arXiv:2601.07517v1 [math.OC] 12 Jan 2026

集合的对偶锥有界性及其应用

by

Marius DUREA[1] 和 Elena-Cristina STAMATE[2]

摘要： 我们引入并研究赋范向量空间子集关于锥的一种广义有界性概念，该概念定义为：底层集合在锥的所有正泛函作用下所得像均有下界。我们证明，与其他类似概念相比，这是一种较弱的概念，并探讨它与现有文献中的若干联系。随后，我们说明，这一概念具备所需性质，可用于推广若干重要结果和方法，包括锥消去法则以及 R˚ådstr¨öm 嵌入过程。

关键词： （对偶）锥有界性 ·双曲集 · 消去规则 ·嵌入结果**2020年数学主题分类：** 52A01· 90 C30 · 54C25

1 引言与预备知识

近年来，锥概念以及将经典结果推广至锥环境的可能性，已成为一项富有成果的研究方向（参见 [3], [8], [15], [14]及其中的参考文献）。当然，与锥相关的拓扑概念及其潜在应用并非全新（例如参见 [24],[21], ），但近年来向量与集值优化问题研究的进展，为进一步探索这些思想注入了新的动力。

本文主要探讨集合相对于某个锥的若干有界性概念，旨在放宽其中最常见的概念，同时确保我们引入的较弱概念仍保留优化问题应用所需的主要要素。我们确定了这样一种概念，并证明它是保证某些重要结果成立（例如锥消去律，见 [9]）所能采用的最弱概念。令人惊讶的是，这种方法还使我们关注到近期文献中在不同背景下出现的集合类别，例如双曲集和伪双曲集（见 [2], [17], [22]）。本文对这些密切相关的概念进行了细致比较，并通过实例阐明了它们的主要区别。新引入概念的若干特性使我们能够弱化近期文献中关于各类优化问题（包括向量与集值优化）的一些结果所需的假设（例如 [10] 中的一些结果）。这些发现凸显了重新审视现有概念的必要性，并促使我们进一步深入研究锥有界集，以增进理论认识并拓展其在优化中的应用。

下文概述了本文的结构，重点介绍本研究提出的关键思想和结果。本节其余部分将介绍所用的记号，并给出后文多次用到的一些基本预备知识。第二节讨论如何将集合的一种弱有界性与相对于某个闭凸

[1]罗马尼亚“亚历山德鲁·伊万·库扎”大学数学系，700506–罗马尼亚雅西，以及罗马尼亚科学院“奥克塔夫·迈耶”数学研究所雅西分部，700505–罗马尼亚雅西；电子邮箱：durea@uaic.ro[2]罗马尼亚科学院“奥克塔夫·迈耶”数学研究所雅西分部，700505–罗马尼亚雅西；电子邮箱：cristina.stamate@acadiasi.ro

锥的性质联系起来。我们将其称为对偶锥有界性，因为其定义本身便假定该集合在锥的所有正泛函下的像都有下界（即作为实数集的子集有下界）。本节还将这一新概念与通常的锥有界性概念（分别在范数拓扑或弱拓扑下理解）以及其他看似无关的概念进行比较，例如集合的双曲性和伪双曲性。若干例子展示了这些概念之间的差异。第二节表明，文献中近期提出的若干锥消去规则，在较弱的对偶锥有界性假设下仍然成立。此外，本文还证明，从某种意义上说，这类锥有界性是仍能确保所考察的主要消去规则之结论成立的最弱条件。第四节专门讨论应用，分为两个小节。第一小节给出一些关于此前讨论的拓扑性质下 Pareto 极小性的论述。第二小节基于第二节，研究针对对偶锥有界集的 R°adstr¨om（[23]）意义下的嵌入过程。我们考察并比较与三类集合相关的 R°adstr¨om 空间，并重点探讨能否在由对偶锥有界集生成的 R°adstr¨om 空间上引入有意义的拓扑。具体而言，我们研究该空间中序锥的闭性及其内部是否非空。此外，我们也强调了它与锥有界集情形之间的一些差异。由此可知，近期关于锥有界性在某些类别的优化问题中所起作用的若干论述，可以推广到对偶锥有界性的情形。本文最后以简短的总结部分作结。

下面介绍本文所使用的主要记号和对象。设（X， $\|\cdot\|$）为赋范向量空间，（X^*， $\|\cdot\|_*$）为其拓扑对偶。对于 X 或 X^* 的子集，标准符号 cl、int、conv、cone 分别表示闭包、内部（相对于范数，即在强拓扑中）、凸包和锥包。X^* 的弱* 拓扑下的闭包记为 cl_{w^*}（对于其他拓扑也同样如此），而括号 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示 X 与 X^*. 之间的对偶映射。用 D_X 表示 X. 的闭单位球（圆盘）。若 A、B 是 X 的非空子集，则从 A 到 B 的偏差定义为 $e\left(A,\ B\right) = \sup_{x\in A} d\left(x,\ B\right)$，其中，按照惯例，$d\left(x,\ B\right) = \inf\left\{\|x-b\| \mid b\in B\right\}$.。 A 与 B 之间的豪斯多夫–庞培伪距离为 $h\left(A,\ B\right) = \max\left\{e\left(A,\ B\right)\ e\left(B,\ A\right)\right\}$.

对于凸锥 $Q\subset X$ 和 $E\subset X^*$，我们将它们的正极锥记为

$$Q^+ = \left\{x^*\in X^* \mid x^*\left(x\right)\geq 0,\ \forall x\in Q\right\}$$

and

$$E^+ = \left\{x\in X \mid x^*\left(x\right)\geq 0,\ \forall x^*\in E\right\}.$$

我们分别将 Q^- 和 E^- 记为 $-Q^+$ 和 $-E^+$，。根据双极定理（见 [27, 定理 1.1.9]），$Q^{++} = \mathrm{cl}\ Q$和 $E^{++} = \mathrm{cl}_{w^*}\, E.$。还要回顾一下，若 Q满足 $Q\cap -Q = \{0\}$.，则称其为尖锥

下文中，我们将 $K\subset X$ 视为闭凸锥。对于 X的非空子集 A ˜，我们将 $A = \mathrm{cl}\ \mathrm{conv}\left(A+K\right)$。反复使用基本关系

$$\mathrm{cl}\left(M+N\right) = \mathrm{cl}\left(\mathrm{cl}\, M+N\right) \text{ and } \mathrm{conv}\left(M+N\right) = \mathrm{conv}\, M+\mathrm{conv}\, N,$$

对于所有非空集合 $M,\ N\subset X$，注意到 $\tilde{A}+K = \tilde{A}$和 $\tilde{A}+\tilde{B} = \mathrm{cl}\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)$对所有 $\emptyset\neq A,\ B\subset X.$ 均成立。事实上，前一个等式可由以下包含关系链证明:

$$\begin{aligned}\tilde{A}+K\supset\tilde{A} &= \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\left(A+K\right) = \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\, A+K\right) = \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\left(A+K\right)+K\right)\\ &= \mathrm{cl}\left(\mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\left(A+K\right)+K\right)\supset\tilde{A}+K.\end{aligned}$$

后一个关系的理由如下:

$$\begin{aligned}\widetilde{A+B} &= \operatorname{cl}\operatorname{conv}(A+B+K) = \operatorname{cl}(\operatorname{conv}(A+K)+\operatorname{conv}(B+K)) \\ &= \operatorname{cl}(\operatorname{cl}\operatorname{conv}(A+K)+\operatorname{cl}\operatorname{conv}(B+K)) = \operatorname{cl}\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right).\end{aligned}$$

2 对偶锥有界性

如前所述，$(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范向量空间，设 $K\subset X$ 为闭凸锥。我们关注满足以下性质的集合 $\emptyset\neq A\subset X$：对于每个 $x^*\in K^+$，集合 $x^*(A)$ 都有下界。我们将证明，一方面，这一概念严格弱于关于范数或弱拓扑的标准有界性概念（见 [21，定义 3.1，第 13] 页）；另一方面，它使我们能够推广若干有意义的结果，并有望应用于各种类型的优化问题。

首先，我们将这一新提出的性质与关于强拓扑的 K–有界性进行比较。为此，我们先给出一个技术性引理，并在此证明，以确保论述的完备性。

引理 2.1 对于所有 $x\in X$，我们有

$$d(x,K)=\sup\{-x^*(x)\mid x^*\in K^+\cap D_{X^*}\}.$$

证明。 若 $d(x,K)=0$，则结论显然成立。取满足 $\|x^*\|\leq 1$，且 $k\in K$ 的 $x^*\in K^+$。那么，由于$x^*(k)\geq 0$,

$$-x^*(x)\leq -x^*(x-k)\leq\|x^*\|\cdot\|x-k\|\leq\|x-k\|.$$

对 $k\in K$ 取下确界，得到 $-x^*(x)\leq d(x,K)$。现在对所有此类 x^* 取上确界，便得到一个不等式。

记 $\rho=d(x,K)>0$，并固定 $\varepsilon\in(0,\rho)$。那么 $K\cap D(x,\rho-\varepsilon)=\emptyset$。由于这两个集合都是凸集，而且第二个集合的内部非空，根据经典分离定理，存在 $x^*\in X^*\setminus\{0\}$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$，使得

$$\sup_{u\in D(x,\rho-\varepsilon)} x^*(u)\leq x^*(k),\ \forall k\in K.$$

根据标准论证，$x^*\in K^+$。于是,

$$x^*(x)+(\rho-\varepsilon)\|x^*\|=\sup_{\|u\|\leq\rho-\varepsilon} x^*(x+u)=\sup_{u\in D(x,\rho-\varepsilon)} x^*(u)\leq 0,$$

由此

$$-x^*(x)\geq(\rho-\varepsilon)\|x^*\|.$$

考虑 $x^*=\|x^*\|^{-1}x^*\in K^+$。那么 $-x^*(x)\geq\rho-\varepsilon$，由此

$$\sup\{-x^*(x)\mid x^*\in K^+\cap D_{X^*}\}\geq\rho-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，我们得到另一个所需的不等式。 □

命题 2.2 设$(X, \|\cdot\|)$ 为赋范向量空间，设 $K \subset X$ 为闭凸锥。令 $A \subset X$ 为非空集合。考虑以下断言：

(i) 存在 $\ell \geq 0$ 使得

$$A \subset \ell D_X + K;$$

(ii) 存在 $\rho \in \mathbb{R}$ 使得对每个 $x^* \in K^+ \cap D_{X^*}$，下确界 $x^*(A) \geq \rho$；*(iii)* 对每个 $x^* \in K^+$，集合 $x^*(A)$ 有下界。因此 *(i)*⇔*(ii)*⇒*(iii)*。

证明。(i) 蕴含 (ii) 且 $\rho = -\ell$ 时显然成立。为证明 (ii) 蕴含 (i)，我们使用引理 2.1 中的恒等式。对于任意 $a \in A$，有

$$d(a, K) = \sup\{-x^*(a) \mid x^* \in K^+ \cap D_{X^*}\} \leq \sup_{x^* \in K^+ \cap D_{X^*}} \sup\{-x^*(u) \mid u \in A\}) \leq -\rho.$$

令 $\ell = -\rho \geq 0$，得到 $d(a, K) \leq \ell$，对所有 $a \in A$ 均成立，即

$$A \subset (\ell + \delta) D_X + K, \ \forall \delta > 0,$$

结论由此得证。

(ii)⇒(iii) 显然成立。 □

满足命题 2.2 中性质 (i) 的集合 A 在文献中称为关于 K的锥有界集合，或称为 K–有界（关于强拓扑：见 [21]）。我们研究中的一个关键点是，一般而言，(iii) 并不能推出命题 2.2 中的 (i) 和 (ii)。为说明这一点，我们给出以下例子。

例 2.3 设 $(X, \|\cdot\|) = (\ell^1, \|\cdot\|_1)$ $K^+ = \ell^1_+$. $= c_0$ $c_0 +$ $=$ $(, \|\cdot\|_\infty)$ 且 $K =$（非负锥）。则 $(X^*, \|\cdot\|_*)$,并且

对每个 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，定义 $a^{(k)} \in c_0$ 为

$$a_n^{(k)} = \begin{cases} k^2, & 1 \leq n \leq k, \\ -k, & n = k+1, \\ 0, & n \geq k+2, \end{cases}$$

并令 $A = \{a^{(k)} \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$。

取 $x^* = (x_n) \in K^+$，满足 $\|x^*\| = 1$。我们证明集合 $x^*(A)$ 有下界，这意味着在该特定情形下，(iii) 成立。

事实上，

$$x^*(a^{(k)}) = \sum_{n=1}^{k} k^2 x_n - k x_{k+1} = k^2 \sum_{n=1}^{k} x_n - k x_{k+1}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1$ 以及所有 x_n 都是非负的，存在 k_{x^*}，使得对于所有 $k \geq k_{x^*}$，$x_{k+1} \leq 2^{-1}$ 和 $\sum_{n=1}^{k} x_n \geq 2^{-1}$. 。于是对于 $k \geq k_{x^*}$,

$$x^*(a^{(k)}) \geq 2^{-1}\left(k^2 - k\right) > 0.$$

Thus $x^*(a^{(k)})$ 只能对有限多个 k，取负值，因此 $\inf x^*(a^{(k)}) > -\infty$.

现在我们证明 (i) 不成立。对于 $a^{(k)}$，唯一的负坐标是 $a^{(k)}_{k+1} = -k$，因此，对于所有 k，$d(a^{(k)}, K) = k$，所以不存在满足 $A \subset \ell D_X + K$ 的 $\ell > 0$。

另一个例子（即使在有限维情形下）将在稍后介绍，在描述命题 2.2 中蕴含关系 (iii)⇒(i) 成立的情形之后。

命题 2.4 如果 X 是有限维赋范向量空间，且 K 是有限生成的，那么命题 *2.2* 中的三个断言彼此等价。

证明。 我们只需证明 (iii)⇒(i)。由于 X 是有限维的，我们将 X^* 与 X.等同。此外，由于 K 是有限生成的， K^+ 也有限生成（见 [5]）。设 $u_1, ..., u_n \in X$（其中 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$），使得

$$K^+ = \operatorname{cone}\{u_1, u_2, ..., u_n\}.$$

Then

$$K = \left\{a \in X \mid \langle a, u_i\rangle \geq 0,\ \forall i \in \overline{1,n}\right\} = \left\{a \in X \mid \langle a, -u_i\rangle \leq 0,\ \forall i \in \overline{1,n}\right\}.$$

假设 (ii) 等价于对所有 $i \in 1, n,$ 都有 $\inf\ u_i(A) > -\infty$，也就是说，对所有 $i \in 1, n.$ 都有 $\sup(-u_i(A)) < \overline{\infty}$。记 c 为 $\max\left\{0, (\sup(-u_i(A)))_{i\in 1,n}\right\}$ 的值，并注意到

$$A \subset \left\{x \in X \mid -u_i(x) \leq c,\ \forall i \in \overline{1,n}\right\}.$$

现在，根据霍夫曼引理（见 [19]），存在常数 $\rho > 0$，使得对所有 $x \in A, d(x, K) \leq \rho c.$。因此，$(i)$ 成立。□

推论 2.5 如果 X 是维数为2的赋范向量空间，那么命题 *2.2* 中的三个断言彼此等价。

证明。 在二维情况下，所有闭凸锥都是有限生成的。 □

注 2.6 当然，在假设 K^+ 是有限生成的情况下，空间 X 可以是无限维的，而命题 *2.4* 仍然成立（证明基本相同）。然而，对 K^+ 提出这一要求相当强，因为这意味着 K 由有限个线性不等式定义，从而使该结果本质上成为有限维结果。

为了说明在命题 2.4 中无法避免要求锥是有限生成的，我们给出下面这个例子，该例可见于 [17]。

例 2.7 考虑 $X = \mathbb{R}^3$，令 K 为冰淇淋锥，即

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

Take

$$A = \left\{x_n \mid x_n = \frac{n}{1 - \cos\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}, \sin\frac{1}{n}, \cos\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$

则 K 不是有限生成的，并且 $K^+ = K.$ 然而，对于所有 $u \in K^+$，$\langle u,\ x_n\rangle \geq 0$ 当 n 充分大时成立，而 $d(x_n,\ K) = \sqrt{2^{-1}n}$对所有 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.成立

例 2.3 和 2.7 使我们能够定义以下与K–有界性不同（严格较弱）的概念。

定义 2.8 满足命题 *2.2* 中性质 (iii) 的集合 A 称为相对于 K 的对偶锥有界集，或称对偶 K–有界集。

注 2.9 注意，当且仅当对于所有 $x^* \in K^+$.， $x^*(A) \subset \mathbb{R}$ 都是 $[0,\infty)$–有界的（即有下界）时，集合 A 才是对偶 K–有界的。

接下来，我们建立若干结果，以便在相对于锥的多种有界性概念中，对对偶锥有界性进行精确分类。

命题 2.10 设 $\emptyset \neq A \subset X$. 以下断言等价:

(i) A 是对偶锥有界的；*(ii)* 对所有 $x^* \in X^*$,

$e(x^*(A) \quad x^*(K)) \in \mathbb{R}$.

证明。首先，假设 A 是对偶锥有界的，并取 $x^* \in X^*$.。我们分几种情况讨论。若$x^* \in K^+$，则 $x^*(K)$ 或为 $\{0\}$，或为 $[0,\infty)$，因此对所有 $a \in A$，要么有 $d(x^*(a) \quad x^*(K)) = 0$（若 $x^*(a) \geq 0$），要么有 $|x^*(a)| \leq |\inf x^*(A)|$（若 $x^*(a) < 0$）。于是，$\sup_{a\in A} d(x^*(a) \quad x^*(K)) \leq |\inf x^*(A)| \in \mathbb{R}$.。若 $x^* \in K^-$（因此 $-x^* \in K^+$），则 $x^*(K)$ 或为 $\{0\}$，或为 $(-\infty,0]$，因此对所有 $a \in A$，要么有$d(x^*(a) \quad x^*(K)) = 0$（若 $x^*(a) \leq 0$），要么有 $x^*(a) = -(-x^*)(a) = |(-x^*)(a)| \leq |\inf(-x^*)(A)|$（若$x^*(a) > 0$）。于是，同样有 $\sup_{a\in A} d(x^*(a) \quad x^*(K)) \leq |\inf(-x^*)(A)| \in \mathbb{R}$.。最后，若 $x^* \notin K^+ \cup K^-$，则 $x^*(K) = \mathbb{R}$，因而 $\sup_{a\in A} d(x^*(a) \quad x^*(K)) = 0$.。因此，(ii)成立。

现在假设 (ii) 成立，并取 $x^* \in K^+$. 令 $\alpha > 0$ 满足 $\sup_{a\in A} d(x^*(a) \quad x^*(K)) < \alpha$. 于是，对所有 $a \in A$，都存在 $k_a \in K$ 使得 $|x^*(a) - x^*(k_a)| < \alpha$. 由此可得

$$-\alpha < x^*(a) - x^*(k_a) \leq x^*(a), \ \forall a \in A,$$

因此 $\inf x^*(A) \in \mathbb{R}$，这意味着 (i) 成立。 □

注记 2.11 命题 *2.10* 和例 *2.7* 表明，相对于弱拓扑，双锥有界性严格弱于 K–有界性。根据 *[21,* 第 *13]* 页，这意味着对于每个弱邻域 U *of* 0，都可以找到 $\alpha_U > 0$ 使得 $A \subset \alpha_U U + K$. 当然，考虑到0的弱邻域的形式，这意味着对于所有 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$和$(x_i^*)_{i\in 1,\ n} \subset X^*$，都存在一个（依赖于 n和$(x_i^*)_{i\in 1,\ n}$）的 $\alpha > 0$，使得对于所有 $a \in A$，都存在$k_a \in K$ 满足 $|x_i^*(a) - x_i^*(k_a)| < \alpha$ 对所有 $i \in 1, n$.

——

定义 $m_A : X^* \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 由 $m_A(x^*) = \inf x^*(A)$。命题 2.2 中的假设 (iii) 表述为 $m_A(K^+) \subset \mathbb{R}$. 显然， m_A 是一个凹的 w^*–上半连续函数。我们进一步通过另一种方式考察命题 2.2 所给出的关于锥的两种不同有界性，并分析该函数与我们所关注问题相关的性质。为此，回顾一下，对于非空闭凸集 $C \subset X$，衰退锥可定义为

$$\operatorname{rec} C = \bigcap_{\alpha>0} \alpha(C - c)$$

对每个 $c \in C$（例如，见 $[27,$ 第 $6]$ 页）。 C 的障碍锥定义为

$$\operatorname{bar} C = \left\{ x^* \in X^* \mid \sup_{c\in C} x^*(c) \in \mathbb{R} \right\}.$$

众所周知，$\mathrm{cl}_{w^*} \operatorname{bar} C = (\operatorname{rec} C)^-$， 且 $(\operatorname{bar} C)^- = \operatorname{rec} C$（见 $[27]$）。

回顾记号 $\tilde{A} = \operatorname{cl}\operatorname{conv}(A + K)$，下面给出一些注释。

注 2.12 注意到， $A \subset X$ 关于 K （对偶）锥有界，当且仅当集合$\tilde{A}$ 关于 K（对偶）锥有界。此外，对于所有 $x^* \in K^+$，下确界 $x^*(A) =$ 下确界 $x^*\left(\tilde{A}\right)$

（即，$m_A = m_{\tilde{A}}$ 在 K^+上），并且若 A 对偶锥有界，则衰退锥 $\tilde{A} = K.$。虽然前一个结论相当显然，但我们来证明后一个结论。事实上，若 $k \in K$、 $a \in A$ 且 $t > 0$，则 $a+tk \in A+K = A$、
˜ ˜，这意味着 $K \subset$ 衰退锥 $A.$。考虑 $u \in$ 衰退锥 $A.$。对于一个（所有）元素 $a \in A$ 和 $t > 0$，$a + tu \in \tilde{A}$，因此对每个 $x^* \in K^+$， x^* （a） $+ tx^*$ （u） $\geq$ 下确界 $x^*\left(\tilde{A}\right) \in \mathbb{R}$，这迫使 x^*（u） $\geq 0.$。由于这对所有 $x^* \in K^+$都成立，我们得到 $u \in K$，从而衰退锥 $\tilde{A} \subset K.$

注 2.13 由前一条注释可知，如果 A 是对偶锥有界的，那么 $A \subset X$˜ ˜是锥有界的，当且仅当存在 $\ell > 0$ 使得 $A \subset \ell D_X +$ 衰退锥 $A.$。具有后一性质的集合称为双曲集（参见 *[17]* 及其中的参考文献）。

˜**注 2.14** 利用 *[17,* 命题 *1.4]* 可知， A 是双曲集，当且仅当$m_{\tilde{A}}$ 在 $\left(\text{衰退锥 } \tilde{A}\right)^-$ 的每个有界子集上有下界；也当且仅当$m_{\tilde{A}}$ 在 $\left(\text{衰退锥 } \tilde{A}\right)^-$上的限制在0处强连续（即相对于范数拓扑连续）。根据注 *2.12* 可知，这些陈述与命题 *2.2* 中的等价关系 ***(i)⇔(ii)*** 有关。

注 2.15 运用上述一系列注释中的类似论证，我们同样可以看出命题 *2.4* 与 *[2,* 命题 *4]*之间的联系。不过，我们的结果与 *[17]* 和 *[2]*所引述的结果，在设定、背景、动机和证明方面均有所不同。

U利用注 2.12 和 2.13 中讨论的对象，我们得到以下结果 .

命题 ˜ ˜**2.16** 集合 $A \subset X$ 有界，当且仅当衰退锥 $A = K$ 且 A 是双曲的 $_{C.}$

证明。 假设 A 是 K–有界的。特别地，它是对偶 K–有界的。由注˜ ˜2.12 可得，衰退锥 $A = K.$。此外，由于 A 是 K–有界的，存在 $\ell > 0$ 使得
˜ ˜ ˜$A \subset \ell D_X + K = \ell D_X +$ 衰退锥 $A,$ 因此 A 是双曲的。反向显然。□

F下面给出对对偶 K–有界性的进一步刻画: s.

Pr ˜**命题 2.17** 集合 $A \subset X$ 是对偶 K–有界的，当且仅当 $\operatorname{bar} A = K^-$.

˜**证明**。 若 $A \subset X$ 是对偶 K–有界的，则容易看出 $K^- \subset \operatorname{bar} A.$ 设 $x^* \notin K^-.$ 根据标准分离结果，存在 $k \in K$ 使得 $x^*(k) > 0.$ 由此可得，对所有 $\lambda > 0$， ˜$x^*(\lambda k) = \lambda x^*(k) > 0$ 且 $\sup_{x \in \tilde{A}} x^*(x) = \infty.$ 等式 $\operatorname{bar} A = K^-$ 现即得证。反向结论显然。□

根据 [17, 定义（第 606 页），命题 1.2], ，在本文语境下，若凸集 $C \subset X$满足 $\operatorname{bar} C =$(衰退锥 C)$^-$. ，则称其为伪双曲的。由此得到下面的推论。

˜ ˜**推论 2.18** 集合 $A \subset X$ 是对偶 K–有界的，当且仅当衰退锥 $A = K$ 且 A 是伪双曲的。

注 2.19 此处，我们想特别指出一个问题：对于凸集而言，其障碍锥的范数闭性（从而其伪双曲性）意味着该集合具有双曲性。尽管 ***Bair*** 在其 ***1983***年论文中给出了这一蕴含关系的证明 *[1],* ，但 ***Bair*** 后来在其 ***1985***年论文 *[2]* 中承认，该结果仅在二维情形下成立。此外，***Goossens*** 在 *[17,* 第 *607]* 页给出了一个反例，表明这一蕴含关系在三维情形下并不成立（事实上，这正是上文引用的例 *2.7*）。这两种概念在

一般情形下的区别，从我们前面的结果命题 *2.16* 和推论 *2.18* 中也显而易见。我们还要指出，这些概念与其他相关概念之间的关系已在近期的若干论文中得到运用并进一步探讨，其中我们在此引用 *[26], [13],* 和 *[7]*。

根据上述结果和命题 2.4，我们得到若干等价条件。

命题 2.20 假设 X 是有限维的，且 K 是有限生成的。则以下断言等价：

(i) A 是 $K-$有界的；*(ii)* A是对偶 $K-$有界的；
(iii) 衰退锥 $A=K$ 且 A 是双曲的；
(iv) 衰退锥 $A=K$ 且 A 是伪双曲
的。

如前所述， m_A 是凹的 w^*-上半连续函数。若它在 K^+上也w^*-下半连续（因此 w^*-连续），那么根据 $K^+ \cap D_{X^*}$ 是w^*-紧致的这一事实，命题 2.2 中的 (ii) 就得到了验证。这促使我们记录两串蕴含关系：先是在有限维情形下，然后是在无限维情形下。所用记号与上文相同。

推论 2.21 设$(X, \|\cdot\|)$ 是一个有限维赋范向量空间，且 $\emptyset \neq A \subset X$。以下每个断言都蕴含其后的断言：

(i) 存在一个有界集合 $B \subset X$，使得 $A = B + K$;*(ii)* m_A 在 K^+ 上是利普希茨的;*(iii)* m_A 在 K^+上连续;*(iv)* 存在 $\rho \in \mathbb{R}$，使得对每个 $x^* \in K^+$，下确界 $x^*(A) \geq \rho \|x^*\|$;*(v)* 存在 $\ell \geq 0$，使得 $A \subset \ell D_X + K$;*(vi)* m_A 在 K^+.上取有限值。此外，*(iv)* 与 *(v)* 等价。

证明。 (i)⇒(ii) 是 [11, 引理 4.13]的第一部分；(ii)⇒(iii)显然成立；(iii)⇒(iv)可由在紧集 $D_{X^*} \cap K^+$上应用魏尔斯特拉斯定理得到；(iv)⇒(v)是命题 2.2 中的(i)⇔(ii)；(v)⇒(vi)显然成立。□

推论 2.22 设$(X, \|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间，且 $\emptyset \neq A \subset X$。考虑以下断言：
(i) 存在紧集 $B \subset X$，使得 $A = B + K$；*(ii)* m_A 在 K^+ 上连续；
(iii) m_A 在 K^+ 上序列连续；*(iv)* 存在 $\rho > 0$，使得对每个 $x^* \in K^+$，下确界 $x^*(A) \geq \rho \|x^*\|$ ；*(v)* 存在 $\ell \geq 0$，使得 $A \subset \ell D_X + K$；*(vi)* m_A 在 K^+. 上取有限值。于是 *(i)⇒(iii),* *(ii)⇒(iv)⇔(v)⇒(vi)*。

证明。 (i)⇒(iii) 是引理 4.13] 的第二部分，也是唯一用到 X 完备性的地方；(ii)⇒(iv) 可由在紧集 $D_{X^*} \cap K^+$ 上应用魏尔斯特拉斯定理得到；(iv)⇔(v) 是命题 2.2 中的 (i)⇔(ii)；(v)⇒(vi) 显然成立。

□

注 2.23 请注意，上述两个推论中的假设 *(i)* 是所谓 *Motzkin* 分解的推广：例如参见 *[16]*。

下面的几个例子进一步说明了上述结果。下一个例子表明，Corollary 2.22 中的 (iii) 并不能推出 m_A 的强连续性（因此也不能推出其 w^*-下半连续性）。

例 2.24 令 $(X, \|\cdot\|) = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$，且 $K = (c_0)_+$（非负锥）。因此，$(X^*, \|\cdot\|_*) = \left(\ell^1, \ \|\cdot\|_1\right)$ 以及 $K^+ = \ell^1_+$. 令

$$A = \{a^{(n)} = 2^n e_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset K,$$

其中 e_n 是 c_0中的第 n 个单位向量。显然， A 是 $K-$有界的。

定义 $x^* = (2^{-k})_k \in \ell^1_+$，并对所有 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_n^* \in \ell^1_+$ 定义为

$$(x_n^*)_k = \begin{cases} 0, & k = n, \\ 2^{-k}, & k \neq n. \end{cases}$$

Then

$$\|x_n^* - x^*\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x_n^*)_k - x_k| = |0 - 2^{-n}| = 2^{-n} \to 0,$$

因此 $x_n^* \to x^*$ 强成立。

那么对所有 $z^* = (z_k)_k \in \ell^1$,

$$\inf z^*(A) = \inf_n z^*(a^{(n)}) = \inf_n \left(2^n z_n\right).$$

因此，$\inf x^*(A) = 1$ 且对所有 $n.$，都有 $\inf x_n^*(A) = 0$。因此，尽管 $x_n^* \to x^*$ 在 K^+中强烈地，

$$\inf x_n^*(A) = 0 \not\to 1 = \inf x^*(A).$$

因此， m_A 在范数拓扑下不连续，因而不是 w^*-连续的。

现在我们给出一个例子，在 $\mathbb{R}^2$，其中 m_A 连续，但在 K^+，上不是利普希茨的，因此推论 2.21 中的 (iii) 不蕴含 (ii)。

推论 2.25 设 $X = \mathbb{R}^2$ 配备欧几里得范数，且 $K = \mathbb{R}^2_+$ （正正交象限），于是$K^+ = K$。取

$$A = \{(t, t^{-1}) \mid t > 0\} \subset K.$$

特别地， A 是 $K-$有界的，且 $\ell = 0.$。对于 $x^* = (a, b) \in K^+$,

$$m_A(x^*) = \inf_{t>0} \left(at + bt^{-1}\right),$$

这给出

$$m_A(x^*) = \begin{cases} 2\sqrt{ab}, \text{if } a, b > 0, \\ 0, \text{if } a = 0 \text{ or } b = 0. \end{cases}$$

因此， m_A 在 K^+上连续。然而， m_A 在 K^+上不是利普希茨的。事实上，取 $x^* = (0, \ 1)$ 以及 $y_n^* = (n^{-1}, \ 1)$，对所有 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. 均成立。于是

$$\|x^* - y_n^*\| = n^{-1} \text{ and } |m_A(x^*) - m_A(y_n^*)| = 2\sqrt{n^{-1}}, \ \forall n > 0.$$

Thus

$$\frac{|m_A(x^*) - m_A(y_n^*)|}{\|x^* - y_n^*\|} = 2\sqrt{n} \to \infty,$$

这意味着 m_A 在 K^+.上不存在全局 *Lipschitz* 常数

此时，值得探讨一个密切相关的话题：具有非空内部的凸锥的表示。设 $U \subset X^*$ 为一个 w^*-紧集，并定义

$$C = \{x \in X \mid x^*(x) > 0,\ \forall x^* \in U\}. \tag{2.1}$$

问题在于判断 C 是否开，这一问题最近在 [20]中进行了研究。我们考虑m_U^*：由$m_U^*(x) = \inf_{x^* \in U} x^*(x)$定义的 $X \to \mathbb{R}$， 也就是说，它与前文讨论的 m_A是同类函数，但这次定义在原空间上。考虑到 U 的假设，我们可知m_U^* 定义良好，且$C = \{x \in X \mid m_U^*(x) > 0\}$. 显然，若$m_U^*$ 连续，则 C 是开集。例如，当 X 是巴拿赫空间时，情况便是如此，因为此时 U 是强有界的，因此对所有 x， $y \in X$ 和 $x^* \in U$ （记 U的有界性常数为 M），我们有

$$x^*(x) = x^*(y) + x^*(x-y) \le x^*(y) + \|x^*\| \cdot \|x-y\| \le x^*(y) + M\|x-y\|,$$

因此

$$m_U^*(x) \le m_U^*(y) + M\|x-y\|,$$

这表明 m_U^* 是 $M-$利普希茨函数。然而，一般而言（若 X不完备）， [20, 命题 3.12] 中“若”部分所断言的 C 开性不再成立，下一例子将证明这一点。

例 2.26 取 $(X, \|\cdot\|) = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$，使得 $(X^*, \|\cdot\|_*) = \left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right)$. 对所有$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，考虑元素 $x_n^* = (0,...,0,n,0,...) \in \ell^1$，其中 n 位于第 $n-$ 个位置。记作$e_1^* = (1,0,...,0,...) \in \ell^1$. 集合

$$U = \{e_1^*\} \cup \{e_1^* + x_n^* \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

是 w^*-紧的，这一点很容易看出，只需注意到 (x_n^*) 收敛于 0。 考虑由 (2.1) 定义的集合 C。显然，$x = (1,0,...,0,...) \in C$. 对所有$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_n = \left(1,0,...,-\sqrt{n^{-1}},0,...\right) \in X$, 其中 $-\sqrt{n^{-1}}$ 位于第 $n-$ 个位置。我们可以看到，对所有 $n \ge 2.$，$(e_1^* + x_n^*)(x_n) = 1 - \sqrt{n} < 0$。因此， $x_n \notin C$ 对 $n \ge 2.$ 成立。但是，(x_n) 在 $X,$ 中收敛于x， 因此 x 不属于 C.的内部

3 对偶锥有界集合的消去规则

本节将重点介绍对偶锥有界性所具有的一项重要性质。具体而言，首先，我们运用这一概念，获得著名的 R˚adstr¨om 消去引理的一些新锥版本（参见 [23, 引理 1] 和 [25, 引理 2.1]）。我们提到，该结果的推广以及其在锥框架中的一些进一步版本已在 [9]中得到。其次，我们证明，刻画这类集合的性质，在某种意义上，是获得此类结果的最小要求。

命题 3.1 设 A、B、$C \subset X$ 是非空集合，且 C 是对偶 $K-$ 有界的，并且

$$A + C \subset \operatorname{cl}(C + B + K).$$

Then

$$A \subset \operatorname{cl}\operatorname{conv}(B + K).$$

证明。 根据这一假设，我们可以写出

$$A+C\subset C+B+K+D\left(0,\varepsilon\right),\ \forall\varepsilon>0.$$

令 $x^{*}\in K^{+}\setminus\{0\}$.那么 $x^{*}\left(A+C\right)\subset x^{*}\left(C+B+K+D\left(0,\ \varepsilon\right)\right)$，这意味着

$$x^{*}\left(A\right)+x^{*}\left(C\right)\subset x^{*}\left(C\right)+x^{*}\left(B\right)+x^{*}\left(D\left(0,\varepsilon\right)\right)+[0,\infty),\ \forall\varepsilon>0.$$

这一关系使我们可以写成

$$\inf x^{*}\left(A\right)+\inf x^{*}\left(C\right)\geq\inf x^{*}\left(C\right)+\inf x^{*}\left(B\right)-\varepsilon\left\|x^{*}\right\|,\ \forall\varepsilon>0,$$

其中，按照惯例，对所有 $a\in[-\infty,\infty)$，采用约定 $-\infty+a=-\infty$ 。

由于 C 是对偶有界的，$\inf\ x^{*}\left(C\right)\in\mathbb{R}$，因此，令 $\varepsilon\to0$，我们得到 $\inf\ x^{*}\left(A\right)\geq\inf\ x^{*}\left(B\right)$。

现在反设存在 $x\in A\setminus\operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(B+K\right)$。那么我们将点 x 与集合 $\operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(B+K\right)$ 强分离，从而得到 $x^{*}\in X^{*}\setminus\{0\}$ 和 $\bar{}\alpha\in\mathbb{R}$，使得

$$x^{*}\left(\overline{x}\right)<\alpha<x^{*}\left(b+k\right),\ \forall b\in B,\ \forall k\in K.$$

根据标准论证， $x^{*}\in K^{+}\setminus\{0\}$ 和

$$x^{*}\left(\overline{x}\right)<\alpha<x^{*}\left(b\right),\ \forall b\in B.$$

但这也意味着 $\inf\ x^{*}\left(A\right)\leq x^{*}\left(x\right)<\alpha\leq\inf\bar{}x^{*}\left(B\right)$，这与证明的上述步骤相矛盾。□

鉴于例 2.3 和 2.7，这一结果推广了 [9, 命题 2.2]。在不同假设下，另一个锥消去律如下。

命题 3.2 设 $A,B,C\subset X$ 为非空集合，且 内点 $K\neq\emptyset$。若 A 和 C 是对偶 $K-$有界的，并且

$$A+C\subset C+B+\operatorname{int}K,$$

then

$$A\subset\operatorname{conv}B+\operatorname{int}K.$$

证明。 如上所述，对所有 $x^{*}\in K^{+}\setminus\{0\}$,

$$x^{*}\left(A\right)+x^{*}\left(C\right)\subset x^{*}\left(C\right)+x^{*}\left(B\right)+(0,\infty).$$

由于 A和 C是对偶 $K-$有界的，$\inf\ x^{*}(A)+\inf\ x^{*}(C)\in\mathbb{R}$，且上述关系保证

$$\inf x^{*}\left(A\right)+\inf x^{*}\left(C\right)>\inf x^{*}\left(C\right)+\inf x^{*}\left(B\right),$$

因此 $\inf\ x^{*}\left(A\right)>\inf\ x^{*}\left(B\right)$。

现在反设存在 $x\in A\setminus(\operatorname{conv}\ B+\operatorname{int}K)$ 。那么，再次通过分离，可得 $x^{*}\in X^{*}\setminus\{0\}$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$ ，使得

$$x^{*}\left(\overline{x}\right)<x^{*}\left(b+k\right),\ \forall b\in B,\ \forall k\in\operatorname{int}K.$$

显然， $x^{*}\in K^{+}\setminus\{0\}$ 且

$$x^{*}\left(\overline{x}\right)\leq x^{*}\left(b\right),\ \forall b\in B.$$

这也意味着 $\inf\ x^*(A) \leq x^*(x) \leq \inf\ x^*(B)$。这就产生了矛盾，结论得证。□

将上述两个结果与相应的 [9,命题 2.2 和 2.6], 进行比较，可以发现，对偶锥有界性的概念为锥消去律提供了一个非常自然的框架。事实上，可以注意到，在 [9] 中定义的弱K–紧性蕴含对偶 K–有界性（见 [9, 引理 2.5]）。

接下来，我们证明锥消去律无法推广到对偶锥有界集这一类之外。

引理 3.3 设 A、$B \subset X$ 为非空集合，$E \subset X^*$ 为一个 w^*–闭凸锥。那么，以下断言等价:

(i) $\inf\ x^*(A) \geq \inf\ x^*(B)$ 对所有 $x^* \in E$;
(ii) $A \subset \operatorname{cl}\operatorname{conv}(B + E^+)$。

证明。假设 (i) 成立。若 (ii) 不成立，则可得 $a \in A \setminus \operatorname{cl}\operatorname{conv}(B + E^+)$。于是存在 $x^* \in X^*$ 使得 $x^*(a) < \inf\ x^*(B) + \inf\ x^*(E^+)$。通过一个众所周知的论证，我们得到 $x^*(m) \geq 0$, 对所有 $m \in E^+$, 从而 $x^* \in E^{++} = \operatorname{cl}_{w^*} E = E$. 因此 $\inf\ x^*(E^+) = 0$，且不等式 $\inf\ x^*(A) \leq x^*(a) < \inf\ x^*(B)$ 与该假设相矛盾。

现在假设 (ii) 成立。那么对所有 $x^* \in E$,

$$\inf x^*(A) \geq \inf x^*(B) + \inf x^*\left(E^+\right) \geq \inf x^*(B),$$

因此 (i) 也成立。□

˜**命题 3.4** 假设 $C \subset X$ 是一个集合，且 C 是伪双曲的。令 $A, B \subset X$.则以下断言等价:

(i) $A + C \subset$ 闭凸包 $\left(B + \tilde{C}\right)$;
(ii) $A \subset$ 闭凸包 $\left(B +$ 衰退锥 $\tilde{C}\right)$.

证明。我们通过证明等价关系来进行。由于对于任意集合 M、$N \subset X$，都有 $\widetilde{M+N} =$ 闭 $\left(\tilde{M} + \tilde{N}\right)$，因此关系 $A + C \subset$ 闭凸包 $\left(B + \tilde{C}\right)$ 等价于 $A + \tilde{C} \subset$ 闭凸包 $\left(B + \tilde{C}\right)$.。后一个包含关系（再次通过分离论证）等价于

$$\inf x^*(A) + \inf x^*\left(\tilde{C}\right) \geq \inf x^*(B) + \inf x^*\left(\tilde{C}\right),\ \forall x^* \in X^*,$$

进而等价于

$$\inf x^*(A) \geq \inf x^*(B),\ \forall x^* \in -\operatorname{bar}\tilde{C}.$$

˜根据引理 3.3（注意，$\operatorname{bar} C$ 是 w^*–闭的，因为 C 是伪双曲的），上述关系等价于

$$A \subset \operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(B + \left(-\operatorname{bar}\tilde{C}\right)^+\right) = \operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(B + \operatorname{rec}\tilde{C}\right).$$

证明完成。□

˜**命题 3.5** 假设 $C \subset X$ 是一个满足 C 为伪双曲的集合。那么以下断言等价:

(i) 对所有 $\emptyset \neq A$、$B \subset X$，包含关系

$$A + \tilde{C} \subset \operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(B + \tilde{C} + K\right)$$

蕴含

$$A \subset \operatorname{cl}\operatorname{conv}(B + K);$$

(ii) C 是对偶 $K-$有界的。

证明。 我们证明 (i)⇒(ii)。包含关系

$$A + \tilde{C} \subset \operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(B + \tilde{C} + K\right)$$

与.....相同

$$A + \tilde{C} \subset \operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(B + \tilde{C}\right),$$

而命题 3.4 表明，这等价于

$$A \subset \operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(B + \operatorname{rec}\tilde{C}\right).$$

˜在此取 $A =$ 衰退锥C和 $B = \{0\}$，上述关系成立，因此其前面的等价关系˜也成立。在这种情况下应用假设可得衰退锥$C \subset K.$。如注 2.12 所述，˜ ˜反向包含关系始终成立，因此衰退锥$C = K.$。考虑到 C 是伪双曲的，并利用推论 2.18，可得 C 是对偶锥有界 $K-$。

蕴含关系 (ii)⇒(i) 是由以下事实得出的： C 的对偶锥有界性 $K-$等价于 C 的对偶锥 $K-$有界性˜，并且由命题 3.1 可得。□

4 应用

本节介绍若干应用，在这些应用中，对偶锥有界性的概念证明了其效用。具体而言，我们将说明，在各种优化情形下，可以用本文提出的核心概念替代更强的有界性假设，同时仍保留相应结果的基本特征。本节分为两个小节。

4.1 Pareto 点的应用

首先，我们建立对偶锥有界性与 Pareto 极小性之间的联系。Let$A \subset X.$ 回顾（见 [18]），若 $a \in A$ 是 A 关于 K 的（弱）Pareto 极小点，则（$A - a$）$\cap -K = \{0\}$（分别地，（$A - a$）$\cap -\operatorname{int} K = \emptyset$，条件是 int $K \neq \emptyset$）。

定义 4.1 在上述记号下，若对偶 $K-$有界集合 A 对偶$K-$极小性性质成立，则称其具有该性质；也就是说，对所有 $x^* \in K^+$，都存在 $\min x^*(A)$。

注 4.2 显然，若对所有 $x^* \in K^+$， $x^*(A)$ 都是闭的，则 A 是对偶 $K-$有界的，当且仅当它具有对偶 $K-$极小性。

现在我们简要回顾一些广义紧性的概念。根据 [21]，若一个集合 $A \subset X$ 对任意由形如 $U + K$ 的集合构成的覆盖（其中 U 是开集），都能提取出一个有限子覆盖，则称其为 $K-$紧的（或关于锥 K 紧）。在 [8] 中引入并研究了以下概念：若对于任意序列 $(a_n) \subset A$，都存在一个序列 $(c_n) \subset K$，使得序列 $(a_n - c_n)$ 有一个收敛子序列收敛到 A 中的某个元素，则称集合 A 为 $K-$序列紧的。这两个概念也分别称为锥紧性和序列锥紧性。 [8] 中证明了，若 A 是 $K-$紧的，则 A 是 $K-$序列紧的。反过来，根据 [8, 定理 2.11], ，若 A 是 $K-$序列紧且可分的，则 A 是 $K-$ 紧的；但若不具备可分性，这一蕴含关系便不成立（见 [11]）。最后，同样根据 [21], 若 $A + K$ 是凸集，则称 A 为 $K-$凸的。

命题 4.3 假设集合 A 是 $K-$序列紧的，且 内点$K \neq \emptyset$。那么 A 是对偶 $K-$有界的，并且 A具有对偶 $K-$极小性性质。

证明。 令 $x^* \in K^+ \setminus \{0\}$. 反设存在 $(a_n) \subset A$ 使得$x^*(a_n) \to -\infty$. 那么，由于 A 是 $K-$序列紧的，我们可以找到一个序列 $(c_n) \subset K$ 使得$a_n - c_n \to a \in A$. 因此， $x^*(a_n) = x^*(a_n - c_n) + x^*(c_n) \geq x^*(a_n - c_n) \to y^*(a)$， 这就产生了矛盾。因此， A 是对偶 $K-$有界的。显然，这也意味着 $A + K$ 是对偶$K-$有界的。

现在我们证明 $x^*(A + K)$ 是闭集。事实上，取 $(a_n) \subset A$、$(k_n) \subset K$ 使得 $x^*(a_n + k_n) \to \alpha \in \mathbb{R}$. 同样，我们可以找到一个序列 $(c_n) \subset K$ 使得 $a_n - c_n \to a \in A$，因此 $x^*(a_n - c_n + c_n + k_n) \to \alpha$. 由此可得 $x^*(c_n + k_n) \to \alpha - x^*(a)$。由于 $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, $x^*(K) = \mathbb{R}_+$，故可推出$\alpha \in x^*(A) + \mathbb{R}_+ = x^*(A + K)$，从而得证。由证明的前一步可知， $A + K$ 是对偶 $K-$有界的；根据注 4.2 $A + K$ 具有对偶 $K-$极小性性质。但显然，这等价于说 A 具有对偶 $K-$极小性性质。结论由此得出。□

这些概念的用途将在下一个结果中显现。

命题 4.4 假设内$K \neq \emptyset$. 若存在 $x^* \in K^+ \setminus \{0\}$ 使得存在极小值$x^*(A)$，则 A 相对于 K有一个弱帕累托极小元。此外，若 A 是 $K-$凸的，则逆命题也成立。

证明。 根据假设，存在 $a \in A$，使得对于所有 $b \in A$， $x^*(a) \leq x^*(b)$。 若存在 $b \in A$ 使得 $b - a \in -$内K，那么 $x^*(b - a) < 0$，这就产生了矛盾。

反过来，若 A 是 $K-$凸的，且 a 是 A的弱帕累托极小元，，则 $(a -$内$K) \cap$闭包$(A + K) = \emptyset$，因此，根据分离定理，存在 $x^* \in K^+ \setminus \{0\}$ 使得对于所有 $b \in A$， $x^*(a) \leq x^*(b)$，故该蕴含的结论成立。□

4.2 嵌入结果

上一节推导出的消去规则带来了一个嵌入结果，使我们能够将对偶锥有界集族视为赋范向量空间中的一个锥。这为 [23] 中关于赋范向量空间内凸紧集的原始 R˚adstr¨om 嵌入定理提供了意义深远的推广。请注意， [10] 已针对锥有界集的情形研究了这种推广。本文将说明 [10] 中构造的哪些部分及其应用可以推广到更一般的对偶锥有界集情形。

以下集合是对 [10] 中所引入集合的略微变体:

$$\mathcal{CB}_K(X)=\{A\subset X\mid A \text{ is nonempty, } K-\text{bounded}\}$$

and

$$\mathcal{C}_K(X)=\left\{\tilde{A}\mid A\in\mathcal{CB}_K(X)\right\}.$$

记

$$\mathcal{CB}_{K^+}(X)=\{A\subset X\mid A \text{ 非空，且对偶地 } K\text{ –有界}\}$$

and

$$\mathcal{C}_{K^+}(X)=\left\{\tilde{A}\mid A\in\mathcal{CB}_{K^+}(X)\right\}.$$

显然， $\mathcal{CB}_K(X)\subset\mathcal{CB}_{K^+}(X)$ 且 $\mathcal{C}_K(X)\subset\mathcal{C}_{K^+}(X)$；由 Goossens 的例 2.7 和例 2.3 可知，这两个包含关系都是严格的。这些例子也促使我们引入集合

$$\mathcal{C}_G(X)=\left\{\tilde{A}\mid A\in\mathcal{CB}_{K^+}(X)\setminus\mathcal{CB}_K(X)\right\},$$

其中下标 G源自 Goossens。

对于 A， $B\subset X$ 非空且对偶有界的集合，定义 $A\oplus B=A+B$. 注意，命题 3.1 表明，若 A， B， $C\in\mathcal{CB}_{K^+}(X)$，则等式 $A\oplus C=C\oplus B$蕴含 $A=B$.因此，$(\mathcal{C}_{K^+}(X)\ \oplus)$ 是一个带有消去律的交换幺半群，其单位元为 $K=\text{cl}(\{0\}+K)\in\mathcal{C}_{K^+}(X)$。

我们将非负标量乘法定义为 $\mathcal{C}_{K^+}(X)$ 上的一种外部运算，记作，如下:

$$\lambda\odot\tilde{A}=\widetilde{\lambda A}=\begin{cases}K, \text{ if } \lambda=0,\\ \lambda\tilde{A}, \text{ if } \lambda>0.\end{cases}$$

此外，对于任意 $\tilde{A}$， $\tilde{B}\in\mathcal{C}_{K^+}(X)$ 以及任意 λ_1， $\lambda_2\geq 0$，很容易得到 $\lambda_1\odot\left(\tilde{A}\oplus\tilde{B}\right)=\lambda_1\odot\tilde{A}\oplus\lambda_1\odot\tilde{B}$，$(\lambda_1+\lambda_2)\odot\tilde{A}=\lambda_1\odot\tilde{A}\oplus\lambda_2\odot\tilde{A}$， $\lambda_1\odot\left(\lambda_2\odot\tilde{A}\right)=(\lambda_1\lambda_2)\odot\tilde{A}$， $1\odot\tilde{A}=\tilde{A}$.

现在很容易看出， [23, 定理 1，A，B] 中的所有假设均已满足，因此 $\mathcal{C}_{K^+}(X)$ 可以嵌入一个向量空间，我们将其记作 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$。按照 R°adstr¨om 的证明，这个线性空间 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$（ $\mathcal{C}_{K^+}(X)$ 的 R°adstr¨om 空间，或与$\mathcal{C}_{K^+}(X)$ 相关联的空间）由所有等价类构成，这些等价类由定义在 $\mathcal{C}_{K^+}(X)\times\mathcal{C}_{K^+}(X)$ 上的等价关系 $\sim$ 给出:

$$\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)\sim\left(\tilde{C},\tilde{D}\right)\iff\tilde{A}\oplus\tilde{D}=\tilde{B}\oplus\tilde{C}.$$

更准确地说， $\mathcal{G}_{K^+}(X)$上的加法定义为

$$\left\langle\tilde{A},\tilde{B}\right\rangle+\left\langle\tilde{C},\tilde{D}\right\rangle=\left\langle\tilde{A}\oplus\tilde{C},\tilde{B}\oplus\tilde{D}\right\rangle,$$

而标量 $\lambda\in\mathbb{R}$ 乘法定义为

$$\lambda\left\langle\tilde{A},\tilde{B}\right\rangle=\begin{cases}\left\langle\lambda\odot\tilde{A},\lambda\odot\tilde{B}\right\rangle, \text{ if } \lambda\geq 0,\\ \left\langle-\lambda\odot\tilde{B},-\lambda\odot\tilde{A}\right\rangle, \text{ if } \lambda<0,\end{cases}$$

这些运算使 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$ 成为实线性空间。集合 $\mathcal{C}_{K^+}(X)$ 通过映射 $\varphi:\ \mathcal{C}_{K^+}(X)\to\mathcal{G}_{K^+}(X)$ 给定的 $\varphi\left(\tilde{A}\right)=\left\langle\tilde{A},\ K\right\rangle$， 嵌入该向量空间中，并且 $\varphi(\mathcal{C}_{K^+}(X))$ 是 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$ 中的一个凸锥。

此外， $\mathcal{G}_{K^+}(X)$ 包含如下定义的凸尖锥：

$$\mathcal{K}_{K^+}(X)=\left\{\left\langle \tilde{A},\tilde{B}\right\rangle \in \mathcal{G}_{K^+}(X)\mid \tilde{A}\subset \tilde{B}\right\},$$

我们称其为 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$ 的序锥。

请注意， $\mathcal{C}_K(X)$ 的相应构造已在 [10] 中详细介绍，其相关的 R°adstr¨om 空间记为 $\mathcal{G}_K(X)$，而其序锥记为 $\mathcal{K}_K(X)$。

注意，若 $\mathcal{C}_G(X)\neq\emptyset$，则 $\mathcal{C}_G(X)\cup\{K\}=(\mathcal{C}_{K^+}(X)\setminus\mathcal{C}_K(X))\cup\{K\}$ 也是一个交换幺半群，满足消去律且具有相同的单位元，因此可以用同样的方式构造其 R°adstr¨om 空间，记为 $\mathcal{G}_G(X)$。下面的结果还记录了若干其他值得注意的性质。

命题 4.5 *(i)* $\mathcal{G}_K(X)$ 同构于 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$ 的一个线性子空间；*(ii)* 若 $\mathcal{C}_G(X)\neq\emptyset$，则 $\mathcal{G}_G(X)$ 同构于 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$。

证明。 (i) 定义线性映射 $\psi:\mathcal{G}_K(X)\to\mathcal{G}_{K^+}(X)$，

$$\psi\left(\left\langle \tilde{A},\tilde{B}\right\rangle_{\mathcal{G}_K(X)}\right)=\left\langle \tilde{A},\tilde{B}\right\rangle_{\mathcal{G}_{K^+}(X)},$$

其中，下标表示该类所处的空间。这个函数正是我们要寻找的同构。

(ii) 定义线性映射 $\omega:\mathcal{G}_G(X)\to\mathcal{G}_{K^+}(X)$，

$$\omega\left(\left\langle \tilde{A},\tilde{B}\right\rangle_{\mathcal{G}_G(X)}\right)=\left\langle \tilde{A},\tilde{B}\right\rangle_{\mathcal{G}_{K^+}(X)}.$$

事实上，容易看出这个函数是线性且单射的。若 $\left\langle \tilde{A},\ \tilde{B}\right\rangle\in\mathcal{G}_{K^+}(X)$，取 $\tilde{C}\in\mathcal{C}_{K^+}(X)\setminus\mathcal{C}_K(X)$，则有 $A\oplus C$，$B\oplus C\in\mathcal{C}_{K^+}(X)\setminus\mathcal{C}_K(X)$，

$$\left\langle \tilde{A}\oplus\tilde{C},\tilde{B}\oplus\tilde{C}\right\rangle_{\mathcal{G}_G(X)}=\left\langle \tilde{A},\tilde{B}\right\rangle_{\mathcal{G}_G(X)},$$

and

$$\omega\left(\left\langle \tilde{A}\oplus\tilde{C},\tilde{B}\oplus\tilde{C}\right\rangle_{\mathcal{G}_G(X)}\right)=\left\langle \tilde{A},\tilde{B}\right\rangle_{\mathcal{G}_{K^+}(X)}.$$

因此，该函数也是满射。 □

注 4.6 利用上述结果证明中定义的映射 ψ，我们还有$\psi(\mathcal{K}_K(X))\subset\mathcal{K}_{K^+}(X)$。

对于 $\mathcal{C}_K(X)$，我们能够执行 [23, 定理 1, C], 所给出的额外步骤，即通过 $\left\|\left\langle \tilde{A},\tilde{B}\right\rangle\right\|=h\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$. 在 $\mathcal{G}_K(X)$ 上定义一个范数。注意，对于某些 K–有界˜ ˜集合 A，B 豪斯多夫-庞培距离是有限的，而该范数实际上扩展了 $\mathcal{C}_K(X)$ 上的度量 h（见 [10, 引理 3.1]）。在我们正在考虑的新情形下，即 $\mathcal{C}_{K^+}(X)$ h 不再具有有限值。实际上，注意到当且仅当 A 有界时，$h\left(\tilde{A},K\right)<\infty$ 才成立，因此若 $h\left(\tilde{A},K\right)=\infty$ $\tilde{A}\in\mathcal{C}_{K^+}(X)\setminus\mathcal{C}_K(X)$。对此，我们记录以下结果。

命题 4.7 *(i)* 若 $\left\langle \tilde{A}, \tilde{B} \right\rangle = \left\langle \tilde{C}, \tilde{D} \right\rangle \in \mathcal{G}_{K^+}(X)$，则 $h\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = h\left(\tilde{C}, \tilde{D}\right)$；*(ii)* 若 $\tilde{A} \in \mathcal{C}_{K^+}(X) \setminus \mathcal{C}_K(X)$ 且 $\tilde{B} \in \mathcal{C}_K(X)$，则 $h\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = \infty$.

证明。 (i) 只需证明，如果 $h\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) < \infty$，那么 $h\left(\tilde{C}, \tilde{D}\right) = h\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$. 记$h\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = \alpha \in \mathbb{R}$. 于是对所有 $\varepsilon > 0$

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} + (\alpha + \varepsilon) D_X \text{ and } \tilde{B} \subset \tilde{A} + (\alpha + \varepsilon) D_X.$$

因此,

$$\tilde{A} + \tilde{D} \subset \widetilde{B + D} + (\alpha + \varepsilon) D_X \text{ and } \tilde{B} + \tilde{C} \subset \widetilde{A + C} + (\alpha + \varepsilon) D_X,$$

由 $A \oplus D = B \oplus C$ 可知,

$$\tilde{B} + \tilde{C} \subset \mathrm{cl}\left(\tilde{B} + \tilde{D} + (\alpha + \varepsilon) D_X\right) \text{ and } \tilde{A} + \tilde{D} \subset \mathrm{cl}\left(\tilde{A} + \tilde{C} + (\alpha + \varepsilon) D_X\right).$$

由命题 3.1 得

$$\tilde{C} \subset \mathrm{cl}\left(\tilde{D} + (\alpha + \varepsilon) D_X\right) \subset \tilde{D} + (\alpha + 2\varepsilon) D_X \text{ and } \tilde{D} \subset \mathrm{cl}\left(\tilde{C} + (\alpha + \varepsilon) D_X\right) \subset \tilde{C} + (\alpha + 2\varepsilon) D_X.$$

我们得到 $h\left(\tilde{C}, \tilde{D}\right) \leq \alpha + 2\varepsilon$，并令 $\varepsilon \to 0$, $h\left(\tilde{C}, \tilde{D}\right) \leq \alpha = h\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$. 交换 $\left\langle \tilde{A}, \tilde{B} \right\rangle$ 与 $\left\langle \tilde{C}, \tilde{D} \right\rangle$ 的角色，可得反向不等式，从而得到等式。

(ii) 反设 $h\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) < \infty$，那么对所有 $\varepsilon > 0$

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} + \left(h\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) + \varepsilon\right) D_X,$$

并且由于右侧的集合是 K–有界的，我们得到 A 是 K–有界的，这就产生了矛盾。□

关于在 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$ 上引入拓扑结构的方法，至少有两种可能。

其中一种方法（这里简要提及）是考虑上述形式的扩展范数（即允许取无穷值的范数）。将这一拓扑记为 $\tau_{\|\cdot\|\cdot}$。我们区分两种情形。

首先，如果 $\mathcal{C}_G(X) = \emptyset$，那么 $\mathcal{G}_K(X) = \mathcal{G}_{K^+}(X)$，并且显然，$\tau_{\|\cdot\|}$ 是通常的范数拓扑，该拓扑已在 [10] 中针对 $\mathcal{G}_K(X)$进行了研究。在这种情况下，引用的文献证明了相对于 $\tau_{\|\cdot\|}$，$\mathrm{int}\,\mathcal{K}_K(X)$ 非空，条件是 $\mathrm{int}\,K \neq \emptyset$，更准确地说,

$$\mathrm{int}\,\mathcal{K}_K(X) = \left\{ \left\langle \tilde{A}, \tilde{B} \right\rangle \in \mathcal{K}_K(X) \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \tilde{A} + \varepsilon B_X \subset \tilde{B} \right\}.$$

其次，如果 $\mathcal{C}_G(X) \neq \emptyset$，那么根据命题 4.7（ii），$\|\cdot\|$ 取无穷值；对于一般情形，这一情况已在 [4] 中得到详尽研究。在此情形下，相对于 $\tau_{\|\cdot\|}$，$\mathrm{int}\,\mathcal{K}_{K^+}(X)$ 的内部仍然非空，只要 int $K \neq \emptyset$，其证明与命题 3.2] 类似。注意，在 $\mathrm{int}\,\mathcal{K}_{K^+}(X)$ 中存在范数为 ∞. 的元素。事实上，若取 $C \in \mathcal{C}_G(X)$ 和$B = C \cup D_X$，则 $B \in \mathcal{C}_G(X)$；根据命题 4.7（ii），元素 $\left\langle 2^{-1}\widetilde{D_X}, \tilde{B} \right\rangle$

来自 $\operatorname{int}\mathcal{K}_{K^+}(X)$ 的元素范数为 ∞。然而，由该范数诱导的拓扑并不是线性拓扑。因此，我们希望在 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$ 上找到一个适当的拓扑。

因此，我们考虑半范数族 $\mathcal{P}=\{p_{x^*}\mid x^*\in K^+\}$，其中 $p_{x^*}:\mathcal{G}_{K^+}(X)\to\mathbb{R}$，

$$p_{x^*}\left(\left\langle\tilde{A},\tilde{B}\right\rangle\right)=\left|\inf x^*\left(\tilde{A}\right)-\inf x^*\left(\tilde{B}\right)\right|=\left|\inf x^*(A)-\inf x^*(B)\right|,\ \forall x^*\in K^+,$$

它们赋予 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$ 一个局部凸拓扑。我们用 $\tau_{\mathcal{P}}$. 表示该拓扑。当然，这比 $\tau_{\|\cdot\|\cdot}$ 所对应的拓扑更粗。

$\mathcal{K}_{K^+}(X)$ 在 $\tau_{\mathcal{P}}$ 下的主要拓扑性质如下。

命题 4.8 *(i)* 锥 $\mathcal{K}_{K^+}(X)$ 在 $\tau_{\mathcal{P}}$. 中是闭的。

(ii) 若 K 是尖锥且 $\mathcal{C}_G(X)\neq\emptyset$，则 $\mathcal{K}_{K^+}(X)$ 在 $\tau_{\mathcal{P}}$ 中的内部为空。

证明。 (i) 设 $\left\langle\tilde{A},\ \tilde{B}\right\rangle\in\mathrm{cl}_{\tau_{\mathcal{P}}}\mathcal{K}_{K^+}(X)$。那么，对所有 $x^*\in K^+$ 以及所有 $\varepsilon>0$，存在 $\left\langle\tilde{C}_{x^*,\ \varepsilon},\tilde{D}_{x^*,\ \varepsilon}\right\rangle\in\mathcal{G}_{K^+}(X)$，使得

$$\left|\inf x^*\left(\tilde{C}_{x^*,\varepsilon}\right)-\inf x^*\left(\tilde{D}_{x^*,\varepsilon}\right)\right|<\varepsilon$$

and

$$\left\langle\tilde{A},\tilde{B}\right\rangle+\left\langle\tilde{C}_{x^*,\varepsilon},\tilde{D}_{x^*,\varepsilon}\right\rangle\in\mathcal{K}_{K^+}(X).$$

考虑到 $\mathcal{K}_{K^+}(X)$ 的定义，我们有如下包含关系

$$\tilde{A}\oplus\tilde{C}_{x^*,\varepsilon}\subset\tilde{B}\oplus\tilde{D}_{x^*,\varepsilon},$$

由此可得

$$x^*\left(\tilde{A}\right)+x^*\left(\tilde{C}_{x^*,\varepsilon}\right)+(0,\infty)\subset x^*\left(\tilde{B}\right)+x^*\left(\tilde{D}_{x^*,\varepsilon}\right)+(-\varepsilon,\infty).$$

因此，我们可以写成

$$\begin{aligned}x^*\left(\tilde{A}\right)+\inf x^*\left(\tilde{C}_{x^*,\varepsilon}\right)+(0,\infty)&\subset x^*\left(\tilde{A}\right)+x^*\left(\tilde{C}_{x^*,\varepsilon}\right)+(-\varepsilon,0)+(0,\infty)\\&\subset x^*\left(\tilde{B}\right)+x^*\left(\tilde{D}_{x^*,\varepsilon}\right)+(-\varepsilon,0)+(-\varepsilon,\infty)\\&\subset x^*\left(\tilde{B}\right)+\inf x^*\left(\tilde{D}_{x^*,\varepsilon}\right)+(-\varepsilon,0)+(-\varepsilon,\infty)\\&\subset x^*\left(\tilde{B}\right)+\inf x^*\left(\tilde{C}_{x^*,\varepsilon}\right)+(-2\varepsilon,\varepsilon)+(-\varepsilon,\infty)\\&=x^*\left(\tilde{B}\right)+\inf x^*\left(\tilde{C}_{x^*,\varepsilon}\right)+(-3\varepsilon,\infty).\end{aligned}$$

所以，对所有 $\varepsilon>0$,

$$x^*\left(\tilde{A}\right)\subset x^*\left(\tilde{B}\right)+(-3\varepsilon,\infty),$$

由此得到

$$\inf x^*\left(\tilde{A}\right)\geq\inf x^*\left(\tilde{B}\right).$$

由于后一个不等式对所有 $x^*\in K^+$，都成立，简单的分离论证表明 $\tilde{A}\subset\tilde{B}$, 因此 $\left\langle\tilde{A},\tilde{B}\right\rangle\in\mathcal{K}_{K^+}(X)$。

（ii）反设结论不成立。则存在 $\left\langle \tilde{A}, \tilde{B} \right\rangle$，它相对于 $\tau_{\mathcal{P}}$. 属于 $\mathcal{K}_{K^+}(X)$ 的内部。于是可以找到 $\varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (x_i^*)_{i\in 1,n} \subset K^+$，使得对所有 $\left\langle \tilde{C}, \tilde{D} \right\rangle \in \mathcal{G}_{K^+}(X)$，关系

$$\left|\inf x_i^*\left(\tilde{C}\right) - \inf x_i^*\left(\tilde{D}\right) - \inf x_i^*\left(\tilde{A}\right) + \inf x_i^*\left(\tilde{B}\right)\right| < \varepsilon,\ \forall i \in \overline{1,n}$$

~ ~意味着 $C \subset D$.

现在取 $\tilde{C} = \mathrm{cl}\left(\tilde{A} + \bigcap_{i\in 1,n} \text{核 } x_i^*\right)$ 和 $\tilde{D} = \tilde{B}$.。那么上述关系显然成立，因此

$$\tilde{A} + \bigcap_{i\in\overline{1,n}} \ker x_i^* \subset \tilde{B}.$$

~ ~取$u \in \bigcap_{i\in 1,\ n}$核 x_i^*.。由于 $A \neq \emptyset$，我们得到 $u \in$衰退锥 B.。但是，根据注 2.12，~衰退锥 $B = K$.。由于$\bigcap_{i\in 1,\ n}$核 x_i^*是一个线性子空间，我们推得

$$\bigcap_{i\in\overline{1,n}} \ker x_i^* \subset K \cap -K.$$

由于 K是尖锥，我们得到$\bigcap_{i\in 1,\ n}$核 $x_i^* = \{0\}$.。因此，映射

$$x \mapsto \left(x_1^*(x), ..., x_n^*(x)\right) \in \mathbb{R}^n$$

是一个线性单射，其值域是一个有限维空间。这意味着 X 也是有限维的。

此外，对于所有 $x^* \in X^*$,

$$\{0\} = \bigcap_{i\in\overline{1,n}} \ker x_i^* \subset \ker x^*,$$

根据一个众所周知的结果（例如，参见 [6, 引理 3.2]），x^* 可表示为 $(x_i^*)_{i\in 1,\ n}$，的线性组合，因此 X^*作为线性空间由 $(x_i^*)_{i\in 1,\ n}\cdot$生成。记

$$\hat{K} = \operatorname{conv}\operatorname{cone}\left\{x_i^* \mid i \in \overline{1,n}\right\},$$

这是一个闭凸锥。显然有包含关系 $\hat{K} \subset K^+$。下面证明反向包含关系也成立。对于所有 $\lambda > 0$, ，考虑集合 $K_\lambda = \left(\hat{K}\right)^+ \cap \lambda D_X$，它是一个对偶有界集合（实际上是有界的），并取 $A_\lambda = A \oplus K_\lambda \in \mathcal{C}_{K^+}(X)$。容易看出，对于所有 $i \in 1,\ n,$ $\inf x_i^*(A_\lambda) = \inf x_i^*(A)$，因此

$$\left|\inf x_i^*(A_\lambda) - \inf x_i^*\left(\tilde{B}\right) - \inf x_i^*\left(\tilde{A}\right) + \inf x_i^*\left(\tilde{B}\right)\right| < \varepsilon,\ \forall i \in \overline{1,n}.$$

我们得到，对于所有 $\lambda > 0$，都有 $A_\lambda \subset \tilde{B}$，因此 $\tilde{A} + \left(\hat{K}\right)^+ \subset \tilde{B}$.。如上所述，$\left(\hat{K}\right)^+ \subset$衰退锥 $\tilde{B} = K$，由此得到 $K^+ \subset \hat{K}$.。因此，最终有 $\hat{K} = K^+$，这一等式表明 K^+ 是有限生成的。由命题 2.4，$\mathcal{C}_G(X) = \emptyset$，这与我们的假设矛盾。我们得出结论：$\mathcal{K}_{K^+}(X)$ 在 $\tau_{\mathcal{P}}$ 中的内部为空。□

鉴于以上所有事实，我们现在可以断言，引文文献 [10] 中所有仅考虑嵌入空间的代数结构以及序锥闭性的结果和应用，都可以推广到 $\mathcal{G}_{K^+}(X)$，这意味着，在这些结果中，对偶锥有界集可以替代锥有界集。这些推广内容还包括一些关于不同类型优化问题的论断。

5 总结性说明

在本文中，我们针对赋范向量空间的子集，提出了一种相对于闭凸锥的弱有界性概念。该概念严格弱于文献中所有相关概念，但仍足以保证优化领域中一些重要结果的结论成立。我们还认为，这一称为对偶锥有界性的概念或许也有助于研究其他问题。例如，我们认为，该概念与推广某些关于闭值多值函数佩蒂斯可积性的概念和结果的思路相容（例如参见 [12]）。这一概念的另一种可能用途——可在未来工作中加以探索——是为向量优化中某些特殊类型的支配性质建立弱条件（参见 [14]）。

数据可用性。本文不涉及相关数据。
利益披露声明。作者对研究的各个方面及稿件的撰写贡献均等。作者未报告任何潜在利益冲突。

参考文献

[1] J.Bair，内开锥与凸集渐近锥内部之间的联系，《比利时数学会通报》，B辑，35（1983年），177–187。[2] J. Bair，关于凸集障碍锥的 `闭和 ´相对开 `性质的再探讨，《查理大学数学评论》，26（1985年），315–318。[3] H.H. Bauschke、H. Ouyang、X. Wang，关于凸锥之间的角，《应用与数值优化杂志》，4（2022），131–141。[4] G. Beer，具有无穷值的范数，《凸分析杂志》，22（2015），37–60。[5] D.P. Bertsekas，凸优化理论，Athena Scientific，贝尔蒙特，2009。[6] H. Brezis，泛函分析、索博列夫空间与偏微分方程，施普林格，纽约，2011。[7] D. D¨orfler、A. L¨ohne，可表示为紧集与锥之和的凸集，《非线性与变分分析杂志》，8（2024），681–689。[8] M. Durea、E.-A. Florea，集合的锥紧性及其在集值均衡问题中的应用，《优化理论与应用杂志》，200（2024），1286–1308。[9] M. Durea、E.-A. Florea，锥消去律及其在集值优化中的一些应用，《Optimization》，74（2025），2657–2675。[10] M. Durea、E.-C. Stamate，一类上图集的嵌入结果及其在集值优化中的应用，《非线性与变分分析杂志》，9（2025），907–925。[11] M. Durea、E.-A. Florea、E.-C. Stamate，关于可微性假设下向量与集值优化的统一方法，《Optimization》，DOI：10.1080/02331934.2025.2597968。

[12] K. El Amri、C. Hess，闭值多值函数的 Pettis 积分，《集值分析》，8（2000），329–360。[13] E. Ernst，Gale-Klee-Rockafellar 定理的逆命题：凸函数在其定义域边界处的连续性，《美国数学会会刊》，141（2013），3665–3672。[14] E. Ernst，对于依 Penot 和 Th ´era 意义下下半连续的向量值函数的帕累托效率，《Optimization》，DOI：10.1080/02331934.2025.2589350。[15] A. Farajzadeh，关于相对于锥的集合的极大元和极小元，《优化快报》，18（2024），1533–1540。[16] M.A. Goberna、J.E. Mart´ınez-Legaz、M.I. Todorov，关于 Motzkin 可分解集与函数，《数学分析与应用杂志》，372（2010），525–537。[17] P. Goossens，双曲集与渐近线，《数学分析与应用杂志》，116（1986），604–618。[18] A. G¨opfert、H. Riahi、C. Tammer、C. Z˘alinescu，《偏序空间中的变分方法》，第二版，施普林格，查姆，2023。[19] A.J. Hoffman，关于线性不等式组的近似解，《国家标准局研究杂志》，49（1952），263–265。[20] P. Leonetti、G. Principi，锥的表示及其在决策理论中的应用，《数学分析与应用杂志》，550（2025），论文编号129561。[21] D.T. Luc，《向量优化理论》，施普林格，柏林，1989。[22] J.E. Mart´ınez-Legaz、C. Pintea，具有开或闭高斯值域的闭凸集，《数学规划》，189（2021），433–454。[23] H. R˚adstr¨om，凸集空间的嵌入定理，《美国数学会会刊》，3（1952），165–169。[24] J.-P. Penot、M. Th´era，一般拓扑学中的半连续映射，《数学档案》，38（1982），158–166。[25] K.D. Schmidt，凸集类的嵌入定理，《数学应用学报》，5（1986），209–237。[26] A. Zaffaroni，凸辐射余星形集与最小次线性规范，《凸分析杂志》，20（2013），307–328。[27] C. Z˘alinescu，《一般向量空间中的凸分析》，世界科学出版社，新加坡，2002。