 $(\mathrm{X}_{\varphi,\ \psi},\ \iota_{\varphi,\ \psi})$ 是**Set**中的 φ 与 ψ 的等化子。
- 设 $\{\mathrm{X}_i\}_{i\in I}$ 是一个由集合构成的集合。那么 $(\coprod \mathrm{X}_\star,\ \{\iota_i\}_{i\in I})$ 是 **Set** 中 $\{\mathrm{X}_i\}_{i\in I}$ 的余积，其中 $\coprod \mathrm{X}_\star$ 表示 $\bigsqcup_{i\in I} \mathrm{X}_i$ 的不交并，而 $\iota_i\colon \mathrm{X}_i \to \coprod \mathrm{X}_\star$ 是包含映射。

- 设 X、Y 为集合，且 $\varphi,\ \psi\colon X \to Y$ 为映射。我们将 Y 上的等价关系 $\mathcal{R}_{\varphi,\ \psi}$ 定义为满足以下条件的最小等价关系：对所有 $x \in X$，均有 $\varphi(x)\mathcal{R}_{\varphi,\ \psi}\psi(x)$（即所有此类等价关系的交）。我们用 $Y_{\varphi,\ \psi}$ 表示商集 $Y/\mathcal{R}_{\varphi,\ \psi}$，并用 $\pi_{\varphi,\ \psi}\colon Y \to Y_{\varphi,\ \psi}$ 表示投影映射。那么 $(Y_{\varphi,\ \psi},\ \pi_{\varphi,\ \psi})$ 是 **Set** 中 φ和 ψ 的余等化子。

因此，范畴 **Set** 是双完备的，这得益于定理 A.2。

Top 中的极限与余极限。 我们用 **Top** 表示拓扑空间范畴，其中连续映射是态射。于是 **Top** 是一个双完备范畴。更具体地说：

- 设 $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ 是一个拓扑空间集。则 $((\prod X_\star,\otimes_{i\in I}\tau_i)\ \{\pi_i\}_{i\in I})$ 是 $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ 在 **Top** 中的积，其中 $(\prod X_\star,\{\pi_i\}_{i\in I})$ 表示 $\{X_i\}_{i\in I}$ 在 **Set** 中的积，而 $\otimes_{i\in I}\tau_i$ 是 $\prod X_\star$ 上的积拓扑。

- 设 $(X,\tau X)$、$(Y,\tau Y)$ 是拓扑空间，且 $\varphi,\psi\colon X \to Y$ 是连续映射。那么 $((X_{\varphi,\psi},\tau X\llcorner X_{\varphi,\psi})\iota_{\varphi,\psi})$ 是 Top 中 φ 与 ψ 的等化子，其中 $(X_{\varphi,\psi},\iota_{\varphi,\psi})$ 表示 Set 中 φ 与 ψ 的等化子，而 $\tau X\llcorner X_{\varphi,\psi}$ 是 τX 的相对拓扑。

- 设 $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ 是一族拓扑空间。那么 $((\coprod X_\star,\bigsqcup_{i\in I}\tau_i)\ \{\iota_i\}_{i\in I})$ 是 **Top** 中 $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ 的余积，其中 $(\coprod X_\star,\{\iota_i\}_{i\in I})$ 表示 **Set** 中 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的余积，而 $\coprod X_\star$ 上的拓扑 $\bigsqcup_{i\in I}\tau_i$ 定义为

$$\bigsqcup_{i\in I}\tau_i := \left\{ \bigsqcup_{i\in I} U_i \;\middle|\; U_i \in \tau_i \text{ for every } i \in I \right\}.$$

- 设 $(X,\tau X)$、$(Y,\tau Y)$ 为拓扑空间，且 φ、$\psi\colon X \to Y$ 为连续映射。则 $((Y_{\varphi}$、$_{\psi}$、τ_{φ}、$_{\psi})\pi_{\varphi}$、$_{\psi})$ 是 Top 中 φ 和 ψ 的余等化子，其中 $(Y_{\varphi}$、$_{\psi}$、π_{φ}、$_{\psi})$ 表示 Set 中 φ 和 ψ 的余等化子，而 τ_{φ}、$_{\psi}$ 是 $Y\tau Y$ 在 Y_{φ}、$_{\psi} = Y/\mathcal{R}_{\varphi}$、$_{\psi}$ 上的商拓扑。

中的极限与余极限 ExtΨMet。 我们将**ExtΨMet**记作扩展伪度量空间的范畴，其中短映射是态射。于是，**ExtΨMet** 是一个双完备范畴。更具体地说：

- 设 $\{(X_i,\ d_i)\}_{i\in I}$ 为扩展伪度量空间的一个集合。那么 $((\prod X_\star,\ \otimes_{i\in I}d_i)\ \{\pi_i\}_{i\in I})$ 是 **ExtΨMet** 中 $\{(X_i,\ d_i)\}_{i\in I}$ 的积，其中 $(\prod X_\star,\ \{\pi_i\}_{i\in I})$ 表示 **Set** 中 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的积，而 $\otimes_{i\in I}d_i$ 是定义在 $\prod X_\star$ 上的扩展伪距离，其定义为

$$(\otimes_{i\in I}d_i)(x_\star,y_\star) := \sup_{i\in I} d_i(x_i,y_i) \quad \text{for every } x_\star,y_\star \in \prod X_\star.$$

- 设 $(X,\ dX)$、$(Y,\ dY)$ 为扩展伪度量空间，且 $\varphi,\psi\colon X \to Y$ 为短映射。那么 $((X_{\varphi,\psi},\ dX|X_{\varphi,\psi}\times X_{\varphi,\psi})$ $\iota_{\varphi,\psi})$ 是 φ和 ψ在范畴 ExtΨMet 中的等化子，其中 $(X_{\varphi,\psi},\iota_{\varphi,\psi})$ 表示 φ 和 ψ 在 Set 中的等化子。

- 设 $\{(X_i,\ d_i)\}_{i\in I}$ 是一族扩展伪度量空间。那么 $((\coprod X_\star,\ \bigsqcup_{i\in I}d_i)\ \{\iota_i\}_{i\in I})$ 是 $\{(X_i,\ d_i)$ $\}_{i\in I}$ 在 **ExtΨMet** 中的余积，其中 $(\coprod X_\star,\ \{\iota_i\}_{i\in I})$ 表示 $\{X_i\}_{i\in I}$ 在 **Set** 中的余积，而定义在 $\coprod X_\star$ 上的扩展伪距离 $\bigsqcup_{i\in I}d_i$ 定义为

$$\Big(\bigsqcup_{i\in I} d_i\Big)(x,y) := \begin{cases} d_i(x,y) & \text{if } x,y \in X_i \text{ for some } i \in I, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- 设 (X,d_X)、(Y,d_Y) 为扩展伪度量空间，且 $\varphi,\psi\colon X \to Y$ 为短映射。令 $(Y_{\varphi,\psi},\pi_{\varphi,\psi})$ 表示 φ 与 ψ 在 **Set** 中的余等化子。定义 $Y_{\varphi,\psi}$ 上的扩展伪距离 $d_{\varphi,\psi}$ 如下：

$$d_{\varphi,\psi}(\pi_{\varphi,\psi}(x),\pi_{\varphi,\psi}(y)) := \inf_{(z_1,z_1',\ldots,z_n,z_n')} \sum_{i=1}^{n} d_Y(z_i,z_i'),$$

其中，下确界取遍所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及满足对每个 $i = 2, \dots, n$ 均有 $z_1 = x, z'_{i-1} \mathcal{R}_{\varphi,\psi} z_i$，且 $z'_n = y$ 的 $(z_1, z'_1, \dots, z_n, z'_n) \in \mathrm{Y}^{2n}$。那么 $((\mathrm{Y}_{\varphi,\psi}, \mathsf{d}_{\varphi,\psi}) \pi_{\varphi,\psi})$ 是 φ 与 ψ 在**ExtΨMet** 中的余等化子。

2.4. **扩展度量拓扑空间**。本节首先介绍 预扩展伪度量拓扑空间这一辅助概念。随后，我们重述一些关于 扩展度量拓扑空间的定义和结果，并采用 Ambrosio、Erbar 和 Savaré 在 [3, 定义 4。1]中提出的公理化方案。我们呈现的部分内容也取自相关研究 [25, 23],对扩展度量拓扑空间作进一步探讨的著作。

预 *e.pm.t.* 空间。首先，我们来引入预扩展（伪）度量拓扑空间的概念，所谓预扩展（伪）度量拓扑空间，就是指配备了扩展（伪）距离、且不附带任何相容性要求的拓扑空间。

定义 2.7（预扩展伪度量拓扑空间）。称三元组 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$ 为 预扩展伪度量拓扑空间，或简称 预 e.pm.t. 空间，如果

$$(\mathrm{X}, \tau) \quad \textit{is a topological space,}$$
$$(\mathrm{X}, \mathsf{d}) \quad \textit{is an extended pseudometric space.}$$

若(X,d) 是一个扩展度量空间，则称$(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$ 为预扩展度量拓扑空间，或称预 e.m.t. 空间。

注 2.8. 若 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$ 是一个预 e.m.t. 空间，且 $\mathsf{d} : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, +\infty]$ 是一个 $\tau \otimes \tau$-下半连续函数，则 $(\mathrm{X}\ \tau)$ 是豪斯多夫的。事实上，任取 $\bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{X}$，若 $\bar{x} \neq \bar{y}$，则有 $(\bar{x}, \bar{y}) \in \{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} : \mathsf{d}(x, y) > 0\} \in \tau \otimes \tau$，因此可找到 $U, V \in \tau$使得 $\bar{x} \in U, \bar{y} \in V$且 $U \times V \subseteq \{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} : \mathsf{d}(x, y) > 0\}$，这意味着 $U \cap V = \varnothing$，如所求。■

定义 2.9（连续短映射）。设 （$\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}$、$\mathsf{d}_{\mathrm{X}}$）和（$\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}$、$\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}$） 为预扩展度量拓扑空间。若映射 φ: $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 满足以下条件，则称其为连续短映射:

$$\varphi \colon (\mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}, \tau_{\mathrm{Y}}) \quad \textit{is continuous,}$$
$$\varphi \colon (\mathrm{X}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}) \quad \textit{is a short map.}$$

此外，我们用 CS（（$\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}$、$\mathsf{d}_{\mathrm{X}}$）；（$\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}$、$\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}$））表示从（$\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}$、$\mathsf{d}_{\mathrm{X}}$）到（$\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}$、$\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}$）的所有连续短映射的集合。

设 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$ 为预扩展度量拓扑空间。按照 [25],，我们将使用以下记号

$$\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}, \tau, \mathsf{d}) := CS((\mathrm{X}, \tau, \mathsf{d}); \mathbb{R}) \cap C_b(\mathrm{X}, \tau),$$

其中，目标空间 $\mathbb{R}$ 赋予欧几里得拓扑和距离。若扩展伪距离 d 满足以下条件，则称其可以被 τ-恢复:

$$\mathsf{d}(x, y) = \sup \big\{ |f(x) - f(y)| \;\big|\; f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}, \tau, \mathsf{d}) \big\} \quad \text{for every } x, y \in \mathrm{X}. \tag{2.2}$$

注意到（2.2）等价于 $\mathsf{d}(x,\ y) \leq \sup\{|f(x) - f(y)| :\ f \in \mathrm{LIP}_{b,\ 1}(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d})\}$对每个 $x,\ y \in \mathrm{X}$。

注 2.10。如果 $(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d})$ 是一个预 e.pm.t. 空间，且 d 可以被 τ 恢复，那么

$$\mathsf{d} \colon \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, +\infty] \quad \text{is } \tau \otimes \tau\text{-lower semicontinuous.}$$

事实上，对于所有 $f \in \mathrm{LIP}_{b,\ 1}(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d})$，$\mathrm{X} \times \mathrm{X} \ni (x,\ y) \mapsto |f(x) - f(y)| \in \mathbb{R}$ 都是 $\tau \otimes \tau$-连续的，因此 d 是 $\tau \otimes \tau$-下半连续的，因为它是 $\tau \otimes \tau$-连续函数的上确界。■

定义 2.11（预 e.pm.t. 空间的嵌入）。设$(\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}},\mathsf{d}_{\mathrm{X}})$、$(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 为预扩展度量拓扑空间。若映射 $\iota \colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 满足以下条件，则称其为一个嵌入 :

i) $\iota\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 是到其像 $\iota(\mathrm{X})$上的同胚，ii) $\iota\colon (\mathrm{X}, \mathrm{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}, \mathrm{d}_{\mathrm{Y}})$ 保距。

e.m.t. 空间的定义。我们回顾扩展（伪）度量拓扑空间的概念 [3]:

定义 2.12 （扩展（伪）度量拓扑空间）。我们称预 *e.pm.t.* 空间$(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$ 为扩展伪度量拓扑空间，或简称e.pm.t. 空间，若满足：

i) τ是$\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$的初始拓扑；ii) d 可由 τ 恢复。

此外，若(X,d) 是扩展度量空间，则称$(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$ 为扩展度量拓扑空间，或简称e.m.t. 空间。

注意，若 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$ 是 e.pm.t. 空间，则 τ显然是 $C_b(\mathrm{X}\ \tau)$ 的初始拓扑，因此 $(\mathrm{X}\ \tau)$ 是完全正则的。此外，若 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$ 是 e.m.t. 空间，则 d可由 τ恢复这一事实意味着 $\mathrm{d}\colon \mathrm{X}\times\mathrm{X}\to[0,+\infty]$ 是 $\tau\otimes\tau$-下半连续的（由注记 2.10），因此，根据注记 2.8，$(\mathrm{X}\ \tau)$ 是豪斯多夫的（因而是 Tychonoff 空间）。2.8。

我们称 $(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$ 为单点 *e.m.t.* 空间，如果 X 是一个单点集，因此必有 $\tau=\{\varnothing,\mathrm{X}\}$，且 $\mathrm{d}:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to\{0\}$。此外，我们还有空扩展度量拓扑空间 $(\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \varnothing\times\varnothing\to[0,+\infty])$。

注 2.13. 设 $(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$ 是一个 e.m.t. 空间，并固定任意 $E\subseteq\mathrm{X}$。令 $\tau\llcorner E:=\{U\cap E\colon\ U\in\tau\}$为相对拓扑，容易验证 $(E,\ \tau\llcorner E,\ \mathrm{d}|_{E\times E})$ 是一个 e.m.t. 空间。■

The 以下结果由 [23, 推论 3。3], 作为 [21, 定理 2。4]的推论得到 .

定理 2.14 (延拓定理)。 设 $(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$ 是一个 *e.m.t.* 空间。设 $K\subseteq\mathrm{X}$ 是一个 τ-紧致 *Set*，并且 $f\in\mathrm{LIP}_{b,\ 1}(K,\tau\llcorner K,\ \mathrm{d}|_{K\times K})$。则存在 $f\in\mathrm{LIP}_{b,\ 1}(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$ 使得 $f|_K=f$。

现在我们来证明：给定一个紧致预 e.m.t. 空间 $(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$，d 的 $\tau\otimes\tau$-下半连续性不仅是 $(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$ 为 e.m.t. 空间的必要条件，也是充分条件：

命题 2.15。 设 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$ 是一个预 *e.m.t.* 空间，且 $(\mathrm{X}\ \tau)$ 是紧致的。那么，$(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$是 *e.m.t.* 空间，当且仅当 $\mathrm{d}:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to[0,+\infty]$ 是 $\tau\otimes\tau$-下半连续的。

证明。必要性由注 2.10 得出。为证明充分性，假设 d 是 $\tau\otimes\tau$-下半连续的。我们来验证 d 可以被 τ-恢复。任取 $x,y\in\mathrm{X}$ 和 $\lambda\in(0,\mathrm{d}(x,y))$。那么截断距离 $\mathrm{d}\wedge\lambda:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to[0,\lambda]$ 是 $\tau\otimes\tau$-下半连续的。定义 $\tilde{f}\colon\{x,y\}\to\mathbb{R}$ 为 $\tilde{f}(x):=0$ 以及 $\tilde{f}(y):=\lambda$。由于 $|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)|=\lambda=(\mathrm{d}\wedge\lambda)(x,y)$，我们有映射 $\tilde{f}\colon(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d}\wedge\lambda)\to\mathbb{R}$ 是连续短映射。因此，由 [21, 推论 2.5]可知，存在连续短映射 $f\colon(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d}\wedge\lambda)\to[0,\lambda]$，使得 $f(x)=\tilde{f}(x)=0$ 且 $f(y)=\tilde{f}(y)=\lambda$。由于 $\mathrm{d}\wedge\lambda\le\mathrm{d}$，我们有 $f\in\mathrm{LIP}_b,1(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$。特别地，我们有 $\sup\{|g(x)-g(y)|\colon\ g\in\mathrm{LIP}_b,1(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})\}\ge|f(x)-f(y)|=\lambda$。由 λ,x,y 的任意性可知，d 可以被 τ-恢复。特别地，$\mathrm{LIP}_b,1(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$ 分离 X 中的点，因此注 2.3 保证 τ是 $\mathrm{LIP}_b,1(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$ 的初始拓扑。总之，我们已经证明 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathrm{d})$ 是一个 e.m.t. 空间。命题得证。□

命题中的紧性假设2.15 不能省略，以下例子说明了这一点：

例 2.16. 假设 (X,d) 是一个非紧度量空间，并且 d 是 X 上的距离，满足 $\tilde{\mathrm{d}}\le\mathrm{d}$，其诱导拓扑 $\tilde{\tau}$严格粗于由 d τ 诱导的拓扑；例如，可以考虑空间 $\mathrm{X}=L^\infty(0,1)$，其距离 d 由 $\|\cdot\|_{L^\infty(0,1)}$ 诱导，且其

˜距离 d 由 $\|\cdot\|_{L^1(0,1)}$诱导。于是我们断言

$$\tilde{\mathsf{d}} \quad \text{is } \tau\otimes\tau\text{-lower semicontinuous,} \tag{2.3}$$

$$(\mathrm{X},\tau,\tilde{\mathsf{d}}) \quad \text{is not an e.m.t. space.} \tag{2.4}$$

证明 (2.3)：若 $(x_n)_n$，$(y_n)_n\subseteq \mathrm{X}$ 且 x，$y\in\mathrm{X}$ 满足 $\lim_n \mathsf{d}(x_n,x)=\lim_n \mathsf{d}(y_n,y)=0$，则

$$\tilde{\mathsf{d}}(x,y)\le \varliminf_{n\to\infty}\big(\mathsf{d}(x,x_n)+\tilde{\mathsf{d}}(x_n,y_n)+\mathsf{d}(y_n,y)\big)=\varliminf_{n\to\infty}\tilde{\mathsf{d}}(x_n,y_n).$$

˜证明（2.4）：由于 $\tilde\tau\subseteq\tau$，我们有 $\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$ 与所有有界 ˜短映射 $f\colon(\mathrm{X},\mathsf{d})\to\mathbb{R}$ 的集合重合。因此，注记 2.4 表明，$\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$˜ 的初始拓扑与 $\tilde\tau$ 重合，而后者严格弱于 τ，故 $(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$ 不是 e.m.t. 空间。■

度量完备的 *e.m.t.* 空间。 如果扩展度量空间 $(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$ 是完备的，我们就称 e.m.t. 空间 $(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$ 为度量完备的；如果 (X,τ) 是紧致的，则称其为紧 *e.m.t.* 空间。正如我们将在下文看到的，度量完备的一个充分条件是（拓扑）紧致性。

回顾一下，对于 e.m.t. 空间 $(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$，伪距离族 $\{\delta_f\colon f\in\mathrm{LIP}_b(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\}$在 X 上生成一个与拓扑 τ相容的一致结构；参见 [23, 第 2.3 节4]。这里，δ_f定义为 $\delta_f(x,y):=|f(x)-f(y)|$对每个 $x,y\in\mathrm{X}$ 均成立。由此我们得到度量完备性与一致空间意义下的完备性之间如下比较：

命题 2.17。 设$(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$ 是一个 *e.m.t.* 空间。若$(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$ 作为一致空间是完备的，则它是度量完备的。特别地，每个紧 *e.m.t.* 空间都是度量完备的。

证明。假设 $(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$ 作为一致空间是完备的，并设 $(x_i)_{i\in I}$是 (X,d) 中的一个柯西网。根据 δ_f的定义，对于所有 $f\in\mathrm{LIP}_b(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$，$(x_i)_{i\in I}$关于 δ_f都是柯西网，因此它也关于由 $\{\delta_f\colon f\in\mathrm{LIP}_b(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\}$生成的一致结构是柯西网。由完备性可知，存在 $x\in\mathrm{X}$，使得 $(x_i)_{i\in I}$在 (X,τ) 中收敛于 x。我们来证明它关于 d 也收敛。任取 $\varepsilon>0$。由于 $(x_i)_{i\in I}$ 是柯西网，存在 $i_\varepsilon\in I$，使得对满足 $i_\varepsilon\preceq i,j$ 的任意 $i,j\in I$，都有 $\mathsf{d}(x_i,x_j)<\varepsilon$。于是，$\mathsf{d}(\cdot,x_i)$ 的 τ-下半连续性给出

$$\mathsf{d}(x,x_i)\le\varliminf_{j\in I}\mathsf{d}(x_j,x_i)\le\varepsilon\quad\text{for every } i\in I \text{ with } i_\varepsilon\preceq i.$$

因此，$(x_i)_{i\in I}$在 (X,d) 中收敛，从而 $(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$ 是度量完备的。最后一个断言源于：紧空间的唯一相容一致结构是完备的，参见 [19]。□

长度与测地 *e.m.t.* 空间。 如果一个 e.m.t. 空间 $(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$ 满足 (X,d) 是长度空间（分别为测地空间），则称其为长度 *e.m.t.* 空间（分别称为测地 *e.m.t.* 空间）。

正如 [25, 定理 2.3.2(c)]，中所证明的，以下蕴含关系成立：令 d_ℓ 按照（2.1）定义，则有

$$(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\text{ is a compact e.m.t. space}\quad\Longrightarrow\quad(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}_\ell)\text{ is a geodesic e.m.t. space.} \tag{2.5}$$

下面的例子表明，（2.5）中的紧性假设不能省略，也就是说，对于一个非紧 e.m.t. 空间 $(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})$，可能出现 $(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}_\ell)$ 不是 e.m.t. 空间的情况。

例 2.18。考虑集合 $\mathrm{X}:=\{(0,0)\}\cup\{(1,0)\}\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}([0,1]\times\{1/n\})\subseteq\mathbb{R}^2$，并赋予欧几里得拓扑 τ 和距离 d。由于 (X,d) 中不存在连接 $a:=(0,0)$ 与 $b:=(1,0)$ 的连续曲线，因此 $\mathsf{d}_\ell(a,b)=+\infty$。对于任意 $n\in\mathbb{N}$，点 $a_n:=(0,1/n)$ 和$b_n:=(1,1/n)$ 满足 $\mathsf{d}_\ell(a_n,b_n)=1$。由于 $a_n\to a$和 $b_n\to b$ 相对于 τ，可知 d_ℓ不是 $\tau\otimes\tau$-下半连续的，因此 $(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}_\ell)$ 不是 e.m.t. 空间（注 2.10）。还需注意，

对每个 $x \in \mathrm{X}$，$\mathrm{d}_\ell(x,\cdot)$ 都是 τ-下半连续的。这表明，扩展距离的 $\tau\otimes\tau$-下半连续性不能“分别”检查（即只针对单个变量检查）。■

3. The category **ExtMetTop**

3.1. 范畴目录。 下面列出与我们相关的范畴：

- 我们用 **Tych** 表示 **Top** 的满子范畴，其对象是所有吉洪诺夫空间。
- 我们将 **PreExtΨMetTop**定义为这样一个范畴：其对象是预扩展度量拓扑空间，其态射是连续短映射。
- 我们将 **ExtMetTop** 定义为 **PreExtΨMetTop** 的满子范畴，其对象是扩展度量拓扑空间。
- 我们将**ExtMetTop**$_{\mathrm{mc}}$ 定义为**ExtMetTop**的满子范畴，其对象是所有度量完备的 e.m.t. 空间。
- 给定任意实数 $\lambda \in (0, \infty)$，我们用 **MetTop**$^{\leq\lambda}$ 表示**ExtMetTop** 的满子范畴，其对象是所有直径不超过 λ 的有界扩展度量拓扑空间。也就是说，**MetTop**$^{\leq\lambda}$ 的对象是满足以下条件的扩展度量拓扑空间 $(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$：对于每个 $x,\ y \in \mathrm{X}$，都有 $\mathrm{d}(x,\ y) \leq \lambda$。
- 我们将 **CptExtMetTop** 定义为 **ExtMetTop**的满子范畴，其对象是所有紧 e.m.t. 空间。根据命题 2.17，**CptExtMetTop**也是**ExtMetTop**$_{\mathrm{mc}}$的满子范畴。
- **ExtMetTop**$_{\mathrm{len}}$ 是长度扩展度量拓扑空间的范畴，而**CptExtMetTop**$_{\mathrm{geo}}$ 是紧致测地线 e.m.t. 空间的范畴。

注记 3.1。 范畴**PreExtΨMetTop** 也可以等价地定义为

$$\mathbf{PreExtΨMetTop} := \mathbf{SP}(U_{\mathbf{Top}}, U_{\mathbf{ExtΨMet}}),$$

其中 $U_{\mathbf{Top}}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ 和 $U_{\mathbf{ExtΨMet}}\colon \mathbf{ExtΨMet} \to \mathbf{Set}$ 表示遗忘函子。严格拉回$\mathbf{SP}(U_{\mathbf{Top}}, U_{\mathbf{ExtΨMet}})$ 的定义见定义A.1 。■

注 3.2（与其他紧空间概念的比较）。 设 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$ 是一个预 e.m.t. 空间，且 $(\mathrm{X}\ \tau)$ 是紧致的。我们声称以下条件等价：

i) $(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$ 是一个紧 e.m.t. 空间。ii) $(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$ 按照 [1, 定义 2.1、注记 2.8], 的意义，是一个对称分离度量紧豪斯多夫空间，即 $\mathrm{d}\colon \mathrm{X}\times\mathrm{X} \to [0,+\infty]$ 是 $\tau\otimes\tau$下半连续的。iii) $(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$ 按照 [11, 定义 4.11], 的意义，是一个紧拓扑度量空间，即只要 $C \subseteq \mathrm{X}$ 是 τ闭集且 $r \in (0, +\infty)$，集合$\{x \in \mathrm{X} : \mathrm{d}(x, C) \leq r\}$ 就是 τ闭集。

i) 与 ii) 的等价性是命题 2.15 的内容，而 ii) 与 iii) 的等价性由 [6, 引理 1.9] 得出。特别地，**CptExtMetTop** 与范畴**MetCH**$_{\mathbf{sep,sym}}$ 相一致；该范畴由对称分离度量紧豪斯多夫空间以及连续非扩张映射 构成，例如 [1, 注 2.8] 中所考虑的那样。■

在 以下陈述中，我们汇总范畴**ExtMetTop**的若干基本性质 ：

命题 3.3。 以下性质成立：

i) 在 **ExtMetTop** 中，空扩展度量拓扑空间是始对象，而任意单点 *e.m.t.* 空间都是终对象。特别地，**ExtMetTop** 没有零对象。ii) 态射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathrm{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathrm{d}_{\mathrm{Y}})$ 在 **ExtMetTop** 中是同构，当且仅当它是保距同胚（即 *e.m.t.* 空间的满射嵌入）。iii) 范畴 **ExtMetTop** 是局部小的，但不是本质小的。

iv) 态射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 在 **ExtMetTop** 中是单态射，当且仅当它是单射。v) 态射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 在 **ExtMetTop** 中是满态射，当且仅当其像 $\varphi(\mathrm{X})$ 在 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 中稠密。vi) 范畴 **ExtMetTop** 不是平衡的。

证明。
i) 对任意 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d}) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{ExtMetTop})$，从空扩展度量拓扑空间到 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$ 的空函数显然是连续短映射。此外，给定单点 e.m.t. 空间 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，从 X 到 Y 的常值映射（当 $\mathrm{X} \neq \varnothing$ 时；若 $\mathrm{X} = \varnothing$，则为空函数）是唯一的连续短映射。因此，空扩展度量拓扑空间是 **ExtMetTop** 的始对象，而每个单点 e.m.t. 空间都是 **ExtMetTop** 的终对象。

ii) 若 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是 ExtMetTop 中的一个同构，其逆态射为 φ^{-1}，那么特别地，$\varphi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 可逆（即是集合范畴 Set 中的同构），而 $\varphi^{-1}\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ 是它在集合论意义下的逆映射。由于 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 和 $\varphi^{-1}\colon (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}) \to (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}})$ 都是连续的，因此 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 是一个同胚。由于 $\varphi\colon (\mathrm{X}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 和 $\varphi^{-1}\colon (\mathrm{Y}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}) \to (\mathrm{X}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}})$ 都是短映射，对任意 $x, y \in \mathrm{X}$，我们有

$$\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \mathsf{d}_{\mathrm{X}}(x, y) = \mathsf{d}_{\mathrm{X}}(\varphi^{-1}(\varphi(x)), \varphi^{-1}(\varphi(y))) \leq \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\varphi(x), \varphi(y)),$$

这给出 $\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\varphi(x)\ \varphi(y)) = \mathsf{d}_{\mathrm{X}}(x, y)$。因此，$\varphi\colon (\mathrm{X}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是保距的。反过来，每个保距同胚显然都是**ExtMetTop**中的一个同构。
iii) 设 $(\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}})$、$(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}) \in \mathrm{Obj}(\mathrm{ExtMetTop})$。ExtMetTop 中的每个态射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 特别地都是集合 X、Y 之间的映射。这保证了 ExtMetTop 是一个局部小范畴。接下来，固定一个基数 κ，并考虑 e.m.t. 空间 $(\mathrm{X}_\kappa, \tau_\kappa, \mathsf{d}_\kappa)$，其中 $\mathrm{X}_\kappa := \{0,1\}^\kappa$ 赋予积拓扑 τ_κ（每个因子 $\{0,1\}$ 均赋予离散拓扑）和离散距离 d_κ（定义为：当 a、$b \in$ 是 X_κ 中不同的元素时，$\mathsf{d}_\kappa(a,b) := 1$）。容易验证 $(\mathrm{X}_\kappa, \tau_\kappa, \mathsf{d}_\kappa)$ 是一个 e.m.t. 空间（参见命题 2.15，或下文第 3.5 节）。由于对于两个不同的基数 κ_1 和 κ_2，X_{κ_1} 和 X_{κ_2}的基数不同，再结合 ii)，我们可以进一步得知，在 ExtMetTop 中不存在 $(\mathrm{X}_{\kappa_1}, \tau_{\kappa_1}, \mathsf{d}_{\kappa_1}) \to (\mathrm{X}_{\kappa_2}, \tau_{\kappa_2}, \mathsf{d}_{\kappa_2})$ 这样的同构。由于所有基数组成的集合是一个真类，我们推断 ExtMetTop 的骨架不是小范畴，换言之，ExtMetTop 不是本质小的。

iv) 假设 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是 ExtMetTop 中的单态射。我们要证明 $\varphi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 是单射。反证：假设对于某些 $x, y \in \mathrm{X}$，有 $\varphi(x) = \varphi(y)$，且 $x \neq y$。固定一个单点 e.m.t. 空间 $(\{o\}, \tau_o, \mathsf{d}_o)$，并定义映射 $\psi_1, \psi_2\colon \{o\} \to \mathrm{X}$ 如下：$\psi_1(o) := x$，以及 $\psi_2(o) := y$。显然，ψ_1, ψ_2 是不同的连续短映射，并且 $\varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2$，这与假设 φ 是单态射矛盾。因此，φ 是单射。反过来，每个单射连续短映射显然都是 ExtMetTop 中的单态射。

v) 假设 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是 ExtMetTop 中的满态射。我们要证明映射 $\varphi\colon \mathrm{X} \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 的像稠密。反设闭包 C $\varphi(\mathrm{X})$ 在 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 中满足 $C \neq \mathrm{Y}$。固定某个 $y \in \mathrm{Y} \setminus C$。应用定理 B.1 i v)，于是可找到一个函数 $\psi_1 \in \mathrm{LIP}_b(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，使得 $\psi_1|_C = 0$ 且 $\psi_1(y) \neq 0$。特别地，ψ_1是从 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 到 e.m.t. 空间 $\mathbb{R}$（赋予欧几里得拓扑和距离）的连续短映射。令 $\psi_2\colon \mathrm{Y} \to \mathbb{R}$ 为零函数 $\psi_2 := 0$，那么 $\psi_1, \psi_2\colon (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}) \to \mathbb{R}$ 是 ExtMetTop 中不同的态射，并且满足 $\psi_1 \circ \varphi = 0 = \psi_2 \circ \varphi$（因为 $\varphi(\mathrm{X}) \subseteq C$），这与假设 φ 是满态射相矛盾。因此，$\varphi(\mathrm{X})$ 在 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 中稠密。反过来，假设 $\varphi\colon \mathrm{X} \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 的像稠密。给定一个 e.m.t. 空间 $(\mathrm{Z}\ \tau_{\mathrm{Z}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Z}})$ 以及连续短映射 $\psi_1, \psi_2\colon (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}) \to (\mathrm{Z}\ \tau_{\mathrm{Z}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Z}})$，满足 $\psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi$，

我们有 $\psi_1|_{\varphi(X)} = \psi_2|_{\varphi(X)}$。由于 ψ_1, ψ_2: (Y τ_Y) $\to$ (Z τ_Z) 连续, φ(X) 在 (Y τ_Y) 中稠密，且 (Z τ_Z) 是豪斯多夫的，因此可推得 $\psi_1 = \psi_2$，这表明 φ 是满态射。**vi)** 我们将 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ （连同欧几里得拓扑和距离）视为 e.m.t. 空间。包含映射 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ 是一个双态射（因为它是单射且像稠密），但它不是同构（因为它不是满射）。这表明 **ExtMetTop**不是平衡范畴。□

按照命题 3.3 ii) 的证明进行论证，可以证明，即使在范畴**PreExtΨMetTop** 中，同构也恰好是保距同胚。

推论 3.4。以下性质成立：

i) 在 *CptExtMetTop* 中，空扩展度量拓扑空间是始对象，而任意单点 *e.m.t.* 空间都是终对象。特别地，*CptExtMetTop* 没有零对象。*ii) CptExtMetTop* 中的态射 φ: *(X* τ_X, d_X*)* $\to$ *(Y* τ_Y, d_Y*)* 是同构，当且仅当它是保距同胚。*iii)* 范畴 *CptExtMetTop* 是局部小的，但不是本质小的。*iv) CptExtMetTop* 中的态射 φ: *(X* τ_X, d_X*)* $\to$ *(Y* τ_Y, d_Y*)* 是单态射，当且仅当它是单射。*v) CptExtMetTop* 中的态射 φ: *(X* τ_X, d_X*)* $\to$ *(Y* τ_Y, d_Y*)* 是满态射，当且仅当它是满射。*vi)* 范畴 *CptExtMetTop* 是平衡的。

证明。
i) 由于空 e.m.t. 空间和所有单点 e.m.t. 空间都是紧致的，因此由命题3.3 i) 可得。

ii) 由命题 3.3 ii) 可得。
iii) 由于 **CptExtMetTop** 是 **ExtMetTop**的子范畴，而根据命题 3.3 iii)，后者是局部小的，因此显然 **CptExtMetTop** 是局部小的。另一方面，在命题 3.3 iii) 的证明中构造的拓扑空间 (X_κ, τ_κ) 根据吉洪诺夫定理是紧致的，由此可得 **CptExtMetTop** 不是本质小的。

iv) 由命题 3.3 iv) 的证明可得，因为单点 e.m.t. 空间是紧致的。
v) 由命题 3.3 v) 可知，**CptExtMetTop**中的满态射恰好是具有稠密像的连续短映射。然而，若 φ: (X τ_X, d_X) $\to$ (Y τ_Y, d_Y) 是紧 e.m.t. 空间之间的连续短映射，且 φ(X) 在 (Y τ_Y) 中稠密，那么事实上有 $\varphi(X) = Y$。确实， φ(X) 是紧致的（因为它是紧空间的连续像），因此它在 (Y τ_Y) 中是闭集（因为 τ_Y 是豪斯多夫拓扑）。

vi) 由 ii) 可轻易得出 , iv) 和 v) . □

3.2. **e.m.t. 化函子**。本节将得到一个在本文中起基础作用的结果：我们给出一种规范方法，将任意给定的预 e.pm.t. 空间 (X τ,d) 与一个 e.m.t. 空间 (ˇX,ˇτ, ˇd) =emt((X τ, d)) 联系起来，并将其称为 (X τ, d) 的*e.m.t.* 化 。

命题 *3.5.* 设 *(X* τ*, d)* 是一个预 *e.pm.t.* 空间。则存在一个 *e.m.t.* 空间 *(ˇX,* ˇτ*,* ˇ*d)* 和一个连续短映射 $c_{(X,\tau,d)}$*: (X* τ*, d)* $\to$ *(ˇX,* ˇτ*,* ˇ*d)*，并满足以下泛性质：给定一个 *e.m.t.* 空间 *(Y* τ_Y, d_Y*)* 和一个连续短映射 φ: *(X* τ*, d)* $\to$ *(Y* τ_Y, d_Y*)*，存在唯一的连续短映射 $\tilde{\varphi}$: *(ˇX,* ˇτ*,* ˇ*d)* $\to$ *(Y* τ_Y, d_Y*)*，使得

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau,d) & \xrightarrow{c_{(X,\tau,d)}} & (\check{X},\check{\tau},\check{d}) \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\varphi}} \\ & & (Y,\tau_Y,d_Y) \end{array}$$

是一个交换图。此外，我们有映射

$$CS((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d});(\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}))\ni\varphi\mapsto\tilde{\varphi}\in CS((\check{\mathrm{X}},\check{\tau},\check{\mathsf{d}});(\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})) \tag{3.1}$$

是一个双射。

˜证明。 我们将 X 上的扩展伪距离 d 定义为

$$\tilde{\mathsf{d}}(x,y):=\sup\big\{|f(x)-f(y)|\;\big|\;f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\big\}\quad\text{ for every }x,y\in\mathrm{X}.$$

我们赋予商空间 ˇX := X/˜d 扩展距离 ˇd := [˜d] （由 ˜d 诱导）以及初始拓扑 ˇτof LIPb,1(ˇX τ̃, ˇ d)，其中 τ̃表示 τ 的商拓扑。此外，我们将商映射记为 c =c(X,τ,d): X →ˇX。下面验证 (ˇX, ˇτ, ˇd) 是一个 e.m.t. 空间。由于 LIPb,1(ˇX, ˇτ, ˇd) =LIPb,1(ˇX τ̃, ˇd)，因此 ˇτ 是 LIPb,1(ˇX, ˇτ, ˇ d) 的初始拓扑。此外，对于任意 f ∈LIPb,1(X τ, ˜d)，存在唯一函数 [f]: ˇX →ℝ，使得

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{X} & \xrightarrow{\;f\;} & \mathbb{R}\\ {\scriptstyle\mathsf{c}}\big\downarrow & \nearrow_{[f]} & \\ \check{\mathrm{X}} & & \end{array}$$

这是一个交换图，并且 [f] ∈LIPb, 1(ˇX, ˇτ, ˇd)。已知 LIPb, 1(X τ, d) ⊆LIPb, 1(X τ, ˜d)，对于任意 x, y ∈ X，我们有

$$\begin{aligned}\check{\mathsf{d}}(\mathsf{c}(x),\mathsf{c}(y))=\tilde{\mathsf{d}}(x,y)&=\sup\big\{|f(x)-f(y)|\;\big|\;f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\big\}\\&=\sup\big\{|[f](\mathsf{c}(x))-[f](\mathsf{c}(y))|\;\big|\;f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\big\}\\&\le\sup\big\{|g(\mathsf{c}(x))-g(\mathsf{c}(y))|\;\big|\;g\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\check{\mathrm{X}},\check{\tau},\check{\mathsf{d}})\big\}\le\check{\mathsf{d}}(\mathsf{c}(x),\mathsf{c}(y)),\end{aligned}$$

因此 ˇd(w, z) =sup{|g(w) − g(z)|: g ∈LIPb, 1(ˇX, ˇτ, ˇd)}对所有 w, z ∈ˇX 均成立。总之，(ˇX, ˇτ, ˇd) 是一个 e.m.t. 空间。注意， ˜d ≤d 且 ˇτ ⊆ τ̃，因此 c: (X τ, d) →(ˇX, ˇτ, ˇd) 是一个连续短映射。

现在我们来验证泛性质。固定一个 e.m.t. 空间 (Y τY, dY) 以及一个连续短映射 φ: (X τ, d) →(Y τY, dY)。对于任意 x, y ∈X，我们可以估计

$$\begin{aligned}\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\varphi(x),\varphi(y))&=\sup\big\{|g(\varphi(x))-g(\varphi(y))|\;\big|\;g\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})\big\}\\&\le\sup\big\{|f(x)-f(y)|\;\big|\;f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\big\}=\tilde{\mathsf{d}}(x,y).\end{aligned}\tag{3.2}$$

特别地，当 x, y ∈X 满足 ˜d(x, y) = 0 时，dY(φ(x) φ(y)) = 0。回想 ˇX =X/˜d, ˇ，我们推知存在唯一映射 φ̃: X →Y，使得

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{X} & \xrightarrow{\;\mathsf{c}\;} & \check{\mathrm{X}}\\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow & \big\downarrow{\scriptstyle\tilde{\varphi}}\\ & & \mathrm{Y}\end{array}$$

这是一个交换图式。我们断言 φ̃: (ˇX, ˇτ) →(Y τY) 是连续的。由于 τY 是 LIPb,1(Y τY, dY) 的初始拓扑，该断言等价于对每个 f ∈LIPb,1(Y τY, dY)，映射 f ∘φ̃: (ˇX, ˇτ) →ℝ 连续。对于任意这样的函数 f，有 f ∘φ ∈LIPb,1(X τ, d)，因此 f ∘φ̃ = [f ∘φ] ∈LIPb,1(ˇX, ˇτ, ˇd)。特别地，f ∘φ̃是 ˇτ-连续的，故该断言得证。接下来，应用 (3.2) 可得

$$\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}\big(\tilde{\varphi}(\mathsf{c}(y)),\tilde{\varphi}(\mathsf{c}(x))\big)=\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\varphi(x),\varphi(y))\le\tilde{\mathsf{d}}(x,y)=\check{\mathsf{d}}(\mathsf{c}(x),\mathsf{c}(y))\quad\text{ for every }x,y\in\mathrm{X},$$

这意味着，由于 c 的满射性， φ̃: (ˇX, ˇd) →(Y, dY) 是短映射。总而言之，φ̃: (ˇX, ˇτ, ˇd) → (Y τY, dY) 是连续短映射。因此，泛性质得证。

最后，我们来验证 CS((X τ, d); (Y τY, dY)) ∋ φ ↦ φ̃ ∈ CS((ˇX, ˇτ, ˇd); (Y τY, dY)) 是一个双射。要证明单射性，只需注意，如果 φ1, φ2 ∈ CS((X τ, d); (Y τY, dY)) 满足 φ̃1 = φ̃2,

那么，对于每个 $x \in \mathrm{X}$，都有 $\varphi_1(x) = \tilde{\varphi}_1(\mathsf{c}(x)) = \tilde{\varphi}_2(\mathsf{c}(x)) = \varphi_2(x)$，因此 $\varphi_1 = \varphi_2$。此外，给定任意函数 $\psi \in CS((\check{\mathrm{X}}, \check{\tau}, \check{\mathsf{d}}); (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}))$，我们有 $\varphi := \psi \circ \mathsf{c} \in CS((\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d}); (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}))$ 满足 $\tilde{\varphi} = \psi$，这要归功于泛性质，因此也证明了满射性。□

如命题的证明3.5 所示，结论成立：

$$\mathsf{c}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} : \mathrm{X} \to \check{\mathrm{X}} \quad \text{is surjective.} \tag{3.3}$$

注 3.6. 命题 3.5 的证明还表明，$(\check{\mathrm{X}}, \check{\tau}, \check{\mathsf{d}})$ 具有以下性质：~ ˇ 若 d 可以由 τ 恢复，则 $\mathsf{d} = \mathsf{d}$，且对于每个 $x, y \in \mathrm{X}$，都有 $\mathsf{d}(\mathsf{c}(x), \mathsf{c}(y)) = \mathsf{d}(x, y)$。■

注 3.7. 命题 3.5 的证明还有一个附带结果：若 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$ 是一个预 e.pm.t. 空间，且 $(\mathrm{X}\ \tau)$ 紧致，则 $(\check{\mathrm{X}}, \check{\tau})$ 紧致，并且是 $(\mathrm{X}\ \tau)$ 的一个商。事实上，$\tilde{\tau}$是紧致的（作为 τ 的商），且命题 3.5 的证明表明，$\mathrm{LIP}_b(1(\check{\mathrm{X}}\ \tilde{\tau}, \check{\mathsf{d}})$ 分离 $\check{\mathrm{X}}$ 中的点，因此由注 2.3 可知 $\check{\tau} = \tilde{\tau}$，故而 $(\check{\mathrm{X}}, \check{\tau})$ 紧致。■

引理 *3.8.* 设 $(X\ \tau_{\mathrm{X}}, d_{\mathrm{X}})$ 和 $(Y\ \tau_{\mathrm{Y}}, d_{\mathrm{Y}})$ 是预扩展度量拓扑空间。设 $\varphi: (X\ \tau_{\mathrm{X}}, d_{\mathrm{X}}) \to (Y\ \tau_{\mathrm{Y}}, d_{\mathrm{Y}})$ 是连续短映射。设 $(\check{X}, \check{\tau}_{\mathrm{X}}, \check{d}_{\mathrm{X}})$, $(\check{Y}, \check{\tau}_{\mathrm{Y}}, \check{d}_{\mathrm{Y}})$, $c_{(\mathrm{X},\tau_{\mathrm{X}},d_{\mathrm{X}})}$ 和 $c_{(\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},d_{\mathrm{Y}})}$ 如命题 *3.5* 所定义。则存在唯一的连续短映射 $\check{\varphi}: (\check{X}, \check{\tau}_{\mathrm{X}}, \check{d}_{\mathrm{X}}) \to (\check{Y}, \check{\tau}_{\mathrm{Y}}, \check{d}_{\mathrm{Y}})$，使得

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathrm{Y}, \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{c}_{(\mathrm{X},\tau_{\mathrm{X}},\mathsf{d}_{\mathrm{X}})}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{c}_{(\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})}} \\ (\check{\mathrm{X}}, \check{\tau}_{\mathrm{X}}, \check{\mathsf{d}}_{\mathrm{X}}) & \xrightarrow[\check{\varphi}]{} & (\check{\mathrm{Y}}, \check{\tau}_{\mathrm{Y}}, \check{\mathsf{d}}_{\mathrm{Y}}) \end{array} \tag{3.4}$$

这是一个交换图。

证明。注意，$\mathsf{c}_{(\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})} \circ \varphi: (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\check{\mathrm{Y}}, \check{\tau}_{\mathrm{Y}}, \check{\mathsf{d}}_{\mathrm{Y}})$ 是连续短映射。因此，命题 3.5 保证 $\check{\varphi} := (\mathsf{c}_{(\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})} \circ \varphi)^{\sim} : (\check{\mathrm{X}}, \check{\tau}_{\mathrm{X}}, \check{\mathsf{d}}_{\mathrm{X}}) \to (\check{\mathrm{Y}}, \check{\tau}_{\mathrm{Y}}, \check{\mathsf{d}}_{\mathrm{Y}})$ 是唯一的连续短映射，使得 (3.4) 中的图式交换。□

定义 3.9（e.m.t. 化函子）。我们定义 e.m.t. 化函子

$$\mathsf{emt} : \mathbf{PreExt\Psi MetTop} \to \mathbf{ExtMetTop}$$

如下：对于任意对象 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d}) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{PreExt\Psi MetTop})$，我们赋予对象

$$\mathsf{emt}((\mathrm{X}, \tau, \mathsf{d})) := (\check{\mathrm{X}}, \check{\tau}, \check{\mathsf{d}}) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{ExtMetTop})$$

由命题 *3.5* 给出；对于 *PreExtΨMetTop* 中的任意态射 $\varphi: (X\ \tau_{\mathrm{X}}, d_{\mathrm{X}}) \to (Y\ \tau_{\mathrm{Y}}, d_{\mathrm{Y}})$，我们赋予态射 $emt(\varphi) := \check{\varphi}: emt((X\ \tau_{\mathrm{X}}, d_{\mathrm{X}})) \to emt((Y\ \tau_{\mathrm{Y}}, d_{\mathrm{Y}}))$，它属于 *ExtMetTop*，由引理 *3.8* 给出。

T定理 3.10。 *e.m.t.* 化函子emt 是包含函子的左伴随

$$\iota : \mathbf{ExtMetTop} \hookrightarrow \mathbf{PreExt\Psi MetTop}.$$

特别地，**ExtMetTop** 是**PreExtΨMetTop**的反射子范畴，其反射函子为emt。此外，这一赋值

$$\mathrm{Obj}(\mathbf{PreExt\Psi MetTop}) \ni (\mathrm{X}, \tau, \mathsf{d}) \mapsto \iota \circ \mathsf{c}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} : (\mathrm{X}, \tau, \mathsf{d}) \to (\iota \circ \mathsf{emt})((\mathrm{X}, \tau, \mathsf{d}))$$

由命题 *3.5* 可得从恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathbf{PreExt\Psi MetTop}}$（属于 **PreExtΨMetTop**）到函子 $\iota \circ \mathsf{emt}$的一个自然变换。

证明。 任取一个对象 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$，它属于 $\mathbf{ExtMetTop}$，并定义

$$\varepsilon_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} \coloneqq \mathrm{id}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} \colon (\mathsf{emt}\circ\iota)((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})) = (\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}) \to (\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}).$$

给定 PreExtΨMetTop 中的对象 $(\mathrm{Y}\ \tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y})$，以及 ExtMetTop 中的态射 $\varphi\colon \mathsf{emt}((\mathrm{Y}\ \tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y})) \to (\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$，由命题 3.5 陈述的最后一部分可知，存在唯一的态射 $\psi\colon (\mathrm{Y}\ \tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y}) \to \iota((\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})) = (\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$，属于 PreExtΨMetTop，使得

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{Y},\tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y}) & \xrightarrow{\mathsf{c}_{(\mathrm{Y},\tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y})}} & \mathsf{emt}((\mathrm{Y},\tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y})) \\
& {\scriptstyle\psi}\searrow \quad \downarrow{\scriptstyle \mathsf{emt}(\psi)} \quad \searrow{\scriptstyle\varphi} & \\
& (\mathsf{emt}\circ\iota)((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})) \xrightarrow[\varepsilon_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}]{} (\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}) &
\end{array}$$

这是一个交换图。这证明了 $\mathsf{emt} \dashv \iota$。此外，要证明赋值 $(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d}) \mapsto \iota\circ\mathsf{c}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}$ 是从 $\mathrm{id}_{\mathbf{PreExtΨMetTop}}$ 到 $\iota\circ\mathsf{emt}$ 的自然变换，注意到

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathrm{X},\tau_\mathrm{X},\mathsf{d}_\mathrm{X}) & \xrightarrow{\mathsf{c}_{(\mathrm{X},\tau_\mathrm{X},\mathsf{d}_\mathrm{X})}} & \mathsf{emt}((\mathrm{X},\tau_\mathrm{X},\mathsf{d}_\mathrm{X})) & \xhookrightarrow{\iota} & (\iota\circ\mathsf{emt})((\mathrm{X},\tau_\mathrm{X},\mathsf{d}_\mathrm{X})) \\
{\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{emt}(\varphi)} & & \downarrow{\scriptstyle(\iota\circ\mathsf{emt})(\varphi)} \\
(\mathrm{Y},\tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y}) & \xrightarrow[\mathsf{c}_{(\mathrm{Y},\tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y})}]{} & \mathsf{emt}((\mathrm{Y},\tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y})) & \xhookrightarrow[\iota]{} & (\iota\circ\mathsf{emt})((\mathrm{Y},\tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y}))
\end{array}$$

对于每个态射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_\mathrm{X},\ \mathsf{d}_\mathrm{X}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_\mathrm{Y},\ \mathsf{d}_\mathrm{Y})$ 属于 $\mathbf{PreExtΨMetTop}$，根据引理 3.8，这是一个交换图。因此，陈述得证。 □

3.3. **ExtMetTop 的双完备性。** 现在我们证明**PreExtΨMetTop**和 **ExtMetTop**的双完备性。第一步是证明 **PreExtΨMetTop**的双完备性。启发式地说，这归结为以下事实：在 **Top** 或 **ExtΨMet**中的每个（余）极限都与**Set**中的相应（余）极限作为集合相同，这一点从第 2.3 节显而易见。

定理 3.11. 范畴 **PreExtΨMetTop** 是双完备的。

证明。根据注记 3.1，$\mathrm{PreExtΨMetTop} = \mathrm{SP}(U,V)$，其中 $U\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ 和 $V\colon \mathrm{ExtΨMet} \to \mathrm{Set}$ 表示遗忘函子。由第 2.3 节可知，Top 和 ExtΨMet 是双完备范畴。由于第 2.3 节所述结果还表明，Top 或 ExtΨMet 中的每个积（分别为等化子）都只是 Set 中赋予拓扑或扩展伪距离的积（分别为等化子），余积和余等化子也同样如此，因此由引理 A.3 可直接推出，$\mathrm{SP}(U,V)$ 存在所有（余）积和（余）等化子。应用定理 A.2，我们遂得出 $\mathrm{PreExtΨMetTop} = \mathrm{SP}(U,V)$ 是双完备的。□

注记 3.12。 由于在第 2.3 节中，我们已经给出了**Top**和 **ExtΨMet**中所有（余）积和（余）等化子的显式描述，因此，通过应用引理A.3，可以描述**PreExtΨMetTop**中的所有（余）积和（余）等化子。不过，为简洁起见，我们不再对此进行说明。 ■

现在可以立即得到本文的主要结果：

定理 3.13。 范畴 **ExtMetTop** 是双完备的。

证明。 由于**ExtMetTop** 是**PreExtΨMetTop** 的反射子范畴，根据定理 3.10，且**PreExtΨMetTop** 是双完备范畴，根据定理 3.11，由推论 A.5 可知，**ExtMetTop** 也是双完备的。□

应用命题A.4 并考虑备注 3.12，实际上可以明确描述 **ExtMetTop**中的所有（余）积和（余）等化子，但我们不这样做。

3.4. **紧化函子**。 本节中，我们证明存在一个适用于扩展度量拓扑空间的紧化函子 $\check{}$，它类似于拓扑空间的 Stone–Čech 紧化函子。

定理 3.14（扩展度量拓扑空间的紧化）。 设 $(\mathrm{X}\ \tau、\mathsf{d})$ 是一个 *e.m.t.* 空间。则存在一个紧 *e.m.t.* 空间 $(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau,\ \gamma\mathsf{d})$ 以及一个连续且不增距映射

$$\iota = \iota_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} \colon (\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}) \to (\gamma\mathrm{X},\gamma\tau,\gamma\mathsf{d})$$

使得以下泛性质成立：给定一个紧 *e.m.t.* 空间 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 和一个连续且不增距映射 $\varphi\colon(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，存在唯一的连续且不增距映射 φ_γ：$(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau,\ \gamma\mathsf{d}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，使得

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}) & \xrightarrow{\ \iota\ } & (\gamma\mathrm{X},\gamma\tau,\gamma\mathsf{d}) \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\varphi_\gamma} \\ & & (\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}) \end{array} \tag{3.5}$$

这是一个交换图。此外，还具有以下性质：

i） ι 的像 $\iota(X)$ 在 $(\gamma X\ \gamma\tau)$ 中稠密。*ii*） $\iota\colon (X\ \tau,\ d) \to (\gamma X\ \gamma\tau,\ \gamma d)$ 是 *e.m.t.* 空间的嵌入。*iii*）映射 $CS((X\ \tau,\ d);(Y\ \tau_{\mathrm{Y}},\ d_{\mathrm{Y}})) \ni \varphi \mapsto \varphi_\gamma \in CS((\gamma X\ \gamma\tau,\ \gamma d);(Y\ \tau_{\mathrm{Y}},\ d_{\mathrm{Y}}))$ 是双射。

证明。 令 $(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau)$ 为 $(\mathrm{X}\ \tau)$ 的 Stone–Čech 紧化，嵌入为 $i\colon \mathrm{X} \hookrightarrow \beta\mathrm{X}$。任意 $f \in C_b(\mathrm{X}\ \tau)$ 都诱导一个函数 $f_\beta \in C(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau)$，因为 f的像包含于 $\mathbb{R}$的一个紧致子集中。现在我们在 $\beta\mathrm{X}$ 上定义扩展伪距离 $\beta\mathsf{d}$，如下：

$$(\beta\mathsf{d})(x,y) \coloneqq \sup_{f\in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} |f_\beta(x) - f_\beta(y)| \quad \text{for every } x,y \in \beta\mathrm{X}.$$

由于对于所有 $f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$，$f_\beta \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau,\beta\mathsf{d})$，故 $\beta\mathsf{d}$ 可以被 $\beta\tau$恢复。注意，$i\colon(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d}) \to (\beta\mathrm{X}\ \beta\tau,\beta\mathsf{d})$ 是一个连续且不增距映射，因为它是连续的，并且我们有

$$\begin{aligned} (\beta\mathsf{d})(i(x),i(y)) &= \sup_{f\in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} \big|f_\beta(i(x)) - f_\beta(i(y))\big| \\ &= \sup_{f\in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} |f(x)-f(y)| = \mathsf{d}(x,y) \quad \text{for every } x,y \in \mathrm{X}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

我们应用 将 e.m.t. 化函子应用于预 e.pm.t. 空间 $(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau,\beta\mathsf{d})$：定义 $\mathsf{c} \coloneqq \mathsf{c}^{(\beta\mathrm{X},\beta\tau,\beta\mathsf{d})}$，

$$(\gamma\mathrm{X},\gamma\tau,\gamma\mathsf{d}) \coloneqq \mathsf{emt}((\beta\mathrm{X},\beta\tau,\beta\mathsf{d})), \qquad \iota \coloneqq \mathsf{c}\circ i\colon (\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}) \to (\gamma\mathrm{X},\gamma\tau,\gamma\mathsf{d}).$$

根据注 3.7，$(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau,\gamma\mathsf{d})$ 是一个紧 e.m.t. 空间。此外，ι 是一个连续短映射（作为连续短映射的复合）。接下来，我们来检验泛性质。取一个紧 e.m.t. 空间 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 以及一个连续短映射 $\varphi\colon(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$。对于任意 $g \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，我们有 $g\circ\varphi \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$，$g\circ\varphi_\beta \in C(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau)$ 以及 $g\circ\varphi_\beta\circ i = g\circ\varphi$，因此 $g\circ\varphi_\beta = (g\circ\varphi)_\beta \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau,\beta\mathsf{d})$。由于 d_{Y} 可以被 τ_{Y} 恢复，我们推出

$$\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\varphi_\beta(x),\varphi_\beta(y)) = \sup_{g\in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})} |g(\varphi_\beta(x)) - g(\varphi_\beta(y))| \le (\beta\mathsf{d})(x,y) \quad \text{for every } x,y \in \beta\mathrm{X},$$

使得 $\varphi_\beta\colon(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau,\beta\mathsf{d}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是一个连续短映射。因此，根据命题 3.5 我们知道，存在唯一的连续短映射 $\varphi_\gamma\colon(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau,\gamma\mathsf{d}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，使得

$$\begin{array}{ccccc} (\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}) & \xhookrightarrow{\ i\ } & (\beta\mathrm{X},\beta\tau,\beta\mathsf{d}) & \xrightarrow{\ \mathsf{c}\ } & (\gamma\mathrm{X},\gamma\tau,\gamma\mathsf{d}) \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\varphi_\beta} & \swarrow{\scriptstyle\varphi_\gamma} & \\ & & (\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}) & & \end{array}$$

这是一个交换图。利用 (3.1) 中的映射是双射这一事实，我们推知 φ_γ 是使 (3.5) 成为交换图的唯一连续短映射，从而证明了泛性质。为完成证明，我们来验证 i)、ii) 和 iii) 成立。由于 $i(\mathrm{X})$ 在 $(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau)$ 中稠密，且 $\mathsf{c}\colon(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau)\to(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau)$ 是连续满射，我们推知 $\iota(\mathrm{X})=\mathsf{c}(i(\mathrm{X}))$ 在 $(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau)$ 中稠密，从而证明了 i)。此外，我们已经注意到 $\beta\mathsf{d}$ 可以被 $\beta\tau$ 恢复，因此应用注 3.6 和 (3.6)，可推知 ι 是保距映射，因而特别是单射。由于 ι 也是连续的，要证明 $\iota\colon\mathrm{X}\to\iota(\mathrm{X})$ 是同胚，只需验证它是开映射。我们知道 $\{\mathrm{Coz}(f)\colon f\in\mathrm{LIP}_b(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})\}$ 是拓扑 τ 的一个基，其中函数 f 的余零集定义为 $\mathrm{Coz}(f):=\{f\neq 0\}$。由于 $\iota(\mathrm{Coz}(f))=\mathrm{Coz}(f_\gamma)\cap\iota(\mathrm{X})$ 且 $f_\gamma\in C(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau)$，我们得出 $\iota(\mathrm{Coz}(f))$ 在 $\iota(\mathrm{X})$ 中是开的，由此可知 $\iota\colon\mathrm{X}\to\iota(\mathrm{X})$ 是开映射，从而证明了 ii)。最后，显然映射 $\varphi\mapsto\varphi_\gamma$ 是单射（因为 $\varphi_\gamma=\psi_\gamma$ 显然推出 $\varphi=\varphi_\gamma\circ\iota=\psi_\gamma\circ\iota=\psi$）且满射（由 ii) 得出），因此 iii) 也得证。□

引理 *3.15.* 设 $(\mathrm{X}\ \tau_\mathrm{X},\mathsf{d}_\mathrm{X})$、$(\mathrm{Y}\ \tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y})$ 为扩展度量拓扑空间。设 $\varphi\colon(\mathrm{X}\ \tau_\mathrm{X},\mathsf{d}_\mathrm{X})\to(\mathrm{Y}\ \tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y})$ 为连续且不增距映射。根据定理 *3.14*，给定 $(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau_\mathrm{X},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{X})$、$(\gamma\mathrm{Y}\ \gamma\tau_\mathrm{Y},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{Y})$、$\iota_\mathrm{X}\colon\mathrm{X}\to\gamma\mathrm{X}$ 和 $\iota_\mathrm{Y}\colon\mathrm{Y}\to\gamma\mathrm{Y}$。则存在唯一的连续且不增距映射

$$\gamma\varphi\colon(\gamma\mathrm{X},\gamma\tau_\mathrm{X},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{X})\to(\gamma\mathrm{Y},\gamma\tau_\mathrm{Y},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{Y})$$

使得下图式交换：

$$\begin{array}{ccc}(\mathrm{X},\tau_\mathrm{X},\mathsf{d}_\mathrm{X}) & \xrightarrow{\iota_\mathrm{X}} & (\gamma\mathrm{X},\gamma\tau_\mathrm{X},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{X})\\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma\varphi}\\ (\mathrm{Y},\tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y}) & \xrightarrow[\iota_\mathrm{Y}]{} & (\gamma\mathrm{Y},\gamma\tau_\mathrm{Y},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{Y})\end{array}\tag{3.7}$$

证明. 注意，$\iota_\mathrm{Y}\circ\varphi\colon(\mathrm{X}\ \tau_\mathrm{X},\mathsf{d}_\mathrm{X})\to(\gamma\mathrm{Y}\ \gamma\tau_\mathrm{Y},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{Y})$ 是一个连续且不增距映射。因此，定理 3.14 保证 $\gamma\varphi:=(\iota_\mathrm{Y}\circ\varphi)\gamma\colon(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau_\mathrm{X},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{X})\to(\gamma\mathrm{Y}\ \gamma\tau_\mathrm{Y},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{Y})$ 是唯一的连续且不增距映射，使得 (3.7) 中的图式交换。□

定义 3.16（紧化函子）。 我们定义紧化函子

$$\gamma\colon\mathbf{ExtMetTop}\to\mathbf{CptExtMetTop}$$

如下：对于任意对象 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})\in\mathrm{Obj}(\mathbf{ExtMetTop})$，我们赋予由定理 *3.14* 给出的对象

$$\gamma((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})):=(\gamma\mathrm{X},\gamma\tau,\gamma\mathsf{d})\in\mathrm{Obj}(\mathbf{CptExtMetTop})$$

；对于 *ExtMetTop* 中的任意态射 $\varphi\colon(\mathrm{X}\ \tau_\mathrm{X},\mathsf{d}_\mathrm{X})\to(\mathrm{Y}\ \tau_\mathrm{Y},\mathsf{d}_\mathrm{Y})$，我们赋予由引理 *3.15* 给出的 *CptExtMetTop* 中的态射 $\gamma(\varphi):=\gamma\varphi\colon(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau_\mathrm{X},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{X})\to(\gamma\mathrm{Y}\ \gamma\tau_\mathrm{Y},\gamma\mathsf{d}_\mathrm{Y})$。

定理 3.17。 紧化函子 γ 是包含函子的左伴随

$$\iota\colon\mathbf{CptExtMetTop}\hookrightarrow\mathbf{ExtMetTop}.$$

特别地，**CptExtMetTop** 是**ExtMetTop**的反射子范畴，其反射函子为 γ。此外，该赋值

$$\mathrm{Obj}(\mathbf{ExtMetTop})\ni(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\mapsto\iota\circ\iota_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}\colon(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\to(\iota\circ\gamma)((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}))$$

给出了从恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathbf{ExtMetTop}}$ 到函子 $\iota\circ\gamma$的一个自然变换。

证明。 论证思路与定理 3.10类似。为证明 $\gamma\dashv\iota$，使用定理 3.14 iii)。$((\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})\mapsto\iota\circ\iota_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}$ 是一个自然变换这一事实可由引理 3.15推出。□

Defi定义 3.18 （“广义”紧化函子）。 我们将函子 $\bar{\gamma}$ 定义如下：

$$\bar{\gamma} := \gamma \circ \mathsf{emt} \colon \mathbf{PreExt\Psi MetTop} \to \mathbf{CptExtMetTop}.$$

此外，给定任意预 *e.pm.t.* 空间 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$，我们将连续短映射 $\bar{\iota}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}$ 定义为

$$\bar{\iota}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} := \iota_{\mathsf{emt}((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}))} \circ \mathsf{c}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} \colon (\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}) \to \bar{\gamma}((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})).$$

由命题 3.5 和定理3.14 可知，以下泛性质成立：给定一个紧 e.m.t. 空间 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 以及一个连续短映射 $\varphi \colon (\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，存在唯一的连续短映射 $\varphi_{\bar{\gamma}} \colon \bar{\gamma}((\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，使得

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}) & \xrightarrow{\bar{\iota}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}} & \bar{\gamma}((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})) \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\bar{\gamma}}} \\ & & (\mathrm{Y},\tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}) \end{array}$$

这是一个交换图。

我们指出，定理 3.14 的证明表明，拓扑空间 $(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau)$ 是 Stone–ˇCech 紧化 $(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau)$ 的一个商。更准确地说，我们有 $\gamma\mathrm{X} = \beta\mathrm{X}/\sim$，其中等价关系 $\sim$ 如下定义：任取 $x, y \in \beta\mathrm{X}$，我们规定

$$x \sim y \iff (\beta f)(x) = (\beta f)(y) \text{ for every } f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}). \tag{3.8}$$

因此，一个自然的问题随之产生：$(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau)$ 与 $(\beta\mathrm{X}\ \beta\tau)$ 是否同胚？下一个例子表明，答案（一般而言）是否定的。

例 3.19 （其中 $\beta\mathrm{X}$ 与 $\gamma\mathrm{X}$ 不同胚）。 考虑 e.m.t. 空间 $(\mathbb{N},\tau,\mathsf{d})$，其中 τ 是 $\mathbb{N}$ 上的离散拓扑，并且对每个 $n, m \in \mathbb{N}$，$\mathsf{d}(n,m) := \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$。注意，$(\mathbb{N},\mathsf{d})$ 实际上是一个度量空间，而 τ 是由 d 诱导的拓扑。我们断言

$$(\beta f)(\omega) = (\beta f)(\eta) \quad \text{for every } \omega, \eta \in \beta\mathbb{N} \setminus i(\mathbb{N}) \text{ and } f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathbb{N},\tau,\mathsf{d}). \tag{3.9}$$

为证明这一点，我们将 $\beta\mathbb{N}$ 表示为 $\mathbb{N}$ 上的超滤子空间，并回顾 $(\beta f)(\omega) = \omega\text{-}\lim_n f(n)$。由于 $(n)_n$ 是 d-柯西序列，因此当 $f \in \mathrm{LIP}_b(\mathbb{N},\tau,\mathsf{d})$ 时，$(f(n))_n \subseteq \mathbb{R}$ 是柯西序列，从而 $\lim_n f(n) \in \mathbb{R}$ 存在，因此对于 $\mathbb{N}$ 上的每个非主超滤子 ω，都有 $\omega\text{-}\lim_n f(n) = \lim_n f(n)$。这证明了断言 (3.9) 的有效性。结合 (3.8)，不难验证 $(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau)$（同胚于）$(\mathbb{N},\tau)$ 的一点紧化，因此特别地，$\gamma\mathbb{N}$ 由可数多个点组成。另一方面，众所周知，$\beta\mathbb{N}$ 是不可数的，因此 $(\gamma\mathbb{N},\gamma\tau)$ 与 $(\beta\mathbb{N},\beta\tau)$ 不可能同胚。■

ˆˆ 接下来，我们回顾 Savar´e 在 [25, 第 2.1 节7]中引入的 e.m.t. 空间 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$ 的盖尔范德紧化 $(\mathrm{X}, \hat{\tau}, \mathsf{d})$ 的定义。此外，我们证明（参见命题 3.20），$(\mathrm{X}, \hat{\tau}, \mathsf{d})$ 满足命题 3.5 中所述的泛性质，因此 $(\mathrm{X}, \hat{\tau}, \mathsf{d})$ 与 $(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau, \gamma\mathsf{d})$ 在相差一个唯一同构的意义下重合。我们提醒以下定义：

- $\hat{\mathrm{X}}$ 是空间 $\mathrm{LIP}_b(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$ 中所有特征 的集合，该空间由有界实值 τ-连续 d-Lipschitz 函数组成；也就是说，它是赋范空间 $(\mathrm{LIP}_b(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d}) \| \cdot \|_{C_b(\mathrm{X}\ \tau)})$ 的对偶空间中所有非零元素 θ 的集合，这些元素满足 $\theta(fg) = \theta(f)\theta(g)$，对每个 $f, g \in \mathrm{LIP}_b(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$ 均成立。ˆ
- X 上的拓扑 $\hat{\tau}$ 定义为弱* 拓扑的限制。ˆˆ
- X 上的扩展距离 d 定义为
$$\hat{\mathsf{d}}(\theta,\sigma) := \sup\left\{|\theta(f) - \sigma(f)| \;\middle|\; f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\right\} \quad \text{for every } \theta, \sigma \in \hat{\mathrm{X}}.$$
- 嵌入映射 $\hat{\imath} \colon \mathrm{X} \hookrightarrow \hat{\mathrm{X}}$ 定义为
$$\hat{\imath}(x)(f) := f(x) \quad \text{for every } x \in \mathrm{X} \text{ and } f \in \mathrm{LIP}_b(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}).$$

正如 [25, 定理2.134], 所证明的，三元组 $(\mathrm{X}, \hat{\tau}, \mathsf{d})$ 是一个紧 e.m.t. 空间，$\iota\colon \mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{X}\hat{}$ 是 e.m.t. 空间的嵌入，且其像 $\iota(\mathrm{X})$ 是弱* 稠密于 $\mathrm{X}\hat{}$。

命题 3.20 （与 [25, 定理2.134] 相容）。 设$(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 是一个 *e.m.t.* 空间。那么存在唯一的 *e.m.t.* 空间同构 $\Phi\colon (\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau, \gamma\mathsf{d}) \to (\hat{\mathrm{X}}, \hat{\tau}, \hat{\mathsf{d}})$ 使得

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \xhookrightarrow{\ \iota\ } & \gamma\mathrm{X} \\ & {\scriptstyle\hat{\iota}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ & & \hat{\mathrm{X}} \end{array}$$

是一个交换图式。

证明。 只需验证 $((\mathrm{X}, \hat{\tau}, \mathsf{d}), \hat{\iota})$ 满足定理 3.5中所述的泛性质。取一个紧 e.m.t. 空间 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 以及一个连续短映射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$。注意，对于每个 $g \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，都有 $g \circ \varphi \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$。我们断言存在唯一的映射 $\hat{\varphi}\colon \mathrm{X}\hat{} \to \mathrm{Y}$，使得

$$g(\hat{\varphi}(\hat{x})) = \hat{x}(g \circ \varphi) \quad \text{for every } g \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}, \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}). \tag{3.10}$$

由于 $\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 分离 Y 中的点，显然，若这样的映射 $\hat{\varphi}$ 存在，则它是唯一的。为证明其存在，固定 $\hat{x} \in \mathrm{X}\hat{}$，并取一个网 $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathrm{X}$，使得 $\hat{\iota}(x_i)$ 弱收敛于 $\hat{x}$。由于 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 紧致且豪斯多夫，经过选取一个不重新标记的子网后，我们还可以假设 $\lim_{i\in I} \varphi(x_i) = y_{\hat{x}}$，其中某个 $y_{\hat{x}} \in \mathrm{Y}$，而极限是相对于拓扑 τ_{Y}而言的。因此，我们可以计算

$$\hat{x}(g \circ \varphi) = \lim_{i\in I} \hat{\iota}(x_i)(g \circ \varphi) = \lim_{i\in I} g(\varphi(x_i)) = g(y_{\hat{x}}),$$

因此，令 $\hat{\varphi}(\hat{x}) := y_{\hat{x}}$ 对每个 $\hat{x} \in \mathrm{X}\hat{}$，我们得到所需的映射 $\hat{\varphi}$，它满足 (3.10)。接下来，我们来验证 $\hat{\varphi}\colon (\mathrm{X}\hat{}, \hat{\tau}, \hat{\mathsf{d}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是一个连续短映射。为证明其连续性，固定一个弱收敛网 $x_i \overset{*}{\rightharpoonup} x$，它位于 $\mathrm{X}\hat{}$ 中。于是有

$$(g \circ \hat{\varphi})(\hat{x}) = \hat{x}(g \circ \varphi) = \lim_{i\in I} \hat{x}_i(g \circ \varphi) = \lim_{i\in I} (g \circ \hat{\varphi})(\hat{x}_i) \quad \text{for every } g \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}, \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}).$$

由于 τ_{Y} 是 $\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 的初始拓扑，我们推得 $\hat{\varphi}(\hat{x}) = \lim_{i\in I} \hat{\varphi}(\hat{x}_i)$ 在 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 中，因此证明了 $\hat{\varphi}\colon (\mathrm{X}\hat{}, \hat{\tau}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 的连续性。此外，对于任意 $\hat{x}, \hat{y} \in \mathrm{X}\hat{}$，我们有

$$\begin{aligned} \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(\hat{\varphi}(\hat{x}), \hat{\varphi}(\hat{y})) &= \sup_{g \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}, \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})} \big| g(\hat{\varphi}(\hat{x})) - g(\hat{\varphi}(\hat{y})) \big| = \sup_{g \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}, \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})} \big| \hat{x}(g \circ \varphi) - \hat{y}(g \circ \varphi) \big| \\ &\leq \sup_{f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}, \tau, \mathsf{d})} |\hat{x}(f) - \hat{y}(f)| = \hat{\mathsf{d}}(\hat{x}, \hat{y}), \end{aligned}$$

这表明 $\hat{\varphi}\colon (\mathrm{X}\hat{}, \hat{\mathsf{d}}) \to (\mathrm{Y}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是一个短映射。最后，我们断言 $\hat{\varphi}\colon \mathrm{X}\hat{} \to \mathrm{Y}$ 是唯一满足 $\hat{\varphi} \circ \hat{\iota} = \varphi$ 的连续且不增距映射。对于任意 $x \in \mathrm{X}$，我们有

$$g((\hat{\varphi} \circ \hat{\iota})(x)) = \hat{\iota}(x)(g \circ \varphi) = g(\varphi(x)) \quad \text{for every } g \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}, \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}),$$

因此 $(\hat{\varphi} \circ \hat{\iota})(x) = \varphi(x)$，这是因为 $\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 分离 Y 中的点。这表明 $\hat{\varphi} \circ \hat{\iota} = \varphi$。给定任意连续且不增距映射 $\psi\colon (\mathrm{X}\hat{}, \hat{\tau}, \hat{\mathsf{d}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，使得$\psi \circ \hat{\iota} = \varphi$，我们有 ψ 与 $\hat{\varphi}$ 在 $\hat{\iota}(\mathrm{X})$ 上相等。由于 ψ、$\hat{\varphi}$ 连续，且 $\hat{\iota}(\mathrm{X})$ 在 $(\mathrm{X}\hat{}, \hat{\tau})$ 中稠密，我们推得 $\psi = \hat{\varphi}$，从而证明了 $\hat{\varphi}$ 的唯一性。综上，命题得证。 □

3.5. Tych 和 ExtMet 是 ExtMetTop 的余反射子范畴。 本节中，我们将展示**ExtMetTop**包含两个范畴：由吉洪诺夫空间构成的范畴**Tych**，以及由广义度量空间构成的范畴**ExtMet**；它们分别对应“纯拓扑的”和“纯度量的”e.m.t. 空间，其含义将在下文中明确说明。

Tych 是**ExtMetTop**的余反射子范畴。为使表述清晰，采用以下统一记号较为方便：给定任意 $\lambda \in (0, \infty]$，我们记

$$\mathbf{ExtMetTop}_{\leq\lambda} \coloneqq \begin{cases} \mathbf{MetTop}_{\leq\lambda} & \text{if } \lambda < \infty, \\ \mathbf{ExtMetTop} & \text{if } \lambda = \infty. \end{cases}$$

对于任意集合 X，我们将 X 上的 λ离散距离 $\mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\lambda\text{-discr}}$ 定义为

$$\mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\lambda\text{-discr}}(x,y) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{for every } (x,y) \in \mathrm{X}\times\mathrm{X} \text{ such that } x = y, \\ \lambda & \text{for every } (x,y) \in \mathrm{X}\times\mathrm{X} \text{ such that } x \neq y. \end{cases}$$

容易验证，对于每个吉洪诺夫空间 $(\mathrm{X}\ \tau)$，$(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\lambda\text{-discr}})$ 都是 e.m.t. 空间。此外，若 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 是吉洪诺夫空间之间的连续映射，则有 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\lambda\text{-discr}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}^{\mathrm{Y}}_{\lambda\text{-discr}})$ 是连续且不增距的映射。鉴于这些观察，定义 λ离散化函子 $\mathfrak{D}_\lambda\colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{ExtMetTop}_{\leq\lambda}$ 是合理的，即

$$\mathfrak{D}_\lambda((\mathrm{X},\tau)) \coloneqq (\mathrm{X}, \tau, \mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\lambda\text{-discr}}) \quad \text{for every object } (\mathrm{X},\tau) \text{ in } \mathbf{Tych},$$

$\mathfrak{D}_\lambda(\varphi) \coloneqq \varphi\colon \mathfrak{D}_\lambda((\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}})) \to \mathfrak{D}_\lambda((\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}))$ 对于 **Tych**. 中的每个态射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$。

定理 3.21。设 $\lambda \in (0,\infty]$ 给定。则函子 $\mathfrak{D}_\lambda\colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{ExtMetTop}_{\leq\lambda}$ 是全忠实且对象上单射的。此外，$\mathfrak{D}_\lambda$ 是遗忘函子的左伴随

$$U_\lambda\colon \mathbf{ExtMetTop}_{\leq\lambda} \to \mathbf{Tych}.$$

特别地，$\mathfrak{D}_\lambda$ 将**Tych** 呈现为**ExtMetTop**$_{\leq\lambda}$的一个余反射子范畴。

证明。显然，$\mathfrak{D}_\lambda$ 在对象上单射。由以下观察可立即得出，$\mathfrak{D}_\lambda$ 是全忠实的：Tychonoff空间之间的任意连续映射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 都给出一个连续且不增距映射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}, \mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\lambda\text{-discr}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}^{\mathrm{Y}}_{\lambda\text{-discr}})$。现在来验证 $\mathfrak{D}_\lambda \dashv U_\lambda$。为此，固定 $(\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d}) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{ExtMetTop}_{\leq\lambda})$。注意，恒等映射 $\mathrm{id}_{\mathrm{X}}\colon (\mathrm{X}, \mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\lambda\text{-discr}}) \to (\mathrm{X}, \mathsf{d})$ 是一个短映射，因此 $\varepsilon_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} \coloneqq \mathrm{id}_{\mathrm{X}}\colon (\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\lambda\text{-discr}}) \to (\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})$ 是 $\mathbf{ExtMetTop}_{\leq\lambda}$中的一个态射。接下来，固定一个对象 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Tych})$ 以及一个态射 $\varphi\colon \mathfrak{D}_\lambda((\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})) = (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}, \mathsf{d}^{\mathrm{Y}}_{\lambda\text{-discr}}) \to (\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d}) \in \mathbf{ExtMetTop}_{\leq\lambda}$。显然，满足 $\varepsilon_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} \circ \psi = \varphi$ 的唯一映射 $\psi\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ 由$\psi_\varphi \coloneqq \varphi$给出。由于 $\psi_\varphi\colon (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}) \to U_\lambda((\mathrm{X}\ \tau, \mathsf{d})) = (\mathrm{X}\ \tau)$ 是连续的，且 $\mathfrak{D}_\lambda(\psi_\varphi) = \psi_\varphi$，因此 $\psi_\varphi\colon (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}) \to (\mathrm{X}\ \tau)$ 是 Tych 中满足 $\varepsilon_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})} \circ \mathfrak{D}_\lambda(\psi_\varphi) = \varphi$ 的唯一态射。□

注记 3.22。给定任意 λ，$\sigma \in (0, \infty]$ 满足 $\lambda \leq \sigma$，我们得到一个函子

$$\mathfrak{D}_{\lambda,\sigma}\colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{ExtMetTop}_{\leq\sigma},$$

将 $\mathfrak{D}_\lambda\colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{ExtMetTop}_{\leq\lambda}$ 与包含映射 $\mathbf{ExtMetTop}_{\leq\lambda} \hookrightarrow \mathbf{ExtMetTop}_{\leq\sigma}$复合。注意，$\mathfrak{D}_{\lambda,\,\lambda} = \mathfrak{D}_\lambda$。容易验证，$\mathfrak{D}_{\lambda,\,\sigma}$ 是全忠实的，且在对象上单射；但是，$\mathfrak{D}_{\lambda,\,\sigma}$ 是遗忘函子 $\mathbf{ExtMetTop}_{\leq\sigma} \to \mathbf{Tych}$ 的左伴随，当且仅当 $\lambda = \sigma$。特别地，要将 **Tych** 展示为 **ExtMetTop** 的余反射子范畴，就必须考虑 ∞-离散化函子 $\mathfrak{D}_\infty$。■

ExtMet 是 ExtMetTop 的余反射子范畴。给定一个扩展度量空间 (X, d)，我们将 τ_{d} 记作由 d 在 X 上诱导的拓扑。根据备注 2.4，注意到 $(\mathrm{X}\ \tau_{\mathsf{d}}, \mathsf{d})$ 是一个 e.m.t. 空间。此外，如果 $\varphi\colon (\mathrm{X}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是扩展度量空间之间的短映射，那么显然，$\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathsf{d}_{\mathrm{X}}}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是一个连续且不增距映射。因此，将函子 $\mathrm{T}\colon \mathbf{ExtMet} \to \mathbf{ExtMetTop}$ 定义为下式是有意义的：

$$\mathrm{T}((\mathrm{X},\mathsf{d})) \coloneqq (\mathrm{X}, \tau_{\mathsf{d}}, \mathsf{d}) \quad \text{for every object } (\mathrm{X},\mathsf{d}) \text{ in } \mathbf{ExtMet},$$

$\mathrm{T}(\varphi) \coloneqq \varphi\colon \mathrm{T}((\mathrm{X}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}})) \to \mathrm{T}((\mathrm{Y}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}}))$ 对于 **ExtMet**中的每个态射 $\varphi\colon (\mathrm{X}, \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}, \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$。

通过采用与定理 3.21相似的论证，并利用如下事实：对于任意 e.m.t. 空间 $(X\ \tau,\ d)$，其拓扑 τ 比 τ_d 更粗糙，我们可以很容易地得到以下结果：

定理 3.23。 函子 $T\colon \mathbf{ExtMet} \to \mathbf{ExtMetTop}$ 是全忠实的，且在对象上单射。此外，T 是遗忘函子 $\mathbf{ExtMetTop} \to \mathbf{ExtMet}$的左伴随。特别地，T将$\mathbf{ExtMet}$呈现为$\mathbf{ExtMetTop}$的一个余反射子范畴。

备注 3.24。 下面给出一个更一般的陈述。固定$\mathbf{ExtMet}$的一个满子范畴$\mathbf{C}$。我们用$\mathbf{C}^{+\mathrm{top}}$ 表示 $\mathbf{ExtMetTop}$ 的满子范畴，其对象为满足 $(X\ \tau, d)$ 属于 $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ 的扩展度量拓扑空间 (X, d)。于是，$T\colon \mathbf{ExtMet} \to \mathbf{ExtMetTop}$ 限制为函子 $T_{\mathbf{C}}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{+\mathrm{top}}$，该函子是全忠实的、在对象上单射，且为遗忘函子 $\mathbf{C}_{+\mathrm{top}} \to \mathbf{C}$的左伴随。特别地，$T_{\mathbf{C}}$ 将$\mathbf{C}$ 呈现为$\mathbf{C}^{+\mathrm{top}}$的一个余反射子范畴。■

3.6. **截断、度量完备化与测地化函子**。 本节讨论在处理几何分析中的扩展度量拓扑空间问题时特别有用的函子。

λ-截断函子。 令 $\lambda \in (0,\ \infty)$ 为一个固定的实数。给定一个 e.m.t. 空间 $(X\ \tau,\ d)$，直接可验证 $(X\ \tau,\ d\wedge\lambda)$ 是一个 e.m.t. 空间。此外，若 $\varphi\colon (X\ \tau_X,\ d_X) \to (Y\ \tau_Y,\ d_Y)$ 是 e.m.t. 空间之间的连续短映射，则显然 $\varphi\colon (X,\ d_X \wedge \lambda) \to (Y,\ d_Y \wedge \lambda)$ 是一个短映射，因此 $\varphi\colon (X\ \tau_X,\ d_X \wedge \lambda) \to (Y\ \tau_Y,\ d_Y \wedge \lambda)$ 是连续且不增距的。相应地，定义 λ-截断函子 $\mathfrak{T}_\lambda\colon \mathbf{ExtMetTop} \to \mathbf{MetTop}^{\leq\lambda}$ 是有意义的，其定义如下：

$$\mathfrak{T}_\lambda((X\ \tau,\ d)) := (X\ \tau,\ d\ \wedge\lambda) \text{ 对于 } \mathbf{ExtMetTop} \text{ 中的每个对象 } (X\ \tau,\ d)$$

$$\mathfrak{T}_\lambda(\varphi) := \varphi \quad \text{for every morphism } \varphi\colon (X,\tau_X,d_X) \to (Y,\tau_Y,d_Y) \text{ in } \mathbf{ExtMetTop}.$$

注意，令 $\mathfrak{D}_\lambda$ 如第 3.5 节所述，则有

$$\mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{T}_\lambda \circ \mathfrak{D}_\infty \quad \text{for every } \lambda \in (0,\infty).$$

此外，我们还有以下结果（证明从略）：

定理 3.25。设给定 $\lambda \in (0,\infty)$。那么函子 $\mathfrak{T}_\lambda\colon \mathbf{ExtMetTop} \to \mathbf{MetTop}^{\leq\lambda}$ 是包含函子 $\mathbf{MetTop}^{\leq\lambda} \hookrightarrow \mathbf{ExtMetTop}$ 的左伴随。特别地，$\mathbf{MetTop}^{\leq\lambda}$ 是 $\mathbf{ExtMetTop}$ 的反射子范畴，其反射函子为 $\mathfrak{T}_\lambda$。

度量完备化函子。以下定义摘自 [25, 推论 2.1。36]:

定义 3.26 （e.m.t. 空间的度量完备化）。设$(X\ \tau,d)$ 为一个 *e.m.t.* 空间。则定义其度量完备化 $(X\ \bar{\tau},\ d)$ 如下：X 是d下 $\iota_{(X,\tau,d)}(X)$ 在 γX中的闭包，且赋予它拓扑 $\bar{\tau} := (\gamma\tau)\llcorner X$ 以及扩展距离 $d := (\gamma d)|_{\bar{X}\times\bar{X}}$。

注意到 $(X\ \bar{\tau},\ d)$ 是度量完备的 e.m.t. 空间。此外，若 $(X\ \tau_X,\ d_X)$、$(Y\ \tau_Y,\ d_Y)$ 是扩展度量拓扑空间，且 $\varphi\colon (X\ \tau_X,\ d_X) \to (Y\ \tau_Y,\ d_Y)$ 是连续短映射，则 $\bar{\varphi}|_{\bar{X}}\colon X \to Y$ 是满足下述条件的唯一连续短映射

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau_X,d_X) & \xrightarrow{\iota_{(X,\tau_X,d_X)}} & (\bar{X},\bar{\tau}_X,\bar{d}_X) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\varphi}} \\ (Y,\tau_Y,d_Y) & \xrightarrow[\iota_{(Y,\tau_Y,d_Y)}]{} & (\bar{Y},\bar{\tau}_Y,\bar{d}_Y) \end{array} \tag{3.11}$$

是一个交换图。事实上，包含映射 $(\gamma\varphi)(X) \subseteq Y$ 可由以下事实推出：若选择 $x \in \bar{X}$ 和 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$，使得 $d_X(\iota_{(X,\tau_X,d_X)}(x_n)\ x) \to 0$ 如 $n \to \infty$，则有

$$\bar{d}_Y(\iota_{(Y,\tau_Y,d_Y)}(\varphi(x_n)),(\gamma\varphi)(x)) \leq \bar{d}_X(\iota_{(X,\tau_X,d_X)}(x_n),x) \to 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

由此可知，$\bar{\varphi}$ 是使（3.11）中的图式交换的唯一连续短映射。

Defi定义 3.27（度量完备化函子）。我们定义度量完备化函 or

$$\mathsf{mc}\colon \mathbf{ExtMetTop} \to \mathbf{ExtMetTop}_{\mathrm{mc}}$$

如下：对于任意对象$(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d}) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{ExtMetTop})$，我们赋予对象

$$\mathsf{mc}((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})) \coloneqq (\bar{\mathrm{X}},\bar{\tau},\bar{\mathsf{d}}) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{ExtMetTop}_{\mathrm{mc}}),$$

and 对于任意态射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，在 **ExtMetTop** 中，我们赋予态射

$$\mathsf{mc}(\varphi) \coloneqq \bar{\varphi}\colon (\bar{\mathrm{X}},\bar{\tau}_{\mathrm{X}},\bar{\mathsf{d}}_{\mathrm{X}}) \to (\bar{\mathrm{Y}},\bar{\tau}_{\mathrm{Y}},\bar{\mathsf{d}}_{\mathrm{Y}}) \quad in\ \mathbf{ExtMetTop}_{\mathrm{mc}}.$$

以下命题的证明（很简单）从略：

定理 3.28。 度量完备化函子 mc: **ExtMetTop** $\to$ **ExtMetTop**$_{\mathrm{mc}}$ 是包含函子**ExtMetTop**$_{\mathrm{mc}} \hookrightarrow$ **ExtMetTop**的左伴随。特别地，我们有**ExtMetTop**$_{\mathrm{mc}}$ 是**ExtMetTop**的反射子范畴，其反射函子为mc。

注 3.29。我们来强调一下扩展度量空间范畴中的完备化函子（它将扩展度量空间 (X, d) 映射到其完备化 $\bar{\ }$ $\bar{\ }$(X, d)，如命题 2.5 所述）与 ExtMetTop 中的度量完备化函子 mc 之间一个显著的差异。任意给定的扩展度量空间 (X, d) 都（在典范同构意义下）是 $\{(\mathrm{Z},\mathsf{d}|_{\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}}) : \mathrm{Z} \in \mathscr{F}_{\mathsf{d}}\}$ $\bar{\ }$ $\bar{\ }$ $\bar{\ }$ $\bar{\ }$在 ExtMet 中的余积，因此，其度量完备化 (X, d) 是 $\{(\mathrm{Z},\mathsf{d}|_{\bar{\mathrm{Z}}\times\bar{\mathrm{Z}}}) : \mathrm{Z} \in \mathscr{F}_{\mathsf{d}}\}$ 在 ExtMet 中的余积，这与左伴随函子（例如完备化函子）保持余极限（例如余积）的一般原理一致。相比之下，e.m.t. 空间 (X τ, d) 并不总是$\bar{\ }$ $\bar{\ }$ $\{(\mathrm{Z}\ \tau\llcorner\mathrm{Z},\mathsf{d}|_{\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}}) : \mathrm{Z} \in \mathscr{F}_{\mathsf{d}}\}$ 在 ExtMetTop 中的余积；度量完备化 (X $\bar{\tau}$, d)$\bar{\ }$ $\bar{\ }$ $\bar{\ }$也并不总是 $\{(\mathrm{Z}\ \bar{\tau}\llcorner\mathrm{Z},\mathsf{d}|_{\bar{\mathrm{Z}}\times\bar{\mathrm{Z}}}) : \mathrm{Z} \in \mathscr{F}_{\mathsf{d}}\}$ 在 ExtMetTop$_{\mathrm{mc}}$中的余积，简单的例子即可说明这一点（例如，给一个拓扑非离散的 Tychonoff 空间赋予 ∞-离散距离）。粗略地说，这意味着一般而言，e.m.t. 空间的度量完备化只能将该 e.m.t. 空间“作为整体”来求得；换言之，度量完备化不能从各分量 $\mathrm{Z} \in \mathscr{F}_{\mathsf{d}}$的度量完备化出发构造，这与扩展度量空间的完备化情形不同。■

测地化函子。 最后，我们引入测地化函子，它使我们能够将紧致扩展度量拓扑空间的许多问题约化到紧致测地线扩展度量拓扑空间的情形。

定义 3.30（测地化函子）。 我们定义 测地化函子

$$\mathsf{geo}\colon \mathbf{CptExtMetTop} \to \mathbf{CptExtMetTop}_{\mathrm{geo}}$$

如下：对于任意对象 $(\mathrm{X}\ \tau、\ \mathsf{d}) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{CptExtMetTop})$，赋予对象

$$\mathsf{geo}((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})) \coloneqq (\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}_\ell) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{CptExtMetTop}_{\mathrm{geo}}), \tag{3.12}$$

并且对于 **CptExtMetTop** 中的任意态射 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}、\ \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}、\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$，赋予态射$\mathsf{geo}(\varphi) \coloneqq \varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}}、(\mathsf{d}_{\mathrm{X}})_\ell) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}}、(\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})_\ell)$，属于 **CptExtMetTop**^{geo}。

注意，由于（2.5），（3.12）定义良好。此外，如果 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是 CptExtMetTop 中的一个态射，那么显然 $\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ (\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})_\ell)$ 是一个连续短映射（因为 $\mathsf{d}_{\mathrm{Y}} \le (\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})_\ell$），相应地，根据备注 2.6，$\varphi\colon (\mathrm{X}\ \tau_{\mathrm{X}},\ (\mathsf{d}_{\mathrm{X}})_\ell) \to (\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ (\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})_\ell)$ 也是一个连续短映射。总而言之，我们已经证明函子 geo 是定义良好的。

我们省略以下结论的（简单）证明：

定理 3.31。 测地化函子 geo： **CptExtMetTop** $\to$ **CptExtMetTop**^{geo} 是包含函子 **CptExtMetTop**$^{\mathrm{geo}} \hookrightarrow$**CptExtMetTop**的左伴随。特别地，**CptExtMetTop**^{geo} 是 **CptExtMetTop**的反射子范畴，其反射函子为geo。

在上述讨论中，鉴于（2.5），我们只考虑紧致的 e.m.t. 空间。另一方面，我们不清楚是否能够构造一个函子，将每个（可能非紧致的）e.m.t. 空间映射到某个与之相关的长度 e.m.t. 空间（如果存在的话）。

注 3.32. 范畴$\mathbf{ExtMetTop}_{\mathrm{len}}$ 有所有的等化子和积，这一点很容易验证：只需证明 $\mathbf{ExtMetTop}$中的所有等化子和积都保长度 e.m.t. 空间这一性质；细节从略。因此，根据定理 A.2。然而，我们不知道 $\mathbf{ExtMetTop}_{\mathrm{len}}$ 是否余完备。 ■

Appendix A. Compendium of category theory

本附录汇集了本文中起关键作用的范畴论概念和结果。关于范畴论的详细论述，请参阅 [24] 。另请参阅 [20, 18, 5]。

范畴之间的函子一律指协变函子。在同态集上为单射（分别为满射）的函子称为忠实 （分别称为满）。既满又忠实的函子称为全忠实。给定范畴$\mathbf{C}$ 及其子范畴$\mathbf{S}$ ，其中$\mathbf{C}$包含函子$\mathbf{S}\hookrightarrow\mathbf{C}$ 是忠实的，且在对象上单射；当且仅当$\mathbf{S}$ 是$\mathbf{C}$的满子范畴时，它才是满函子。对于$\mathbf{C}$中任意给定的一组对象 A ，存在唯一一个$\mathbf{C}$ 的满子范畴，其对象恰好是 A中的对象。给定$\mathbf{C}$中的一个态射 $\varphi\colon a\to b$ ，我们称：

- φ是一个单态射，如果 $\psi_1=\psi_2$，则对于任意 $c\in\mathbf{Obj}(\mathbf{C})$，以及满足 $\varphi\circ\psi_1=\varphi\circ\psi_2$的态射 $\psi_1,\psi_2\colon c\to a$（它们属于$\mathbf{C}$）
- φ是一个满态射，如果 $\psi_1=\psi_2$，则对于任意 $c\in\mathbf{Obj}(\mathbf{C})$，以及满足 $\psi_1\circ\varphi=\psi_2\circ\varphi$的态射 $\psi_1,\psi_2\colon b\to c$（它们属于$\mathbf{C}$）
- φ 是一个双态射，当且仅当它既是单态射又是满态射。
- φ 是一个同构，如果存在一个态射（必然唯一） $\varphi^{-1}\colon b\to a$ ，它属于$\mathbf{C}$ ，并且满足 $\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{id}_a$ 和 $\varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{id}_b$。态射 φ^{-1} 称为 φ的逆态射。

如果$\mathbf{C}$ 中的每个双态射都是同构，则称范畴$\mathbf{C}$ 是平衡的。

范畴$\mathbf{C}$ 的始对象是$\mathbf{C}$ 中的一个对象 i ，使得对于任意 $a\in\mathbf{Obj}(\mathbf{C})$，都存在唯一的态射 $i\to a$。对偶地，$\mathbf{C}$ 的终对象是$\mathbf{C}$ 中的一个对象 t ，使得对于任意$a\in\mathbf{Obj}(\mathbf{C})$，都存在唯一的态射 $a\to t$。始对象和终对象并非总是存在；但若存在，则在唯一同构意义下唯一。

逗号范畴。 设有范畴$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$ 。给定$\mathbf{B}$ 中的一个对象 b 以及一个函子 $F\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$，

$$F\downarrow b$$

表示 F 和 b的逗号范畴 ，其定义如下：

- $F\downarrow b$中的对象是所有形如（a,φ）的有序对，其中 a是$\mathbf{A}$ 中的一个对象，而 $\varphi\colon F(a)\to b$是$\mathbf{B}$中的一个态射。
- $F\downarrow b$ 中两个对象（a,φ）和（a',φ'）之间的态射由满足以下条件的态射 $\alpha\colon a\to a'$ 给出，其中该态射属于$\mathbf{A}$

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(a') \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} \\ & & b \end{array}$$

是一个交换图式。

同样，可以定义逗号范畴 $b\downarrow F$，其对象是满足 $\varphi\colon b\to F(a)$ 的有序对 (a,φ)；其态射 $\alpha\colon(a,\varphi)\to(a',\varphi')$ 是满足 $F(\alpha)\circ\varphi=\varphi'$ 的态射 $\alpha\colon a\to a'$。更一般地，对于任意给定的两个函子$F\colon \mathsf{A}\to\mathsf{B}$ 和 $G\colon \mathsf{C}\to\mathsf{B}$，也可以定义逗号范畴 $F\downarrow G$，参见例如 [24, 习题 1.3.vi]。

严格拉回。给定两个范畴 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$，它们的积范畴 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 定义如下：

- $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 的对象是所有形如 (a,b) 的有序对，其中 a（分别地，b）是$\mathbf{A}$（分别地，$\mathbf{B}$）中的一个对象。
- $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 中两个对象 (a,b) 和 (a',b') 之间的态射由所有形如 (φ,ψ) 的有序对给出，其中 $\varphi\colon a\to a'$是$\mathbf{A}$中的一个态射，且 $\psi\colon b\to b'$是$\mathbf{B}$中的一个态射。

$\mathsf{A}\times\mathsf{B}$ 中两个态射 $(\varphi,\psi):(a,b)\to(a',b')$ 和 $(\varphi',\psi'):(a',b')\to(a'',b'')$ 的复合定义为 $(\varphi',\psi')\circ(\varphi,\psi):=(\varphi'\circ\varphi,\psi'\circ\psi):(a,b)\to(a'',b'')$。我们分别将 $\pi_1\colon\mathsf{A}\times\mathsf{B}\to\mathsf{A}$ 和 $\pi_2\colon\mathsf{A}\times\mathsf{B}\to\mathsf{B}$ 记为第一和第二投影函子，它们定义为

$$\pi_1((a,b)):=a,\quad \pi_2((a,b)):=b\quad \text{for every object } (a,b) \text{ of } \mathbf{A}\times\mathbf{B},$$
$$\pi_1((\varphi,\psi)):=\varphi,\quad \pi_2((\varphi,\psi)):=\psi\quad \text{for every morphism } (\varphi,\psi) \text{ in } \mathbf{A}\times\mathbf{B}.$$

定义 A.1（函子的严格拉回）。设给定范畴 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 和$\mathbf{C}$。设 $F\colon\mathbf{A}\to\mathbf{C}$和 $G\colon\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ 是两个函子。于是，我们将 F 和 G 的严格拉回 定义为以下子范畴 $\mathbf{SP}(F,G)$（属于 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$）：

- $\mathbf{SP}(F,G)$ 的对象是所有满足 $F(a)=G(b)$ 的$(a,b)\in\mathrm{Obj}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$。
- *SP(F, G)* 中的态射是所有满足 $(a,b),(a',b')\in$ *Obj(SP(F, G))* 且 $F(\varphi)=G(\psi)$ 的态射 (φ,ψ): $(a,b)\to(a',b')$，其中它们属于 $A\times B$。

等价地，$\mathbf{SP}(F,G)$ 是逗号范畴 $F\downarrow G$ 的满子范畴，其对象是满足 $F(a)=G(b)$ 且 $h=\mathrm{id}_{F(a)}\colon F(a)\to F(a)=G(b)$ 的三元组 $(a,b,h)\in\mathrm{Obj}(F\downarrow G)$。

自然变换。设给定范畴$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$。设 $F,G\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ 是两个函子。那么，从 F到 G的自然变换 是由态射 $\eta_a\colon F(a)\to G(a)$构成的集合 $\eta_\star$，这些态射属于$\mathbf{B}$，并以 $a\in\mathrm{Obj}(\mathbf{A})$为索引，使得图式

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\eta_a} & G(a) \\ {\scriptstyle F(\varphi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\varphi)} \\ F(b) & \xrightarrow[\eta_b]{} & G(b) \end{array}$$

对$\mathbf{A}$中的每个态射 $\varphi\colon a\to b$ 均可交换。函子范畴 $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ 定义如下：$\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ 的对象是从$\mathbf{A}$ 到$\mathbf{B}$的所有函子，而$\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ 的态射是从$\mathbf{A}$ 到$\mathbf{B}$的函子之间的所有自然变换。给定三个函子 $F,G,H\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$，一个从 F 到 G的自然变换 $\eta_\star$，以及一个从 G 到 H的自然变换 $\zeta_\star$，复合$\xi_\star:=\zeta_\star\circ\eta_\star$是由以下自然变换给出的：$\xi_a:=\zeta_a\circ\eta_a\colon F(a)\to H(a)$，对每个 $a\in\mathrm{Obj}(\mathbf{A})$均成立。

锥与余锥。在给定范畴 $\mathbf{C}$ 中，类型为 $\mathbf{J}$ 的图式 是指函子 $D\colon\mathbf{J}\to\mathbf{C}$，它定义在小范畴 $\mathbf{J}$ 上，我们称之为指标范畴（值得强调的是，与某些其他作者不同，我们要求所有指标范畴都是小范畴）。换言之，$\mathbf{C}$ 中类型为 $\mathbf{J}$ 的图式，恰好是函子范畴 $\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ 中的对象，因此我们将其称为图式范畴。对角函子 $\Delta_{\mathbf{J},\mathbf{C}}\colon\mathbf{C}\to\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ 定义如下：

- 对于任意 $a\in\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$，我们定义 $\Delta_{\mathbf{J},\mathbf{C}}(a)\in\mathrm{Obj}(\mathbf{C}_{\mathbf{J}})$ 为 $\Delta_{\mathbf{J},\mathbf{C}}(a)(i):=a$对每个 $i\in\mathrm{Obj}(\mathbf{J})$，以及 $\Delta_{\mathbf{J},\mathbf{C}}(a)(\phi):=\mathrm{id}_a$ 对于每个态射 $\phi\colon i\to j$，其中 $\mathbf{J}$。
- 对于 $\mathbf{C}$ 中任意态射 $\varphi\colon a\to b$，我们定义自然变换 $\Delta_{\mathbf{J},\mathbf{C}}(\varphi)_\star$ 为$\Delta_{\mathbf{J},\mathbf{C}}(\varphi)_i:=\varphi$，对每个 $i\in\mathrm{Obj}(\mathbf{J})$ 均成立。

到 D 的 J 型锥范畴定义为 $\mathsf{Cone}(D) := \Delta_{\mathbf{J},\mathbf{C}} \downarrow D$，而从 D 出发的 J 型余锥范畴定义为 $\mathsf{Cocone}(D) := D \downarrow \Delta_{\mathbf{J},\mathbf{C}}$。也就是说，到 D 的 J 型锥（分别地，从 D 出发的 J 型余锥）由一对 $(c, \varphi_\star)$ 给出，其中 $c \in \mathsf{Obj}(\mathbf{C})$，且 $\varphi_\star = \{\varphi_i : i \in \mathsf{Obj}(\mathbf{J})\}$ 是一组态射 $\varphi_i \colon c \to D(i)$（分别地，$\varphi_i \colon D(i) \to c$），满足对 J 中每个态射 $\phi \colon i \to j$，都有 $D(\phi) \circ \varphi_i = \varphi_j$（分别地，$\varphi_j \circ D(\phi) = \varphi_i$）。给定另一个范畴 A 和函子 $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{A}$，则 $F \circ D \colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ 是 A 中的一个 J 型图式。此外，我们记

$$F_{D,\mathrm{cone}} \colon \mathbf{Cone}(D) \to \mathbf{Cone}(F \circ D), \qquad F_{D,\mathrm{cocone}} \colon \mathbf{Cocone}(D) \to \mathbf{Cocone}(F \circ D)$$

由 F 诱导、分别将锥映为锥、将余锥映为余锥的函子：

$$F_{D,\mathrm{cone}}((c, \varphi_\star)) := (F(c), F(\varphi_\star)) \quad \text{for every cone } (c, \varphi_\star) \text{ to } D,$$
$$F_{D,\mathrm{cocone}}((c, \varphi_\star)) := (F(c), F(\varphi_\star)) \quad \text{for every cocone } (c, \varphi_\star) \text{ from } D,$$

其中我们设定 $F_{D,\ \mathrm{cone}}(\varphi_\star) := \{F(\varphi_i) : i \in \mathsf{Obj}(\mathbf{J})\} =: F_{D,\ \mathrm{cocone}}(\varphi_\star)$。

极限与余极限。 设 $D \colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ 是范畴 $\mathbf{C}$中一个以$\mathbf{J}$ 为型的图式。$\mathbf{Cone}(D)$ 的终对象（分别地，$\mathbf{Cocone}(D)$ 的始对象）称为 D的极限 （分别地，余极限）。换言之，极限是指到 D的泛锥，而余极限是指从 D出发的泛余锥。若$\mathbf{J}$ 是有限范畴，我们称之为有限（余）极限。以下是一些相关的（余）极限示例：

- 终对象（分别地，始对象）是空图式的极限（分别地，余极限）。
- 以离散范畴（即仅含恒等态射的范畴）为指标的图式的极限（分别为余极限）称为积（分别为余积）。
- 图式$\mathbf{J}^{\rightrightarrows}$的极限（分别为余极限）称为等化子 （分别为余等化子）。该图式由两个对象 i、j 以及从 i 到 j的两个平行态射组成。
- 若指标范畴$\mathbf{J}^{\preceq}$ 由有向集 $(I, \preceq)$ 诱导（即 $\mathsf{Obj}(\mathbf{J}^{\preceq}) = I$，且对于任意 $i, j \in I$，$i \preceq j$ 当且仅当存在唯一的态射 $i \to j$ 属于$\mathbf{J}^{\preceq}$），则图式$\mathbf{J}^{\preceq}$ 的极限（分别为余极限）称为逆极限（分别为正向极限）。

（余）极限并非总是存在，但若存在，则在唯一同构意义下唯一。

完备性与余完备性。 以下定义涉及（余）极限的存在性s:

- 如果一个范畴存在所有有限极限（分别地，所有有限余极限），我们就称它为有限完备（分别地，有限余完备）。
- 如果一个范畴存在所有极限（分别地，所有余极限），我们就称它为完备 （分别地，余完备）。
- 同时完备且余完备的范畴称为双完备。

我们指出，在（余／双）完备性的定义中，我们要求存在的仅是小（余）极限（即仅限于图式类型为$\mathbf{J}$的（余）极限，其中 $\mathbf{J}$ 是一个小指标范畴）。现在也来回顾一个用于检验范畴 [20, §V.2 定理 1]:

定理 A.2 （（余）极限存在定理）。一个范畴是完备的（分别地，余完备的），当且仅当它存在所有的积和等化子（分别地，所有的余积和余等化子）。

给定两个函子 $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$和 $G \colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$，以及一个图式 $D \colon \mathbf{J} \to \mathbf{SP}(F, G)$，容易验证我们有两个范畴同构

$$\mathrm{I}^{\mathrm{cone}}_{F,G} \colon \mathbf{SP}(F_{\pi_1 \circ D,\mathrm{cone}}, G_{\pi_2 \circ D,\mathrm{cone}}) \to \mathbf{Cone}(D),$$
$$\mathrm{I}^{\mathrm{cocone}}_{F,G} \colon \mathbf{SP}(F_{\pi_1 \circ D,\mathrm{cocone}}, G_{\pi_2 \circ D,\mathrm{cocone}}) \to \mathbf{Cocone}(D)$$

满足 $\mathrm{I}^{\mathrm{cone}}_{F\,G,}\ (((c^1,\ \varphi^1_\star),\ (c^2,\ \varphi^2_\star))) = ((c^1,\ c^2),\ (\varphi^1_\star,\ \varphi^2_\star)) = \mathrm{I}^{\mathrm{cocone}}_{F\,G}{}_{,}\ (((c^1,\ \varphi^1_\star),\ (c^2,\ \varphi^2_\star)))$。

引理 A.3. 设给定范畴$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 和$\mathbf{C}$。设 $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ 和 $G \colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ 是两个函子。设 $D \colon \mathbf{J} \to \mathbf{SP}(F, G)$ 是一个图式，且满足以下条件：

i) $\pi_1 \circ D$: $J \to$ 实数集具有极限 $L_{\mathbf{A}}$（分别地，具有余极限 $C_{\mathbf{A}}$）。*ii)* $\pi_2 \circ D$: $J \to B$ 具有极限 $L_{\mathbf{B}}$（分别地，具有余极限 $C_{\mathbf{B}}$）。*iii)* $F_{\pi_1 \circ D}$,*cone*$(L_{\mathbf{A}}) = G_{\pi_2 \circ D}$, *cone*$(L_{\mathbf{B}})$（分别地，$F_{\pi_1 \circ D}$,*cocone*$(C_{\mathbf{A}}) = G_{\pi_2 \circ D}$,*cocone*$(C_{\mathbf{B}})$）。
然后它保 持 D: $\mathbf{J} \to \mathbf{SP}(F, G)$ 具有极限 $\mathrm{I}^{\mathrm{cone}}_{FG}.((L_{\mathbf{A}}, L_{\mathbf{B}}))$（相应地，余极限 $\mathrm{I}^{\mathrm{cocone}}_{FG}.((C_{\mathbf{A}}, C_{\mathbf{B}}))$）。

证明。我们只讨论极限，因为余极限的论证类似。由于 $L_{\mathbf{A}}$ 和 $L_{\mathbf{B}}$ 分别是 Cone($\pi_1 \circ D$) 和 Cone($\pi_2 \circ D$) 的终对象，显然，$(L_{\mathbf{A}}, L_{\mathbf{B}})$ 是 Cone($\pi_1 \circ D$) $\times$ Cone($\pi_2 \circ D$) 的终对象。鉴于 $(L_{\mathbf{A}}, L_{\mathbf{B}}) \in$ Obj(SP($F_{\pi_1 \circ D}$,cone $G_{\pi_2 \circ D}$,cone))（由 iii)），我们更有 $(L_{\mathbf{A}}, L_{\mathbf{B}})$ 是 SP($F_{\pi_1 \circ D}$,cone $G_{\pi_2 \circ D}$, cone) 的终对象。回顾 $\mathrm{I}^{\mathrm{cone}}_{FG}$ 是范畴的同构，我们得出 $\mathrm{I}^{\mathrm{cone}}_{FG}((L_{\mathbf{A}}, L_{\mathbf{B}}))$ 是 Cone(D) 的终对象，换言之，它是图式 D 的极限：J $\to$ SP(F, G)。□

反射子范畴与余反射子范畴。设$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 为范畴。设给定函子 F: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ 和 G: $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$。则称 G 是 F 的左伴随（或称 F 是 G的右伴随），

$$G \dashv F$$

简言之，若对任意 $a \in$ Obj($\mathbf{A}$)，存在态射 ε_a: $G(F(a)) \to a$ in $\mathbf{A}$，使得满足以下性质：给定任意 $b \in$ Obj($\mathbf{B}$) 以及任意态射 φ: $G(b) \to a$ in $\mathbf{A}$，存在唯一的态射 ψ: $b \to F(a)$ in $\mathbf{B}$，使得

$$\begin{array}{ccc} G(b) & & \\ {\scriptstyle G(\psi)}\downarrow & \searrow^{\varphi} & \\ G(F(a)) & \xrightarrow[\varepsilon_a]{} & a \end{array}$$

构成一个交换图式。若此外 F: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ (相应地， G: $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$) 是一个全忠实函子，则称 F 将 $\mathbf{A}$ 呈现为B 的反射子范畴 (相应地， G 将$\mathbf{B}$呈现为A 的余反射子范畴 $\mathbf{A}$），其反射函子为 G（相应地，其余反射函子为 F）。关于以下结果的证明，参见 [24, 命题 4.515]:

命题 A.4. 设 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 为范畴。假设 F: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ 是一个函子，它将 $\mathbf{A}$表示为 $\mathbf{B}$的反射（分别为余反射）子范畴，其反射函子（分别为余反射函子）为 G。则：

i) 若 D: $J \to A$ 是一个图式，且 $F \circ D$: $J \to B$ 有极限 L（分别有余极限 C），则 $\tilde{D}$ 有极限 $\tilde{L}$（分别有余极限 $\tilde{C}$），并且 $F_{\tilde{D},\mathrm{cone}}(\tilde{L}) = L$（分别为 $F_{\tilde{D},\mathrm{cocone}}(\tilde{C}) = C$）。*ii)* 若 D: $J \to A$ 是一个图式，且 $F \circ D$: $J \to B$ 有余极限 C（分别有极限 L），则D 有余极限 $G_{D,\mathrm{cocone}}(C)$（分别有极限$G_{D,\mathrm{cone}}(L)$）。

性质 i) 通常表述为 F “创建”了 $\mathbf{B}$ 所拥有的所有极限（分别为余极限）。命题 A.4 的一个有用且直接的推论是以下结果:

推论 A.5。 设$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 为范畴，且$\mathbf{A}$ 是$\mathbf{B}$的反射子范畴或余反射子范畴。假设$\mathbf{B}$ 是完备的（分别地，余完备的）。那么$\mathbf{A}$ 是完备的（分别地，余完备的）。

Appendix B. Equivalent definitions of extended metric-topological space

众所周知，吉洪诺夫空间有若干种等价的刻画。例如，给定一个豪斯多夫空间 (X τ)，以下条件等价:

- (X τ) 是完全正则的（因此是一个 Tychonoff空间），
- τ是 C_b(X τ) 的初始拓扑,
- τ由 X 上的一族伪距离诱导（或者等价地，(X τ) 是可一致化的），
- i: X $\to \beta$X 是到其像上的同胚,
- (X τ) 同胚于某个紧豪斯多夫空间的一个子集。

在下一个结果中，我们将得到 ane.m.t. 空间的若干种刻画，这些刻画类似于上述关于成为 Tychonoff 空间的等价改写（事实上，定理 B.1通过取d 为 ∞离散距离 $\mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\infty\text{-discr}}$ 在 X 上，蕴含了上述对 Tychonoff 空间的刻画）。

我们引入一个将在下一个结果中使用的记号。给定一个预 e.m.t. 空间 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$、一个集合 $C\subseteq\mathrm{X}$ 以及一个点 $\bar{x}\in\mathrm{X}$，我们将量 $\mathsf{d}(\bar{x},C)\in[0,+\infty]$ 定义为

$$\mathsf{d}(\bar{x},C):=\inf\{\mathsf{d}(\bar{x},y)\mid y\in C\}.$$

注意，如果 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 是一个 e.m.t. 空间，C是 τ-闭的，并且 $\bar{x}\notin C$，那么 $\mathsf{d}(\bar{x},C)>0$。事实上，C特别是 d-闭的（因为 τ 比由 d 诱导的拓扑更粗），从而得到 $\mathsf{d}(\bar{x},C)\neq 0$。

定理 B.1（e.m.t. 空间的另一种刻画）。设 $(\mathrm{X}\ \tau、\mathsf{d})$ 是一个预 *e.m.t.* 空间，且 $(\mathrm{X}\ \tau)$ 是豪斯多夫的。那么以下条件等价：

i) $(X\ \tau, d)$ 是一个 e.m.t. 空间。ii) 给定一个预 e.pm.t. 空间 $(Y\ \tau_Y, d_Y)$ 和一个映射 $\varphi: Y\to X$，对于每个 $f\in LIP_{b,1}(X\ \tau, d)$，都有 $f\circ\varphi\in LIP_{b,1}(Y\ \tau_Y, d_Y)$。则 $\varphi: (Y\ \tau_Y, d_Y)\to(X\ \tau, d)$ 是连续且不增距的。iii) 给定一个 τ-闭集 $C\subseteq X$ 和一个点 $\bar{x}\in X\backslash C$，存在一个函数 $f\in LIP_{b,1}(X\ \tau, d)$，使得 $f|_C=0$ 且 $f(\bar{x})>0$；并且对于任意 τ-紧致集 $K\subseteq X$，$LIP_{b,1}(K, \tau_{\llcorner K}, d|_{K\times K})$ 中的每个函数都可以延拓为 $LIP_{b,1}(X\ \tau, d)$ 中的函数。iv) 给定一个 τ-闭集 $C\subseteq X$ 和一个点 $\bar{x}\in X\backslash C$，存在一个函数 $f\in LIP_{b,1}(X\ \tau, d)$，使得 $f|_C=0$ 且 $f(\bar{x})>0$；此外，如果集合 C是 τ-紧致的，那么对于任意$\lambda\in(0, d(\bar{x},C)]\cap(0,+\infty)$，可以选取函数 f 使得 $f(\bar{x})=\lambda$。v) 存在 X 上有界伪距离的集合 Λ，使得 τ 是族 $\{\delta(\cdot,x):\ \delta\in\Lambda,\ x\in X\}$ 的初始拓扑，并且对于每个 $x,y\in X$，都有 $d(x,y)=\sup\{\delta(x,y):\ \delta\in\Lambda\}$。vi) $c^{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}: (X\ \tau, d)\to emt((X\ \tau, d))$ 是 $PreExt\Psi MetTop$ 中的同构。vii) $\bar{\iota}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}: (X\ \tau, d)\to\bar{\gamma}((X\ \tau, d))$ 是预 e.m.t. 空间的一个嵌入。viii) 存在一个将预 e.m.t. 空间 $(X\ \tau, d)$ 嵌入紧 e.m.t. 空间的嵌入。

证明。

i) $\Longrightarrow$ ii) 设 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 是一个预 e.pm.t. 空间，且 $\varphi:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ 是一个映射，对于所有 $f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d})$，都有 $f\circ\varphi\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$。由于 τ 与 $\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d})$ 的初始拓扑重合，我们推得 $\varphi:(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})\to(\mathrm{X}\ \tau)$ 是连续的。此外，对于任意 $y,\ z\in\mathrm{Y}$，我们有

$$\mathsf{d}(\varphi(y),\varphi(z))=\sup\big\{|(f\circ\varphi)(y)-(f\circ\varphi)(z)|\ \big|\ f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\big\}\leq\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}(y,z),$$

这表明 $\varphi:(\mathrm{Y},\ \mathsf{d}_{\mathrm{Y}})\to(\mathrm{X},\ \mathsf{d})$ 是一个短映射。因此，ii) 得证。

ii) $\Longrightarrow$ i) 首先，我们来验证 τ 是 $\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 的初始拓扑。回顾注 2.2，只需证明：若 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})$ 是一个拓扑空间，且 $\varphi:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ 是一个映射，并且对于每个 $f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$，$f\circ\varphi:(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})\to(\mathrm{X}\ \tau)$ 都是连续的，那么 $\varphi:(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})\to(\mathrm{X}\ \tau)$ 也是连续的。我们赋予 Y ∞-离散距离 $\mathsf{d}_{\mathrm{Y}}:=\mathsf{d}^{\mathrm{Y}}_{\infty\text{-discr}}$。显然，从 $(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$ 到 $\mathbb{R}$ 的任意映射都是短映射，因此特别地，对于每个 $f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$，都有 $f\circ\varphi\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}},\mathsf{d}_{\mathrm{Y}})$；相应地，根据 ii)，$\varphi:(\mathrm{Y}\ \tau_{\mathrm{Y}})\to(\mathrm{X}\ \tau)$ 是连续的。接下来，我们用反证法证明 d 可以被 τ-恢复。假设对于某些 $x,y\in\mathrm{X}$，有 $\mathsf{d}(x,y)>s_{xy}$，其中我们令$s_{xy}:=\sup\{|f(x)-f(y)|:\ f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})\}$。我们赋予 $\mathrm{Z}:=\{x,y\}$ 离散拓扑τ_{Z}，以及满足 $\mathsf{d}_{\mathrm{Z}}(x,y)=s_{xy}$ 的唯一伪距离 d_{Z}。此外，记 $\varphi:\mathrm{Z}\to\mathrm{X}$ 为包含映射。对于任意 $f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$，函数 $f\circ\varphi:(\mathrm{Z}\ \tau_{\mathrm{Z}})\to\mathbb{R}$ 显然连续，并且有 $|(f\circ\varphi)(x)-(f\circ\varphi)(y)|\leq s_{xy}<\mathsf{d}(x,y)$，因此 $f\circ\varphi\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{Z}\ \tau_{\mathrm{Z}},\mathsf{d}_{\mathrm{Z}})$。然而，事实 $\mathsf{d}(\varphi(x)\ \varphi(y))=\mathsf{d}(x,y)>s_{xy}=\mathsf{d}_{\mathrm{Z}}(x,y)$ 表明，$\varphi:(\mathrm{Z},\mathsf{d}_{\mathrm{Z}})\to(\mathrm{X},\mathsf{d})$ 不是短映射，这与 ii) 矛盾。总之，$(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 是一个 e.m.t. 空间，从而证明了 i)。

i) $\Longrightarrow$iii) 根据定理 3.14 ii)，我们知道 $\iota(C)$ 是 $\iota(\mathrm{X})$ 的闭子集，其中 $\iota(\mathrm{X})$ 赋有 $\gamma\tau$ 的相对拓扑。令 $K \subseteq \gamma\mathrm{X}$ 为 $\iota(C)$ 的 $\gamma\tau$-闭包，则容易验证$\iota(C) = K \cap \iota(\mathrm{X})$。由于 $(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau)$ 是紧致的，我们可推得集合 K 是 $\gamma\tau$-紧致的。另请注意，$\iota(\bar{x}) \notin K$，且 $(\gamma\mathrm{d})(\iota(\bar{x})\ K) > 0$。固定 $\lambda \in (0, (\gamma\mathrm{d})(\iota(\bar{x})\ K))$。定义 $g\colon K \cup \{\iota(\bar{x})\} \to \{0, \lambda\}$ 如下

$$g(y) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } y \in K, \\ \lambda & \text{if } y = \iota(\bar{x}). \end{cases}$$

由于 $K \cup \{\iota(\bar{x})\}$ 是 $\gamma\tau$-紧致的，且 g 是一个有界连续短函数，根据定理 2.14，我们知道存在 g 的一个延拓 $\bar{g} \in \mathrm{LIP}_b(\mathrm{X}\ \gamma\tau, \gamma\mathrm{d})$。最后，定义$f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$，使得对于每个 $z \in \mathrm{X}$，$f(z) \coloneqq \bar{g}(\iota(z))$。回顾定理 3.14 中所述的 ι 的性质，不难验证 $f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$。此外，对于每个$z \in C$，我们有 $f(z) = \bar{g}(\iota(z)) = 0$（因为 $\iota(z) \in \iota(C) \subseteq K$），并且 $f(\bar{x}) = \bar{g}(\iota(\bar{x})) = \lambda > 0$，由此得到 iii) 中的第一条结论。第二条结论直接由定理 2.14 得出。因此，iii) 得证。请注意，在上述论证中，我们没有用到紧化$(\gamma\mathrm{X}\ \gamma\tau, \gamma\mathrm{d})$的泛性质，只用到了这样一个事实：$(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$ 可以作为预 e.m.t. 空间嵌入到一个紧 e.m.t. 空间中。

iii) $\Longrightarrow$ iv) 设 $K \subseteq \mathrm{X}$ 是一个 τ-紧致集，且 $\bar{x} \in \mathrm{X} \setminus K$。注意，$\mathrm{d}(\bar{x}, K) > 0$。现在，固定$\tilde{}$ $\tilde{}$任意一个 $\lambda \in (0, \mathrm{d}(\bar{x}, K)] \cap (0, +\infty)$。定义 $f\colon K \cup \{\bar{x}\} \to \{0, \lambda\}$ 为 $f(x) \coloneqq 0$ 对每个 $x \in K$，以及 $\tilde{}$ $\tilde{}$$f(\bar{x}) \coloneqq \lambda$。由于 $K \cup \{\bar{x}\}$ 是 τ-紧致的，且 f是连续且不增距的，由 iii) 可知，存在$\tilde{}$一个 f的延拓 $f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$。于是 $f|_K = 0$ 且 $f(\bar{x}) = \lambda$。因此，iv) 得证。

iv) $\Longrightarrow$ i) 固定任意一个 $U \in \tau$ 和 $\bar{x} \in U$。利用 iv)，我们可找到一个函数 $f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$，使得 $f|_{\mathrm{X}\setminus U} = 0$ 且 $f(\bar{x}) \neq 0$。特别地，我们有 $x \in \{f \neq 0\} \subseteq U$。由于 $\{f \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 属于 $\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$ 的初始拓扑 σ，我们推得 τ包含于拓扑 σ中（因此与之相同）。接下来，我们来验证 d 可以被 τ-恢复。为此，固定任意的 $x, y \in \mathrm{X}$，使得 $x \neq y$。注意，单点集 $\{y\}$ 是 τ-紧致的。应用 iv)，对于任意给定的$\lambda \in (0, \mathrm{d}(x, y))$，我们因此可以找到 $f_\lambda \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$，使得 $f_\lambda(y) = 0$ 且 $f_\lambda(x) = \lambda$。因此，

$$\mathrm{d}(x, y) = \sup_{\lambda \in (0, \mathrm{d}(x,y))} \lambda = \sup_{\lambda \in (0, \mathrm{d}(x,y))} |f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq \sup\big\{|f(x) - f(y)| \;\big|\; f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}, \tau, \mathrm{d})\big\},$$

这表明 d 可以通过 τ 恢复。总而言之，$(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$ 是一个 e.m.t. 空间，因此 i) 得证。i) $\Longrightarrow$ v) 对于 LIP F 中的任意有限子集$_{b,\ 1}(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$，我们将 X 上的伪距离 δ_F 定义为

$$\delta_F(x, y) \coloneqq \max_{f \in F} |f(x) - f(y)| \quad \text{for every } x, y \in \mathrm{X}.$$

接下来，定义 $\Lambda \coloneqq \{\delta_F\colon F \subseteq \mathrm{LIP}_{b,\ 1}(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$ 中的有限子集$\}$。我们用 σ 表示 $\{\delta(\cdot,\ x)$ 的初始拓扑：$\delta \in \Lambda,\ x \in \mathrm{X}\}$。由于每个函数 $\delta_F(\cdot,\ x)$ 都是 τ-连续的，因此有 $\sigma \subseteq \tau$。为证明反向包含关系，任取 $U \in \tau$ 和 $x \in U$。由于 τ 是 $\mathrm{LIP}_{b,\ 1}(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$ 的初始拓扑，我们可以找到 LIP F 中的一个有限子集$_{b,\ 1}(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathrm{d})$ 以及一个实数 $\varepsilon > 0$，使得

$$\delta_F^{-1}((-\infty, \varepsilon)) = \bigcap_{f \in F} \{|f - f(x)| < \varepsilon\} = \bigcap_{f \in F} \{f(x) - \varepsilon < f < f(x) + \varepsilon\} \subseteq U.$$

Given，使得 $x \in \delta_F^{-1}((-\infty, \varepsilon)) \in \sigma$，我们推导出 $\tau = \sigma$。最后，对于任意 $x, y \in \mathrm{X}$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x, y) &= \sup\big\{|f(x) - f(y)| \;\big|\; f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}, \tau, \mathrm{d})\big\} = \sup\big\{\delta_{\{f\}}(x, y) \;\big|\; f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}, \tau, \mathrm{d})\big\} \\ &\leq \sup_{\delta \in \Lambda} \delta(x, y) \leq \mathrm{d}(x, y), \end{aligned}$$

得益于这样一个事实：对于每个 $\delta \in \Lambda$，d 都可以被 τ-恢复并且 $\delta \leq \mathrm{d}$。总而言之，v) 得证。v) $\Longrightarrow$ i) 注意到 $\delta(\cdot, x) \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$ 对所有 $\delta \in \Lambda$ 和 $x \in \mathrm{X}$ 都成立。由于 τ 是 $\{\delta(\cdot, x)$ 的初始拓扑：$\delta \in \Lambda,\ x \in \mathrm{X}\}$，因此当然有，$\tau$ 是 $\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau, \mathrm{d})$ 的初始拓扑，并且

$$\mathrm{d}(x, y) = \sup_{\delta \in \Lambda} \delta(x, y) = \sup_{\delta \in \Lambda} |\delta(x, x) - \delta(y, x)| \leq \sup\big\{|f(x) - f(y)| \;\big|\; f \in \mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}, \tau, \mathrm{d})\big\}$$

对于每个 $x,y\in \mathrm{X}$。因此，$(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 是一个 e.m.t. 空间，故 i) 得证 .

i) $\Longrightarrow$**vi)** 证明这一蕴含关系最快的方法是考察命题 3.5 的证明。事实上，从 $(\check{\mathrm{X}},\check{\tau},\check{\mathsf{d}})$ 的构造显然可知，若 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 是一个 e.m.t. 空间，则有 $\mathrm{X}=\check{\mathrm{X}}$，$\tau=\tilde{\tau}=\check{\tau}$，$\mathsf{d}=\tilde{\mathsf{d}}=\check{\mathsf{d}}$ 且 $\mathsf{c}^{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}=\mathrm{id}_{\mathrm{X}}$，这就推出了 **vi)**。

vi) $\Longrightarrow$**i)** 由一个基本观察可知，成为 e.m.t. 空间这一性质在 $\mathbf{PreExt\Psi MetTop}$ 中的同构下保持不变。

vi) $\Longrightarrow$ **vii)** 由于 $\iota_{\mathsf{emt}((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}))}:\mathsf{emt}((\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d}))\to\bar{\gamma}((\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d}))$ 根据定理 3.14 ii) 是 e.m.t. 空间的嵌入，我们推得 $\bar{\iota}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}=\iota_{\mathsf{emt}((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}))}\circ\mathsf{c}^{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}$ 是预 e.m.t. 空间的嵌入，从而证明了 **vii)** 成立。

vii) $\Longrightarrow$ **vi)** 反证如下：假设 $\mathsf{c}^{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}$ 在范畴 $\mathbf{PreExt\Psi MetTop}$ 中不是同构，于是要么 $\mathsf{c}^{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}:(\mathrm{X}\ \tau)\to(\check{\mathrm{X}},\check{\tau})$ 不是同胚，要么 $\mathsf{c}^{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}:(\mathrm{X},\mathsf{d})\to(\check{\mathrm{X}},\check{\mathsf{d}})$ 不是保距。在前一种情况下，由 (3.3) 以及 $\iota_{\mathsf{emt}((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}))}\circ\mathsf{c}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}=\bar{\iota}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}$ 的单射性可知，映射 $\mathsf{c}^{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}:\mathrm{X}\to\check{\mathrm{X}}$ 是双射，但其逆态射 $\mathsf{c}^{-1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}):(\check{\mathrm{X}},\check{\tau})\to(\mathrm{X}\ \tau)$ 不连续，因此尤其是 $\bar{\iota}^{-1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}):\bar{\iota}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}(\mathrm{X})\to\mathrm{X}$ 不连续（否则 $\mathsf{c}^{-1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})=\bar{\iota}^{-1}(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})\circ\iota^{-1}\ \mathsf{emt}((\mathrm{X},\tau,\mathsf{d}))$ 就会连续）。在后一种情况下，存在点 $x,y\in\mathrm{X}$，使得 $\check{\mathsf{d}}(\mathsf{c}^{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}(x),\mathsf{c}^{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}(y))<\mathsf{d}(x,y)$，由此可得 $(\gamma\mathsf{d})(\bar{\iota}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}(x)\ \bar{\iota}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}(y))<\mathsf{d}(x,y)$。总之，我们已证明 $\bar{\iota}_{(\mathrm{X},\tau,\mathsf{d})}$ 不是预 e.m.t. 空间之间的嵌入，这与 **vii)** 矛盾。因此，**vi)** 得证。

vii) $\Longrightarrow$ **viii)** 这是显然的，因为 $\bar{\gamma}((\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d}))$ 是一个紧 e.m.t. 空间。

viii) $\Longrightarrow$ **iii)** 通过完全仿照蕴含关系 **i)** $\Longrightarrow$**ii** 的证明进行论证，即可证明这一点。 **i)**. □

请注意，定理 B.1 中的某些蕴含关系，例如 **vi)** $\Longrightarrow$**i)** 和 **vii)** $\Longrightarrow$**vi)**，即使在较弱的假设下仍然成立：此时 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 仅为预 e.pm.t. 空间。

注 B.2。值得指出的是，作为定理 B.1 中蕴含关系 **i)** $\Longrightarrow$**iv)** 的推论，以下性质成立：若 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 是一个 e.m.t. 空间，且 $x,y\in\mathrm{X}$ 满足 $\mathsf{d}(x,y)<+\infty$，那么存在 $f\in\mathrm{LIP}_{b,1}(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$，使得 $f(x)-f(y)=\mathsf{d}(x,y)$。换言之，对于有限距离的点，$\mathsf{d}$ 的 τ-恢复性质中的上确界可以取到。■

注 B.3（与拓扑度量空间的比较）。根据 [6, 定义 1。2], 我们称预 e.m.t. 空间 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 为拓扑度量空间，若满足以下条件：

- τ 比由 d 诱导的拓扑更粗。
- $\mathsf{d}:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to[0,+\infty]$ 是 $\tau\otimes\tau$-下半连续的。

每个 e.m.t. 空间都是拓扑度量空间（根据注 2.10），但反过来并不成立：例如，在一个非完全正则豪斯多夫空间 $(\mathrm{X}\ \tau$ 上赋予 ∞-离散距离 $\mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\infty\text{-discr}}$；那么 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d}^{\mathrm{X}}_{\infty\text{-discr}})$ 是拓扑度量空间，但不是 e.m.t. 空间。

此外，根据 [7, 定义 2.3], 我们称拓扑度量空间 $(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 是完全正则的，若 d 可由 τ-恢复，且 $\mathrm{LIP}_b(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$ 能将点与闭集分离；这意味着对于任意 τ-闭集 $C\subseteq\mathrm{X}$ 和 $\bar{x}\in\mathrm{X}\setminus C$，存在 $f\in\mathrm{LIP}_b(\mathrm{X}\ \tau,\mathsf{d})$，使得 $f|_C=0$ 且 $f(\bar{x})>0$。因此，由定理 B.1 和 [7, 推论 2.6] 可得

$$(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d})\text{ 是一个完全正则拓扑度量空间}\iff(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d})\text{ 是一个 e.m.t. 空间。}$$

还值得指出的是，Ambrosio、Gigli 和 Savaré 在 [4, 定义 2.3] 中引入的所谓波兰扩展空间，恰好是满足以下条件的拓扑度量空间 $(\mathrm{X}\ \tau,\ \mathsf{d})$：$(\mathrm{X}\ \tau)$ 是波兰空间（即 τ 由某个完备可分距离诱导），且 $(\mathrm{X},\ \mathsf{d})$ 是完备的。■

References

[1] M. Abbadini 和 D. Hofmann。度量紧豪斯多夫空间的 Barr-余正合性。 *Theory and Applicationsof Categories*, 44:196–226, 2025.[2] S. Albeverio 、 Y. G. Kondratiev 和 M. R¨ockner。构型空间上的分析与几何。 *J. Funct.Anal.*, 154(2):444–500, 1998.[3] L. Ambrosio、M. Erbar 和 G. Savar´e。扩展空间中的最优传输、Cheeger能量与动态传输距离的压缩性。 *Nonlinear Analysis*, 137:77–134, 2016.[4] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e。度量测度空间中的微积分与热流，以及在具有下界 Ricci界的空间中的应用。 *Invent. Math.*, 195(2):289–391, 2014.[5] S. Awodey。 *Category Theory*。牛津大学出版社，2010 年。[6] I. Ben Yaacov。拓扑度量空间与度量结构的扰动。 *Logic and Analysis*, 1(3-4):235–272, 2008.[7] I. Ben Yaacov。拓扑度量空间上的 Lipschitz函数。 *Journal of Logic and Analysis*, 5(8):1–21, 2013.[8] I. Ben Yaacov、A. Berenstein 和 J. Melleray。Polish拓扑度量群。 *Transactions of the American Math-ematical Society*, 365(7):3877–3897, 2013.[9] I. Ben Yaacov 和 J. Melleray。波兰空间的灰色子集。 *The Journal of Symbolic Logic*, 80(4):1379–1397, 2015.[10] I. Ben Yaacov 和 J. Melleray。一个拓扑度量Effros定理。 *The Journal of Symbolic Logic*, 90(1):310–320, 2025.[11] I. Ben Yaacov 和 A. Usvyatsov。连续一阶逻辑与局部稳定性。 *Transactions of the AmericanMathematical Society*, 362(10):5213–5259, 2010.[12] V. I. Bogachev。 *Gaussian Measures*。数学综述与专著。Springer-Verlag，柏林，2015 年。[13] E. Bru´e 和 K. Suzuki。构型空间上的 BV函数与有限周长集。 *Calc. Var.*, 64(177), 2025.[14] L. Dello Schiavo 和 G. E. Sodini。测度空间上的 Hellinger–Kantorovich度量测度几何。arXiv 预印本，arXiv:2503.07802, 2025.[15] G. Gutierres 和 D. Hofmann。逼近度量域。 *Applied Categorical Structures*, 21(6):617–650, 2013.[16] D. Hofmann 和 P. Nora。豪斯多夫余代数。 *Applied Categorical Structures*, 28(5):773–806, 2020.[17] D. Hofmann 和 C. D. Reis。收敛与 quantale富集范畴。 *Categories and General AlgebraicStructures with Applications*, 9(1):77–138, 2018.[18] M. Kashiwara 和 P. Schapira。 *Categories and Sheaves*。数学科学基础丛书。Springer Berlin Heidelberg，2005 年。[19] J. L. Kelley。 *General Topology*， *Graduate Texts in Mathematics*第 27 卷。Springer New York，第 1 版，1975 年。[20] S. Mac Lane。 *Categories for the working mathematician*， *Graduate Texts in Mathematics*第 5 卷。Springer-Verlag，纽约，第 2 版，1998 年。[21] E. Matou˘skov´a。连续函数与 Lipschitz函数的延拓。 *Can. Math. Bull.*, 43(2):208–217, 2000.[22] L. Nachbin。 *Topology and Order*， *Van Nostrand Mathematical Studies*第 4 卷。D. Van Nostrand，普林斯顿、新泽西州-多伦多、安大略省-伦敦，1965 年。[23] E. Pasqualetto 和 J. Taipalus。扩展度量测度空间上的导子与 Sobolev函数。预印本，arXiv:2503.02596, 2025.[24] E. Riehl。 *Category Theory in Context*。Aurora：Dover现代数学原著。Dover Publications，2017 年。[25] G. Savar´e。扩展度量测度空间中的 Sobolev空间。载于 *New trends on analysis and geometry inmetric spaces*， *Lecture Notes in Math.*第 2296 卷，第 117–276 页。Springer，Cham，2022 年。[26] W. Tholen。有序拓扑结构。 *Topology and its Applications*, 156(12):2148–2157, 2009.

Department of Mathematics and Statistics, P.O. Box 35 (MaD), FI-40014 University of Jyvaskyla
Email address: enrico

.e.pasqualetto@jyu.fi

Department of Mathematics and Statistics, P.O. Box 35 (MaD), FI-40014 University of Jyvaskyla
Email address: timo.m.schultz@jyu.fi

Department of Mathematics and Statistics, P.O. Box 35 (MaD),
FI-40014 University of Jyvaskyla*Email address*: janne.m.m.taipalus@jyu.fi