arXiv:2601.07520v1 [math.AC] 12 Jan 2026

上簇代数和有限劳朗交环的阶乘性与类群：一种计算方法

Mara Pompili 和 Daniel Smertnig

摘要。我们研究局部无环簇代数的阶乘性和类群。为此，我们引入一类称为有限劳朗交环（FLIR）的新环类，其中包括局部无环簇代数、满秩上簇代数，以及某些广义上簇代数和 Laurent 现象代数。我们的主要成果包括：计算显式 FLIR 的类群、判定其阶乘性，以及计算给定元素的所有分解的算法。这些算法基于多元多项式分解，避免了计算成本高昂的 Gröbner 基计算。

目录

1. 引言 1
2. 预备知识 4
3. 劳朗交环 13
4. 可计算克鲁尔整环 20
5. 劳朗交环与簇代数 31
6. FLIR 中素除子的分布 43
7. 最后的观察 46
参考文献 51

1. 引言

关于簇代数或上簇代数的一个基本环论问题是：它是否具有唯一分解性，即每个非零元素是否都能唯一分解为不可约元（即不可约元）的乘积，且分解在顺序和单位元意义下唯一。上簇代数通常是诺特的且整闭，或者至少是克鲁尔整环；在这种情况下，它具有唯一分解性当且仅当其（除子）类群是平凡的。因此，更一般的问题是确定其类群。即使在不具有唯一分解性的情形下，这也能完整刻画其分解理论。

Geiss、Leclerc 和 Schr¨oer 首先研究了簇代数的阶乘性，并给出了充分条件 [GLS13]。Garcia Elsener、Lampe 和第二作者刻画了

2020 数学主题分类。主要分类 13F60；次要分类 13C20、13F05、13F15。关键词和短语。簇代数、计算代数、除子类群、阶乘性、分解理论、克鲁尔整环。

具有无环初始种子的簇代数的阶乘性，并证明了一个关于类群的初等公式，该公式以初始交换矩阵表示 [GELS19]。有限型和仿射簇代数的类群可由此直接确定 [GELS19，推论 5.16 和 5。17]。

无环簇代数与其上簇代数相同 [BFZ05； Mul14]。一般而言，从环论和几何视角来看，上簇代数是更自然的对象。例如，它们是$\mathcal{A}$-簇簇簇变体上的全局截面环 [GHK15，注 2。9]。Cao、Keller 和 Qin [CKQ23]将研究重点转向上簇代数，证明了满秩上簇代数是唯一分解的，当且仅当其初始交换多项式不可约。第一作者将这一结果推广至类群的确定 [Pom25], ，并得到了关于广义簇代数和 Laurent 现象代数的结果 [Pom26，§4 和 §5]。

这些代数有一个共同点：从初始种子出发，只需考察少数几种特定变异，便可发现代数的完整高度一谱：对于满秩上簇代数，海星引理 [BFZ05，推论 1。9] 表明，只需从初始种子沿每个方向各变异一次。对于无环簇代数，通过一系列精心选择的冻结与变异，也能同样明确地理解其高度一谱 [GELS19， §4] [Mul14]。

局部无环簇代数 [Mul13] 构成了一大类与其上簇代数相一致的簇代数 [Mul14]。它们包括无环簇代数、由每个边界分支上至少有两个标记点的标记曲面产生的簇代数 [Mul13、定理 10。6], 格拉斯曼流形的坐标环 [MS16],以及更一般的开正拟阵簇和辫簇的坐标环 [GL23； Cas+25]。

如果 A 是一个局部无环簇代数，那么 Spec(A) 仍然具有一个由有限多个孤立簇局部化构成的簇覆盖。然而，如果交换矩阵不具有满秩，该覆盖可能涉及一系列复杂的变异。我们不应期待能够根据初始种子用一个简单公式给出类群的秩。

本文通过采用算法方法解决了这一问题：我们不提供显式公式，而是给出一种算法，该算法以一个局部无环簇代数作为输入，并计算其类群。这类似于数域中整数环的情形：目前尚无类群的一般公式，但对于给定的任意整数环，其类群都是可计算的。

一旦类群可计算，就可以轻而易举地判定该代数是否具有唯一分解。但从这种计算角度出发，还会自然地产生一个算法问题：给定代数中的一个元素，计算它的所有原子因式分解。我们证明这也是可行的。

为了获得这类计算结果，基环本身需要在适当意义下可计算，并且必须已知一个由孤立（或无环）簇局部化构成的簇覆盖

。虽然后一条件并非自动满足，但通常可以实现，因为已有许多簇代数被证明是通过 Banff 算法实现局部无环的 [Mul13，§5]，该算法会明确构造出这样的覆盖。例如，对于每个边界分支上至少有两个标记点的曲面簇代数，情况就是如此。

下面给出主结果的一个简化版本。若以某个交换矩阵为起点运行 Banff 算法并成功终止，则称该交换矩阵满足班夫性质。第4节讨论可计算结构。

定理 1.1。设 D 是一个可计算克鲁尔整环(例如 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}$、有限域或$\overline{\mathbb{Z}}$)，且 $\mathbb{P}$ 是一个可计算半域(例如热带半域)。设($\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、B) 是一个种子，其交换矩阵 B满足班夫性质；设 $A = A(\boldsymbol{x}、\boldsymbol{y}、B)$ 是相应的、定义在 D 上且系数取自 $\mathbb{P}$的簇代数。则存在算法可以：

(1) 计算类群$\mathrm{Cl}(A)$；

(2) 判定 A 是否为唯一分解整环；以及

(3) 给定 $0 \neq a \in A$，计算 A中 a 的所有原子分解。

事实上，我们首先在定义 *3.1* 和 *3.3*中引入一类新的环，称为有限劳朗交环 (FLIR)，它刻画了上簇代数在高度一处的相关关键性质。FLIR 的定义非常简单，同时又足够灵活，能够涵盖上簇代数的各种推广，例如广义簇代数和 Laurent 现象代数的一些有趣特例。由于基环为克鲁尔整环的 FLIR 本身也是克鲁尔整环（命题 3.4），因此它们为以统一的方式研究此类代数的分解理论提供了自然的框架。

与局部无环代数不同，这类更一般的 FLIR 可能含有 深点，其含义见 [Cas+24; BM25]。然而，这些深点的高度至少为二，因此不会妨碍对因式分解的研究（注 5.2）。

如 [GELS19所述；Pom25]，我们的方法基于乘法理想理论中的工具，尤其是克鲁尔整环和永田定理（见下文第2.2 节）。近期引入的赋值配对 [CKQ23]可在这一框架下用离散赋值来理解 [Pom25，§5]。我们在定义可计算克鲁尔整环时（定义4.1），对如何在算法层面执行克鲁尔整环中的基本运算给出了严格定义。除了算术运算外，这还包括除子和类群的计算。当然，真正值得关注的基环只有一些，例如 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}$、数域及其整数环，还有有限域。不过，可计算克鲁尔整环这一框架使我们能够以清晰统一的方式处理各种基环。

在可计算克鲁尔整环的框架下，我们的主要结果是：元素的所有分解都可计算（定理4.10）；并且，在可计算克鲁尔整环上、分式域具有分裂算法的显式 FLIR 仍是可计算克鲁尔整环（定理4.14）。

在完成这些准备工作后，很容易看出，Banff 算法表明 Banff 簇代数是显式 FLIR（定理 5.8），由此即可得到定理1.1。

FLIR 框架也可直接用于恢复关于满秩上簇代数 [CKQ23；Pom25] 以及无环簇代数 [GELS19]的因式分解结果。对于满秩上簇代数，我们不再探讨这一点，因为与[Pom25]相比，这并无太大优势。对于无环簇代数，我们对 [GELS19]中最具技术性的步骤给出一个更简单、更具概念性的证明，并在第 [GELS19篇论文的第 4 个问题。8]节中回答该问题7.2。

我们算法的一项关键特点是其实用性较强：它们完全避免使用 Gr¨obner 基，因为随着变量数量或簇覆盖规模的增长，使用 Gröbner 基很快就会变得不切实际。相反，这些算法基于 Laurent 现象和多元多项式的因式分解，而后者已有实用的算法 [Kal92；Kal03]。事实上，由于 Laurent 多项式环是上簇代数的特殊情形，多元多项式因式分解的复杂度也为上簇代数中元素因式分解的复杂度提供了一个自然下界。我们使用计算机代数系统 SageMath [Sage25]实现了这些算法的原型版本。

在第 5.3 节中，我们还介绍了一种替代方法，即调整 Banff 算法，以计算 Banff 簇代数的有限表示（使用 Gr¨obner 基），并通过主分解确定类群。Matherne 和 Muller[MM15] 最先研究了上簇代数表示的计算。在第 5.4 节中，我们在一系列例子上比较了多项式因式分解方法与 Gr¨obner 基方法。结果有力地表明，我们基于劳伦特现象的算法在渐近性能上的优势，确实转化为实际性能优势，显著扩大了能够进行此类计算的簇代数范围（表 1）。

致谢。 Pompili 的研究部分得到了奥地利科学基金（FWF）项目 10.55776/DOC-183-N 的资助。Smertnig 得到了斯洛文尼亚研究与创新署（ARIS）项目 P1-0288 和资助项目 J1-60025 的支持。

2. 预备知识

我们用 $[1, n]$ 表示离散区间$\{a \in \mathbb{Z} \colon 1 \le a \le n\}$。整环 D 是一个交换环，含有幺元，且零是唯一的零因子。我们用 $D^\times$ 表示其单位群，用 $\mathfrak{X}(D)$表示高度一素理想的集合。

采用多重指标记号会很方便：给定一个变量元组 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$，我们用 $D[\boldsymbol{x}]$ 表示多项式环 $D[x_1, \dots, x_n]$，用 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 表示相应的 Laurent 多项式环。类似地，若 K 是一个域，则 $K(\boldsymbol{x})$表示有理函数域。若 $\boldsymbol{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$，我们记作 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}} := x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$。

2.1. **因式分解**。我们回顾分解理论中的一些基本概念；标准参考文献是 [GHK06], 近期综述见 [Sme16；GZ20；AG21；CG25；GKL26], 关于范畴论观点，参见 [CCT25]。这些概念的近期推广见 [AF11；Tri22；CT24；Cos25]。设 D 是一个整环。

非零非单位元 $u \in D$ 称为原子（等价地，不可约元），如果 $u = ab$且 a、$b \in D$ 蕴含 $a \in D^\times$ 或 $b \in D^\times$。非零非单位元 $p \in D$ 称为素元，如果对于所有 a、$b \in D$，$p \mid ab$ 蕴含 $p \mid a$ 或 $p \mid b$。每个素元都是原子，但一般而言反之不成立。

若每个非零非单位元都可表示为不可约元的乘积，则整环 D 称为原子整环；若每个非零元都可表示为素元的乘积，则称其为唯一分解整环。以下结论是标准结果。

定理 2.1. 对于原子整环，以下陈述等价。

(a)整环 D 是唯一分解整环。(b) D 的每个原子都是素元。(c) 同一元素的任意两种原子分解，除了因子顺序以及原子的相伴元外，完全相同。

这里，若 $aD = bD$，则称两个元素 a、$b \in D$ 互为相伴元；等价地，若存在单位元 $\varepsilon \in D^\times$ 使得 $a = \varepsilon b$，则称它们互为相伴元。一般而言，原子性远弱于唯一分解性。

本文所讨论的整环均为 有限分解整环（FFDs）：每个非零元素在忽略因子顺序及相伴关系后，只有有限种不同的原子分解 [GHK06，第 1 章。5] [AG21]。在这类整环中，计算给定元素的所有分解是有意义的。

2.2. **克鲁尔整环与类群**。克鲁尔整环是乘法理想理论和分解理论研究中的一类核心环。对我们的研究而言，[Fos73]中的经典论述已足够。其他经典参考文献包括 [Gil92] [Bou72，第七章]。现代论述可见于 [GHK06；Ell19；WK24；Hal25]。

克鲁尔整环有许多等价刻画，以下刻画对我们最为有用。设 D 是一个整环，其分式域为 K。

定义 2.2. D 是克鲁尔整环，当且仅当存在一族离散赋值环 (离散赋值环) $(V_i)_{i \in I}$，其分式域为 K，使得

(i) $D = \bigcap_{i\in I} V_i$，并且

(ii) 对于每个 $0 \neq a \in D$，集合 $\{i \in I : \ a \notin V_i^\times\}$ 都是有限的。

第二个性质称为有限特征性质。

若 $P \in \mathfrak{X}(D)$ 是克鲁尔整环 D的高度一素理想，则局部化D_P 是一个离散赋值环 [Fos73，命题 1。9], 并且

$$D = \bigcap_{P\in\mathfrak{X}(D)} D_P.$$

克鲁尔整环的子交、具有相同分式域的克鲁尔整环的有限交，以及克鲁尔整环的局部化，显然仍是克鲁尔整环 [Fos73，第 1]章。域和唯一分解整环都是克鲁尔整环。

2.2.1. (劳伦) 多项式环。 多项式环 $D[\boldsymbol{x}]$ 是克鲁尔整环，当且仅当基环 D 是克鲁尔整环； $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$也同样如此。高度一谱与不交并一一对应 $\mathfrak{X}(D) \sqcup \mathfrak{X}(K[\boldsymbol{x}])$，分别对应于$\mathfrak{X}(D)\sqcup\mathfrak{X}(K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])$。这不难验证，也可由关于克鲁尔幺半群代数的更一般类似结论推出 [Gil84，§15]。

更具体地说，如果 $P \in \mathfrak{X}(D[\boldsymbol{x}])$，那么有两种可能。

- 如果 $P \cap D \neq 0$，那么 $P \cap D \in \mathfrak{X}(D)$ 和 $P = (P \cap D)[\boldsymbol{x}]$。相应的赋值 $\mathrm{v}_P\colon \ K(\boldsymbol{x}) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ 定义在 $D[\boldsymbol{x}]$ 上，定义为
$$\mathrm{v}_P\Big(\sum_{\boldsymbol{m}} a_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}\Big) = \min\{\,\mathrm{v}_{P\cap D}(a_{\boldsymbol{m}}) : \boldsymbol{m}\,\}.$$
- 如果 $P \cap D = 0$，那么 P 局部化为 $K[\boldsymbol{x}]$ 的一个高度一素理想，而 $P = PK[\boldsymbol{x}]\cap D[\boldsymbol{x}]$。由于 $K[\boldsymbol{x}]$ 是唯一分解的，存在一个不可约多项式 $p \in K[\boldsymbol{x}]$，使得 $PK[\boldsymbol{x}] = pK[\boldsymbol{x}]$，且 $\mathrm{v}_P(f) = \mathrm{v}_p(f)$ 是 f中 p关于 $f \in D[\boldsymbol{x}]$的重数。

对于 Laurent 多项式环 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$，同样的论证表明， $\mathfrak{X}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])$ 与 $\mathfrak{X}(D)$ 和 $\mathfrak{X}(K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])$ 的不交并一一对应；也就是说，与 $D[\boldsymbol{x}]$ 相反，素理想 (x_1)、……、(x_n) 不会出现。

2.2.2. 除子理想与除子。 设 D 是一个克鲁尔整环。分式理想 属于 D是一个非零[1] D-子模 I，其为 K 且存在 $x \in K^\times$ 使得 $xI \subseteq D$。对于分式理想 I，令

$$I^{-1} := (D\colon I) := \{\, x \in K : xI \subseteq D \,\} \qquad \text{and} \qquad I_v := (I^{-1})^{-1}.$$

那么，当 $I = I_v$ 时， I 是除子理想。

[1]有时也允许零模，但这里我们将其排除，因为这并无必要，而且可以避免我们每次都必须将其排除。因此，对我们而言，$\mathcal{F}_v(D)$ 是所有非零除子分式理想的集合；而其他文献通常写作 $\mathcal{F}_v(D)^\times$ ，以排除 0。

D 的非零除子素理想集合，恰好是高度一素理想 $\mathfrak{X}(D)$ [Fos73，定理 3.12]。在由 $I \cdot_v J := (IJ)_v$ 定义的 v-乘法运算下，除子分式理想集合 $\mathrm{F}_v(D)$ 构成一个以 $\mathfrak{X}(D)$ 为基、单位元为 D [的自由阿贝尔群（Fos73，推论 3.14]）。具体而言，对于 $I \in \mathrm{F}_v(D)$，存在唯一的表示

$$I = \prod_{P \in \mathfrak{X}(D)}^{v} P^{\mathsf{v}_P(I)}, \tag{1}$$

其中，符号 $\prod^v$ 表示 v-积，其中 $\mathsf{v}_P(I) \in \mathbb{Z}$，且除有限多个因子外，其余因子都是平凡的，即等于 D。

除子闭包与局部化交换，明确地说 $S^{-1}I_v = (S^{-1}I)_v$ 对于 $I \in \mathcal{F}_v(D)$ 以及乘法集 $S \subseteq D$ [Fos73，推论 5。5]在 $P \in \mathfrak{X}(D)$ 处局部化，可见 $\mathsf{v}_P(I) = \min\{\mathsf{v}_P(a) : a \in I\}$。

式（1）促使我们引入 除子 的概念。我们将 $\mathfrak{X}(D)$ 称为 的 D 的素除子。于是，一个除子 E 是素除子的形式 $\mathbb{Z}$-线性组合，即

$$E = \sum_{P \in \mathfrak{X}(D)} n_P P, \quad n_P \in \mathbb{Z}, \text{ almost all } 0.$$

除子的集合记为 $\mathrm{Div}(D)$，是以 $\mathfrak{X}(D)$ 为基的自由阿贝尔群。对于 $a \in K^\times$，与 a 相关联的主除子为

$$\mathrm{div}(a) := \mathrm{div}_D(a) := \sum_{P \in \mathfrak{X}(D)} \mathsf{v}_P(a) P.$$

令 $\mathrm{Princ}(D)$ 表示主除子的子群。

同构$\mathcal{F}_v(D) \cong \mathrm{Div}(D)$ 在自由阿贝尔群之间，将除子分式理想的 v-乘积映射为 $\mathrm{Div}(D)$ 中的加法。此外 [Fos73，命题 5。9]，

$$\mathrm{div}\left((I+J)_v\right) = \min\{\mathrm{div}(I), \mathrm{div}(J)\} = \sum_{P \in \mathfrak{X}(D)} \min\{\mathsf{v}_P(I), \mathsf{v}_P(J)\} P.$$

尽管从代数角度看，这个同构并无实质内容，但对于后续的计算考量却至关重要：除子分式理想最自然的表示方式是由一组（有限个）生成元构成：$I = (a_1, \ldots, a_n)_v$。除子最自然的表示方式则是素除子的形式线性组合，也就是说，给出其系数。在两种表示方式之间转换在计算上并非易事，因此区分这两种不同的表示方式十分重要。

2.2.3. 类群。类群是克鲁尔整环的主要不变量，其计算是本文的一项核心任务。

定义 2.3。 克鲁尔整环 D 的（除子）类群是

$$\mathrm{Cl}(D) := \mathcal{F}_v(D) / \{aD : a \in K^\times\} \cong \mathrm{Div}(D) / \mathrm{Princ}(D).$$

注 2.4。 诺特整环是克鲁尔整环，当且仅当它是整闭的（即正规） [GHK06，定理 2.10。2]。在此情形下，Div(D) 与 Spec(D) 上的魏尔因子群一致，而类群 Cl(D) 则是相应的魏尔因子类群。

以下经典结果凸显了克鲁尔整环及其类群对于分解理论的重要性。

定理 2.5 ([Fos73，命题 6。1])。 整环 D 是唯一分解整环，当且仅当它是类群平凡的克鲁尔整环。

利用$\mathcal{F}_v(D$中的唯一分解，很容易看出克鲁尔整环是有限分解整环。结合类群以及素除子在各类中的分布情况，我们可以非常详细地描述 D 的算术性质：模去可逆元素后，D 的乘法幺半群由这些数据在同构意义下唯一确定 [GHK06，定理 2.5.4。3]。借助到零和序列幺半群的传递同态，可以研究 D [GHK06] [GZ20， §5][Ger16， §3]。

我们需要研究类群在局部化和多项式扩张下的性质。存在一个同态

$$\mathcal{F}_v(D) \to \mathcal{F}_v(S^{-1}D), \quad I \mapsto S^{-1}I,$$

它诱导出一个同态 Cl(D) $\to$ Cl($S^{-1}D$)。永田定理描述了其核。

定理 2.6 (永田定理 [Fos73，推论 7。2])。 设 D 是一个克鲁尔整环，且 $S \subseteq D \setminus \{0\}$ 是一个乘法子集。那么存在一个正合列

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \mathrm{Cl}(D) \longrightarrow \mathrm{Cl}(S^{-1}D) \longrightarrow 0,$$

其中 H 是 $\mathrm{Cl}(D)$ 中由满足 $P \cap S \neq \emptyset$的那些 $P \in \mathfrak{X}(D)$ 生成的子群。

推论 2.7 ([Fos73，第 8]章，或 [Gil84，§16])。 若 D 是一个克鲁尔整环，则 n

$$\mathrm{Cl}(D) \cong \mathrm{Cl}(D[\boldsymbol{x}]) \cong \mathrm{Cl}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]),$$

第一个同构由除子分式理想的扩张诱导： $[I] \mapsto [ID[\boldsymbol{x}]]$ 对于 $I \in \mathcal{F}_v(D)$，第二个则由局部化诱导。

2.3. **簇代数与种子**。 我们回顾簇代数和上簇代数，标准参考文献包括 [FZ02；FZ03；BFZ05；Wil14；FWZ24；FWZ21b；FWZ21a]。

（上）簇代数定义在基环 D上。在组合学的语境中，基环通常不那么重要，通常取为 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$或 $\mathbb{Z}$。相比之下，我们所研究的环论性质在很大程度上取决于

D的选择。我们允许以任意整环 D （包括正特征的整环）作为基环，但在讨论因式分解理论结果时，之后必须将范围限制在克鲁尔整环 D 上。不过，这一类仍然很广，因为它包含所有域和唯一分解整环，例如整数环。

2.3.1. 种子与变异。 设 $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$ 是一个 半域：一个无挠[2] 阿贝尔群 $(\mathbb{P}, \cdot)$，并配有另一种交换半群结构 $\oplus$ ，使得乘法对 $\oplus$满足分配律。主要的例子是热带半域 $\mathrm{Trop}(y_1, \ldots, y_m)$，它由变量 $y_1, \ldots, y_m$ 生成，并配备辅助加法

$$\prod_{i=1}^{m} y_i^{a_i} \oplus \prod_{i=1}^{m} y_i^{b_i} := \prod_{i=1}^{m} y_i^{\min(a_i, b_i)}.$$

在这种情况下，群代数 $D\mathbb{P}$ 同构于 Laurent 多项式环 $D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}]$。令 K 为 $D\mathbb{P}$的分式域，并令 F 为以 K为系数域、关于 n个变量的有理函数域。秩为 n 的种子是一个三元组 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$，由以下部分组成

- 一个簇：一个元组 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，其元素生成域 $F \supseteq K$。
- 系数：一个元组 $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{P}^n$，以及
- 一个交换矩阵：一个 $n \times n$ 可斜对称化整数矩阵 $B = (b_{ij})$，也就是说，存在正整数 $d_1, \ldots, d_n$，使得对于所有 $i, j \in [1, n]$ 都有 $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$。

簇中的元素称为簇变量。

为允许特征 $D = 2$，我们对种子作出一个额外假设（类似于 [Ben+15]）：如果特征 $D = 2$ 且 k的第 B 行全为零，那么必须有 $y_k \neq 1$。这将确保变异定义良好。

种子 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$ 可以沿任意方向 $k \in [1, n]$ 进行变异，以如下方式生成一个新的种子 $(\mu_k(\boldsymbol{x}), \mu_k(\boldsymbol{y}), \mu_k(B))$。

- 元组 $\mu_k(\boldsymbol{x})$ 由 $\boldsymbol{x}$得到，即将 x_k 替换为 x_k'，定义为

$$x_k x_k' = \frac{y_k}{y_k \oplus 1} \prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \frac{1}{y_k \oplus 1} \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}},$$

并保持所有其他变量不变。

- 设 $\mu_k(\boldsymbol{y}) = (y_1', \ldots, y_m')$，其中

$$y_j' = \begin{cases} y_k^{-1} & \text{if } j = k, \\ y_j (y_k \oplus 1)^{-b_{kj}} & \text{if } j \neq k \text{ and } b_{kj} \leq 0, \\ y_j (y_k^{-1} \oplus 1)^{-b_{kj}} & \text{if } j \neq k \text{ and } b_{kj} \geq 0. \end{cases}$$

[2]为确保群代数 $D\mathbb{P}$ 是整环。

- 若 $B = (b_{ij})$，则 $\mu_k(B) = (b'_{ij})$，其中

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + b_{ik}b_{kj} & \text{if } b_{ik} > 0 \text{ and } b_{kj} > 0, \\ b_{ij} - b_{ik}b_{kj} & \text{if } b_{ik} < 0 \text{ and } b_{kj} < 0, \\ b_{ij} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

多项式 $f_k = x_k x'_k \in D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}]$ 是与种子 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ B)$ 相关联的交换多项式。

$\boldsymbol{x}$ 的变异取决于基环 D，因为加法是在 D上进行的，而 $\boldsymbol{y}$ 和 B 的变异不依赖于 D。由于基环通常是固定的，因此记号中不体现它。如果要强调对 D的依赖性，我们将种子写作 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ B; D)$。

注 2.8：若 $\operatorname{char} D = 2$，则关于 B 和 y_k 的假设保证了 $x_k x'_k \neq 0$，从而确保 $\mu_k(\boldsymbol{x})$ 再次成为 F的生成元组。容易验证，该假设在变异下保持不变。

如果一个种子可以通过一系列变异由另一个种子得到，则称这两个种子是变异等价的。

2.3.2. 簇代数。

定义 2.9. 设 D 是一个整环，$\mathbb{P}$ 是一个半域，F 是以 $D\mathbb{P}$的分式域为基域、由 n 个变量构成的有理函数域。设 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$ 为一个种子。

(1) 与初始种子$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$ 相关联的簇代数 $A := A(B) := A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B; D)$ 是 F的 $D\mathbb{P}$-子代数，由所有与$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$变异等价的种子中的所有簇变量生成。

(2) 与初始种子$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$ 相关联的上簇代数 $U := U(B) := U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B; D)$ 为

$$U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B; D) = \bigcap_{\widetilde{\boldsymbol{x}}} D\mathbb{P}[\widetilde{\boldsymbol{x}}^{\pm 1}],$$

其中，交集遍历与$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$变异等价的种子中的所有簇 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$.

定理 2.10 (Laurent 现象 [FZ02，定理 3.1])。每个簇变量都是任意给定簇中的变量的 *Laurent* 多项式。换言之，对任意簇 $A \subseteq D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$，都有包含关系 $\boldsymbol{x}$。

这通常是在 $D = \mathbb{Z}$ 的情况下证明的，并且很容易推广到任意特征为 0 的整环：在这种情况下，$\mathbb{Z}P \subseteq D\mathbb{P}$ 及所有突变操作都发生在子环 $\mathbb{Z}\mathbb{P}$中。我们概述一下，只要稍加注意，同样的方法在任意特征下也适用。

任意整环的证明概要 D。设 $p = \operatorname{char} D \geq 0$。存在一个环同态

$$\pi\colon \mathbb{ZP} \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\mathbb{P} \hookrightarrow D\mathbb{P},$$

其核为 $p\mathbb{ZP}$。这诱导出一个同态 $\pi\colon \mathbb{ZP}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \to D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \subseteq F$。

若考虑由种子 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B;\ \mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{Z}$ 上定义的簇代数，则得到

$$\pi(x_k x_k') = \frac{y_k}{y_k \oplus 1} \prod_{b_{ik}>0} \pi(x_i)^{b_{ik}} + \frac{1}{y_k \oplus 1} \prod_{b_{ik}<0} \pi(x_i)^{-b_{ik}}.$$

由于我们知道 x_k' 是 $\mathbb{ZP}$ 上的 x_i 中的一个 Laurent 多项式（根据 $\mathbb{ZP}$ 上的 Laurent 现象），左边等于 $\pi(x_k)\pi(x_k')$（请注意，π 只在 $\mathbb{ZP}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 上定义，而非在其分式域上定义）。归纳可知，变异与应用 π 可以交换；而对于 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B;\ \mathbb{Z})$，$\mathbb{ZP}$ 上的 Laurent 现象蕴含对于 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B;\ D)$，$D\mathbb{P}$ 上的 Laurent 现象。□

Laurent 现象表明，簇代数总是包含于其上簇代数。等式

$$A = U$$

在许多重要的簇代数子类中，尤其是在局部无环的簇代数中，这一结论成立 [Mul14]。

2.3.3. 局部无环簇代数。一般而言，对簇代数进行局部化并不会再次得到簇代数。这促使 Muller 引入了冻结和簇局部化的概念 [Mul13；Mul14]。虽然在 [Mul14] 中，基环是 $\mathbb{Z}$，但这些论证对于任意整环 D都成立。[3]

设 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ B)$ 是一个秩为 n 的种子。将簇 $\boldsymbol{x}$ 在子集 $S := \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ 处冻结，具体如下。

- 将 $\mathbb{P}$替换为

$$\mathbb{P}^\dagger := \mathbb{P} \oplus \operatorname{Trop}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) \cong \mathbb{P} \oplus \mathbb{Z}^{|I|}$$

with

$$(p, x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_s}^{a_s}) \oplus (q, x_{i_1}^{b_1} \cdots x_{i_s}^{b_s}) := (p \oplus q, x_{i_1}^{\min(a_1,b_1)} \cdots x_{i_s}^{\min(a_s,b_s)}).$$

- 从 $\boldsymbol{x}$ 中移除 S 的各项，得到一个 $n-s$ 元组 $\boldsymbol{x}^\dagger$,
- 定义 $\boldsymbol{y}^\dagger = (y_j^\dagger\colon\ j \in [1,n] \setminus \{i_1, \ldots, i_s\})$（按顺序），其元素为

$$y_j^\dagger = y_j x_{i_1}^{b_{i_1 j}} \cdots x_{i_s}^{b_{i_s j}}.$$

[3]特别地，这适用于关键结果 [Mul14，引理 1]，该结果表明，若 $A^\dagger = U^\dagger$ 对于某个冻结成立，则 $A^\dagger$ 是 A 的一个簇局部化；此外，[Mul14，命题 3]，表明 $A = U$ 对于孤立簇代数成立。

- 从 B 中删除指标为 $i_1, \ldots, i_s$ 的行和列，得到 $B_\dagger$。

冻结种子（$\boldsymbol{x}^\dagger$， $\boldsymbol{y}^\dagger$， $B^\dagger$）定义了一个秩为 $n-s$ 的簇代数 $A[x_{i1}^\dagger, \ldots, x_{i_s}^\dagger]$，称为在 x_{i_1} 处冻结 A，..... x_{i_s}；同样，它也定义了 U 的冻结 $U[x_{i_1}^\dagger, \ldots, x_{i_s}^\dagger]$。冻结变量 x_{i_j} 会将其移入系数半域（这也意味着添加其逆元 $x_{i_j}^{-1}$），并将其从变异过程中移除。

定义 2.11。簇代数 A 的簇局部化是满足以下条件的冻结 $A[x_{i_1}^\dagger, \ldots, x_{i_s}^\dagger]$:

$$A[x_{i_1}^\dagger, \ldots, x_{i_s}^\dagger] = A[x_{i_1}^{-1}, \ldots, x_{i_s}^{-1}].$$

如果交换矩阵为零矩阵，则称簇代数为孤立的。有限族A_1，.....， A_l，若其成员是 A 的簇局部化，则称其为簇覆盖，当且仅当 A 对每个 $P \in$ 谱$(A$，都存在某个 i，使得 $PA_i \neq A_i$。从几何上看，这意味着谱(A) 被由局部化诱导的映射谱$(A_i) \to$ 谱(A) 的像覆盖。特别地，有 $A = \bigcap_{i=1}^{l} A_i$ [Mul14，命题 2]

定义 2.12 ([Mul14，定义 2])。若簇代数 A 是局部无环的，则它具有由孤立簇代数组成的簇覆盖。

若不存在序列 i_1、.....、 $i_l \in [1, n]$，使得 $l \geq 2$ 对所有 $s \in [1, l-1]$均成立且满足 $i_1 = i_l$，则种子 $(\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{y}$， $B)$ 是无环的。若簇代数具有一个无环种子，则称其为无环簇代数（无环性并非变异不变的）。局部无环簇代数等价地可以定义为具有由无环簇代数组成的簇覆盖的簇代数。

的主要结果 [Mul14] 可从 $\mathbb{Z}$ 推广到任意整环 D。

定理 2.13 ([Mul14，定理 2])。若 A 是局部无环的，则 $A = U$。

注记 2.14。等式 $A = U$ 对于由无穿孔曲面且边界上有一个标记点的曲面产生的簇代数也成立 [CLS15]，对于模空间中的簇代数 G-局部系统 [IOS23]，以及对称泊松幂零代数 [GY23]。该等式取决于基环 [BMS19]。

局部无环簇代数是整闭整环的交，因此总是整闭的。假设 D 是诺特的，且 $\mathbb{P}$ 是有限生成的。那么$D\mathbb{P}$ 是诺特的，并且系数取自 D、系数属于 $\mathbb{P}$ 的局部无环簇代数是有限生成的 $D\mathbb{P}$-代数 [Mul13，定理 4。2]（利用 [Sta25，引理 00EP]）。特别地，这类簇代数是诺特且整闭的，因此是克鲁尔整环。下文将把这一结果推广到基环为克鲁尔整环的情形（定理5.4）。

备注2.15。一般而言，不可能用簇环面覆盖谱(A)，也就是说，不能用形如 $D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 的局部化来覆盖，其中 $\boldsymbol{x}$ 是 A的簇；即使 A 是无环的也是如此。事实上，如果存在簇环面覆盖，那么 A 就是非奇异的 [BM25，命题 2。4]然而，即便是无环簇代数，例如 A_n-型簇代数，也可能存在奇点[Ben+23]。

3. 劳朗交环

本节介绍（有限）劳朗交环，并确定其类群（定理 3.7）。这为第 4 节的计算工作奠定了代数基础。我们还将在第 3.1 节讨论迭代劳朗交环，并在第 3.2 节最后完整刻画（简单的）单变量情形。

定义 3.1。设 D 是一个整环，其分式域为 K，且 $K(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ 中 n 个变量的有理函数域。若存在一个非空集合 $S\subseteq K(\boldsymbol{x})^n$，使得子环 $A\subseteq K(\boldsymbol{x})$ 是 D (上的劳朗交环（或 *D-LIR*），当且仅当

(i) 对所有 $\boldsymbol{y}\in S$，都有 $K(\boldsymbol{x})=K(\boldsymbol{y})$,

(ii) 我们有

$$A=\bigcap_{\boldsymbol{y}\in S} D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}],$$

(iii) 并且 $D[\boldsymbol{y}]\subseteq A$ 对所有 $\boldsymbol{y}\in S$均成立。

若基环 D 可由上下文明确，我们就简写为 A 是一个劳朗交环，或称 LIR。若 A 是一个 LIR，则满足性质 S (i)–(iii) 的集合 称为图表系统。中的元素称为图表。

根据定义，图表由 n 个在 K 上代数独立的元素组成，它们生成整个域 $K(\boldsymbol{x})$。因此，通过对 $K(\boldsymbol{x})$ 进行变量替换，我们可以在方便时假设 $\boldsymbol{x}\in S$。若 $n=0$，则 $A=D$。我们通常排除这一平凡情形。

最终，我们关注这一类环中的克鲁尔整环，它们满足以下条件。

引理 3.2。设 D 为整环。若 A 是 *D-LIR* 且为克鲁尔整环，则对于 A，每个图表系统 S都包含一个有限图表子系 $\{\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(1)\ldots,\boldsymbol{y}(r)\}\subseteq S$。此外，每个 $P\in\mathfrak{X}(A)$ 都能非平凡地扩展到至少一个局部化 $D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}]=A[\boldsymbol{y}(i)^{-1}]$，其中 $i\in[0,r]$。

证明。令 S为 A的图表系统。根据定义，我们有 $A=\bigcap_{P\in\mathfrak{X}(A)} A_P$，其中 A_P是离散赋值环，且该交具有有限特征。若 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots\ldots,y_n)\in S$,

那么 $D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}] = A[(y_1 \cdots y_n)^{-1}]$ 是一个局部化，因为 $D[\boldsymbol{y}] \subseteq A$ 依据 (iii) 定义 3.1。因此，

$$D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}] = \bigcap_{\substack{P \in \mathfrak{X}(A) \\ y_1 \cdots y_n \notin P}} A_P,$$

由 [Fos73，命题 1。8]。

固定某个 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in S$。由克鲁尔整环的有限特征性质可知，只有有限多个 $P_1, \ldots, P_r \in \mathfrak{X}(A)$ 满足 $x_1 \cdots x_n \in P_i$。利用 (ii) 定义 3.1，

$$\bigcap_{P \in \mathfrak{X}(A)} A_P = A = \bigcap_{\boldsymbol{y} \in S} D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}] = \bigcap_{\boldsymbol{y} \in S} \bigcap_{\substack{P \in \mathfrak{X}(A) \\ y_1 \cdots y_n \notin P}} A_P.$$

从第一个交中去掉任意一个离散赋值环 A_P，所得即为真上环（由克鲁尔整环逼近定理 [Fos73，定理 5.8]，，存在一个 $f \in K(\boldsymbol{x})$，使得 $\mathrm{v}_P(f) < 0$ 且 $\mathrm{v}_Q(f) \geq 0$ 对所有 $Q \in \mathfrak{X}(A) \setminus \{P\}$均成立）。由此可知，对于每个 i，都存在某个 $\boldsymbol{y}(i) = (y_1(i) \ldots, y_n(i)) \in S$，使得 $y_1(i) \cdots y_n(i) \notin P_i$。因此，

$$A = D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \cap \bigcap_{i=1}^{r} D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}],$$

因此，$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(1) \ldots, \boldsymbol{y}(r)\}$ 是 A的有限图表系统。 □

前面的引理引出了下面这个关键定义。

定义 3.3. 设 D 是一个整环。若环 A 是关于 D（或 *D-FLIR*）的有限劳朗交环，即它是具有有限图表系统的 *D-LIR*，则称之为有限劳朗交环。

命题 3.4. 设 A 是某个整环 D上的 *LIR*。那么， A 是克鲁尔整环，当且仅当 D 是克鲁尔整环且 A 是 *D-FLIR*。

证明。 首先假设 D 是克鲁尔整环，且 A 是一个有限劳朗交环，记为 $A = \bigcap_{\boldsymbol{y} \in S} D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}]$，其中 $S \subseteq K(\boldsymbol{x})^n$。每个 $D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}]$ 都是克鲁尔整环；具有相同分式域的克鲁尔整环的有限交仍是克鲁尔整环，因此 A 是克鲁尔整环。

反之，如果 A 是克鲁尔整环，并且 $\boldsymbol{x}$ 是劳朗交环的一个图表A，那么局部化 $A[(x_1 \cdots x_n)^{-1}] = D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 是克鲁尔整环。因此，基环 D 是克鲁尔整环。引理3.2 表明 A 是有限劳朗交环。□

若 $D \subseteq A$ 是克鲁尔整环的扩张，则存在自然同态 $\mathrm{F}_v(D) \mapsto \mathrm{F}_v(A)$，由 $I \mapsto (IA)_v$给出。若该扩张满足 PDE 性质（pas d'éclatement，即不发生爆破），也就是说，对每个 $P \in \mathfrak{X}(A)$，都有 $\mathrm{ht}(P \cap D) \leq 1$，那么这将诱导出一个同态 $\mathrm{Cl}(D) \to \mathrm{Cl}(A)$ [（参见 Fos73，定理 6.2 和命题 6.3]）。我们验证了 D-FLIR 满足 PDE 性质。

引理 3.5。 设 A 是克鲁尔整环 D上的 *D-FLIR*。那么，对每个$P \in \mathfrak{X}(A)$，都有 $\mathrm{ht}(P \cap D) \leq 1$ 。

证明。 若 $P \in \mathfrak{X}(A)$，则存在一个图表 $\boldsymbol{y}$ 使得 $PD[\boldsymbol{y}^{\pm 1}] \neq D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}]$。由于 $D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}]$ 是 A 的局部化，因此 $\mathrm{ht}(PD[\boldsymbol{y}^{\pm 1}])$ 也满足 $= 1$。若存在 $0 \neq Q \in \mathrm{Spec}(D)$ 使得 $Q \subseteq P \cap D$，则

$$0 \neq QD[\boldsymbol{y}^{\pm 1}] \subseteq (P \cap D)D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}] \subseteq PD[\boldsymbol{y}^{\pm 1}],$$

因此 $QD[\boldsymbol{y}^{\pm 1}] = PD[\boldsymbol{y}^{\pm 1}]$，因为后者的高度为一，所以 $Q = P \cap D$。这表明 $\mathrm{ht}(P \cap D) \leq 1$。□

现在可以根据 $\mathrm{Cl}(D)$ 确定 $\mathrm{Cl}(A)$。首先，我们证明永田定理导出了一个分裂的短正合序列。

引理 3.6。 设 A 是克鲁尔整环 D 上的一个 *D-FLIR*，且 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 是一个图表。则存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \hookrightarrow & \mathrm{Cl}(A) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Cl}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \nwarrow^{\phi} & \uparrow{\scriptstyle \beta} & & \\ & & & & & & \mathrm{Cl}(D) & & \end{array}$$

其中，对于 $I \in \mathcal{F}v(A)$，有 $\alpha([I]) = [ID[\boldsymbol{x}^{-1}]]$；对于 $J \in \mathcal{F}v(D)$，有 $\beta([J]) = [JD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]]$ 和 $\phi([J]) = [(JA)_v]$；而 H 由包含 $x_1 \cdots x_n$ 的那些 $P \in \mathfrak{X}(A)$ 的类生成。顶行正合，且映射 $\phi \circ \beta^{-1}$ 分裂了顶行中的短正合序列。特别地，

$$\mathrm{Cl}(A) \cong \mathrm{Cl}(D) \oplus H.$$

证明。 由于 $A[\boldsymbol{x}^{-1}] = D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 是将 A 在由 x_1、...、 x_n生成的乘法集处局部化所得，因此永田定理（定理 2.6）给出了交换图的顶行正合列，其中 H 且 α ，如所述。

此外，存在一个 β 由理想扩张给出的同构；也就是说，对于 $J \in \mathcal{F}v(D)$，有 $\beta([J]) = [JD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]]$ [Fos73，定理 8。1]。

由于引理 3.5，除子分式理想的扩张诱导出一个同态ϕ：$\mathrm{Cl}(D) \to \mathrm{Cl}(A)$，其定义为 $\phi([J]) = [(JA)_v]$，对 $J \in \mathrm{F}v(D)$成立。我们验证 $\phi \circ \beta^{-1}$分裂该短正合序列。这意味着证明 $\alpha \circ \phi = \beta$。令 $J \in \mathrm{F}v(D)$。那么

$$\alpha \circ \phi([J]) = \alpha([(JA)_v]) = [(JA)_v D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]] = [(JD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])_v] = [JD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]] = \beta([J]).$$

由于该短正合序列分裂，特别地，$\mathrm{Cl}(A) \cong \mathrm{Cl}(D) \oplus H$。 □

现在我们可以明确描述 $\mathrm{Cl}(A)$。

Theorem 3.7. 设 A 是克鲁尔整环 D 上的 *D-FLIR*，且 $\boldsymbol{x}$ 是一个图表。那么

$$\mathrm{Cl}(A) \cong \mathrm{Cl}(D) \oplus \mathbb{Z}^r / \langle \boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n \rangle$$

其中，P_1、……、P_r 是包含 $x_1 \cdots x_n$ 的高度一素理想，并且 $\boldsymbol{c}_i = (c_{ij})_{1 \le j \le r} \in \mathbb{Z}^r$ 满足 $x_i A = \prod^v_{1 \le j \le r} P_j^{c_{ij}}$。

证明。设 P_1、……、P_r 是 A 中包含 $x_1 \cdots x_n$ 的高度一素理想。引理 3.6 表明 $\mathrm{Cl}(A) \cong \mathrm{Cl}(D) \oplus H$，其中 H 由 $[P_1]$、……、$[P_r]$ 生成。因此，只需证明

$$H \cong \mathbb{Z}^r / \langle \boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n \rangle.$$

证明与 [GELS19 定理 31] 中的证明相同。为完整起见，我们仍将其列出。

我们需要证明，若对某个 m_1、……、$m_r \in \mathbb{Z}$，有 $\sum_{j=1}^r m_j [P_j] = 0$ 属于 H，则存在 u_1、……、$u_n \in \mathbb{Z}$，使得对所有 $i \in [1, r]$ 都有 $m_j = \sum_{i=1}^n u_i c_{ij}$。那么 $(m_1$、……、$m_r) = \sum_{i=1}^n u_i \boldsymbol{c}_i$，结论即得。

因此设 $\sum_{j=1}^r m_j [P_j] = 0$。那么 $\prod^v_{1 \le j \le r} P_j^{m_j}$ 是 A 的分式主理想，即

$$\prod_{1 \le j \le r}^v P_j^{m_j} = aA \tag{2}$$

对于某个 $0 \neq a \in K(\boldsymbol{x})$，其中 K 是 D 的分式域。在由 x_1、……、x_n 生成的乘法集上进行局部化，

$$aA[\boldsymbol{x}^{-1}] = aD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] = \prod_{\substack{1 \le j \le r \\ x_1 \cdots x_n \notin P_j}}^v (P_j D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])^{m_i} = D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}],$$

由于根据 P_j 的选取，对于所有 $j \in [1, r]$，$x_1 \cdots x_n \in P_j$。

我们得到 $a \in D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]^\times$，从而对于某个 $\varepsilon \in D^\times \subseteq A^\times$ 以及 u_1、……、$u_n \in \mathbb{Z}$，有 $a = \varepsilon x_1^{u_1} \cdots x_n^{u_n}$。代入 $x_i A$ 的分解，得到

$$aA = \prod_{1 \le i \le n}^v \Big(\prod_{1 \le j \le r}^v P_j^{c_{ij}} \Big)^{u_i} = \prod_{1 \le j \le r}^v P_j^{\sum_{i=1}^n u_i c_{ij}}. \tag{3}$$

比较 P_j 在式（2）和式（3）中将 分解为高度一素理想时的指数，我们得到 $m_j = \sum_{i=1}^n u_i c_{ij}$ 对所有 $j \in [1, r]$ 均成立，正如所需。□

注 3.8. FLIR 的类群不一定是无挠的，即使对于唯一分解 D：例如，根据 [GSV18，定理 3，满秩广义上簇代数是 FLIR11]，，且其类群也可能含有挠元 [Pom26，例 413]。类似地，我们将在下文看到，单变量 FLIR 的类群也可能含有挠元（例 3.16）。另一方面，作为克鲁尔整环的上簇代数，其类群总是无挠的 [Pom25，定理 44]。

要从整体上理解克鲁尔整环的分解理论（即其算术不变量），仅了解其类群是不够的，还需要知道每个类中包含多少个高度一素理想。于是， A模 $A^\times$ 的乘法幺半群在同构意义下唯一确定 [GHK06，定理 2.5.43]。

由于基数方面的原因，最多有 $\min\{|D|, \aleph_0\}$ 个高度一素理想属于 A。下面将证明，每个类都能达到这一上界，从而完整描述克鲁尔整环上的 FLIR 的类群中素除子的分布。这与克鲁尔幺半群代数 [FW22]中的情况类似。

定理 3.9。 如果 A 是克鲁尔整环 D 上以 $n \geq 1$ 个变量构成的 *FLIR*，那么 $\mathrm{Cl}(A)$ 中的每个类都包含 $\min\{|D|, \aleph_0\}$ 个高度一素理想。

然而，要研究任意给定元素 $a \in A$ 的因式分解，并不需要知道这种分布：只需处理包含 a 的有限多个高度一素理想。因此，我们将定理 3.9较为冗长的证明推迟到第 6 节。

3.1. **迭代 FLIR**。 在第 5 节和第 7 节中，我们将用迭代 FLIR 来处理孤立簇代数及簇代数的冻结。

定义 3.10。 设 D 是一个整环。若存在环 $D = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_r = A$，使得对于 $i \in [1, r]$，每个A_i 都是一个 A_{i-1}-*LIR*，那么环 A 称为 D上的迭代 *LIR*；若对于 $i \in [1, r]$，每个A_i 都是一个 A_{i-1}-*FLIR*，则称其为 D上的迭代 *FLIR*。

一个重要的观察是，迭代 LIR 构造仍会得到一个在原基环上的 LIR。

命题 3.11。 若 A 是 D上的迭代 *LIR*，则它是一个 D-*LIR*。更具体地说，若对于每个 $i \in [1, r]$， S_i 都是 A_{i-1} 上 A_i 的图表系统，那么

$$S = \{\, (\boldsymbol{x}(1), \boldsymbol{x}(2), \ldots, \boldsymbol{x}(r)) : \boldsymbol{x}(i) \in S_i \text{ for } i \in [1, r] \,\} \cong S_1 \times \cdots \times S_r.$$

是 A在 D上的图表系统。

证明。我们对 r进行归纳来证明该断言。 $r = 1$ 的情形显然成立。因此，假设$r > 1$，且该断言对 $r - 1$成立。那么， A_{r-1} 是一个具有图表系统$T \cong S_1 \times \cdots \times S_{r-1}$的 D-LIR，而 A是一个具有图表系统 S_r的 A_{r-1}-LIR。于是

$$A = \bigcap_{\boldsymbol{x} \in S_r} A_{r-1}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] = \bigcap_{\boldsymbol{x} \in S_r} \Big(\bigcap_{\boldsymbol{y} \in T} D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}] \Big)[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] = \bigcap_{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \in T \times S_r} D[\boldsymbol{y}^{\pm 1}, \boldsymbol{x}^{\pm 1}].$$

这表明定义的3.1中的 (ii)。为验证定义3.1中的(i)和(iii)，令 $\boldsymbol{x} \in S_r$ 和$\boldsymbol{y} \in T$。那么

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = K(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}) \qquad \text{and} \qquad D[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}] = D[\boldsymbol{y}][\boldsymbol{x}] \subseteq A_{r-1}[\boldsymbol{x}] \subseteq A. \qquad \square$$

利用有限集 S_i，我们得到以下推论。

推论 3.12。若 A 是整环 D 上的迭代 *FLIR*，则它是一个 *D-FLIR* .

由于 Laurent 多项式环显然是 FLIR，我们还可得到以下结论。

推论 3.13。设 $D[\boldsymbol{t}^{\pm 1}]$ 是整环 D 上有限个变量的 *Laurent* 多项式环。若 A 是一个具有图表系统 S 的 $D[\boldsymbol{t}^{\pm 1}]$-*FLIR*，则 A 是一个具有图表系统的 *D-FLIR*

$$\{\,(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in S\,\}$$

3.2. **单变量 LIR**。我们讨论单变量 LIR 这一特殊情形，在此情形下可以进行完整分类。这个简单情形提供了 LIR 的具体示例，并揭示了 LIR 与上簇代数之间的一些差异。此外，单变量情形的分类将在第 6 节中使用。

命题 3.14. 若 A 是定义在 $n=1$ 个变量上的整环 D 中的 *D-LIR*，则 $A \cong D[x]$ 或 $A \cong D[x^{\pm 1}] \cap D[(a/x)^{\pm 1}] = D[x, a/x]$，其中 $0 \neq a \in D$。

在第一种情况下，多项式 x 和 $x+1$ 构成 A 的图表系统。在第二种情况下，Laurent 多项式 x 和 a/x 构成一个图表系统。

证明。固定一个图表 x，并考虑另一个图表 $y \in D(x)$。我们先证明只可能出现以下两种情况

$$y = a/x \qquad \text{or} \qquad y = ux + a \qquad \text{with } a \in D \text{ and } u \in D^{\times}$$

。

由于 $y \in D[x^{\pm 1}]$ 和 $x \in D[y^{\pm 1}]$，我们有 $y = f(x)/x^m$ 且 $x = g(y)/y^n$，其中某些非零的 f、$g \in D[t]$ 和 m、$n \in \mathbb{Z}$ 满足 $t \nmid f$ 和 $t \nmid g$。

将这些表达式相互代入，得到

$$x = \frac{g(f(x)/x^m)}{(f(x)/x^m)^n}.$$

若 $m \neq 0$，则右侧在 0 处的消失阶为 $m(n-d)$，其中$d = \deg(g)$。由于 $m(n-d) = 1$，我们有 $(m,\ n-d) = (1,\ 1)$ 或 $(m,\ n-d) = (-1,\ -1)$。

我们区分三种情形。

- 若 $m = 0$，则 $y = f(x)$。由 $y = f(g(y)/y^n)$ 可轻易得出 $n = 0$ 也成立，因此$x = g(y)$。于是，$\deg(f) = \deg(g) = 1$，因此 $y = ux + a$ with $a \in D$ and $u \in D^{\times}$。
- 若 $m = 1$ 且 $n = d+1$，则

$$f(x)^{d+1} = \sum_{i=0}^{d} g_i f(x)^i x^{d-i} \qquad \text{with} \qquad g(t) = \sum_{i=0}^{d} g_i t^i.$$

若 $\deg(f) \geq 1$，则通过比较次数可知这是不可能的。因此 f 是常数，且 $y = a/x$ 与 $a \in D$。

- 若 $m=-1$ 且 $n=d-1$，则

$$x^{n+1}f(x)^n = g(f(x)x).$$

由于 $g(0)\neq 0$，右侧在 0 处的阶为 0，由此得到 $n=-1$。再次考察该等式，可得 f 和 g 为常数，因此 $y=ux$ with$u\in D^\times$。

如果存在一个形式为 $y=ux+a$ with $a\neq 0$ 的图表，那么 $D[x^{\pm 1}]\cap D[y^{\pm 1}]=D[x]$。因此，我们可以假设除 x 本身之外的所有图表都具有形式 $y_i=a_i/x$ with$a_i\in D$。我们还可以假设 $a_i\notin D^\times$，否则 $D[x^{\pm 1}]=D[y_i^{\pm 1}]$。

现在我们声称，若存在两个这样的图表 y_1 和 y_2 （除 x 外），则$a_1\in a_2D^\times$。确实，我们有

$$y_1=\frac{a_1}{x}=\frac{a_1}{a_2}y_2 \qquad \text{and} \qquad y_2=\frac{a_2}{x}=\frac{a_2}{a_1}y_1.$$

由于 $y_1\in D[y_2^{\pm 1}]$ 且 $y_2\in D[y_1^{\pm 1}]$，可得 $a_1/a_2, a_2/a_1\in D$，因此 $a_1\in a_2D^\times$。我们得出，对于所有 i,j，都有 $D[y_i^{\pm 1}]=D[y_j^{\pm 1}]$。因此，我们有 $A=D[x^{\pm 1}]\cap D[(a/x)^{\pm 1}]$，其图表为 $y=a/x$，其中 $a\in D$。

最后，为了证明 $D[x^{\pm 1}]\cap D[(a/x)^{\pm 1}]=D[x,a/x]$，考虑满足 $f_i\in D$ 的 $f=\sum_{i=-m}^{n}f_ix^i\in D[x^{\pm 1}]$。那么，当且仅当对于所有满足 $i>0$ 的情形， a^i 能整除 f_{-i} 时， $f\in D[(a/x)^{\pm 1}]$。由此可得 $f\in D[x,a/x]$。□

例 3.15。注意，$\{x,a/x\}$ 是 $A=D[x^{\pm 1}]\cap D[(a/x)^{\pm 1}]$的一个图表系统，但若 $a\notin D^\times$，则 $\{x,x/a\}$ 就不是！虽然 $D[(a/x)^{\pm 1}]=D[(x/a)^{\pm 1}]$，但 LIR 的定义还要求对每个图表 y，都有 $D[y]\subseteq A$。我们有 $a/x\in D[x^{\pm 1}]$，但若 $a\notin D^\times$，则 $x/a\notin D[x^{\pm 1}]$。

虽然单变量簇代数（几何类型、无系数）很容易处理，因为只会出现 $D[x,2/x]$（一个孤立顶点），但如下例所示，即使基环 D 是唯一分解的，单变量 FLIR 也可能不是唯一分解的。

例 3.16。环 $A=\mathbb{Z}[x,2/x]$ 是由一个可变变量产生的簇代数。它是唯一分解的（例如，根据 [GELS19] 中关于无环簇代数的判据）。

环 $B=\mathbb{Z}[x,6/x]$ 不是簇代数，也不是唯一分解的：

$$6=2\cdot 3=x\cdot\frac{6}{x}$$

在 B中，6 有两种不同的原子分解。通过查看下文引理 6.2 情形 1 的证明，或直接进行简短计算，可以看出 B 在 (x) 上方有两个高度一素理想，分别为 $(x,2)$ 和 $(x,3)$。此外，由于 $(x)=(x,2)\cdot(x,3)$，可知 $\mathrm{Cl}(B)\cong\mathbb{Z}^2/\langle(1,1)\rangle\cong\mathbb{Z}$ 由定理 3.7得出。

更一般地，若 $a = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$是某个 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$的素因子分解，且$C = \mathbb{Z}[x, a/x]$，则 C 在 (x) 上方有 t 个高度一素理想，分别为 (x, p_i)，其中$i \in [1, t]$。考察局部化 C' := $C[x/a] = \mathbb{Z}[(a/x)^{\pm 1}]$ 在 a/x 处，并利用$xC' = aC'$，可得 $(x) = (x, p_1)^{r_1} \cdots_v (x, p_t)^{r_t}$，这是除子乘积。[4] 由定理 3.7 可知，$\mathrm{Cl}(C) \cong \mathbb{Z}^t/(r_1, \ldots, r_t) \cong \mathbb{Z}^{t-1} \oplus \mathbb{Z}/(d)$，其中 $d =$是$r_1, \ldots, r_t$的最大公因数。

关于高度一素理想的描述可以扩展到克鲁尔整环上的单变量 FLIR D，参见引理 7.5。

4. 可计算克鲁尔整环

本节将说明，对于适当的基环 D，例如 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{F}_q$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}$，以及这些环上的多项式环和有理函数域，可以计算 D-FLIR 的类群，也可以计算给定元素分解为不可约元的所有因式分解（忽略顺序和相伴关系）。

为了以统一的方式处理各种感兴趣的基环，我们引入可计算克鲁尔整环的概念。这意味着我们可以在一台理想化的计算机（例如图灵机）上表示整环的元素，并且存在算法来执行基本运算以及计算类群。

在可计算性理论中，不同作者提出了几种密切相关的可计算结构（可计算域、可计算群等）的形式化定义，例如 Fr¨ohlich 和 Shepherdson [FS56], 提出的定义、Rabin [Rab60], 以及 Mal'cev [Mal61；Mal62]。入门介绍见 [Mil08]；近期的一本涵盖该领域的教材是 [DM26]。我们沿用这一方法，但不深入讨论可计算性理论的细节，因为我们的重点是代数方面。

我们回顾一下，可计算域是一个具有以下性质的域 K。作为一个集合，它是可计算可枚举的：我们将 K 的元素视为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的子集，并且存在一个算法，可以列出 K 的所有元素 a_0、a_1、.....。更准确地说，给定输入 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，该算法最终会停机，并输出域元素 a_i。此外，还有算法可以在 K 中执行加法和乘法：例如，存在一个算法，给定输入 i 和 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$（分别表示域元素 a_i 和 a_j），会输出 k，使得 $a_i + a_j = a_k$。

取负和求逆也可以通过枚举过程实现计算：给定 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，可以依次尝试 K中的所有元素，搜索满足 k的 $a_i + a_j = 0$（或者满足 $a_i a_j = 1$）的元素。[5] 从这个例子显然可以看出，可计算性的概念并未对算法的效率作出任何保证。

---

[4]无需取除子闭包，我们不一定有 $(x) = (x, p_1)^{r_1} \cdots (x, p_t)^{r_t}$；通过对 $a = 4$ 进行一个简短的计算即可看出这一点。[5]特殊元素 0 可以通过枚举计算出来，它是 $a_i + a_i = a_i$ 的唯一解。类似地，元素 1 是满足 $a_i + a_i \neq a_i$ 的 $a_i a_i = a_i$ 的唯一解。

可计算域必定是有限或可数的；对于域中的任意两个元素 a、 b，都可以判定 $a = b$ 或 $a \neq b$是否成立。可计算域的显然例子有 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{F}_q$。反例则有 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$，因为这些域都是不可数的。不那么显然的是，有理函数域 $K(\boldsymbol{x})$ [Wae37, §42] [Edw84, §52–§59] 以及可计算域上的代数闭包 K [Rab60] K 仍然是可计算的。可计算环、整环和群也可以类似地定义。

对于可计算克鲁尔整环，我们还需要能够计算除子及其类。除子是素除子的形式 $\mathbb{Z}$ 线性组合。尽管除子与除子分式理想一一对应（见第2.2.2节），但形式和的表示方式更适合计算。因此，本节着重采用除子的视角。

除子 $e_1P_1 + \cdots + e_1P_t$ 在计算机中表示为一个元组 $((e_1, P_1) \ldots, (e_t, P_t))$，其中 $e_i \in \mathbb{Z}$，且 P_i 是 D的素除子。这里唯一非平凡的要求是，我们需要以某种方式表示素除子，使得给定两个素除子 P和 Q，我们能够判定 $P = Q$ 还是 $P \neq Q$。为此，我们要求 D 的素除子集合也是可计算可枚举的。

这似乎不足以让我们计算类群或因子的类。因此，我们补充一条相应的假设。

定义 4.1。 可计算克鲁尔整环是满足以下条件的克鲁尔整环： D D 是可计算可枚举的，

(C1) D 中的加法和乘法是可计算的，(C2) </style}素除子集合 (D) 是可计算可枚举的，(C3) 给定 $a \in D$，可以计算主除子 $\mathrm{div}(a)$，并且(C4) 类群 $\mathrm{Cl}(D)$ 和同态 $\mathrm{Div}(D)$ $\to \mathrm{Cl}(D)$ 是可计算的。

最后一条性质意味着，给定 D 的一个除子 E，我们可以计算它在 $\mathrm{Cl}(D)$ 中的类 $[E]$；给定两个类 $[E]$、 $[E']$，我们可以判定 $[E] = [E']$ 是否成立，并计算 $[E] + [E']$。

如果 D 是一个可计算克鲁尔整环，那么它的分式域 K 通过通常的有序对构造是一个可计算域。给定一个可计算域 K，一般而言，没有算法能够判定 $K[x]$ 中的给定多项式是否不可约 [FS56]。

具有分裂算法的域是可计算域 K，即存在一种算法，可以判定 $K[x]$ 中的给定多项式是否不可约（等价地，通过枚举，可以计算出每个多项式的不可约因子分解）。Kronecker 早已证明，如果 K 具有分裂算法，那么有理函数域 $K(\boldsymbol{x})$也具有分裂算法。他还证明了以下命题（用现代术语转述）。

命题 4.2。 如果 K 是具有分裂算法的可计算域，且 $f \in K[\boldsymbol{x}]$，则可以计算出 f 的不可约因子分解。

证明。多元多项式 $f \in K[\boldsymbol{x}]$ 可以通过分解一元多项式 $f(z, z^b, \ldots, z^{b^n}) \in K[z]$ 来分解，$b \geq 2$的选取需满足：对所有 i， $b > \deg_{x_i}(f)$。这是基于整数的底数为 b 的表示的唯一性。参见 [Wae37, §42] 或 [Edw84, §52–§59]。或者参见 [BW93, 第 2 章。7]，其中有现代论述。□

这引出了以下定义。

定义 4.3. 若可计算克鲁尔整环 D 的分式域具有分裂算法，则称该整环具有分裂算法。

例 4.4。 (1) 一个域是可计算克鲁尔整环，当且仅当它是可计算域。此处 (C2)、(C3) 和 (C4)均为空泛成立。

(2) 如果 K 是可计算域，那么 $K[x]$ 始终是一个可计算整环，即加法和乘法都是可计算的。然而，如果 K 没有分裂算法，那么 $K[x]$ 就不是可计算克鲁尔整环，因为(C3)不成立（请记住，我们将除子表示为素除子的形式和）。

(3) 整数环 $\mathbb{Z}$ 是一个可计算克鲁尔整环。此外，数域中的每个整数环$\mathcal{O}$ 都是可计算克鲁尔整环，这可由代数数论中的标准结果（闵可夫斯基数论几何）得出。

(4) 与数论情形类似，在函数域情形下，有限域上（超越次数为一的）函数域的全纯环是可计算克鲁尔整环。这些环是函数域的有限多个赋值环之外所有赋值环的交集。

注 4.5. 我们只要求 $K[x]$中的因式分解，而不要求 $D[x]$中的因式分解是可计算的，这一点将在事后由定理4.10 和命题4.11得到证明：它们表明，在带有分裂算法的可计算克鲁尔整环上，确实可以计算 $D[x]$中的因式分解。

4.1. 在可计算克鲁尔整环中计算因式分解。 若除子分式理想 I of D 由生成元 $a_1, \ldots, a_n$给出，则显然可以计算其对应的除子 $\mathrm{div}(I) = \mathrm{div}(a_1) + \cdots + \mathrm{div}(a_n)$。下面的引理表明，反向过程同样可计算。

引理 4.6。 如果 D 是可计算克鲁尔整环，且 $E \in$除子(D)，则可以判定 E 是否为主的。如果 E 是主的，则可以计算出 $a \in D$，使得 除子$(a) = E$。如果 E 不是主的，则可以计算出 a、 $b \in D$，使得最小值{除子(a),除子(b)} $= E$。

证明。 除子 E 是主的，当且仅当 $[E] \in$ 类群(D) 为零。这可由(C4)定义 4.1中的条件判定。

若 E 是主理想，则通过枚举即可找到 $a \in D$，使得 $\mathsf{div}(a) = E$，使用 (C3)。若 E 不是主理想，我们知道存在 $a,\ b \in D$ 使得 $\min\{\mathrm{div}(a), \mathrm{div}(b)\} = E$[Fos73，命题 5。11]。枚举 D中的元素对，我们同样可以计算出这样一对元素。□

注记 4.7。 引理 4.6中的枚举过程原则上可行，但当然完全不切实际。对于我们关注的具体可计算克鲁尔整环，通常可以用更实用的算法替代。例如，对于数域中的整数环，寻找主理想的生成元相当于在与该除子（即分式理想）相关的格中枚举范数较小的格点。

引理 4.8。 若 D 是可计算克鲁尔整环且 $0 \neq a \in D$，则可以计算出所有整除 a的不可约元 $b \in D$，精确到相伴关系。

证明。利用定义 4.1 中的 (C3) 计算 $\mathsf{div}(a) = e_1P_1 + \cdots + e_mP_m$。若 $b \mid a$，则对所有 $i \in [1, m]$，都有 $\mathsf{div}(b) = k_1P_1 + \cdots + k_mP_m$，其中某个 $0 \leq k_i \leq e_i$。对于 $(k_1, \ldots, k_m)$ 的每一种有限可能取值，利用引理 4.6 判断除子 $k_1P_1 + \cdots + k_mP_m$ 是否为主的。满足这一条件的极小非零元素 $(k_1, \ldots, k_m)$（相对于逐分量偏序）对应于整除 a 的（两两不相伴的）不可约元。再次利用引理 4.6，计算这些除子对应的 $b \in D$，使得 $\mathsf{div}(b) = k_1P_1 + \cdots + k_mP_m$。□

备注 4.9。 由于 $\varphi\colon \mathbb{Z}^m \to \mathsf{Cl}(D)$ $P_i \mapsto [P_i]$ 是群同态，因此，所有对应于整除 a 的元素的 $(k_1, \ldots, k_m)$ 构成的集合为

$$([0, e_1] \times \cdots \times [0, e_m]) \cap \ker(\varphi),$$

因此对应于有理多胞体在 $\mathbb{R}^m$中的 $\mathbb{Z}^m \cap \ker(\varphi)$内的格点。

定理 4.10。 若 D 是可计算克鲁尔整环，且 $0 \neq a \in D$，则可以计算出 a 分解为原子的所有因式分解（忽略顺序和相伴关系）。

证明。 根据引理4.8，我们可以计算出除 a的所有原子 b_1、……、 b_n（若 $a \in D^\times$，则可能有 $n = 0$）。的因式分解对应于 n元组（t_1，……， t_n） $\in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，满足 $a = \varepsilon b_1^{t_1} \cdots b_n^{t_n}$，其中 $\varepsilon \in D^\times$。用除子表示，求出所有因式分解等价于求出所有满足以下条件的（t_1，……， t_n） $\in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$：

$$\mathrm{div}(a) = t_1 \,\mathrm{div}(b_1) + \cdots + t_n \,\mathrm{div}(b_n).$$

注意， t_i 有上界，因为对每个 i，$\mathsf{div}(a)$ 和 $\mathsf{div}(b_i)$ 都可以通过 (C3)（定义 4.1 中）计算。于是，求解问题归结为求解 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 中的线性丢番图方程组，该方程组只有有限多个解。□

我们用伪代码总结引理 4.8和定理4.10 的证明所提出的（朴素）算法，见算法 1 和 2。[6]

算法 1 计算整除 a 的所有不可约元的朴素算法

函数 整除给定元素的不可约元($0 \neq a \in D$)

$e_1P_1 + \cdots + e_mP_m \leftarrow$ 除子(a) ▷使用 (C3)

$A \leftarrow \emptyset$ ▷将包含不可约元

$C \leftarrow \emptyset$ ▷将包含不可约元的系数元组

对于所有 $(k_1, \ldots, k_m) \neq (0, \ldots, 0)$ 使得 $0 \leq k_i \leq e_i$ **成立** ▷ 按字典序

  如果 $k_1P_1 + \cdots + k_mP_m$ 是主的 **那么** ▷使用引理 4.6

    如果 不存在 $(l_1, \ldots, l_m) \in C$ 满足 $l_i \leq k_i$ 对所有 i **成立**

      $b \leftarrow k_1P_1 +$ 的生成元$\cdots + k_mP_m$ ▷使用引理4.6

      $A \leftarrow A \cup \{b\}$

      $C \leftarrow C \cup \{(k_1, \ldots, k_m)\}$

返回 A

算法 2 计算 a的所有因式分解的朴素算法（在相伴关系意义下）

函数分解($0 \neq a \in D$)

$\{b_1, \ldots, b_n\} \leftarrow$ 整除给定元素的不可约元(a)

$F \leftarrow \emptyset$

对所有 $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 满足 $\operatorname{div}(a) = t_1 \operatorname{div}(b_1) + \cdots + t_n \operatorname{div}(b_n)$ **执行**

  $\varepsilon \leftarrow a/(b_1^{t_1} \cdots b_n^{t_n})$ ▷在 K 中可计算

  $F \leftarrow F \cup \{(\varepsilon, (b_1, t_1) \ldots, (b_n, t_n))\}$

返回 F

4.2. **可计算克鲁尔整环上的（Laurent）多项式环。**

命题 4.11. 如果 D 是带有分裂算法的可计算克鲁尔整环，那么多项式环 $D[\boldsymbol{x}]$也是如此。

证明。 显然，定义 （C1）中的性质4.1 得到了满足。

多项式环 $D[\boldsymbol{x}]$ 是一个克鲁尔整环，具有两类素除子（第 2.2.1 节）：如果 $P \in \mathfrak{X}(D[\boldsymbol{x}])$满足 $D \cap P \neq 0$，那么 P从 D扩张而来，即$P = P'D[\boldsymbol{x}]$，其中 $P' = D \cap P \in \mathfrak{X}(D)$。根据（C2），这些素除子是可计算可枚举的。在计算上，我们只需使用 D的相应素除子 P'来表示它们。就相应的赋值而言，如果 $f = \sum_{\boldsymbol{m}} a_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}} \in D[\boldsymbol{x}]$，则 $\mathrm{v}_P(f) = \min\{\mathrm{v}_{P \cap D}(a_{\boldsymbol{m}}) : \boldsymbol{m}\}$。因此，赋值 $\mathrm{v}_P(f)$ 是可计算的。

若 $P \cap D = 0$，则对于某个不可约多项式 $p \in K[\boldsymbol{x}]$，P可扩张为局部化 $K[\boldsymbol{x}]$和 $P = pK[\boldsymbol{x}] \cap D[\boldsymbol{x}]$。非相伴的不可约多项式给出

[6]Th元组的枚举（k_1，……，k_m）按字典序进行；算法 1确保所有（l_1，……，l_m ）with $l_i \leq k_i$对于所有 i，在检查（k_1，……，k_m）的极小性时，都已经考虑过了。

不同的素除子。因此，这类素除子恰好对应于 $K[\boldsymbol{x}]$ 中的首一不可约多项式（首一性是相对于单项式上的某个任意全序而言）。由于 K 具有分裂算法， $K[\boldsymbol{x}]$ 中的首一不可约多项式集合是可计算可枚举的。我们用相应的首一不可约多项式 P $p \in K[\boldsymbol{x}]$来表示。在此情形下，$\mathsf{v}_P(f)$ 就是 p在 f 中的因式分解里 $K[\boldsymbol{x}]$的重数。因此，(C2)和(C3) 也对 $D[\boldsymbol{x}]$成立。

为证明 (C4)，回顾 $\mathsf{Cl}(D[\boldsymbol{x}]) \cong \mathrm{Cl}(D)$（根据推论 2.7），因此只需证明：给定 P 的一个素除子 $D[\boldsymbol{x}]$，我们可以计算其在 $\mathsf{Cl}(D)$ 中的类 $[P]$ 。如果 P 是从 D扩张得到的，那么由 (C4) 的 D可知结论成立，因为 $[P]_{D[\boldsymbol{x}]} = [P \cap D]_D$。

现在设 $P = pK[\boldsymbol{x}] \cap D[\boldsymbol{x}]$ ，其中 $p \in K[\boldsymbol{x}]$ 不可约。由于事实上 P由 p表示，因此该多项式 p 确实是明确给出的。现在

$$\mathrm{div}_{D[\boldsymbol{x}]}(p) = P + \sum_{i=1}^{r} e_i P_i,$$

其中 P_1，……， P_r两两不同，且 $e_i \in \mathbb{Z}$，并且对所有 $P_i \cap D \neq 0$ 都有 $i \in [1, r]$。系数 e_i 可根据 (C3) 的 $D[\boldsymbol{x}]$计算得到，而我们已经证明了这一点。

Now

$$[P]_{D[\boldsymbol{x}]} = -\Big[\sum_{i=1}^{r} e_i P_i\Big]_{D[\boldsymbol{x}]} = -\sum_{i=1}^{r} e_i [P_i \cap D]_D,$$

最后一个类可通过 (C4) 对 D计算。因此，性质 (C4)对 $D[\boldsymbol{x}]$也成立。

最后，由于 K 具有分裂算法， $K(\boldsymbol{x})$也具有分裂算法。 □

推论 4.12. 如果 D 是具有分裂算法的可计算克鲁尔整环，那么 *Laurent* 多项式环 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$也具有分裂算法。

证明。显然，定义 4.1 中的 (C1) 得以满足。环 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 是通过对由素元 $x_1, \ldots, x_n$生成的乘法集进行局部化，从 $D[\boldsymbol{x}]$ 得到的。因此， $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 的素除子与 $D[\boldsymbol{x}]$的素除子一一对应，但不包括n 素除子 $(x_1), \ldots, (x_n)$。此外，存在典范同构 $\mathsf{Cl}(D[\boldsymbol{x}]) \cong \mathsf{Cl}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])$（定理 2.6）。因此，$D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 的性质 (C2)、(C3) 和 (C4) 可由 $D[\boldsymbol{x}]$的相应性质立即推出。
□

4.2.1. 算法：关于 (*Laurent*) 多项式环。 为总结命题证明中的算法内容，4.11和推论 4.12，我们明确给出计算 $K(\boldsymbol{x})$ 中元素相对于 $D[\boldsymbol{x}]$ （算法 3）的除子的算法，以及计算 $D[\boldsymbol{x}]$ 的素除子在 $\mathsf{Cl}(D)$ 中对应的类的算法（算法 4）。对于 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$，函数 LPDivisor 和 LPClassOfPrimeDivisor 完全类似，只需省略与单项式对应的素除子，因此此处不再给出。请记

p 住， p素除子 P 属于 D $[\boldsymbol{x}]$ 分为两种 t ypes:

- 如果 P 是从 D扩张而来，那么它由 $P \cap D$ 上的素除子 D表示（其计算表示为 (C2) 上的 D）；
- 如果 P 局部化为 $K[\boldsymbol{x}]$，则它由不可约多项式 $p \in K[\boldsymbol{x}]$表示。

Alg算法 3 计算 p一个除子，其关于 p D的 $[\boldsymbol{x}$

函数 PolyRingDivisor($0 \neq f/g \in K(\boldsymbol{x})$) 如果 $g \neq 1$ 则返回 PolyRingDivisor(f) $-$ PolyRingDivisor(g) 否则$\lambda p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} \leftarrow$在 $K[\boldsymbol{x}]$ ▷ 中使用 $Kf = \sum_{\boldsymbol{m}} a_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}$ 的分裂算法将 f 分解，并取 $a_{\boldsymbol{m}} \in KC \leftarrow \min\{ \operatorname{div}_D(a_{\boldsymbol{m}}) : \boldsymbol{m}\}$ ▷逐分量最小值，使用 D 的 (C3)返回 $C + \sum_{i=1}^{r} e_i(p_i K[\boldsymbol{x}] \cap D[\boldsymbol{x}])$

算法4 计算 $D[\boldsymbol{x}]$ 的素除子的类

要求： P 是 $D[\boldsymbol{x}]$ 的素除子函数 PolyRingClassOfPrimeDivisor(P) 如果 P 是从 D 扩张而来，则使用 D 的 (C4) 返回 $[P \cap D]$ ▷；否则 ▷ P 局部化为 $K[\boldsymbol{x}]$ $p \leftarrow$ 个 $K[\boldsymbol{x}]$ 的不可约多项式，表示 $PP + e_1 P_1 + \cdots + e_r P_r \leftarrow$PolyRingDivisor($p$) ▷ 个全部从 D 扩张而来的 $P_i \neq P$ 使用 D 的 (C4) 返回 $-\sum_{i=1}^{r} e_i [P_i \cap D]$ ▷

4.3. **可计算克鲁尔整环上的 FLIR**。 为了能够在 D-FLIR 中进行计算，图表之间的变量替换需要由显式给出的 Laurent 多项式表示。

定义 4.13。 设 D 是一个可计算整环。若存在明确给出的 $l \geq 0$ 和 *Laurent* 多项式 p_{ij}、 $q_{ij} \in K[\boldsymbol{t}^{\pm 1}]$ ，分别对应 $i \in [1, l]$ 和 $j \in [1, n]$，使得 *D-FLIR* A 是显式的

$$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(1), \ldots, \boldsymbol{y}(l)\}$$

是 A 的图表系统，其中

$$\boldsymbol{y}(i) = (p_{i1}(\boldsymbol{x}), \ldots, p_{in}(\boldsymbol{x})) \qquad and \qquad \boldsymbol{x} = (q_{i1}(\boldsymbol{y}(i)), \ldots, q_{in}(\boldsymbol{y}(i))).$$

因此，在显式 FLIR 中，我们可以通过简单地代入 Laurent 多项式，以计算方式将元素从一个图表转换到任意其他图表：同构 $K(\boldsymbol{x}) \to K(\boldsymbol{y}(i))$ 是显式的。

推广上一小节关于多项式环和 Laurent 多项式环的结果，我们将证明以下定理。

定理 4.14. 具有分裂算法的可计算克鲁尔整环上的显式 *FLIR*，是具有分裂算法的可计算克鲁尔整环。

我们将证明分成几个引理。首先，我们需要一种表示 A 的素除子的方法。由于 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] = A[\boldsymbol{x}^{-1}]$ 是 A 对由 x_1、……、x_n 生成的乘法集进行局部化所得，因此 A 中不能延拓到 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 的素除子仅有有限多个，即满足 P 且 $x_1 \cdots x_n \in P$ 的素除子。然而，每个这样的 P 都能非平凡地延拓到某个 $D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}]$（引理 3.2）。

下面的引理表明，我们可以不重复地计算位于 $x_1 \cdots x_n$ 上方的素除子：考察图表 $\boldsymbol{y}(i)$时，我们可以识别并剔除位于 $x_1 \cdots x_n$ 上方、且出现在某个图表 $\boldsymbol{y}(j)$ 中的所有素除子，其中 $j < i$。

引理 4.15. 对于每个 $i \in [1, l]$，都可以计算出 $s_i \geq 0$ 以及 $D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}]$ 的素除子 Q_{i1}、……、Q_{is_i}，使得这恰好是满足以下条件的 $D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}]$ 的素除子 Q 集合：

$$x_1 \cdots x_n \in Q \qquad \textit{and} \qquad \boldsymbol{y}(j)_1 \cdots \boldsymbol{y}(j)_n \in Q \qquad \textit{for all } j < i.$$

证明。由于 A 是显式 FLIR，我们可以将 $x_1 \cdots x_n = f(\boldsymbol{y}(i))$ 表示为 $f \in K[\boldsymbol{t}^{\pm 1}]$，类似地，对于所有满足 $j < i$ 的 $j \in [1, l]$，也可以将 $\boldsymbol{y}(j)_1 \cdots \boldsymbol{y}(j)_n = g_j(\boldsymbol{y}(i))$ 表示为 $g_j \in K[\boldsymbol{t}^{\pm 1}]$。

现在使用推论 $\mathrm{div}^{D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}]}(f)$ 以及 $\mathrm{div}^{D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}]}(g_j)$，根据推论 4.12 计算所需集合$\{Q_{i1}$、……、$Q_{is_i}\}$，该集合由出现在除子 div 的支集中的素除子构成$^{D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}]}(f)$，并且还包括所有 $j < i$ 的除子 $\mathrm{div}^{D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}]}(g_j)$ 的支集。□

因此，我们可以将 A 的素除子集合表示为不交并

$$\mathfrak{X}(A) = \{\, Q \cap A : Q \in \mathfrak{X}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]) \,\} \;\cup\; \bigcup_{i=1}^{l} \{Q_{i1} \cap A, \ldots, Q_{is_i} \cap A\}.$$

由于我们已经知道如何处理局部化 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$、$D[\boldsymbol{y}(1)^{\pm 1}]$、……、$D[\boldsymbol{y}(l)^{\pm 1}]$ 中的除子，其中 A，这就为我们提供了 A的素除子的可计算可枚举表示。

引理 4.16. 对于每个 $a \in K(\boldsymbol{x})$，都可以计算除子 除子$_A(a)$。

证明。只需计算$^{D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]}(a)$ 和$^{D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}]}(a)$ 对所有 $i \in [1, l]$，然后合并所得信息即可。根据推论 4.12，这是可行的。□

引理 4.17. 类群 $\mathrm{Cl}(A)$ 以及同态 $\mathrm{Div}(A) \to \mathrm{Cl}(A)$ 都是可计算的。

证明。由定理 3.7，A 的类群为 $\mathrm{Cl}(D) \oplus H$，其中

$$H \cong \mathbb{Z}^r / \langle \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n \rangle \qquad \text{and} \qquad \mathrm{div}_A(x_i) = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} P_j,$$

其中 P_1、…、 $P_r \in \mathfrak{X}(A)$ 是包含 $x_1 \cdots x_n$ 的 A 的素除子，并且对所有 $i \in [1,n]$, $\boldsymbol{c}_i = (c_{i1}, \ldots, c_{ir}) \in \mathbb{Z}^r$。此处，$\mathbf{Cl}(D) \cong \mathbf{Cl}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])$ 通过扩张映射$[I] \mapsto [ID[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]]$。

根据推论 4.12，同态 $\mathbf{Div}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]) \to \mathrm{Cl}(D)$ 是可计算的。由于$D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] = A[\boldsymbol{x}^{-1}]$ 是将 A 在由 x_1、……、 x_n 生成的乘法集处局部化所得，映射 $\mathbf{Div}(A) \to \mathrm{Div}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])$ 由省略素除子 P_1、……、 P_r 给出，因此也是可计算的。因此，映射 $\mathbf{Div}(A) \to \mathrm{Cl}(D)$ 是可计算的。

根据引理 4.16，我们可以计算 $\mathbf{div}_A(x_i)$，进而得到向量 $\boldsymbol{c}_i$。因此， H也是可计算的。接下来只需证明映射 $\mathbf{Div}(A) \to H$ 是可计算的。也就是说，给定一个素除子 $P \in \mathfrak{X}(A$，我们需要证明可以计算它在 H 中的像。

每个不包含 $x_1 \cdots x_n$的素除子 $P \in \mathfrak{X}(A)$ 都可扩张为素除子 $P' \in \mathfrak{X}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])$。因此，我们有不交并

$$\mathfrak{X}(A) = \{P_1, \ldots, P_r\} \cup \mathfrak{X}_0 \cup \mathfrak{X}_1,$$

其中， $\mathfrak{X}_0$ 由 A 的素除子组成，这些素除子具有如下形式：对于某个$P_0 \in \mathfrak{X}(D)$, $P_0 D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \cap A$；而 $\mathfrak{X}_1$ 由具有如下形式的素除子组成：对于某个不可约多项式 $p \in K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$， $pK[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \cap A$。

设 $P \in \mathfrak{X}(A)$。若对于某个 i 有 $P = P_i$，则无需进行任何操作，因为我们选取的 H 的表示使用 $[P_1]$、……、 $[P_r]$ 作为生成元。因此，不失一般性， $x_1 \cdots x_n \notin P$。

现在假设 $P \in \mathfrak{X}_1$，也就是说，对于某个不可约多项式 $p \in K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$，有 $PK[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] = pK[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$。$\mathbf{Div}(A) \to \mathbf{Div}(K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])$ 的核由 P_1、……、 P_r 以及 $\mathfrak{X}_0$ 生成。因此，

$$\mathrm{div}_A(p) = P + \sum_{i=1}^{r} e_i P_i + E,$$

对于某个 $e_i \in \mathbb{Z}$ 以及一个除子 E 支集于 $\mathfrak{X}_0$。系数 e_i 可由引理 4.16计算得到。由引理 3.6可知， E 的类在 H中是平凡的。因此，我们有 $[P]_H = -e_1[P_1] - \cdots - e_r[P_r]$ 属于 H。将 $[P]_H$表示为 H的生成元的形式后，它便是可计算的。

最后，考虑 $P \in \mathfrak{X}_0$，即 $PD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] = P_0 D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$，其中 $P_0 = D \cap PD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \in \mathfrak{X}(D)$。注意到，这个 P_0 可由 P计算得到，因为 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 上的素除子若由 D 扩张而来，实际上只需用 D中相应的素除子表示即可。引理 4.6 允许我们计算出 a、 $b \in D$，使得 $P_0 = \min\{\mathrm{div}_D(a), \mathrm{div}_D(b)\}$。于是， D 所对应的除子分式理想为 $(aD + bD)_v$，其到 A 的扩张为 $(aA + bA)_v$。因此， P_0 到 A 的扩张可由除子 $\min\{\mathrm{div}_A(a), \mathrm{div}_A(b)\}$表示。于是，

$$\min\{\mathrm{div}_A(a), \mathrm{div}_A(b)\} = P + \sum_{i=1}^{r} e_i P_i,$$

对于某个 $e_i \in \mathbb{Z}$，它们可由引理 4.16计算得到。由于引理 3.6 中的短正合序列由将除子理想从 D扩张到 A所诱导的映射分裂，因此 $\min\{\mathrm{div}_A(a),\ \mathrm{div}_A(b)\}$ 投影到 H时的类是平凡的。我们得到$[P]_H = -e_1[P_1] - \cdots - e_r[P_r]$ 在 H中。□

现在我们可以证明，定义在可计算克鲁尔整环 D 上的显式 FLIR A，仍然是可计算克鲁尔整环（且具有分裂算法）。

定理 4.14 的证明。我们必须验证定义 4.1 中关于 A的性质。由于 A是给定为 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$的子环，性质 (C1) 显然。性质 (C2) 可由我们将 $\mathfrak{X}(A)$ 表示为 $\mathfrak{X}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])$的不交并，再加上一组位于 $x_1 \cdots x_n$之上的有限个额外素除子的表示推出（参见引理 4.15 后的讨论）。接着，引理 4.16 证明了 (C3)，引理 4.17 证明了 (C4)。最后，由于 A 的分式域是 $K(\boldsymbol{x})$，它具有分裂算法。□

4.3.1. *FLIR* 的算法。 我们再次总结定理 4.14中的算法内容，见算法 5 和 6。请注意，除有限多个素除子外，所有 A都扩张到 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$；其余位于 $x_1 \cdots x_n$之上的素除子，则非平凡地扩张到某个 $D[\boldsymbol{y}(i)^{\pm 1}]$。在引理 4.15 中，我们已经看到，可以以不重复的方式将后一类素除子枚举为 $Q_{i1} \cap A$、……、 $Q_{is_i} \cap A$。

算法 5 计算 FLIR A 中元素的除子

函数 FLIRDivisor($0 \neq f \in K(\boldsymbol{x})$)
- $E \leftarrow$ LPDivisor(f) ▷ 除子的 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$
- **对所有** $i \in [1, l]$ **执行**
  - $f_i \in K(\boldsymbol{y}(i)) \leftarrow$ 在图表 $\boldsymbol{y}(i)$ 中的 f 表达式
  - $E_i \leftarrow$ LPDivisor(f_i) ▷ $D[\boldsymbol{y}(i)$ 的除子$^{\pm 1}]$
  - **对所有** $j \in [1, s_i]$，**执行**
    - $e_{ij} \leftarrow Q_{ij}$ 在 E_i 中的系数
    - $E \leftarrow E + e_{ij}(Q_{ij} \cap A)$
- **返回** E

虽然我们没有证明形式化的复杂度界，但从定理 4.14的证明可以清楚地看出，算法的复杂度主要由以下计算的复杂度决定：

(1) 给定 D 的一个除子 E，计算 $a, b \in D$，使 $\min\{\text{除子}_D(a), \text{除子}_D(b)\} = E$;

(2) 对 $K[\boldsymbol{x}]$ 中的多元多项式进行因式分解。

问题 (1) 对于域而言是平凡的，对于 $\mathbb{Z}$而言也是如此；对于有趣的环类（例如数域的整数环），已有实用算法，在这些环中，该问题对应于计算理想的生成元。

算法6 计算 FLIR 素除子的类 A in $\mathrm{Cl}(D) \oplus H$

要求： P 是 A的一个素除子

函数 FLIRClassOfPrimeDivisor(P)

- $c_1P_1 + \cdots + c_rP_r \leftarrow \mathrm{FLIRDivisor}(x_1 \cdots x_n)$ ▷ 使用算法5
- **如果** $P = P_i$ 对于某个 i **则**
  - **返回**$(0, \quad [P_i])$
- **else** ▷ P 扩展到 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$
  - $g \leftarrow$ LPCLassOfPrimeDivisor($PD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$) ▷在 $\mathrm{Cl}(D)$ 中的类（算法4）
  - **如果** P 扩展到 $K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$**则**
    - $p \leftarrow$ $K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 的不可约多项式，表示 P
    - $P + e_1P_1 + \cdots + e_rP_r + E \leftarrow$ FLIRDivisor(p)
    - **返回** $(g, \quad -\sum_{i=1}^{r} e_i[P_i])$
  - **else** ▷ $PD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 由 D扩张而来
    - $P_0 \leftarrow PD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \cap D$
    - 计算 a、 $b \in D$， 其中 $P_0 = \min\{\mathrm{div}_D(a), \ \mathrm{div}_D(b)\}$ ▷ 利用引理4.6
    - $P + \sum_{i=1}^{r} e_iP_i \leftarrow \min\{$除子$_A(a)$,除子$_A(b)\}$ ▷使用算法 5
    - **返回** $(g, \quad -\sum_{i=1}^{r} e_i[P_i])$

问题 (2) 在计算机代数中已有深入研究，对于多种域（例如数域和有限域）以及 $\mathbb{Z}$ [Kal92；Kal03]。

最后，虽然定理 4.14 表明 A 是一个可计算克鲁尔整环，但在实践中仍缺少一个重要环节：要在 A中计算因式分解，我们还需要计算 A 的主除子的生成元（而不仅仅是 D的）。虽然原则上总能做到这一点（引理 4.6），但枚举过程完全不切实际。

算法 7 在以下合理假设下给出了一种更实用的方法：问题 (1) 和 (2) （实际上，不需要(1)的全部内容，只需计算 D 的一个主除子生成元即可）有可用的实用算法。

算法 7 计算 FLIR A中的一个主除子 E 的生成元

要求： E 是 A的主除子

函数 FLIRPrincipalGenerator($E \in$Div(A))

- $E' \leftarrow$ E 到 Div($D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$) 的扩张
- $E'' \leftarrow$ E' 到 Div($K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$) 的扩张
- $E'' = e_1[p_1] + \cdots + e_l[p_l]$ 其中有两两非相伴的素元 $p_i \in K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$
- $f \leftarrow p_1^{e_1} \cdots p_l^{e_l}$
- 计算 $d \in D$， 其中除子$^{D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]}(d) = E' -$ 除子$^{D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]}(f)$。
- 求解线性方程组除子$_A(df) + \sum_{i=}^{n}$ $_1 \ m_i$除子$_A(x_i) = E$对于 $\boldsymbol{m} = (m_1, \ \ldots\ldots, \ m_n)$。
- **返回** $d\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}} f$

算法的正确性证明 7. 首先注意， E' 是由 E 删去位于 $P_1, \ldots, P_r$ 之上的素除子 $x_1 \cdots x_n$ 得到的。类似地，除子 E''是由 E' 删去 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 从 D扩张而来的素除子得到的，这显然成立

鉴于我们对素除子的表示方式，这很容易做到。现在， E'' 具有所述表示，因为 $K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 的素除子由不可约多项式表示。因此，我们可以计算 f。

现在， $E' - \operatorname{div}^{D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]}(f) \in \operatorname{Div}(D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}])$ 仅在从 D 扩张而来的素除子处具有非零系数。由于 E' 也为主的（因为 E 为主的），根据关于 D 的假设，我们可以计算 d。

最后，$\operatorname{div}_A(df)$ 与 E 的差异仅在于位于 $x_1 \cdots x_n$ 之上的素除子 P_1、.....、 P_r。由于 E 为主的，这意味着存在某个 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n$，使得 $\operatorname{div}_A(d\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}} f) = E$。这是一个关于 $\boldsymbol{m}$、系数取自 $\mathbb{Z}$ 的线性方程，因此可以求解以求得 $\boldsymbol{m}$。□

最后，定理 3.7 表明 $\operatorname{Cl}(A) \cong \operatorname{Cl}(D) \oplus H$，其中 H 明确表示为 $\operatorname{Coker}(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}C)$，其对应矩阵为 $C \in \mathbb{Z}^{n \times r}$。算法 8 计算该矩阵 C。进而很容易推导出 H 的更多性质，例如可使用史密斯标准形计算其不变因子分解。

算法 8 计算 FLIR A 的 $\operatorname{Cl}(A)/\operatorname{Cl}(D)$ 的表示

函数 FLIRClassGroupPresentation(A)$E_i \leftarrow$ FLIRDivisor(x_i) 对所有 $i \in [1, n]$ ▷ 使用算法5

$E_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} P_j$。

返回 $C = (c_{ij})$

5. 劳朗交环与簇代数

本节将指出，局部无环簇代数是 FLIR（第 5.1 节）。局部无环簇代数中一个有趣的子类是 Banff 簇代数。我们将证明这些代数是显式 FLIR，因此可以通过算法计算类群和因式分解（第 5.2 节）。我们还将说明如何计算 Banff 簇代数的表示（第 5.3 节），并给出一族示例（第 5.4 节）。

根据定义，每个上簇代数都是 LIR。这给出了上簇代数为克鲁尔整环的一个刻画。

推论 5.1。 设 D 是一个克鲁尔整环， $\mathbb{P}$ 是一个半域，且 U 是一个以 $\mathbb{P}$为系数、定义在 D 上的上簇代数。那么，当且仅当 U 是由簇所对应的 *Laurent* 多项式环的有限交时，它才是一个克鲁尔整环。

证明。 由于 D 是一个克鲁尔整环，且 $\mathbb{P}$ 是一个无挠阿贝尔群，因此群代数$D\mathbb{P}$ 是一个克鲁尔整环 [Gil84，定理 15。4]。结论由引理 3.2得出。□

备注 5.2. (1) 满秩上簇代数（基环为 $D = \mathbb{Z}$）根据海星引理是有限个 Laurent 多项式环的交 [BFZ05，推论

1.9]。由于该交是通过从初始种子沿每个方向各变异一次得到的，因此它是显式的，故这些代数是显式 FLIR。

（2）存在不具有满秩的克鲁尔（上）簇代数（例如 A_3-簇代数），且对这些代数海星引理不成立 [Pom25，例 2。12]。推论 5.1 表明，这些簇代数仍然是由簇产生的劳朗多项式环的有限交。

（3）广义上簇代数 [Pom26，定义 2。7] 是 LIR。因此，如果它们是克鲁尔整环，那么它们就是 FLIR。上Laurent现象代数 [Pom26，定义 5。10]也同样如此。这些代数的分解理论在 [Pom26]中进行了研究。不过，也可以从 LIR 的角度来看待这些结果，但这不会带来实质性的新内容，因为论证将与现有论证类似。

(4) 设 A 是簇代数或上簇代数。若对每个簇 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，都有 $x_1 \cdots x_n \in P$，则素理想 $P \in$Spec(A) 是一个深点。由 $\{ x_1 \cdots x_n : (x_1, \ldots, x_n)$ 是一个簇 $\}$ 生成的 A 理想称为深理想，而所有深点的集合称为 A 的深轨迹；详细讨论见 [BM25] 和 [Cas+24，第 3] 节。克鲁尔整环在高度一素理想处的局部化是离散赋值环，因此是正则的。因此，作为克鲁尔整环的（上）簇代数的深理想高度至少为二。用几何术语来说，深轨迹在仿射概形 Spec(A) 中的余维至少为 2。

(5) 如果（上）簇代数是克鲁尔整环，那么基环 D 必定是克鲁尔整环。事实上，若 $\boldsymbol{x}$ 是一个簇，则 $D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 是 A的局部化，因此是克鲁尔整环。因此， D 也是克鲁尔整环 [Gil84，定理 15。1]。这表明D 在推论5.1中必定是克鲁尔整环。

克鲁尔上簇代数的主要已知例子是满秩上簇代数和局部无环簇代数。由于满秩上簇代数的分解理论已经得到了充分理解 [CKQ23；Pom25；Pom26], 我们将重点放在局部无环情形，尽管通过 FLIR 的方法，借助海星引理，也可以很容易地应用于满秩情形。

5.1. **作为 FLIR 的局部无环簇代数。** 接下来的两个结果是 Muller [Mul14], 以 FLIR 的语言表述的结果的细微变体。由于我们需要引理 5.3 略为更明确的表述，并且利用迭代 FLIR 的工具，证明很简短，因此我们将重新证明它们。

引理 5.3 (本质上是 [Mul14，命题 3])。 设 A 是一个定义在整环 D 上、系数取自 $\mathbb{P}$ 的孤立簇代数。若 $\boldsymbol{x}$ 是 A 的一个簇，其交换多项式为

f_i，则 A是一个 $D\mathbb{P}$-*FLIR*，其图表系统为

$$\{(y_1,\dots,y_n) : y_i \in \{x_i, f_i/x_i\} \text{ for } i \in [1,n]\}$$

此外，如果 D 和 $\mathbb{P}$ 是可计算的，且 $\boldsymbol{x}$ 已明确给出，那么 A 就是一个显式的$D\mathbb{P}$-*FLIR*。

证明。 由于对于孤立簇代数，不同方向上的变异彼此交换，因此唯一的簇变量是 x_1、……、 x_n和 x'_1、……、 x'_n，且对所有$i \in [1,n]$都有 $x_i x'_i = f_i \in D\mathbb{P}$。因此，

$$A = D\mathbb{P}[x_1, x'_1, \dots, x_n, x'_n] = D\mathbb{P}[x_1, f_1/x_1][x_2, f_2/x_2]\cdots[x_n, f_n/x_n].$$

因此，代数 A 是一个迭代 FLIR，推论 3.12 表明 A 是一个 $D\mathbb{P}$-FLIR，并具有所述的图表系统。 □

定理 5.4（基本上是 [Mul14，定理 2]）。 每个 A上定义在整环 D 上并带有系数半域 $\mathbb{P}$ 的局部无环簇代数 $D\mathbb{P}$都是一个 D *-FLIR*。特别地，如果 A是克鲁尔整环，那么 A 也是克鲁尔整环。

证明。若 A 是局部无环簇代数，则它有一个由孤立簇局部化 A_1、……、 A_l组成的簇覆盖。每个这样的 A_i 都是对 A进行冻结所得，因此是一个系数取自 $\mathbb{P}_i$ 、半域为 $\mathbb{P}_i$ 的簇代数（见第 2.3.3 节）。引理 5.3 表明， A_i 是一个 $D\mathbb{P}_i$-FLIR。由于 $D\mathbb{P}_i$ 是 $D\mathbb{P}$上的 Laurent 多项式环，推论 3.13 蕴含 A_i 也是一个 $D\mathbb{P}$-FLIR。将 A_1、……、 A_l的图表系统取并，便得到 A的图表系统，因此 A 也是一个 $D\mathbb{P}$-FLIR。

由于 D 是一个克鲁尔整环，且 $\mathbb{P}$ 是一个无挠阿贝尔群，群代数 $D\mathbb{P}$是一个克鲁尔整环 [Gil84，定理 15。4]。命题 3.4 进而表明 A 是一个克鲁尔整环。 □

注记 5.5。 正如 Muller 最初的“$A = U$”定理 [Mul14所述，对于 2] 局部无环簇代数，当然，Spec(A) 由 Spec(A_1)、……、Spec(A_l) 的谱覆盖。定理 5.4 中的结论较弱，因为 A 是 Laurent 多项式环的交，但某些高度至少为二的素理想在所有 Laurent 多项式环中都可能变为平凡（见注记 2.15）。

5.2. **Banff 算法与显式 FLIR**。 Muller 引入了一种称为 Banff 算法的半算法，它以一个种子（$\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{y}$， B）为输入；若算法终止，则会将相应的簇代数 $A = A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$ 表示为由孤立簇局部化构成的簇覆盖 [Mul13， §5]。

因此，Banff 算法的终止意味着 A 是局部无环的。我们对 Banff 算法进行直接改编，以证明 A 是一个显式 FLIR（定义 4.13）。Banff 算法基于覆盖对和定理 5.7。

定义 5.6。 设 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$ 是一个交换矩阵为 $B = (b_{ij})$ 的种子。

(1) 一对指标(i, j) 是覆盖对，当且仅当 $b_{ij} > 0$，但不存在一个指标无限序列$(i_k)_{k\in\mathbb{Z}}$，使得对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 都有 $b_{i_k i_{k+1}} > 0$，且$(i, j) = (i_1, i_2)$。(2) 一对(i, j) 是终端覆盖对，当且仅当 $b_{ij} > 0$，并且对所有 k 都有 $b_{ki} \leq 0$，或者对所有 k 都有 $b_{jk} \leq 0$。

覆盖对的概念是从箭图的相应概念推广而来的。为了更好地理解它，考虑一个顶点集为 $[1, n]$ 的有向图，并且每当 $b_{ij} > 0$时，就有一条从 i 到 j 的箭头。[7] 那么，覆盖对是一条箭头 $i \to j$，它不包含在任何双向无限有向路径中。终端覆盖对是一条箭头 $i \to j$，其 i 为源点，或者 j 为汇点。

如果存在一个覆盖对 $i \to j$，那么也存在一个终端覆盖对，因为只需沿着包含 $i \to j$ 的路径前进，直到到达源点（从 i向后行进）或汇点（从 j向前行进） [Mul13, 命题 8。1]终端覆盖对有时会更便于算法方面的考量。

定理 5.7 （Muller）。设 D 为一个整环， $\mathbb{P}$ 为一个半域。设 $A = A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B; D)$ 为一个簇代数。若存在一个覆盖对 (i, j)，则以下结论成立。

（1）谱 $\operatorname{Spec}(A[x_i^{-1}])$ 和 $\operatorname{Spec}(A[x_j^{-1}])$ 覆盖 $\operatorname{Spec}(A)$。（2）如果冻结 $A[x_i^{\dagger}]$ 和 $A[x_j^{\dagger}]$ 是局部无环的，那么它们分别等于 $A[x_i^{-1}]$ 和$A[x_j^{-1}]$。因此，它们是 A的簇局部化。

证明。 第一个断言见 [Mul13，推论 5。4], 第二个断言则由 [Mul14，引理 1] 得出。这些论证在我们稍微更一般的情形下同样成立。 □

~Banff 算法的思路是寻找一个与输入 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$ 变异等价的种子 $(\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}}, B)$，并使其具有覆盖对 (i, j)，从而 $\operatorname{Spec}(A)$ 可由 $\widetilde{x}_i$ 和 $\widetilde{x}_j$ 的两个局部化的谱覆盖。该过程递归地应用于 $\widetilde{x}_i$ 和 $\widetilde{x}_j$ 的两个冻结，直至得到一个孤立的（或无环的）簇代数。如果这一递归过程在有限步后终止，则称簇代数 A 为 Banff。在这种情况下，这些冻结确实是簇局部化，因此我们得到由孤立簇局部化构成的 A 的簇覆盖。

Banff 算法由 [Mul13，§5] 引入。更多介绍见 [MS16；BMS19]。

定理 5.8. 若 D 是可计算克鲁尔整环，且 $\mathbb{P}$ 是可计算半域，那么每个以 D 为基环、系数属于 $\mathbb{P}$ 的 *Banff* 簇代数都是显式的 $D\mathbb{P}$-*FLIR*。

[7] 这是合理的，因为 B 是斜对称化的，所以 $b_{ij} > 0$ 当且仅当 $b_{ji} < 0$。

证明. 在 D 和 $\mathbb{P}$ 满足上述假设时，Banff 算法会生成 A 的一个由孤立簇局部化构成的显式簇覆盖 A_i。引理 5.3 表明，每个 A_i 都是显式的 $D\mathbb{P}$-FLIR。这些图表的并集构成了 A的显式图表系统（如定理 5.4 的证明所示）。□

计算 Banff 簇代数图表系统的 Banff 算法伪代码见算法 9。得到图表系统后，第 4 节的结果允许我们计算 Banff 簇代数中元素的类群和分解。

算法 9 计算 Banff 簇代数的图表系统。

要求： A 是一个 Banff 簇代数，其初始种子为 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$。
确保： 输出是 $D\mathbb{P}$的图表系统，适用于 A。

函数 图表$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$
  若 $B = 0$ **则** ▷ 孤立情形
    $m \leftarrow (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$的秩，$\ B)$
    对所有 $i \in [1, m]$ **，**
      $f_i \leftarrow \frac{y_i}{y_i \oplus 1} \prod_{b_{ki}>0} x_k^{b_{ki}} + \frac{1}{y_i \oplus 1} \prod_{b_{ki}<0} x_k^{-b_{ki}}$
    $S \leftarrow \emptyset$
    对所有 $I \subseteq [1, m]$ **，**
      $\boldsymbol{x}_I \leftarrow (f_i/x_i,\ \ x_j :\ \ i \in I,\ \ j \notin I)$ ▷ as in Theorem 5.4
      $S \leftarrow S \cup \{\boldsymbol{x}_I\}$
    返回 S
  else
    对所有种子（$\tilde{\boldsymbol{x}}$，$\tilde{\boldsymbol{y}}, \widetilde{B}$）通过变异（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$B$）**执行**
      $(i, j) \leftarrow$ FindCoveringPair($\widetilde{B}$)
      如果 $(i,\ j)$ 存在**则**
        $(\boldsymbol{x}^\dagger,\ \boldsymbol{y}^\dagger,\ B^\dagger) \leftarrow$对（$\tilde{\boldsymbol{x}}$，$\tilde{\boldsymbol{y}}$，）的冻结 $\widetilde{B}$) 于 i
        $(\boldsymbol{x}^\ddagger,\ \boldsymbol{y}^\ddagger,\ B^\ddagger) \leftarrow$对（$\tilde{\boldsymbol{x}}$，$\tilde{\boldsymbol{y}}$，）的冻结 $\widetilde{B}$) 于 j
        $S^\dagger \leftarrow$ 图表（$\boldsymbol{x}^\dagger$，$\boldsymbol{y}^\dagger$，$B^\dagger$） ▷ $D\mathbb{P}^\dagger$-图表
        $S^\ddagger \leftarrow$ 图表$(\boldsymbol{x}^\ddagger,\ \boldsymbol{y}^\ddagger,\ B^\ddagger)$ ▷ $D\mathbb{P}^\ddagger$-图表
        $S^\dagger, S^\ddagger \leftarrow$ 将 $S^\dagger, S^\ddagger$ 扩展为 $D\mathbb{P}$-图表 ▷ 使用推论3.13
        返回 $S^\dagger \cup S^\ddagger$

推论 5.9。设 D 是带有分裂算法的可计算克鲁尔整环，$\mathbb{P}$ 是可计算半域，且 A 是定义在 D 上、系数取自 $\mathbb{P}$的 *Banff* 簇代数。设 K 是 $D\mathbb{P}$的分式域。则存在算法可以计算：

(1) A的一组图表；(2) A的类群$\mathrm{Cl}(A)$；(3) 对于每个非零元素 $f \in A$，其所有分解为不可约元的方式(（忽略顺序和相伴关系)；

(4) 对于每个非零元素 $f \in K(\boldsymbol{x})$，其在 $\mathrm{Div}(A)$ 中的除子，以及该除子在$\mathrm{Cl}(A)$中的类。

证明。 由定理 4.10、4.14 和 5.8可得。 □

定理 *1.1* 的证明。 这是前一推论的特例。检验是否具有唯一分解性，意味着计算 $\mathrm{Cl}(A)$ 并检查它是否平凡。 □

5.3. **Banff 簇代数的表示。** Matherne 和 Muller 首先给出了计算全互素上簇代数表示的算法 [MM15]。本节将说明如何计算 Banff 簇代数 A的表示。我们需要一个交换代数中的标准引理。

引理 5.10 ([Sta25，引理 00EO])。 设 R 是一个环，并设 $g_1, \ldots\ldots, g_l \in R$ 满足$(g_1, \ldots\ldots, g_l) = R$。设 $f\colon M \to N$是一个 R-模同态。若对每个 $f\colon M[g_i^{-1}] \to N[g_i^{-1}]$都是同构，则 $i \in [1, l]$，$f\colon M \to N$也如此。

Banff 算法可以调整为计算 $D\mathbb{P}$-代数 A 的生成元。

命题 5.11. 设 D 是可计算整环，$\mathbb{P}$ 是可计算半域。若 A 是一个系数取自 $\mathbb{P}$、定义在 D 上的 ***Banff*** 簇代数，则存在一个算法，可计算出一组簇变量 X，使其作为 $D\mathbb{P}$-代数生成 A。

证明。 我们利用 Banff 算法的递归结构。若 A 是孤立的，则引理5.3给出了一组由簇变量构成的显式生成集。

现在假设 A 在某个种子（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，B）中有一个覆盖对（i，j）。不失一般性，可以假设（i，j）是一个终端覆盖对。根据递归，我们可以假设对于每个 $k \in \{i, j\}$，都有一组生成集 X_k，使其作为 $D\mathbb{P}_k$-代数生成 $A[x_k^{-1}]$，其中 $\mathbb{P}_k = \mathbb{P} \oplus \mathrm{Trop}(x_k)$，且 X_k 由 $A[x_k^{\dagger}] = A[x_k^{-1}]$ 的簇变量构成。

只需证明

$$X := X_i \cup X_j \cup \{x_1, \ldots, x_n, x_i', x_j'\}$$

生成 A 作为 $D\mathbb{P}$-代数。这里 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$，而 x_i'、x_j' 分别是在种子（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，B）中对 x_i、x_j进行变异后得到的簇变量。

首先注意到 $X \subseteq A$，因为冻结 $A[x_i^{\dagger}]$ 和 $A[x_j^{\dagger}]$ 的每个簇变量也是 A的簇变量。令 A' 为由 X生成的 $D\mathbb{P}$-代数。于是 $A' \subseteq A$，我们需要证明二者相等。

由于（i，j）是终端覆盖对，因此对于所有 k，都有 $b_{ki} \leq 0$；或者对于所有 k，都有 $b_{jk} \leq 0$。考虑第一种情况。此时，在 i 处的交换关系为

$$x_i x_i' = c + x_j^{d} m \tag{4}$$

其中 c、$d \in \mathbb{P}$ 和 m 是 x_1、……、x_{i-1}、x_{i+1}、……、x_n 中的一个单项式。注意到 c 在 A' 中是可逆的，且 d、x_i'、$m \in A'$，我们推得 $(x_i,\ x_j)_{A'} = A'$。在第二种情况下，类似的论证再次表明 $(x_i,\ x_j)_{A'} = A'$。

包含关系 $\iota\colon A' \hookrightarrow A$ 诱导出局部化的包含关系 $\iota_k := A'[x_k^{-1}] \hookrightarrow A[x_k^{-1}]$，其中 $k \in \{i, j\}$。根据构造，集合 $\iota_k(X)$ 生成 $A[x_k^{-1}]$ 作为 $D\mathbb{P}_k$-代数。又由于 x_k、$x_k^{-1} \in \operatorname{im} \iota_k$，同态 ι_k 是满射。将 ι 视为 A'-模同态，引理 5.10 给出 $A' = A$。□

注 5.12。该算法可以推广到其他局部无环簇代数，前提是：（i）已知由孤立的（或无环的）簇局部化构成的显式覆盖，例如 $A[g_1^{-1}]$、……、$A[g_l^{-1}]$，并且（ii）能够保证 $(g_1, \ldots, g_l)_{A'} = A'$。在 Banff 算法中，终端覆盖对的交换关系式（4）通过将 x_1、……、x_n 和 x_i' 加入生成集，提供了一种确保第二个条件的简便方法。

已知一组生成元后，可以使用 Gr¨obner 基计算一个表示。由于使用 Gr¨obner 基来计算消去理想，我们将范围限制在域上；但请注意，在可计算 PID 上也可以做到这一点，例如 $\mathbb{Z}$ [BW93，第 10 章。1]。

命题 5.13。设 K 是一个可计算域。给定 $f_1, \ldots, f_m \in K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$，可以计算代数 $K[x_1, \ldots, x_n, f_1, \ldots, f_m]$的一个表示。

证明。我们引入辅助变量 $Y_1, \ldots, Y_n$ 来表示逆元 x_i^{-1}。考虑多项式环

$$R := K[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_m].$$

定义 K-代数满同态 $\phi\colon R \to K[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, f_1, \ldots, f_m]$，其在生成元上的定义为

$$\phi(X_i) = x_i, \qquad \phi(Y_i) = x_i^{-1}, \qquad \phi(Z_j) = f_j.$$

设 $f_j = g_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^{-\boldsymbol{e}_j}$，其中 $g_j \in K[\boldsymbol{x}]$ 且 $\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$（我们假设 f_j 的表示方式使得能够确定 g_j 和 $\boldsymbol{e}_j$）。那么容易看出

$$\ker \phi = \left(X_i Y_i - 1,\ Z_j - g_j(\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{e}_j} : i \in [1, n],\ j \in [1, m] \right) =: I.$$

令 J为关于变量 Y_1、……、Y_n 的 I 消去理想，即

$$J := I \cap K[X_1, \ldots, X_n, Z_1, \ldots, Z_m].$$

Then

$$K[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}]/J \cong \phi(K[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}]) = K[x_1, \ldots, x_n, f_1, \ldots, f_m].$$

生成元可以通过计算 J 的格¨罗布纳基 I 来得到，其中采用合适的消去序（参见任意一本关于格¨罗布纳基的教材，例如 [CLO15，定理 1.3。2] 或 [BW93，第 6 章。2]）。由此即可得到所需的表示。□

推论 5.14。设 A 是域 K 上的 *Banff* 簇代数，其中该域是可计算域。那么存在一个算法，可以计算出 A 的表示。

证明。 命题 5.11 使我们能够计算一组簇变量 f_1、……、 f_m，它们生成 A 作为一个 K-代数。然后，命题 5.13 表明， A 的表示是可计算的。 □

注记 5.15。 在可计算域上，原则上，定理 3.7 允许我们根据表示直接计算类群 Cl(A)。为此，只需计算如下因式分解：

$$x_i A = \prod_{1\le j\le r}^{v} P_j^{a_{ij}} = \bigcap_{1\le j\le r} (P_j^{a_{ij}})_v$$

理想 $x_i A$ 作为高度一素理想的除子乘积。由于理想 P_j是 $A/x_i A$的关联素理想，且指数a_{ij} 相对于 $P_j^{a_{ij}} \subseteq x_i A$取最大值，因此可利用主分解算法计算这些因式分解 [BW93，第 8]章。然而，计算表示和主分解都需要使用 Gr¨obner 基，而这类计算通常开销很大。

注记 5.16。 设 D 为可计算整环。实际应用中，或许更适合先在一个较小的环 R 上计算表示，其中 D 是一个代数；随后通过标量扩张将所得表示扩张到 D 。

更具体地，设 A_R 是可计算整环 R上的 Banff 簇代数， A_D 是 D 上的对应簇代数，且具有相同的初始种子；并设 D是一个 R-代数。假设我们有一个表示

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R[\boldsymbol{x}] \longrightarrow A_R \longrightarrow 0$$

R-代数 A_R的表示。若 D 在 R上是平坦的，则与 D 张量化可得

$$0 \longrightarrow I \otimes_R D \longrightarrow D[\boldsymbol{x}] \longrightarrow A_R \otimes_R D \longrightarrow 0.$$

D 在 R 上平坦，还可保证

$$A_R \otimes_R D \cong A_D,$$

因为 A_R 是劳朗多项式环的有限交，且在平坦性假设下，有限交与标量扩张可交换 [Bou72，命题 I.2.6。6]。

若 K 是一个域，且 D 是一个 K-代数，则 D 在 K上是平坦的。特别地，若 D 是一个域上的代数，我们可以先在素域上计算其表示，然后将标量扩张到 D。

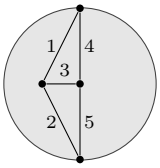


图 1. $D_{2,\ 2}$ 的一个三角剖分。

5.4. **一些例子。** 在本小节中，我们讨论一族由边界上至少有两个标记点的带 puncture 圆盘的三角剖分所产生的簇代数，并在其中一些代数上测试我们的算法。关于由曲面产生的簇代数的详细信息，请参见例如 [FST08]。

设 $D_{m,\ p}$ 为边界上有 $m \geq 2$ 个标记点和 $p \geq 2$ 个穿孔点的圆盘。$D_{m,\ p}$ 的任意理想三角剖分都有 $n = 3p + m - 3$ 条弧 [FG07，第 2]节。

我们明确描述与$D_{m,\ p}$的一个特定三角剖分相关联的交换矩阵 $B(m,\ p) = (b_{ij})$。该三角剖分的弧将用 $[1, n]$ 中的整数标记。矩阵项 b_{ij} 计算三角剖分中弧 i 和 j 按顺时针顺序连续出现的三角形数量，减去它们按逆时针顺序连续出现的三角形数量。

我们从 $D_{2,\ 2}$ 的一个三角剖分开始，如图 1 所示。相应的交换矩阵为

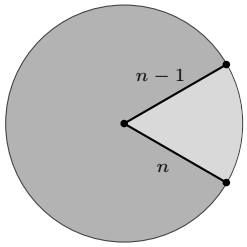
$$B(2,2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

对于一般的 $(m,\ p)$，其中 $m, p \geq 2$，我们现在先递归地构造$D_{m,\ 2}$ 的三角剖分，然后构造 $D_{m,\ p}$ 的三角剖分，其交换矩阵为 $B_{m,\ p} =(b_{ij})$。在此构造中，我们始终保持弧 $n-1$和 n 按逆时针顺序出现在一个同时包含边界线段的三角形中。弧 $n-1$ 和 n 始终出现在唯一的一个三角形中，因此

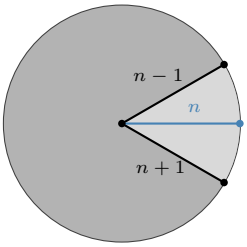
$$b_{n,n-1} = 1.$$

我们首先说明如何从 $B(m+1, 2)$ 得到 $B(m,\ 2)$。我们从图 2a所示的情形出发，其中颜色较深的阴影区域表示三角剖分的一部分，它与局部构造无关，因此予以省略（根据递归构造，深色区域不包含含有弧 $n-1$ 和 n的三角形）。

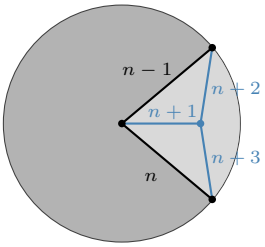
为了构造 $B(m+1,2)$，我们在弧 $n-1$ 和 n之间的边界上添加一个标记点，并按图 2b所示添加一条弧。为保持最后两条弧的逆时针顺序，我们将先前的弧 n 重新标记为 $n+1$，并将新弧标记为 n。



（a） D_m 中的三角形 $_p$ with 弧 $n-1$ 和 n。



（b）添加一个标记点位于边界上。



（c）添加一个穿孔点。

图 2. 从$D_{m,\ p}$递归构造$D_{m+1,\ p}$ 和$D_{m,\ p+1}$的三角剖分。

我们得到$D_{m+1,2}$的一个三角剖分。将 $B(m,2)$的左上角 $(n-1)\times(n-1)$ 阶子矩阵记为 B'，新的 $(n+1)\times(n+1)$ 交换矩阵为

$$B(m+1,2)=\begin{bmatrix} & & & & 0 & b_{1,n}\\ & B' & & & \vdots & \vdots\\ & & & & 0 & b_{n-2,n}\\ & & & & -1 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -1\\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n-2} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

现在，我们从 $B(m,\ p)$构造 $B(m,\ p+1)$。我们在由弧 $n-1$ 和 n围成的三角形内添加一个穿孔点，并按照图2c添加三条弧，从而得到$D_{m,\ p+1}$的一个三角剖分。再次将 B' 记为 $B(m,\ p)$的$(n-1)\times(n-1)$左上子矩阵，则新的$(n+3)\times(n+3)$交换矩阵为

$$B(m,p+1)=\begin{bmatrix} & & & & b_{1,n} & 0 & 0 & 0\\ & B' & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & & & b_{n-2,n} & 0 & 0 & 0\\ & & & & 0 & -1 & 1 & 0\\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n-2} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，我们递归地定义了交换矩阵族 $B(m,p)$，其中$m\geq 2$ 和 $p\geq 2$ 取遍整数，这些矩阵由$D_{m,p}$的三角剖分导出。与之相关的簇代数$A_{m,p}:=A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},B(m,p);\ D)$根据 [Mul13，定理 10.6]是班夫簇代数。若$p=2$，则它们是无环簇代数 [FST08，例 4.3]，；但若 $p\geq 3$，则它们不是无环的，这是由 [FST08，第 11 节和第12]节的结果推得的。

5.4.1. 计算结果。 我们在 SageMath 中实现了两种算法 [Sage25]，用于计算班夫簇代数的类群。第一种方法记为 L，是算法 8的实现；第二种方法记为 PD ，先计算一个表示（记为 P），然后计算主分解（记为 D），如备注 5.15所述。

我们使用 SageMath 10.7 版本，在基于 Linux 的工作站上对一些 A型簇代数$\boldsymbol{x}$、$B_{m、p}$；$\mathbb{Q}$）运行了两种算法。表1显示了运行时间。正如预期，方法 P 明显较慢，而 L 对于规模大得多的情形仍然可行。对于 B（2、2），两种方法都能轻松计算类群。然而，簇代数 $A_{m、2}$ 实际上是无环的，因此，若选择更好的初始种子，结果可由 [GELS19]立即得到。

对于 $p \geq 3$，我们只能在一小时内为最小的几个情形 B（2、3）和 B（3、3）计算出表示。即使在这些情形下，使用 D确定类群的秩也不可行，因为初等分解的计算超出了可用的时间和内存资源。另一方面，方法 L 的表现好得多，在几秒钟内就计算出了 B（2、3）和 B（3、3）的类群秩。对于表 1 中列出的其余所有情形，方法 PD甚至在计算表示的阶段就已失败。这可能与表示中生成元数量的增长有关，从而使 Gr¨obner 基计算在计算上变得难以承受。

相比之下，方法 L 仍适用于规模大得多的例子。尽管其运行时间也会随着输入规模的增大而增加，但它无需计算 Gr¨obner 基，因此在实际应用中具有更好的可扩展性。

最后，我们展示了一些使用本文所开发的方法计算得到的非唯一分解示例。

例 5.17。 (i) 考虑由矩阵所关联的、定义在 $\mathbb{Q}(i)$ 上的簇代数 $A = A(\boldsymbol{x},\ B; \mathbb{Q}(i))$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对 (3，5) 而言，它是 B 的终端覆盖对。容易验证，在x_5 处冻结后，我们得到一个无环簇代数；在 x_3 处冻结后，变异 5 处后，我们得到一个无环簇

	$B(2,\ 2)$	$B(2,\ 3)$	$B(3,\ 3)$	$B(4,\ 3)$	$B(3,\ 4)$	$B(4,\ 4)$	$B(5,\ 4)$
rank	11	2	2	2	3	3	3
vars	5	8	9	10	12	13	14
gens	5	18	20	24	41	45	49
图表	16	10	11	11	14	15	16
L	0.8s	2.4s	3.8s	6.3s	1分45秒	4分47秒	16分20秒
P	0.1s	4分55秒	42分30秒	$*$	$*$	$*$	$*$
PD	2.0s	$*$	$*$	$-$	$-$	$-$	$-$

表1。 第5.4.1节讨论的计算簇代数除子类群的两种方法的运行时间。 秩 是类群的秩（它同构于 $\mathbb{Z}^r$ 对于某个 r）， 变量 是给定种子中的簇变量数量， 生成元 是方法P 所使用的表示中的生成元数量（即参数m，见命题 5.13），而 图表 是方法 LP所使用的FLIR图表数量。星号表示计算超过了一小时的时间限制，而短横线表示步骤D 未尝试，因为P已超时。

代数。因此，代数 A 是一个 Banff 簇代数。元素

$$f = \frac{x_4^3x_5 + x_4^2x_5^2 + x_4^3 + x_4^2x_5 + x_4x_5 + x_5^2 + x_4 + x_5}{x_2}$$

在 A 中有四种不同的分解：

$$\begin{aligned} f &= (x_1)\cdot(x_3)\cdot\left(\frac{x_4^2+1}{x_1}\right)\cdot\left(\frac{x_4+x_5}{x_2}\right)\cdot\left(\frac{x_5+1}{x_3}\right) \\ &= (x_1)\cdot\left(\frac{x_4^2+1}{x_1}\right)\cdot\left(\frac{x_4+x_5}{x_2}\right)\cdot(x_8)\cdot\left(\frac{x_5+1}{x_8}\right) \\ &= (x_3)\cdot(x_4+i)\cdot(x_4-i)\cdot\left(\frac{x_5+1}{x_3}\right)\cdot\left(\frac{x_4+x_5}{x_2}\right) \\ &= (x_8)\cdot\left(\frac{x_4+x_5}{x_2}\right)\cdot\left(\frac{x_5+1}{x_8}\right)\cdot(x_4+i)\cdot(x_4-i). \end{aligned}$$

(ii) 设 $A = A(\boldsymbol{x}, B(2,2); \mathbb{Q})$ 为与图1中D_2,2的三角剖分相关联的簇代数。 A 的类群为 $\mathbb{Z}^{11}$。令 $\boldsymbol{y} = \mu_3 \circ \mu_4 \circ \mu_5 \circ \mu_1 \circ \mu_2 \circ \mu_3(\boldsymbol{x})$，并令 $\boldsymbol{z} = \mu_4 \circ \mu_3 \circ \mu_5 \circ \mu_2 \circ \mu_1(\boldsymbol{y})$。则 A中有20个整除 f的非相伴原子，而 f 在 A中有29种不同的分解。 f 的长度集为

$$\mathsf{L}(f) := \{3, 4\},$$

其中，因式分解的长度是其中不可约元的个数（重复项也计入）。例如，以下是 f 的两个分解，长度分别为 4 和 3，

分别如下：

$$
\begin{aligned}
f &= \left(\frac{x_2x_4+x_3}{x_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2^2x_4^2+2x_1x_2x_4x_5+x_1^2x_5^2+2x_2x_3x_4+2x_1x_3x_5+x3^2}{x_1x_2x_3x_4x_5}\right)\cdot \\
&\quad\cdot\left(\frac{x_2^3x_4^3+x_1x_2^2x_4^2x_5+3x_2^2x_3x_4^2+3x_1x_2x_3x_4x_5+x_1^2x_3x_5^2+3x_2x_3^2x_4+2x_1x_3^2x_5+x_3^3}{x_1^2x_2x_3x_4x_5}\right)\cdot(x_1) \\
&= \left(\frac{x_2x_4+x_3}{x_1}\right)\cdot(x_3)\cdot\Big(\left(x_1^{-2}x_2^{-2}x_3^{-3}x_4^{-2}x_5^{-2}\right)\left(x_2^5x_4^5+3x_1x_2^4x_4^4x_5+3x_1^2x_2^3x_4^3x_5^2+\right. \\
&\quad + x_1^3x_2^2x_4^2x_5^3+5x_2^4x_3x_4^4+13x_1x_2^3x_3x_4^3x_5+12x_1^2x_2^2x_3x_4^2x_5^2+5x_1^3x_2x_3x_4x_5^3+x_1^4x_3x_5^4+ \\
&\quad + 10x_2^3x_3^2x_4^3+21x_1x_2^2x_3^2x_4^2x_5+15x_1^2x_2x_3^2x_4x_5^2+4x_1^3x_3^2x_5^3+10x_2^2x_3^3x_4^2+ \\
&\quad \left.+ 15x_1x_2x_3^3x_4x_5+6x_1^2x_3^3x_5^2+5x_2x_3^4x_4+4x_1x_3^4x_5+x_3^5\right)\Big).
\end{aligned}
$$

6. FLIR 中素因子的分布

本节证明定理 3.9。证明改编自关于域上簇代数的论证 [GELS19，定理 3。2] 以及 Fadinger 和 Windisch 对 Krull 幺半群代数中类似命题的证明 [FW22]。具体而言，我们使用 Chang 的引理（[Cha11，定理 3(ii)] 或 [FW22，引理 3。2]）以及 Fadinger 和 Windisch 的一个引理的推广 [FW22，引理 3。3]。

以下内容改编自 [FW22，引理 3。3]。

引理 *6.1.* 设 D 是一个分式域为 K 且满足 $|\mathfrak{X}(D)|=\infty$ 的克鲁尔整环。设 $P_1,\dots,P_t\in\mathfrak{X}(D)$两两不同。若 $0\neq I\subseteq D$ 是 D的一个除子理想，则存在无穷多个 $P\in\mathfrak{X}(D)$，满足如下性质：存在 $a,b\in K^\times$ 使得 $I^{-1}=(a,b)_v$，并且对所有 $i\in[1,t]$，都有 $\mathsf{v}_{P_i}(a)=0$，且 $\mathsf{v}_P(a)=\mathsf{v}_P(b)+1$。

证明。由克鲁尔整环逼近定理 [Fos73, 定理 5.8]，存在 $b\in K^\times$，使得对于所有满足 $P\in\{P_1,\dots,P_t\}$ 或 $\mathsf{v}_P(I)\neq 0$ 的 $P\in\mathfrak{X}(D)$，都有 $\mathsf{v}_P(b)=-\mathsf{v}_P(I)$；而对于其余所有 $Q\in\mathfrak{X}(D)$，都有 $\mathsf{v}_Q(b)\geq 0$。由同一定理，存在 $a\in K^\times$，使得对于所有 $i\in[1,t]$，都有 $\mathsf{v}_{P_i}(a)=0$；当 $\mathsf{v}_Q(b)\neq\mathsf{v}_Q(I)$ 时，有 $\mathsf{v}_Q(a)=-\mathsf{v}_Q(I)$；并且对于剩余素数中的某个固定选取 P，有 $\mathsf{v}_P(a)=\mathsf{v}_P(b)+1$，而对于所有其他 $Q\in\mathfrak{X}(D)$，都有 $\mathsf{v}_Q(a)\geq 0$。比较赋值可得$I^{-1}=(a,b)_v$。□

引理 6.2. 设 A 是定义在克鲁尔整环 D 上、以 K 为分式域的 $n\geq 1$ 变量 *FLIR*。设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ 是 A 的一个图表，且 $P_1,\dots,P_t$ 是 A 中位于 $x_1\cdots x_n$ 之上的高度一素理想。那么，对于每个除子理想 $0\neq I\subseteq D$ 以及任意 $e_1,\dots,e_t\in\mathbb{Z}$，存在 $\min\{|D|,\aleph_0\}$ 个两两不相伴的素元 $g\in K[\boldsymbol{x}^{\pm1}]$，使得

$$
[gK[\boldsymbol{x}^{\pm1}]\cap D[\boldsymbol{x}^{\pm1}]]=[ID[\boldsymbol{x}^{\pm1}]]\qquad \textit{and}\qquad \mathsf{v}_{P_i}(g)=e_i\qquad \textit{for all } i\in[1,t],
$$

其中第一个等式是在$\mathrm{Cl}(D[\boldsymbol{x}^{\pm1}])\cong\mathrm{Cl}(D)$中成立的。

证明。我们考虑几种（彼此有重叠的）情形。一般来说，由于我们的目标是构造许多素理想，因此当 $n = 1$ 或 D 没有无穷多个高度一素理想时，情形会更棘手。

情形 1： $n = 1$ **和** D **是唯一分解的。** 要么 $A = D[x]$ 要么 $A = D[x^{\pm 1}] \cap D[(a/x)^{\pm 1}]$对于某个非零非单位元 $a \in D$ 由命题 3.14可知。无论哪种情况，环 $D[x^{\pm 1}]$ 都是唯一分解的，因此第一性质总是平凡地满足。

若 $A = D[x]$ 或 $A = D[x^{\pm 1}]$ （对应于 $a \in D^\times$），则第二性质可由以下事实轻易推出： $D[x]$ 至少包含$\{|D|, \aleph_0\}$ 个素元。（注意$t = 1$ 和 $P_1 =（x）$若 $A = D[x]$，因此对于任意非单项式不可约元 $g \in K[x]$都满足该性质，而 $t = 0$ 若 $A = D[x^{\pm 1}]$）。

因此，设 $A = D[x^{\pm 1}] \cap D[(a/x)^{\pm 1}]$，其中 $0 \neq a \in D \setminus D^\times$。由于每个 $P \in \mathfrak{X}(A)$ 都会非平凡地扩张到两个局部化之一 $D[x^{\pm 1}]$ 或 $D[(a/x)^{\pm 1}]$，因此，位于 x 之上的每个高度一素理想都会非平凡地扩张到 $D[(a/x)^{\pm 1}]$。在此处，我们有

$$x = a(x/a) = \pi_1^{r_1} \cdots \pi_t^{r_t}(x/a),$$

其中 $a = \pi_1^{r_1} \cdots \pi_t^{r_t}$ 是 D 中 a 的素因子分解，且 x/a 是一个单位元。由于每个 π_i 都是 $D[(a/x)^{\pm 1}]$ 中的素元，对于 $i \in [1, t]$，理想 $P_i = \pi_i D[(a/x)^{\pm 1}] \cap A$ 恰好是 A 中位于 x 之上的高度一素理想。因此，我们有 $\mathrm{v}_{P_i}(\pi_i) = 1$，并且对于所有 $i \neq j \in [1, t]$，都有 $\mathrm{v}_{P_j}(\pi_i) = 0$。于是，我们有 $\mathrm{v}_{P_i}|_D = \mathrm{v}_{\pi_i}$。

现在令 $b = \pi_1^{e_1} \cdots \pi_t^{e_t} \in K^\times$。对于充分大的 N 和任意的 $c \in D$，多项式

$$g_c := \pi_1^{e_1 - 1} x^N + \pi_1^{e_1} c x^{N-1} + b$$

满足 $\mathrm{v}_{P_i}(g_c) = \mathrm{v}_{P_i}(b) = \mathrm{v}_{\pi_i}(b) = e_i$ 对所有 $i \in [1, t]$ 均成立，因为对所有 i，$\mathrm{v}_{P_i}(x) > 0$。此外，由艾森斯坦判别法，它在$D_{(\pi_1)}$ 上不可约。因此，它是$K[x^{\pm 1}]$ 的一个素元，并且在 P_i 处具有所需的赋值。这就解决了**情形 1**。

对于其余情形，选取 $M \geq 0$，使得对所有 i，都有 $e_i \geq -M\mathrm{v}_{P_i}(x_1 \cdots x_n)$（这是可能的，因为 $\mathrm{v}_{P_i}(x_1 \cdots x_n) \geq 1$）。利用克鲁尔整环逼近定理，选取 $f \in A$，使得对所有 $i \in [1, t]$，都有 $\mathrm{v}_{P_i}(f) = e_i + M\mathrm{v}_{P_i}(x_1 \cdots x_n) \geq 0$。记

$$f = \sum_{i=r}^{s} f_i x_1^i \in D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}],$$

其中 $f_i \in D[x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ 和 f_r、$f_s \neq 0$。

情形2： $n \geq 2$ **和** D **是唯一分解的。**那么 $D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 是唯一分解的，因此第一性质总是平凡地成立。设 $p \in K[x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ 是一个素元，它不整除任何一个 f_i，且对于所有 i，$\mathrm{v}_{P_i}(p) = 0$。这样的素元至少存在 $\min\{|K|, \aleph_0\}$ 个，因为 $n \geq 2$。定义

$$g_p := (x_1 \cdots x_n)^N + fp(x_1 \cdots x_n)^{-M},$$

取足够大的 N，使得 $\mathrm{v}_{P_i}(g_p) = \mathrm{v}_{P_i}(fp(x_1\cdots x_n)^{-M}) = e_i$。将其视为系数属于 $K[x_2^{\pm 1},\dots,x_n^{\pm 1}]$的关于 x_1 的 Laurent 多项式，依据艾森斯坦判别法，元素 g_p 不可约。由于其首项不被 $K[x_2^{\pm 1},\dots,x_n^{\pm 1}]$中的非恒定元素整除，Laurent 多项式 g_p 是 $K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 中的一个素元，且具有所需性质。p 的不同取值会得到互不相伴的素元 g_p。

由于带有 $|\mathfrak{X}(D)| < \infty$ 的克鲁尔整环总是唯一分解的（事实上，它是一个半局部主理想整环 [GHK06，命题 2.10.7。4]），因此只需考虑以下剩余情形。

情形 3：$n \geq 1$ 和 $|\mathfrak{X}(D)| = \infty$。引理 6.1 表明，存在 a、$b \in K^\times$ 和$P \in \mathfrak{X}(D)$，使得 $I^{-1} = (a,b)_v$，且 $\mathrm{v}_P(a) = \mathrm{v}_P(b) + 1$，并且对所有$i \in [1,t]$ 都有 $\mathrm{v}_{P_i}(a) = 0$（我们利用了 $P_i \cap D$ 的高度至多为一这一点，见引理 3.5）。事实上，P有无穷多个选择，因此还可以保证，对于 f_i的所有非零系数，均有 $\mathrm{v}_P(f_i) = 0$。

定义

$$g_p := b(x_1\cdots x_n)^N + a(x_1\cdots x_n)^{N-1} + af(x_1\cdots x_n)^{-M},$$

取 N足够大，使得 $\mathrm{v}_{P_i}(g_p) = \mathrm{v}_{P_i}(af(x_1\cdots x_n)^{-M}) = e_i$。在局部化 D_P中应用艾森斯坦判别法，可知 $g_p \in D_P[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 不可约。因此，元素 g_p 是 $K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$中的素元。

最后，根据 [FW22，引理 3。2], 并注意到 g_p 的所有系数都是 a或 b的倍数，我们得到

$$g_pK[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \cap D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] = g_p(a,b)^{-1}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] = g_pID[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]. \qquad \square$$

定理 *3.9*的证明。固定一个图表 $\boldsymbol{x} \in S$，并设 $P_1,\dots,P_t$ 是 A 在 $x_1\cdots x_n$之上的高度一素理想。根据引理 3.6,

$$\mathrm{Cl}(A) \cong \mathrm{Cl}(D) \oplus H,$$

其中 H 由 $[P_1],\dots,[P_t]$生成。令 $\pi\colon \mathrm{Cl}(A) \to H$ 为投影映射。

设 $I \subseteq D$ 是一个非零除子理想，并设 $e_1,\dots,e_t \in \mathbb{Z}$。只需证明：存在 $\min\{|D|,\aleph_0\}$ 个两两不同的 $Q \in \mathfrak{X}(A)$，使得

$$[QD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]] = [ID[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]] \qquad \text{and} \qquad \pi([Q]) = e_1\pi([P_1]) + \cdots + e_t\pi([P_t]).$$

引理 6.2 表明，存在 $\min\{|D|,\aleph_0\}$ 个两两不相伴的素元 $g \in K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 使得

$$[gK[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \cap D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]] = [ID[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]] \qquad \text{and} \qquad \mathrm{v}_{P_i}(g) = -e_i.$$

对于每个这样的 g，理想 $Q_g := gK[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \cap A$ 是 A 中的高度一素理想，且满足 $[Q_gD[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]] = [ID[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]]$。

通过考察 A 的局部化 $K[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$，我们得到

$$gA = Q_g \cdot_v P_1^{-e_1} \cdots_v P_t^{-e_t} \cdot_v P_1' \cdots_v P_s',$$

其中 $P'1$，…，$P'_s \in \mathfrak{X}(A)$ 满足 $x_1 \cdots x_n \notin P'i$，且对所有 $i \in [1,s]$ 均有 $D \cap P_i' \neq 0$。因此，每个 $P'_i D[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 都是从 D 扩张而来。引理 3.6 中短正合序列的分裂表明，对于 $i \in [1,s]$，$\pi([P'_i]) = 0$。我们得出 $\pi([Q_g]) = e_1\pi([P_1]) + \cdots + e_t\pi([P_t])$。□

7. 最后的观察

我们最后提出几点观察：讨论皮卡德群与类群之间的关系，重新考察无环情形，以简化 [GELS19], 的论证，并以一些开放问题作结。

7.1. **皮卡德群**。整环A的皮卡德群 Pic(A A 是所有可逆分式理想对主分式理想子群取商所得的群。对于任意克鲁尔整环 A，存在一个典范单射 Pic(A) $\to$ Cl(A)。对于诺特整闭整环，当且仅当 A 是局部唯一分解的，此映射才是双射 [Fos73，推论 18。5]。

簇代数的奇点已有研究，有限型簇代数的奇点甚至已被分类 [Ben+15；Ben+23；Ben+25]。例如，特征为零的域上的 A_3-簇代数具有唯一的奇异极大理想。尽管非正则局部环也可能是唯一分解的，但此处并非如此：下面将证明，对于A，Pic(A)与 Cl(A_3) 并不相同。

命题 7.1。若 K 是一个满足特征 $K = 0$ 的域，且 A 是 A_3上的K-簇代数，则Pic(A) $= 0$ 且Cl(A) $\cong \mathbb{Z}$。

证明。根据 [GELS19，推论 5。16], 我们有 Cl(A) $\cong \mathbb{Z}$。

根据 [Ben+23，引理 4。1],存在一个表示

$$A \cong D[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4]/(Z_1Z_2Z_3Z_4 - Z_1Z_2 - Z_1Z_4 - Z_3Z_4).$$

由于 char $K \neq 2$，在对应于原点 M 的极大理想处存在唯一的奇点 [Ben+23，定理 A(1)]。

根据 [Fos73，推论 18。6],存在一个短正合序列

$$0 \to \mathrm{Pic}(A) \to \mathrm{Cl}(A) \to \mathrm{Cl}(A_M) \to 0.$$

只需证明 Cl(A) $\to$ Cl(A_M) 是同构，便可得出该结论。

局部化 A_M 与超曲面的局部化同构

$$B \coloneqq K[X, Y, Z, W]/(XY - ZW)$$

在其奇异极大理想处 $M' = (x,\ y,\ z,\ w)$ [Ben+23，命题 3。8]。

将标准论证（参见 [Har77，习题 II.6.5] 或 [Fos73，命题 14.8]）推广到局部情形可得：$\mathrm{Cl}(B_{M'}) \cong \mathbb{Z}$：进一步局部化，即在高度一素理想 $P:=(x,z)B_{M'}$处局部化，得到 $B_{(x,z)} \cong K[X,Y,W]_{(X)}$，它是唯一分解的。根据 Nagata 定理（定理 2.6），类群 $\mathrm{Cl}(B_{M'})$由P的类生成。只需证明没有符号幂 $P^{(n)}$（其中 $n \geq 1$）是主理想。假设对某个 $f \in B_{M'}$，有$P^{(n)} = fB_{M'}$。注意 $x^n, z^n \in P^{(n)}$。由于

$$B_{M'}/(y,w)B_{M'} \cong K[X,Z]_{(X,Z)},$$

我们看到，(x^n, z^n) 不包含在 $B_{M'}/(y,w)B_{M'}$ 的任何高度一素理想中，这与它包含在 $fB_{M'}/(y,w)B_{M'}$ 中相矛盾。□

7.2. **重新讨论无环情形。** 对于一个具有无环种子 A（$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B$）的簇代数，位于 $x_1 \cdots x_n$ 上方的高度一素理想已在 [GELS19，引理 4.5、命题 4.7 和定理 4 中作了描述。9]由于其余高度一素理想与 $A[\boldsymbol{x}^{-1}] = D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}]$ 的高度一素理想一一对应，这就完整描述了无环情形下的 $\mathfrak{X}(A)$。

[GELS19] 中的论证基于一个相当技术性的归纳论证，以及对无环簇代数表示的了解。此外，所确定的生成元仅被证明能够作为除子理想生成这些理想，而它们能否作为普通理想生成仍是一个悬而未决的问题 [GELS19，问题 4。8]。下面我们通过给出一种基于迭代 FLIR 的更自然证明，来解决这一问题。虽然论证相似，但我们更有效地利用簇局部化来避免技术性归纳。我们还允许基环为任意克鲁尔整环。

在本小节中，设 A是定义在克鲁尔整环 D上的簇代数，其具有无环种子（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，B）。设 f_1，……，f_n 是与该种子相关联的交换多项式。令$x_i' = f_i/x_i$。我们将伙伴的概念 [GELS19，定义 26] 推广到当前情形。

定义 7.2。(1) 令 $P \in \mathfrak{X}(D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}])$。$P$-伙伴的集合记为 $\mathrm{Partner}(P) \subseteq [1,n]$，由所有满足 $f_i \in P$ 的 $i \in [1,n]$ 组成。

(2) 若两个指标 i、$j \in [1,n]$ 对某个 $P \in \mathfrak{X}(D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}])$ 是 P-伙伴，则称它们互为伙伴 .

由交换多项式的定义可知，非孤立指标 i 对应的交换多项式不会包含在任何由 $D\mathbb{P}$ 扩张而来的高度一素理想中（第2.3.1节）。因此，前一定义中的理想 P 对应于分式域 K（属于 $D\mathbb{P}$）上的一个不可约多项式。由此可知，两个指标 i、j是 P-伙伴，当且仅当 p 同时整除 f_i 和 f_j，且 $K[\boldsymbol{x}]$。

引理 7.3。 如果 i、$j \in [1,n]$ 是伙伴，则 $b_{ij} = b_{ji} = 0$。

证明。 在特征零且具有几何系数的情形下，这是 [GELS19中的引理 2。7]。如果 i 是孤立的，则根据定义，对所有 $b_{ij}=0$ 都有 j 。在非孤立情形下，论证基于对交换多项式的不可约因子进行分析，并且在一般情形下同样成立。□

以下内容推广了 [GELS19、引理 4.5 和命题 4。7] 并回答了[GELS19中的问题 4。8]。

命题 7.4。 设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},B)$ 是整环 A 上的簇代数的一个无环种子，其中 D 为克鲁尔整环。对于每个 $i\in[1,n]$，包含 x_i 的 A 的高度一素理想是形如以下形式的理想

$$Q=PA+\sum_{j\in T}x_jA+\sum_{j\in \mathrm{Partner}(P)\setminus T}x'_jA,$$

其中 $P\in\mathfrak{X}(D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}])$ 包含交换多项式 f_i，并且 $\{i\}\subseteq T\subseteq$ 伙伴$(P$ $)$.

特别地，共有

$$\sum_{\substack{P\in\mathfrak{X}(D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}])\\ f_i\in P}}2^{|\mathrm{Partner}(P)|-1}$$

A 中包含 x_i 的高度一素理想。

我们首先讨论单变量 FLIR，然后通过将孤立簇代数视为迭代 FLIR，讨论孤立簇代数。根据引理 $A=D[x,a/x]$ 3.5，单变量 FLIR D 在克鲁尔整环 $K[x^{\pm1}]$上 K 的高度一素理想 D要么扩张为 D，其中 为的分式域；要么与其非平凡相交，得到一个高度一素理想。第二类高度一素理想将在下文中明确描述。

引理 7.5。 设 D 是一个克鲁尔整环，设 $0\neq a\in D$，且设 $A=D[x,a/x]$。令$P\in\mathfrak{X}($ $D)$。

(1) 若 $a\in P$，则

$$PA+xA\quad and\quad PA+(a/x)A$$

是 PA上的 A 的高度一素理想。

(2) 若 $a\notin P$，则 PA 是 A的一个高度一素理想。

证明。 根据命题 $A=D[x^{\pm1}]\cap D[(a/x)^{\pm1}]$ 3.14，并且 的每个高度一素理想 A都非平凡地扩张到至少一个局部化中。

(1) 注意， $A\cong D[x,y]/(xy-a)$，因为 x 和 a 在 $D[x]$ [Fos73引理 141]中互素。因此，

$$A/(PA+xA)\cong D[x,y]/(P,x,xy-a)\cong D/P[y],$$

因此， $PA+xA$是 A的一个素理想。由于 $PA+xA$局部化为 $PD[(a/x)^{\pm1}]+xD[(a/x)^{\pm1}]=PD[(a/x)^{\pm1}]$，其高度为一。类似地，理想 $PA+(a/x)A$ 是 A的一个高度一素理想。

理想 $PA + xA$ 和 $PA + (a/x)A$ 彼此不同，因为它们在两个图表中的局部化不同。此外，这正是A 上方位于 P之上的仅有两个高度一素理想，因为 Laurent 多项式环 $D[x^{\pm 1}]$ 和 $D[(a/x)^{\pm 1}]$ 在 P之上没有其他高度一素理想。

(2) 现在 $A/PA \cong D[x,y]/(P,\ xy-a) \cong (D/P)[x,y]/(x\bar{y}-a)$，其中 a是 a在 D/P中的像。后一个环是整环，因为 x和 a在 $(D/P)[x]$ [Fos73，引理 14。1]。因此，理想 PA 是 A的素理想。由于局部化后得到 $PD[x^{\pm 1}]$，它的高度为一。□

引理 7.6。 命题 7.4 中的结论对孤立簇代数成立。

证明。 如引理 5.3的证明所示，孤立簇代数 A 是如下形式的迭代 FLIR:

$$D\mathbb{P}[x_1, f_1/x_1][x_2, f_2/x_2]\cdots[x_n, f_n/x_n].$$

通过归纳应用引理7.5，我们得到所述理想是 A中包含 x_i的互不相同的高度一素理想。

反过来，假设 $Q \in \mathfrak{X}(A)$包含 x_i。那么 Q 包含 $f_i = x_i x_i' \in D\mathbb{P}$，因此 $P := Q \cap D\mathbb{P}$ 由引理3.5可知具有高度一。再次迭代应用引理7.5，可得 Q 具有所述形式。□

为将这一结果推广到无环簇代数，我们利用这样一个事实：无环簇代数存在由孤立簇代数构成的簇覆盖，其中仅冻结初始变量 [Mul14，命题 4]。因此，无须进行任何变异即可得到这一簇覆盖。

命题7.4的证明。令 I为 i的所有伙伴组成的集合。冻结$\{x_i : i \in [1,n]\setminus I\}$得到一个孤立簇代数 $A^\dagger = D\mathbb{P}^\dagger$，其种子为 $(\boldsymbol{x}^\dagger, \boldsymbol{y}^\dagger, B^\dagger)$，由引理7.3可知。根据[Mul14，引理 1]，可知，冻结 $A^\dagger$ 是 A的簇局部化。

注意，对 $A^\dagger$进行局部化后，i 的伙伴不会改变。因此，引理7.6表明，所述理想在 $A^\dagger$中两两不同，因而在 A中也两两不同。

因此，接下来只需证明，每个包含 $Q \in \mathfrak{X}(A)$的高度一素理想x_i都具有所述形式。定义 $P\prime := QA^\dagger \cap D\mathbb{P}^\dagger$。由于 $f_i = x_i x_i' \in Q$，$f_i \in P'$也成立。引理7.5 表明 P' 的高度为一（注意到 $A^\dagger$ 是一个 $D\mathbb{P}^\dagger$-FLIR）。现在P' 先限制到 $P'' := P' \cap D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}^\dagger]$，然后扩张为$P := P''D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}]$ 的高度一素理想 $D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}]$。注意，$P \subseteq Q$，因为

$$P'' = QA^\dagger \cap D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}^\dagger] = (QA^\dagger \cap A) \cap D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}^\dagger] = Q \cap D\mathbb{P}[\boldsymbol{x}^\dagger].$$

对于每个 $j \in \mathrm{Partner}(P)$，我们有 $f_j = x_j x_j' \in P \subseteq Q$，因此 $x_j \in Q$ 或 $x_j' \in Q$。令$\{i\} \subseteq T \subseteq \mathrm{Partner}(P)$满足：$j \in T$ 当且仅当 $x_j \in Q$。定义

$$Q_0 \coloneqq PA + \sum_{j \in T} x_j A + \sum_{j \in \mathrm{Partner}(P)\setminus T} x_j' A.$$

于是 $Q_0 \subseteq Q$，我们断言两者相等。

由于种子 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, B)$ 无环，代数 A 存在由孤立簇代数构成的簇覆盖；此外，每个簇局部化都可由冻结初始种子的一个变量子集得到。这可从 [Mul14，命题 4] 的证明中的归纳构造看出。因此，要证明 $Q_0 = Q$，只需证明对于每个孤立簇局部化都有 $Q_0 A^\ddagger = Q A^\ddagger$（使用 [Sta25，引理 00EO]）。

取一个子集 $I \subseteq [1, n]$，使得

$$A^\ddagger \coloneqq A[x_i^\ddagger : i \in I] = A[x_i^{-1} : i \in I]$$

是一个孤立簇代数。$A^\ddagger$ 的系数半域为 $\mathbb{P}^\ddagger \coloneqq \mathbb{P} \oplus \mathrm{Trop}(x_i : i \in I)$，并且种子 $(\boldsymbol{x}^\ddagger, \boldsymbol{y}^\ddagger, B^\ddagger)$ 中与 $i \in I$ 对应的变量和系数已被移除。

注意，$QA^\ddagger = A^\ddagger$ 当且仅当 $T \cap I \neq \emptyset$。于是也有 $Q_0 A^\ddagger = A^\ddagger$。

现在设 $QA^\ddagger$ 是 $A^\ddagger$的真理想。那么 $QA^\ddagger$ 是孤立簇代数 $A^\ddagger$中的一个高度一素理想。引理 7.6 表明 $QA^\ddagger = Q_0 A^\ddagger$（伙伴集 $\mathrm{Partner}(P)\setminus I$在 $A^\ddagger$中可能变小，但 $QA^\ddagger$ 的每个生成元都存在于 Q_0中）。□

例 7.7。前一个证明中一个微妙之处在于如何将 P 与 Q关联起来。转到孤立簇局部化看起来可能有些迂回，但实际上这是必要的：考虑 $Q \cap D[\boldsymbol{x}]$ 这一更直观的方法一般行不通。事实上，素理想 $Q \cap D[\boldsymbol{x}]$ 在 $D[\boldsymbol{x}]$中甚至未必是高度一的。

为说明这一点，考虑 $\mathbb{Z}$上的 A_3-簇代数 A（不含系数）。代数 A 由 x_1、x_2、x_3、x_1'、x_2'、x_3'生成，并满足以下关系

$$x_1 x_1' = x_3 x_3' = 1 + x_2 \qquad \text{and} \qquad x_2 x_2' = x_1 + x_3.$$

这里，1 和 3 是 $(1 + x_2)$-伙伴。A 的一个高度一素理想是 $Q \coloneqq (x_1, x_3)$ $= (x_1, x_3, 1 + x_2)$（命题 7.4）。收缩 $Q \cap \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ 是极大理想 $(x_1, x_3, 1 + x_2)$，其高度为 3。另一方面，在 x_2 处冻结（这里 {2} 是伙伴集合 {1, 3} 的补集），得到一个系数环为 $\mathbb{Z}[x_2^{\pm 1}]$的孤立簇代数。按照证明过程，现在 $P' = QA[x_2^{-1}] \cap \mathbb{Z}[x_2^{\pm 1}] = (1 + x_2)$ 的高度为一，$P = (1 + x_2)\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ 的高度也为一。

7.3. **开放问题**。我们以两个开放问题作结。

问题 7.8. 克鲁尔整环上的每个 *LIR* 都是 *FLIR* 吗？

目前我们还不知道存在不是 FLIR 的 LIR。在单变量情形下，根据命题 3.14，每个 LIR 都是 FLIR。然而，这种情形过于特殊，无法据此推导出一般猜想。若问题 7.8 的答案为肯定，则意味着每个上簇代数都是 FLIR，因而是克鲁尔整环。即使只对某些特殊基环（如域或 $\mathbb{Z}$，这样的结果也很有意义。

目前尚无已知的非克鲁尔上簇代数的例子（假设基环为克鲁尔整环这一显然必要的条件成立）。问题 7.8 的反例或许更容易找到，因为局部交环的类远比上簇代数的类大，即使在单变量情形下也是如此（例 3.16）。

关于簇代数，以下结论已知。

- 马尔可夫簇代数（在 $\mathbb{Z}$上）不是克鲁尔整环 [GELS19，§6]。然而，上簇代数是唯一分解的，因此是克鲁尔整环。
- 根据 Speyer 的一个例子，上簇代数未必是有限生成的[Spe13]。Speyer 的例子是一个 FLIR，因此 FLIR 未必是有限生成的。

第二个问题涉及 Banff 算法的计算复杂度。给定一个显式 FLIR，我们的算法的复杂度显然取决于在基环的分式域上进行多元多项式因式分解。

如果我们研究局部无环簇代数，更常见的情况是，输入将是一个具有班夫性质的矩阵。随后，Banff 算法执行一系列变异和冻结，以获得由孤立簇代数组成的簇覆盖。在这种情况下，如何获得一个合理的复杂度上界尚不清楚。

问题 7.9。 *Banff* 算法的计算复杂度是多少（假设输入是一个班夫交换矩阵，以确保算法终止）？

由于尚不清楚哪些交换矩阵具有班夫性质，因此可能应当在自然的子类中处理这一问题，例如由曲面产生的簇代数。

参考文献

[AF11] D. D. Anderson 和 A. M. Frazier. 整环因式分解的一般理论. Rocky Mountain J. Math. 41.3 (2011), 663–705. doi: 10.1216/RMJ-2011-41-3-663.[AG21] D. F. Anderson 和 F. Gotti. 有界分解整环与有限分解整环. 环、幺半群与模论. 第 382 卷. Springer Proc. Math. Stat. 施普林格，新加坡，2021，7–57. doi: 10.1007/978-981-16-8422-7_2.[Ben+15] A. Benito、G. Muller、J. Rajchgot 和 K. E. Smith. 局部无环簇代数的奇点. Algebra Number Theory 9.4 (2015), 913–936. doi: 10.2140/ant.2015.9.913.[Ben+23] A. Benito、E. Faber、H. Mourtada 和 B. Schober. 有限型簇代数奇点的分类：平凡系数情形. Glasg. Math. J. 65.1 (2023), 170–204. doi:10.1017/S0017089522000209.

[Ben+25] A. Benito、E. Faber、H. Mourtada 和 B. Schober. 有限型簇代数奇点的分类 II：系数. J. Comb. Algebra (2025). 已在线优先发表. doi:10.4171/JCA/117. arXiv: 2401.06758.[BFZ05] A. Berenstein、S. Fomin 和 A. Zelevinsky. 簇代数. III. 上界与双 Bruhat 胞. Duke Math. J. 126.1 (2005), 1–52. doi: 10.1215/S0012-7094-04-12611-9.[BM25] J. Beyer 和 G. Muller. 簇代数的深点. Int. Math. Res. Not. IMRN 4 (2025), Paper No. rnaf027, 39. doi: 10.1093/imrn/rnaf027.[BMS19] E. Bucher、J. Machacek 和 M. Shapiro. 上簇代数与基环的选择. Sci. China Math. 62.7 (2019), 1257–1266. doi: 10.1007/s11425-018-9486-6.[Bou72] N. Bourbaki. 数学原理. 交换代数. 法文译本. Hermann, 巴黎; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1972, pp. xxiv+625.[BW93] T. Becker 和 V. Weispfenning. Gr ¨obner 基. 第 141 卷. 数学研究生教材. 交换代数的计算方法，与 Heinz Kredel 合作. 施普林格出版社，纽约，1993, pp. xxii+574. doi: 10.1007/978-1-4612-0913-3.[Cas+24] M. Castronovo、M. Gorsky、J. Simental 和 D. E. Speyer. 簇深点轨迹与镜像对称 (2024). arXiv: 2402.16970.[Cas+25] R. Casals、E. Gorsky、M. Gorsky、I. Le、L. Shen 和 J. Simental. 辫簇上的簇结构. J. Amer. Math. Soc. 38.2 (2025), 369–479. doi: 10.1090/jams/1048.[CCT25] F. Campanini、L. Cossu 和 S. Tringali. 原子幺半群范畴：泛构造与算术性质 (2025). 预印本. arXiv: 2502.06610.[CG25] J. Coykendall 和 F. Gotti. 整环中的原子性. 环与因式分解理论的最新进展. 第 477 卷. Springer Proc. Math. Stat. 施普林格，查姆，2025，95–159. doi: 10.1007/978-3-031-75326-8 5.[Cha11] G. W. Chang. 克鲁尔幺半群整环的每个除子类都包含一个素理想. 代数杂志 336 (2011), 370–377. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.03.015.[CKQ23] P. Cao、B. Keller 和 F. Qin. 上簇代数上的赋值配对. J. Reine Angew. Math (2023). doi: 10.1515/crelle-2023-0080.[CLO15] D. A. Cox、J. Little 和 D. O'Shea. 理想、簇与算法. 第四版. 数学本科教材. 计算代数几何与交换代数导论. 施普林格，查姆，2015, pp. xvi+646. doi: 10.1007/978-3-319-16721-3.[CLS15] I. Canakci、K. Lee 和 R. Schiffler. 关于具有一个标记点的无穿孔曲面上的簇代数. Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B 2 (2015), 35–49. doi: 10.1090/bproc/21.[Cos25] L. Cossu. 一种新的因式分解方法的一些应用. 环与因式分解理论的最新进展. 第 477 卷. Springer Proc. Math. Stat. 施普林格，查姆，2025，73–94. doi: 10.1007/978-3-031-75326-8_4.[CT24] L. Cossu 和 S. Tringali. 抽象因式分解定理及其在幂等因式分解中的应用. Israel J. Math. 263.1 (2024), 349–395. doi: 10.1007/s11856-024-2623-z.[DM26] R. G. Downey 和 A. Melnikov. 可计算结构理论. 可计算性理论与应用. 统一方法. 施普林格，查姆，2026, pp. xii+540. doi: 10.1007/978-3-031-92433-0.[Edw84] H. M. Edwards. 伽罗瓦理论. 第 101 卷. 数学研究生教材. 施普林格出版社，纽约，1984, pp. xiii+152.[Ell19] J. Elliott. 环、模与闭包运算. 数学专著丛书. 施普林格，查姆，2019, pp. xxiv+490. doi: 10.1007/978-3-030-24401-9.[FG07] V. V. Fock 和 A. B. Goncharov. 对偶 Teichm ¨uller 空间与叶状空间. Te- ichm ¨uller 理论手册. 第 I 卷. 第 11 卷. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. Eur. Math. Soc., Z ¨urich, 2007, 647–684. doi: 10.4171/029-1/16.[Fos73] R. M. Fossum. 克鲁尔整环的除子类群. 第 74 卷. 数学及其边界领域成果. 纽约：施普林格出版社，柏林，海德堡，1973.

[FS56] A. Fr¨ohlich 和 J. C. Shepherdson。域论中的有效程序。Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 248 (1956), 407–432。doi: 10.1098/rsta.1956.0003.[FST08] S. Fomin、M. Shapiro 和 D. Thurston。簇代数与三角剖分曲面。I. 簇复形。Acta Math. 201.1 (2008), 83–146。doi: 10.1007/s11511-008-0030-7.[FW22] V. Fadinger 和 D. Windisch。Krull 幺半群代数中素除子的分布。J. Pure Appl. Algebra 226.4 (2022), Paper No. 106887, 8。doi: 10.1016/j.jpaa.2021.106887.[FWZ21a] S. Fomin、L. Williams 和 A. Zelevinsky。簇代数导论。第 6 章。预印本。2021。arXiv: 2008.09189。[FWZ21b] S. Fomin、L. Williams 和 A. Zelevinsky。簇代数导论。第 4–5 章。预印本。2021。arXiv: 1707.07190。[FWZ24] S. Fomin、L. Williams 和 A. Zelevinsky。簇代数导论。第 1–3 章。预印本。2024。arXiv: 1608.05735。[FZ02] S. Fomin 和 A. Zelevinsky。簇代数。I. 基础。J. Amer. Math. Soc. 15.2 (2002), 497–529。doi: 10.1090/S0894-0347-01-00385-X.[FZ03] S. Fomin 和 A. Zelevinsky。簇代数。II. 有限型分类。Invent. Math. 154.1 (2003), 63–121。doi: 10.1007/s00222-003-0302-y.[GELS19] A. Garcia Elsener、P. Lampe 和 D. Smertnig。簇代数的阶乘性与类群。Adv. Math. 358 (2019), 106858, 48。doi: 10.1016/j.aim.2019.106858.[Ger16] A. Geroldinger。长度集。Amer. Math. Monthly 123.10 (2016), 960–988。doi: 10.4169/amer.math.monthly.123.10.960.[GHK06] A. Geroldinger 和 F. Halter-Koch。非唯一分解。第 278 卷。纯粹与应用数学（博卡拉顿）。代数、组合与解析理论。Chapman & Hall/CRC, 博卡拉顿，佛罗里达州，2006，页 xxii+700。doi: 10.1201/9781420003208.[GHK15] M. Gross、P. Hacking 和 S. Keel。簇代数的双有理几何。Algebr. Geom. 2.2 (2015), 137–175。doi: 10.14231/AG-2015-007.[Gil84] R. Gilmer。交换半群环。芝加哥数学讲义。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1984，页 xii+380。[Gil92] R. Gilmer。乘法理想理论。第 90 卷。女王大学纯粹与应用数学论文集。1972 年版的修订重印本。女王大学，金斯顿，安大略省，1992，页 xii+609。[GKL26] A. Geroldinger、H. Kim 和 K. A. Loper。乘法理想理论与分解理论中的长期问题。环、幺半群与半群的理想理论和算术。当代数学。即将出版。美国数学会，2026。arXiv: 2502.21020。[GL23] P. Galashin 和 T. Lam。正拟阵簇与簇代数。Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) 56.3 (2023), 859–884。doi: 10.24033/asens.2545.[GLS13] C. Geiss、B. Leclerc 和 J. Schr¨oer。唯一分解簇代数。Doc. Math. 18 (2013), 249–274。[GSV18] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein。 GL_n 的 Drinfeld 双与广义簇结构。Proc. Lond. Math. Soc. (3) 116.3 (2018), 429–484。doi: 10.1112/plms.12086.[GY23] K. R. Goodearl 和 M. T. Yakimov。泊松幂零代数上的簇代数结构。Mem. Amer. Math. Soc. 290.1445 (2023), v+100。doi: 10.1090/memo/1445.[GZ20] A. Geroldinger 和 Q. Zhong。交换幺半群中的分解理论。Semigroup Forum 100.1 (2020), 22–51。doi: 10.1007/s00233-019-10079-0.[Hal25] F. Halter-Koch。交换环与幺半群的理想理论。A. Geroldinger 和 A. Reinhart 编。第 2368 卷。数学讲义。施普林格，查姆，2025，页 x+280。doi:10.1007/978-3-031-88878-6.[Har77] R. Hartshorne。代数几何。第 52 卷。研究生数学教材。施普林格出版社，纽约—海德堡，1977，页 xvi+496。[IOS23] T. Ishibashi、H. Oya 和 L. Shen。一个 =U：由 G-局部系统的模空间构造的簇代数。Adv. Math. 431 (2023), Paper No. 109256, 50。doi: 10.1016/j.aim.2023.109256。

[Kal03] E. Kaltofen。多项式因式分解：一个成功案例。英文。2003 年符号与代数计算国际研讨会论文集，ISSAC 2003，美国宾夕法尼亚州费城，2003 年 8 月 3–6 日。特邀报告摘要。幻灯片：*https://kaltofen.math.ncsu.edu/bibliography/03/issac.pdf*。纽约，纽约州：ACM出版社，2003，3–4。[Kal92] E. Kaltofen。1987–1991 年的多项式因式分解。LATIN '92（圣保罗，1992）。第 583 卷。计算机科学讲义。施普林格，柏林，1992，294–313。doi: 10.1007/BFb0023837。[Mal61] A. I. Mal'cev。构造代数。I。《数学科学进展》16.3(99) (1961), 3–60。[Mal62] A. I. Mal'cev。关于递归阿贝尔群。苏联科学院通报 146 (1962), 1009–1012。[Mil08] R. Miller。可计算域与伽罗瓦理论。Notices A mer. Math. Soc. 55.7 (2008), 798–807。[MM15] J. P. Matherne 和 G. Muller。计算上簇代数。Int. Math. Res. Not. IMRN 11 (2015), 3121–3149。doi: 10.1093/imrn/rnu027.[MS16] G. Muller 和 D. E. Speyer。格拉斯曼簇的簇代数是局部无环的。Proc. Amer. Math. Soc. 144.8 (2016), 3267–3281。doi: 10.1090/proc/13023.[Mul13] G. Muller。局部无环簇代数。Adv. Math. 233 (2013), 207–247。doi: 10.1016/j.aim.2012.10.002。[Mul14] G. Muller。局部无环簇代数的一个 = U。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 10 (2014), Paper 094, 8。doi: 10.3842/SIGMA.2014.094.[Pom25] M. Pompili。上簇代数的类群。Canad. J. Math. (2025)。优先在线发表。doi: 10.4153/S0008414X25000033.[Pom26] M. Pompili。每个有限生成阿贝尔群都是某个广义簇代数的类群。代数杂志 686 (2026), 566–594。doi: 10.1016/j.jalgebra.2025.08.017.[Rab60] M. O. Rabin。可计算代数、一般理论与可计算域理论。Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 341–360。doi: 10.2307/1993295.[Sage25] Sage开发团队。SageMath，Sage数学软件系统（10.7 版）。 https://www.sagemath.org。2025。[Sme16] D. Smertnig。非交换环中元素的分解：综述。乘法理想理论与分解理论。第 170 卷。施普林格数学与统计学论文集。施普林格， [查姆], 2016,353–402。doi: 10.1007/978-3-319-38855-7_15.[Spe13] D. E. Speyer。无限生成上簇代数。预印本。2013。arXiv: 1305.6867。[Sta25] Stacks项目作者。Stacks项目。https://stacks.math.columbia.edu。2025。[Tri22] S. Tringali。一个抽象因式分解定理及其若干应用。代数杂志 602 (2022), 352–380。doi: 10.1016/j.jalgebra.2022.03.023.[Wae37] B. L. van der Waerden。《现代代数》。第一部分。第 2 版。施普林格出版社，柏林—哥廷根—海德堡，1937。[Wil14] L. K. Williams。簇代数：导论。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 51.1 (2014), 1–26。doi: 10.1090/S0273-0979-2013-01417-4.[WK24] F. Wang 和 H. Kim。交换环及其模的基础。第二版。第 31 卷。代数与应用。施普林格，新加坡，2024，页 xxi+847。doi: 10.1007/978-981-97-5284-3。

格拉茨大学，数学与科学计算系，NAWI Graz，海因里希街36号，8010 格拉茨，奥地利电子邮箱地址： mara.pompili@uni-graz.at

数学与物理学院（FMF），卢布尔雅那大学和数学、物理与力学研究所（IMFM），亚得里亚街21号，1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚电子邮箱地址： daniel.smertnig@fmf.uni-lj.si