arXiv:2601.07538v1 [math.AG] 12 Jan 2026

非交换簇拉格朗日量

Alexander B. Goncharov、Maxim Kontsevich

目录

1 引言 2
1.1 $\mathcal{Q}$–余定向超曲面的图.21.2 赋予 $\mathcal{Q}$–曲面和三维簇中图的拉格朗日子流形.41.3 $\mathcal{Q}$–图与非交换簇簇.5

2 基础n 非交换簇拉格朗日子流形1 3
2.1 基本非交换簇拉格朗日量的 $\mathcal{Q}$–图.132.2 定理 2.1 的证明.162.3 基本非交换簇拉格朗日量的 $\mathcal{A}$–坐标.22

3 边界 奇异拉格朗日子流形的无穷远处2 7

4 三维簇中交替图的谱覆盖 31

5 非交换特征簇中的簇拉格朗日子流形 34
5.1 来自圆盘图的两种簇簇 $\mathcal{Q}$– .345.2 $\mathcal{A}$–来自 $\mathcal{Q}$–圆盘图的坐标.355.3 $\mathcal{Q}$–来自三维簇理想三角剖分的圆盘图.37非交换特征簇中的簇拉格朗日子流形.42

6 附录 43
6.1 A：非交换簇 $\mathcal{A}$–簇.436.2 B：容许 dg-层.47

摘要

闭曲面 S 上的秩 m 平坦丛空间 $\mathrm{Loc}_m(S)$ 是辛的。以 S 为边界的三维簇 M 会在 $\mathrm{Loc}_m(S)$ 中产生一个拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_M$，它由可延拓至 M 的平坦丛 S 构成。我们将此结果推广，将 T^*M 中的零截面替换为 T^*M 中某些奇异拉格朗日子流形。

首先，我们在三维簇中引入 $\mathcal{Q}-diagrams$ 。它们是光滑余定向曲面 $\{S_i\}$ 的集族 $\mathcal{Q}$，除有限个四重交叉点外，处处横截相交。我们要求，从这样的点沿任意曲面 S_i 的余定向方向平移，会形成一个单形，其外侧面均为余定向的。 $\mathcal{Q}-$ 图是二分带图的三维类比。

令 $\mathbb{L}$ 表示 T^*M 中的拉格朗日子流形，它由零截面与 $\mathcal{Q}$ 的余定向曲面 S_i 的余法丛之并构成。令 $\mathcal{X}_{\mathbb{L}}$ 表示 M 上容许 dg-层 $\mathcal{F}$ 的栈，其微局部支撑位于 $\mathbb{L}$，且在 $T^*_{S_i}M-0$ 处的微局部化是一个秩一局部系统。

我们引入 $\mathbb{L}$ 的边界 $\partial\mathbb{L}$ 。它是辛空间中的一个奇异拉格朗日子流形，提供一个辛栈 $\mathcal{X}_{\partial\mathbb{L}}$ 和一个限制函子 $\mathcal{X}_{\mathbb{L}} \longrightarrow \mathcal{X}_{\partial\mathbb{L}}$。后者的像是拉格朗日子流形。我们证明，在对 $\mathcal{Q}\cap\partial M$ 的温和条件下，这个拉格朗日子流形具有簇描述，因此它是一个 K_2–拉格朗日子流形。它在非交换情形下也有一个简单的描述。

1 引言

1.1 $\mathcal{Q}$–余定向超曲面的图

第1.1 节中的所有引理显而易见。

1.1.1 $\mathcal{Q}$–超曲面的图

设 X 为一个流形。流形 X 中超曲面 H 的余定向，是指在超曲面 H 的余法丛去掉零截面后，选取一个连通分支。该分支称为 H的余法丛。如果 X 是定向的，那么超曲面的余定向等价于其定向。

定义 1.1. 在一个 m–维流形中，若一组光滑余定向超曲面满足以下条件，则称其为一个$\mathcal{Q}$–图： $k < m$ 个超曲面相交处的交点均为横截交，并且

1. 其余孤立交点 q 是 $m+1$ 个超曲面的交点。
2. 将任一相交于 q 的超曲面沿其余定向方向移动，我们会得到一个m–维单形，其面均为余定向外侧面。

条件 (2) 意味着，相交于 q 的超曲面的定向余法向量 h_0、.....、 h_m 的端点的凸包包含零；也就是说，它们满足一个唯一（相差一个常数倍）的线性关系

$$\alpha_0 h_0 + \ldots + \alpha_m h_m = 0, \quad \alpha_0, \ldots, \alpha_m > 0. \tag{1}$$

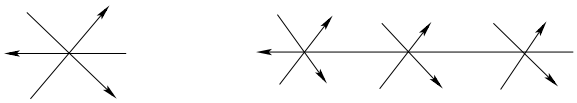


图 1：曲面上的 $\mathcal{Q}$–定向曲线图都是三重交叉图。

引理 1.2. 流形中的 $\mathcal{Q}$–图在集合中的每个超曲面上截出一个 $\mathcal{Q}$–图。

$\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}$ 在 X 中将 $X - \mathcal{Q}$ 分解为连通区域 $\mathcal{C}$。若顶点 $q \in \mathcal{C}$处的所有面在 $\mathcal{C}$ 中相交于 q ，且这些面要么都余定向指向 $\mathcal{C}$内部，要么都余定向指向其外部，则称该顶点为一致余定向。若一个区域的所有顶点都一致定向，则该区域为着色区域；若没有顶点一致定向，则该区域为混合区域。若着色区域的面均余定向指向内部，则该区域为 $\circ$–区域；否则为 $\bullet$–区域。

引理 1.3. 给定 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}$ 于 X中， $X - \mathcal{Q}$ 的每个分支要么是着色的，要么是混合的。当且仅当其所有边界面都被同一种颜色着色时， $X - \mathcal{Q}$ 中的一个分支才是着色的。

1.1.2 超曲面的交替图

直线上的有限个余定向点称为交替图，如果沿直线移动时，各点的余定向交替出现。



图 2：直线上的点的交替图，以及曲面上的定向曲线的交替图 .

定义 1.4. 流形 X 中的交替图是由光滑余定向超曲面组成的正规交叉连通集合 $\mathcal{H}$ ，其中

- 对于任意 $\mathcal{H}$ 交线上的相交超曲面的余定向交替排列。

我们要求交替图与流形 X 的边界横截相交 $ly.$

在 X 上的交替图不一定会在边界上诱导出交替图。下面的引理给出了一个等价的归纳定义。

引理 1.5. 在定义 *1.4*的相同假设下， $\mathcal{H}$ 是交替图，当且仅当用其任意一个超曲面 H 与该图相交后，在 H中得到一个交替图。

交替图的着色区域和混合区域的定义方式与 $\mathcal{Q}$–图相同。引理 1.3 对交替图也成立，见图 3:

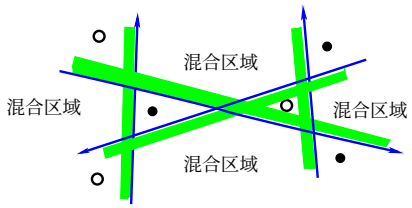


图 3: （共）定向线以及交替图的 •、 ◦ 和混合区域 .

1.1.3 $\mathcal{Q}$–图 $\longrightarrow$ 交替图。

一个 $\mathcal{Q}$–图会导出一个交替图：我们通过沿余定向方向移动任何包含 q 的超曲面，来消解每个孤立交点 q。这样我们得到一个等价

$$\{\mathcal{Q}-\text{diagrams}\} \longleftrightarrow \{\text{Alternating diagrams whose } \bullet-\text{domains are simplices}\}. \tag{2}$$

事实上，将 •–区域缩小为点，就得到一个 $\mathcal{Q}$–图。

引理 1.6. 设 q 是一个 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}$的孤立交点。那么， $\mathcal{Q}$的超曲面会在围绕 q的小球面 S_q 的边界上诱导出一个交替的集合。

1.1.4 $\mathcal{Q}$–图、交替图以及曲面上的二分图

以下是关于这一点的基本事实，参见[GKe，第 2.2、2.3、2.6]节。

1. 根据定义， $\mathcal{Q}$–曲面上的图 S 与三重交叉图在 S [Th]上相同。[1]

$$\{\mathcal{Q}-\text{diagrams on a surface } S\} = \{\text{triple crossing diagrams on a surface } S\}. \tag{3}$$

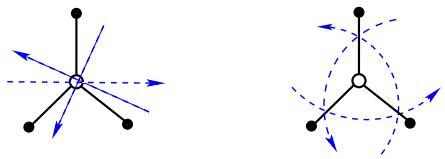


图4: 消解三重交叉点后，我们得到一个二分图。

[1]D. Thurston 只考虑了圆盘中的三重交叉图。

2. 二分曲面图上的一条之字形曲线是一条沿图行进的路径，在 $\bullet$–顶点处左转，在 $\circ$–顶点处右转。将二分曲面图的之字形曲线从顶点向外推，所得的曲线集合与其等价

$$\begin{aligned}&\{\text{minimal bipartite graphs on a surface } S\} = \\ &\{\text{minimal alternating diagrams on } S \text{ with contractible colored domains}\}.\end{aligned} \tag{4}$$

3. 任意二分图都可以通过添加边来拆分顶点的度为 >3 的顶点，并在这些边的中间引入二价顶点，从而转化为一个所有顶点度均为 3 的二分图。

给定二分曲面图的一组之字形曲线 Γ，其顶点的度为 3，$\bullet$–如图 Γ 所示，为 4 的所有边画出指定的之字形曲线。随后，Γ 的每个顶点周围都有一个由弧组成的定向多边形。将 $\bullet$–顶点附近的顺时针三角形收缩为点，得到一个三重交叉图。由此得到一个等价关系

$$\begin{aligned}&\{\text{曲面上的极小二分图 } S\text{，其顶点的度为 3 } \bullet\text{–}\} = \{\text{曲面上的极小三重} \\ &\text{交叉图，其区域 } S \text{ 可收缩 } \circ\text{–}\}.\end{aligned} \tag{5}$$

我们得出结论：

- 曲面上的交替图是比二分图和三重交叉图稍为一般的几何对象。
- $\mathcal{Q}$–三维簇中的图是曲面上二分图／三重交叉图的三维类比。

1.2 指派给曲面和三维簇中 $\mathcal{Q}$–图的拉格朗日子流形

我们从一般定义开始。回顾一下，流形 X 中的超曲面 H 的余定向是余法向射线丛 $(T^*X-0)/\mathbb{R}^{\times}_{>0}$的一个截面。这个截面就是该余定向超曲面的勒让德子流形。余法丛拉格朗日子流形 $T^*_H X$ 是它在 T^*X-0中的原像。

定义1.7。设流形 X中有一个光滑余定向超曲面 $\mathcal{H}$ 的有限集 $\{H_i\}$，其勒让德子流形两两不相交。它在 T^*X中给出如下拉格朗日子流形：

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathcal{H}} := \textit{ the union of the zero section } X^\circ \textit{ and the conormal bundles } T^*_{H_i}X \textit{ to } H_i. \tag{6}$$

1.2.1 曲面上交替图对应的拉格朗日子流形和谱曲面

定义1.8。 设 $\mathcal{T}$为曲面上的一个交替图。考虑以下拉格朗日子集 :

$$\mathbb{L}^\circ = \mathbb{L}^\circ_{\mathcal{T}} := \mathbb{L}_{\mathcal{T}} - \{\textit{the union of zero sections for mixed domains}\}. \tag{7}$$

引理 1.9. T 拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{T}}$与光滑曲面 $\Sigma_{\mathcal{T}}$同胚，称为谱曲面 :

$$\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{T}} = \Sigma_{\mathcal{T}}. \tag{8}$$

图 $\mathcal{T}$的环与谱曲面上的边界圆相对应。

证明。 下面描述谱曲面。取一组不交的区域 $\mathcal{D}'_*$，与着色区域 $\mathcal{D}_*$ 对应于 $S-\mathcal{T}$。对于 e 上的每个交点 $\mathcal{T}$，有两个着色区域 $\mathcal{D}_\bullet$ 和 $\mathcal{D}_\circ$ 共享 $e_\circ$ 将这些区域的不交副本记为 $\mathcal{D}'_\bullet$ 和 $\mathcal{D}'_\circ$。用桥替代交点，并沿桥将它们粘合，同时施以 $180°$扭转，得到一个光滑曲面，记作 $\Sigma_{\mathcal{T}}$。然后，正如例如[GKo], 中那样，我们得到一个同胚（8）。 □

曲面上三重交叉图对应的拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^\circ$ 与其相关交替图对应的拉格朗日子流形哈密顿同伦。特别地，它是非奇异的。

例。 假设 $S-\mathcal{T}$的着色区域都是可缩的。令 Γ 为在（ $\mathcal{T}5$）中赋予 Γ^* 的二分带图。令 $\bullet$–为共轭二分带图，它是通过反转 Γ [GKe], 的顶点处边的循环次序得到的，并令 S_{Γ^*} 为由 Γ^*的带粘合而成的关联曲面。那么，谱曲面 $\Sigma_{\mathcal{T}}$就是曲面 S_{Γ^*}，并且

$$\{\text{zig-zag loops on } \Gamma\} = \{\text{boundary loops on } \Gamma^*\} = \{\text{boundary circles on } \Sigma_{\mathcal{T}}\}. \tag{9}$$

1.2.2 赋予三维簇中 $\mathcal{Q}$– 图的拉格朗日子流形与谱三维簇

定义1.10. 给定三维簇 M 中的一个 $\mathcal{Q}$– 图，考虑拉格朗日子集

$$\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}} := \mathbb{L}_{\mathcal{Q}} - \{\textit{the union of zero sections for mixed domains}\}. \tag{10}$$

拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}}$ 在四重交点处有奇点。用 Sing($\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}}$) 表示奇点集。 $\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}}$ 中任一奇点的链接，是 $\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}}$ 与该点周围一个小球面的交集。 $\mathcal{Q}$ 的每个四重交点 q 都会产生 $\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}}$ 中的一个点 $q_\circ$，该点由 q处的零余切向量给出。

引理1.11. 投影 $T^*M \longrightarrow M$ 诱导出一个双射

$$\mathrm{Sing}(\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{\sim} \{\textit{the points } q_\circ \textit{ for all quadruple intersection points of } \mathcal{Q}\}. \tag{11}$$

$\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}}$ 的奇点的链接同胚于一个环面，并带有群 A_4 的作用。

证明。 去除四重交点后，其补集局部同构于 $\mathbb{R}^3$ 中两个平面的横截交。 因此，第一个断言由引理1.9得到证明。第二个断言在引理2.2中得到证明。 □

我们在每个四重交点 q 周围去除一个小球 B^q，其中 $\mathcal{Q}_\circ$得到一个带有诱导曲面族 $\mathcal{Q}_\times \subset M_\times$的三维簇$M_\times$。它产生一个拉格朗日子流形 $\mathbb{L}_\times \subset T^*M_\times$，以及通过去除所有混合区域上方的零截面而得到的闭子集 $\mathbb{L}^\circ_\times$ $M_\times - \mathcal{Q}_{\times\circ}$。

引理1.12. 拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^\circ_\times$ 是一个带边界的光滑三维流形。

证明。 图 $\mathcal{Q}_\times$ 局部上是区间与余定向坐标十字的乘积。因此，我们可以应用引理 1.9证明中的构造的三维版本。取一组不交的三维区域 $\mathcal{D}'_*$，使之与着色区域 $\mathcal{D}_*$ 相匹配，该着色区域属于 $M-\mathcal{Q}_\circ$。对于 e 上的每条交边 $\mathcal{Q}$，都有两个着色区域 $\mathcal{D}_\bullet$ 和 $\mathcal{D}_\circ$共享该边 $e_\circ$。将它们的不交副本分别记为 $\mathcal{D}'_\bullet$ 和 $\mathcal{D}'_\circ$。通过 $180°$进行扭转粘合，得到一个光滑三维流形。 □

定义 1。 13. 带边界三维簇 $\mathbb{L}^\circ_\times$ 是图 $\mathcal{Q}$的谱三维簇 $\Sigma_{\mathcal{Q}}$，其中 $\mathcal{Q}$–

拉格朗日三维簇 $\partial\mathbb{L}^\circ_\times$ 的边界 $\mathbb{L}^\circ_\times$ 在三维簇 M 中，被赋予余定向曲面图$\{S_i\}$ 的 $\mathcal{Q}$–自身带有边界 ∂M，在整个论述中起着关键作用。它本身也是辛流形某个芽中的一个拉格朗日子流形。我们将在第 3节给出具有温和奇点的拉格朗日子流形之边界的一般定义。边界 $\partial\mathbb{L}^\circ_\times$ 将在第 1.3.5节描述。

现在让我们 解释如何将各种叠与赋予 $\mathcal{Q}$–图的拉格朗日子流形相关联

1.3 $\mathcal{Q}$–图与非交换簇簇

带有 X 边界 ∂X 的流形产生局部系统的 dg-层叠 Loc(X) 以及限制函子 Loc(X) $\longrightarrow$ Loc(∂X)，其像是一个移位导出拉格朗日。我们可以将流形替换为辛流形中具有“温和”奇点的奇异拉格朗日子集，并得到类似的图景。我们先从一般设定开始，然后继续讨论对应于 $\mathcal{Q}$–图的拉格朗日子流形；当 X 是曲面或三维簇时，它们提供了这一故事的非交换簇变体。

1.3.1 奇异拉格朗日子流形上的范畴与栈。

辛流形中的闭拉格朗日子集 L 若具有“温和”奇点，则会产生一个范畴层 $\mathfrak{C}_{\mathrm{L}}$ 在 L 上，该范畴层仅取决于 L 处环境辛流形的芽，参见 [K], [N], [GPS1]-[GPS3]。层 $\mathfrak{C}_{\mathrm{L}}$ 在 L 的一个开子集 U 上的截面（其中 U 可以光滑化为一个流形）等价于 U 上局部系统复形的范畴。另一个例子：设 $\mathcal{E}_n$是一个具有 n 条循环排序的边的单顶点图。那么，层 $\mathfrak{C}_{\mathrm{L}}$ 在一个同构于圆盘与图的乘积的开子集 $\mathcal{E}_n$ 上的截面，是 A 型箭图表示的导出范畴$_{n-1}$。

存在一个维数比 L 少一的拉格朗日子流形 ∂L，称为 L 的无穷远边界，或简称 L 的边界，它位于辛流形的一个芽中 $\mathcal{S}$，参见第 3节，以及限制函子：

$$\mathrm{Res} : \mathfrak{C}_{\mathrm{L}} \longrightarrow \mathfrak{C}_{\partial \mathrm{L}}. \tag{12}$$

从现在起，L 表示余切丛 T^*X 到流形 X上的闭锥形拉格朗日子集。那么范畴 $\mathfrak{C}_{\mathrm{L}}$ 可以用以下范畴来描述： $D^b_{\mathrm{L}}(X)$ 是 X 上微局部支撑于 L 的可构造层复形，并由具有第二陈-魏类的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–gerb 扭曲 $w_2[T^*X] \in H^2(X, \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$[2] [KS], [GKS]。此描述使用微局部化函子 [KS]

$$\mu : D^b_{\mathrm{L}}(X) \longrightarrow D^b(\mathrm{L}).$$

下文中，给定一个斜域 R，我们将可构造R–层在 X 上的复形范畴作为底边范畴，以下简称为层。我们用 $\mathfrak{C}_{\mathrm{L}}$(L) 表示 L 上范畴层 $\mathfrak{C}_{\mathrm{L}}$ 的整体截面范畴。

设 $\mathcal{H}$ 为一组光滑余定向超曲面 $\{H_i\}$，位于 X中。赋予（6）的拉格朗日子流形$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathcal{H}}$ 在 T^*X 中导出子范畴 $\mathfrak{C}^{(1)}_{\mathbb{L}}$ （$\mathbb{L}$） $\subset \mathfrak{C}_{\mathbb{L}}$（$\mathbb{L}$），该子范畴由 $\mathcal{F}$ 上的层 X 组成，并满足：

$$\begin{array}{l} \text{对于 } \mathcal{H} \text{ 的每个余定向超曲面 } H_i \text{，层 } \mathcal{F} \text{ 的微局部化} \\ at \text{ 穿孔余法丛 } T^*_{H_i}X - \{\text{零截面}\} \text{ 是一个 } R\text{–秩一局部系统。} \end{array} \tag{13}$$

范畴 $\mathfrak{C}^{(1)}_{\mathbb{L}}$ （$\mathbb{L}$）包含子范畴 $\mathcal{C}_{\mathbb{L}}$，即 $\mathcal{H}$–在 X [GKo], 中6.2节所述的可容许层。交换情形下关于曲面的类似范畴已在 [STZ], [STWZ], [STW]中研究。

一组容许变形 是对该集合 $\mathcal{H}$ 进行的变形：保持超曲面光滑且其勒让德子流形互不相交，同时允许交叠模式发生变化。 $\mathcal{H}$–可容许层的范畴在容许变形下保持不变：当 X 是 [GKo], 中的一个曲面时，这一点已经得到证明；当 X 是一个三维簇时，证明也很容易推广到对我们至关重要的情形。

定义 1.14. 记 $[\mathcal{H}]$ 为 $\mathcal{H}$的可容许变形类。记 $\mathcal{X}_{\mathbb{L}} = \mathcal{X}_{[\mathcal{H}]}$ 为 $\mathcal{C}_{\mathbb{L}}$中对象的导出叠，记 $\mathcal{X}_{\partial\mathbb{L}}$ 为 $\mathcal{C}_{\partial\mathbb{L}}$中对象的导出叠。

限制函子 (12) 诱导出一个导出叠之间的映射

$$\mathrm{Res} : \mathcal{X}_{\mathbb{L}} \longrightarrow \mathcal{X}_{\partial\mathbb{L}}. \tag{14}$$

1.3.2 主要结果。

当流形 X 是带边界的曲面和三维簇时，叠 $\mathcal{X}_{[\mathcal{H}]}$ 与限制函子（14）一起导出各种类型的非交换簇结构。它们的簇由处于同一可容许变形类中的 $\mathcal{Q}$–图给出。准确地说：

[2]我们可以用任意 $\mathbb{G}_m$–gerb 扭曲 $\mathfrak{C}_{\mathrm{L}}$。若用 $w_2(X)$ 经自然映射 $\mathrm{L} \longrightarrow X$ 的拉回作为扭曲，就得到通常的可构造层范畴。

• 设 S 是一个带边界的光滑曲面，且 $\mathcal{T}$ 是 S上的一个交替图。则叠 $\mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}$带有一个非交换簇泊松结构 [GKo], ，它推广了在交换情形下赋予 $\mathcal{T}$ 的簇泊松簇 [GKe]。限制函子（ 14 ）描述了它的辛叶。簇由谱曲面$\Sigma_{\mathcal{T}}$上的平坦线丛的非交换环面给出。如果曲面 S 的边界为空，则得到一个 K_2–辛栈 $\mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}$。

• 对于带有 M 边界的三维簇，限制函子的像是一个非交换簇拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_{[\mathcal{Q}]}$。簇这一修饰词意味着我们以一种明确且统一的方式描述它。在交换情形下，我们得到簇 K_2–拉格朗日子流形。这些簇由分配给给定可容许变形类 $[\mathcal{Q}]$中 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}$ 的拉格朗日子流形$\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}$ 给出；这些图与边界相交时形成交替图 $\mathcal{T}$。具体而言，我们通过将这组 $\mathcal{Q}$ 曲面与 $\mathcal{T}$的谱曲面 $\Sigma_{\mathcal{T}}$粘合，定义一个光滑闭曲面 $\Upsilon_{\mathcal{Q}}$。于是， $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}$ 是在该曲面 $\Upsilon_{\mathcal{Q}}$上的平坦 R–线丛所成的非交换环面中的一个明确描述的拉格朗日子流形：

$$\mathcal{L}_{\mathcal{Q}} \subset \mathrm{Loc}_1(\Upsilon_{\mathcal{Q}}). \tag{15}$$

如果这组 $\mathcal{Q}$ 中的所有曲面都是圆盘，那么 $\Upsilon_{\mathcal{Q}}$ 就是紧化谱曲面 $\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{T}}$。
在交换情形下，簇簇 $\mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}$ 的 K_2–辛结构通过应用 Beilinson-Deligne 符号模 ´er ´e，在簇簇上提供一个带联络的线丛；其在簇拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}$ 上的限制有典范平凡化。

这里给出一个例子。取一个三维簇 M，以及其边界 ∂M 上的一组点 $\{p_1, ..., p_n\}$。我们构造 M 中的圆盘 $\mathcal{Q}$– 图，用以描述带 puncture 曲面 $\partial M - \{p_1, ..., p_n\}$ 上平坦的 m– 维 R– 向量丛栈的簇结构，并具有以下性质：
它们在穿孔 p_i 周围具有幺幂单值，携带穿孔附近的单值不变旗，并且可以延拓到 M。

1.3.3 为什么使用 $\mathcal{Q}$– 图，而非交替图?

设 $\mathcal{H}$ 是一个交替的余定向曲面图，它由消解一个 $\mathcal{Q}$– 图的四重交点得到。那么我们有栈的典范等价：

$$\mathcal{X}_{[\mathcal{H}]} = \mathcal{X}_{[\mathcal{Q}]}. \tag{16}$$

拉格朗日子集的奇异集 $\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{H}}$ 由分配给 $t_\circ$ 的三重交点 t 的点 $\mathcal{H}$ 组成。然而，奇点 $t_\circ$ 的链接是 带边界的曲面 ——一个裤子曲面，而非引理 1.11 中的环面。因此，尽管我们可以为曲面的交替图定义栈 $\mathcal{X}^{\circ}_{\mathcal{H}}$，但它们毫无意义：在混合区域上消失的可容许层，在这些曲面的带 puncture 余切丛上必然具有零微局部化。[3]

因此 我们无法直接从交替图得到拉格朗日子流形的簇覆盖 $\mathbb{L}_{\mathcal{H}}$.
这就是我们处理曲面图 $\mathcal{Q}$– 而非相关交替图的原因。

1.3.4 由曲面上的交替图得到的非交换簇泊松簇

设 $\mathcal{T}$是曲面 S上的交替图。回顾一下，式（ $\mathbb{L}_{\mathcal{T}}$6）中为 $\mathcal{T}$赋予的拉格朗日子流形 。栈 $\mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}$ 参数化了满足条件（ $\mathcal{F}$ 13）且微局部支撑位于 S 中的 $\mathbb{L}_{\mathcal{T}}$ 容许 dg 层 。它带有非交换簇泊松结构。限制函子（14）描述了它的辛叶。下面我们来描述这些簇。

定义 1.15. 记 $\mathcal{X}^{\circ}_{\mathcal{T}}$为栈 $\mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}$ 的子叠，它参数化了在交替图 $\mathcal{T}$的混合区域上消失的对象。因此，它们的微局部支撑包含于拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{T}}$中。

[3]在含有 n 条边的（单顶点带状图附近，赋予闭拉格朗日子集的范畴 $\times\mathbb{R}^m$ 等价于箭图 A_n的表示的导出范畴，见 [K], [GPS1]-[GPS3]。因此，在曲面边界附近，我们得到 A_0–箭图的表示范畴，其中只包含一个对象：零对象。

回忆引理 $\Sigma_{\mathcal{T}}$中交替图 $\mathcal{T}$对应的谱曲面 1.9。令 $\mathrm{Loc}_1(\Sigma_{\mathcal{T}})$ 为参数化曲面 R–上的秩一局部系统的非交换环面 $\Sigma_{\mathcal{T}}$。由 (8) 可知,

$$\mathcal{X}^{\circ}_{\mathcal{T}} = \mathrm{Loc}_1(\Sigma_{\mathcal{T}}). \tag{17}$$

谱曲面上的交形式在 $\mathcal{X}^{\circ}_{\mathcal{T}}$上诱导出非交换泊松结构。同一可容许变形类中的交替图 $\mathcal{T}$ 的同伦类提供簇泊松环面（17），从而定义栈 $\mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}$上的非交换簇泊松结构。变换$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$，称为二乘二变换，提供非交换泊松环面之间的双有理同构

$$\mathrm{Loc}_1(\Sigma_{\mathcal{T}}) \longrightarrow \mathrm{Loc}_1(\mathcal{T}'). \tag{18}$$

我们得出结论:

赋予曲面上交替图 $\mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}$ 的栈 $\mathcal{T}$ 具有非交换簇泊松簇的结构。其簇环面是*17*中给出的环面，来自与 $\mathcal{T}$可容许等价的交替图。限制函子（*14*）描述其辛叶。双有理映射（*18*）生成簇泊松变换。

1.3.5 来自三维簇中 $\mathcal{Q}$–图的簇拉格朗日子流形。

设 M 是一个三维簇（可能带有边界），而 $\mathcal{Q} = \{S_i\}$ 是一个 $\mathcal{Q}$–图，表示 M 中与边界横截的光滑余定向曲面 ∂M。回顾一下，式 $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathcal{Q}}$ （ $\mathcal{Q}$ 6）中赋予 的拉格朗日子流形。在第 3 节中，我们定义它的无穷远边界

$$\partial\mathbb{L} \subset \mathcal{S}.$$

它是一个奇异拉格朗日子集 $\partial\mathbb{L}$ ，其维数比某个辛空间 $\mathcal{S}$中的 $\mathbb{L}$ 低一。它产生一个导出辛栈 $\mathcal{X}_{\partial\mathbb{L}}$ 以及限制映射

$$\mathrm{Res} : \mathcal{X}_{\mathbb{L}} \longrightarrow \mathcal{X}_{\partial\mathbb{L}}. \tag{19}$$

映射（19）的像是一个导出拉格朗日子流形。

回顾定义 $\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}} \subset T^*M$ 中的拉格朗日子集 1.16。

定义 1.16。给定三维簇 M中的一个 $\mathcal{Q}$–图，令 $\mathcal{X}^{\circ}_{\mathcal{Q}}$为 $\mathcal{X}_{\mathbb{L}}$的子叠，其参数化的是微局部支撑位于拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}}$中的对象。

我们用 $\partial\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}}$ 表示拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}}$的边界，用 $\mathcal{X}^{\circ}_{\partial\mathbb{L}}$ 表示与拉格朗日子流形 $\partial\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}}$对应的对象栈。我们的下一个目标是描述拉格朗日子流形 $\partial\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}}$ 和栈 $\mathcal{X}^{\circ}_{\partial\mathbb{L}}$。

从现在起，假设 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q} = \{S_i\}$ 与边界 ∂M 横截相交，其交集为一组交替的 $\mathcal{T} = \{\alpha_{ij}\}$环，这些环位于 ∂M中。于是得到谱曲面 $\Sigma_{\mathcal{T}}$，见（8）。它是一个光滑曲面，其边界与环的不交并 α_{ij}相对应。事实上，交替图 $\partial\mathcal{Q}$ 中的环成为谱曲面上的边界圆。[4] 每个曲面 S_i 的边界都是环 α_{i*}的不交并。因此:

$$\partial\Sigma_{\mathcal{T}} = \coprod_j \alpha_{ij} = \coprod_i \partial S_i. \tag{20}$$

定义 1.17. 曲面 $\Upsilon = \Upsilon_{\mathcal{Q}}$ 是通过将曲面 S_i 与谱曲面 $\Sigma_{\mathcal{T}}$沿对应的边界分支粘合而得到的光滑闭曲面，见图 *5*:

$$\Upsilon_{\mathcal{Q}} = \Upsilon := \Big(\coprod_i S_i\Big) *_{\{\alpha_{ij}\}} \Sigma_{\mathcal{T}}. \tag{21}$$

[4]参见引理 1.9 以及（9），其中描述了 $\partial\mathcal{Q}$ 来自二分图的情形。

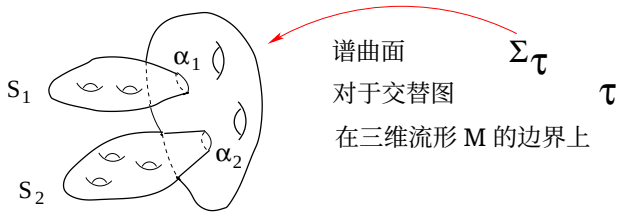


图 5：曲面 Υ 是通过沿着环 α_{i*} 将曲面 S_i 粘合到谱曲面 $\Sigma_{\mathcal{T}}$ 上而得到的。

命题 1。 18. 拉格朗日子流形 $\partial\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{S}^\circ_{\mathcal{Q}}$ 同构于零截面拉格朗日子流形 $\Upsilon \subset T^*\Upsilon$ ：

$$\partial\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}} = \Upsilon; \quad \mathcal{S}^\circ_{\mathcal{Q}} = T^*\Upsilon.$$

辛栈 $\mathcal{X}^\circ_{\partial\mathbb{L}}$ 是曲面 Υ 上平坦线丛的非交换辛环面：

$$\mathcal{X}^\circ_{\partial\mathbb{L}} = \mathrm{Loc}_1(\Upsilon). \tag{22}$$

范畴 $\mathcal{C}_{\partial\mathbb{L}}$ 是范畴 $\prod_i \mathrm{Loc}_1(S_i)$ 与 $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ 在 $\mathrm{Loc}_1(\{\alpha_{ij}$ 上的纤维积 $\})$：

$$\mathcal{C}_{\partial\mathbb{L}} = \prod_i \mathrm{Loc}_1(S_i) \times_{\mathrm{Loc}_1(\{\alpha_{ij}\})} \mathcal{C}_{\mathcal{T}}. \tag{23}$$

我们来描述限制函子

$$\mathrm{Res}_{\partial\mathbb{L}} : \mathcal{X}_{\mathbb{L}} \longrightarrow \prod_i \mathrm{Loc}_1(S_i) \times_{\mathrm{Loc}_1(\{\alpha_{ij}\})} \mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}. \tag{24}$$

将容许层映射到其微局部化在 $R-$ 上的限制所给出的平坦线丛 S_i ，我们得到函子 $\mathrm{Res}_{T^*_{S_i}M} - \{\text{零截面}\}$ we get a functor $\mathrm{Res}_\infty : \mathcal{X}_{\mathbb{L}} \longrightarrow \prod_i \mathrm{Loc}_1(S_i)$。 到边界的限制给出函子 $\mathrm{Res}_{\partial M} : \mathcal{X}_{\mathbb{L}} \longrightarrow \mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}$. 结合这两个函子，我们得到函子（24）。

限 制函子 $\mathrm{Res}_{\partial M}$ 到在混合区域上消失的层，我们得到一个函子

$$\mathrm{Res}^\circ_{\partial M} : \mathcal{X}^\circ_{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathcal{X}^\circ_{\mathcal{T}} \overset{(17)}{=} \mathrm{Loc}_1(\Sigma_{\mathcal{T}}). \tag{25}$$

因此我们得到限制函子

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^\circ_{\partial\mathbb{L}} : \mathcal{X}^\circ_{\mathbb{L}} \longrightarrow \mathcal{X}^\circ_{\partial\mathbb{L}} &\overset{(22)}{=} \mathrm{Loc}_1(\Upsilon) \\ &\overset{(21)}{=} \prod_i \mathrm{Loc}_1(S_i) \times_{\mathrm{Loc}_1(\{\alpha_{ij}\})} \mathrm{Loc}_1(\Sigma_{\mathcal{T}}). \end{aligned} \tag{26}$$

叠的像 栈 $\mathcal{X}^\circ_{\mathbb{L}}$ 和 $\mathcal{X}_{\mathbb{L}}$ 在限制函子（26）和（24）下的像是拉格朗日子流形，记为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\circ_{\mathcal{Q}} &:= \mathrm{Res}^\circ_{\partial\mathbb{L}}(\mathcal{X}^\circ_{\mathbb{L}}) \subset \mathrm{Loc}_1(\Upsilon). \\ \mathcal{L}_{[\mathcal{Q}]} &:= \mathrm{Res}_{\partial\mathbb{L}}(\mathcal{X}_{\mathbb{L}}) \subset \prod_i \mathrm{Loc}_1(S_i) \times_{\mathrm{Loc}_1(\{\alpha_{ij}\})} \mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}. \end{aligned} \tag{27}$$

栈 $\mathcal{X}_{\mathbb{L}}$、 $\mathcal{X}_{\partial\mathbb{L}}$ 以及限制映射在容许变形下保持不变。然而，容许变形可能无法保持曲面的交叠模式，因此也无法保持 $\mathcal{Q}-$图。拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}}$ 和 $\partial\mathbb{L}^\circ_{\mathcal{Q}}$ 以及相关的栈 $\mathcal{X}^\circ_{\mathbb{L}}$和 $\mathcal{X}^\circ_{\partial\mathbb{L}}$ 取决于 $\mathcal{Q}-$图 $\mathcal{Q}$的选择。对 $\mathcal{Q}$ 的容许变形可能导致边界上交替图 $\mathcal{T}$具有不同的同伦类，从而改变与 $\mathcal{T}$相关的谱曲面。

因此，给定可容许变形类中（按同位视为等价）的 M 中的 $\mathcal{Q}-$图，产生了空间 $\mathcal{X}_{\partial\mathbb{L}}$ 的一个由 Zariski 开分裂环面 $\mathcal{X}^\circ_{\partial\mathbb{L}}$ 构成的覆盖。它们就是簇辛环面，

在 $\mathcal{X}_{\partial\mathbb{L}}$ 上定义簇辛结构。[5] 子簇 $\mathrm{Res}^{\circ}_{\partial\mathbb{L}}(\mathcal{X}^{\circ}_{\mathbb{L}})$ 构成了 $\mathcal{X}_{\partial\mathbb{L}}$ 中拉格朗日子流形 $\mathrm{Res}_{\partial\mathbb{L}}(\mathcal{X}_{\mathbb{L}})$ 的一个扎里斯基开覆盖。我们将所得结构称为簇拉格朗日子流形。

定理 1.19. 设 $\mathcal{Q}$ 是三维簇 M 中的一个 $\mathcal{Q}$– 图，它通过交替图 $\mathcal{T}$ 与边界横截相交。那么 $\mathcal{L}_{[\mathcal{Q}]}$ 是一个非交换簇拉格朗日子流形。它包含一族开拉格朗日子流形 $\mathcal{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}}$ ——即簇——由处于同一可容许变形类中的 $\mathcal{Q}$– 图 $\mathcal{Q}$ 参数化。它们由方程组描述，这些方程组对簇具有统一的依赖关系。

定理 1.19 由下文的关键定理2.1 推得。由此我们得出：$\mathcal{Q}$–三维簇中的图是非交换簇拉格朗日子流形的几何来源。在交换情形下，它们是 K_2–拉格朗日子流形的几何来源。

现在我们来描述限制映射（26）及其像。

1. 我们从最简单、同时也是最基本的例子开始： M 是一个立方体 C。立方体边界 ∂C 的 1-骨架在立方体旋转意义下有唯一的二分图结构 Γ_{C}，其顶点分为 $\bullet$ 和 $\circ$ 两类。我们将 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}_{\mathrm{C}}$ 定义为四个平面的集合：这些平面经过立方体中心，垂直于立方体对角线，并具有余定向 $\circ \to \bullet$。

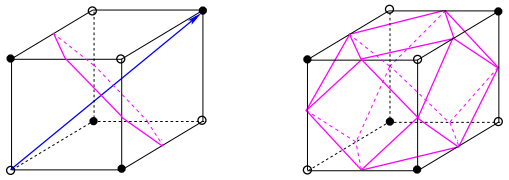


图 6：图 $\mathcal{Q}_{\mathrm{C}}$ 是四个垂直于立方体对角线的中央平面截面的并。

我们在定理 $\mathcal{X}_{\mathbb{L}^{\circ}_{\mathrm{C}}}$中对拉格朗日子流形 Res(2.1)给出一个明确的描述，并在定理2.7中给出另一种描述。

2. 一般而言，关键事实是：将一个 $\mathcal{Q}$–图与任意四重交点 q 周围的小球 B$_q$ 相交，得到的 $\mathcal{Q}$–图同构于 $\mathcal{Q}_{\mathrm{C}}$。移去所有小球 B$_q$ 后，我们得到一个三维簇 $M_{\times}$，其上带有由此诱导的一族余定向曲面 $\mathcal{Q}_{\times} \subset M_{\times}$。由此得到一个拉格朗日子流形 $\mathbb{L}_{\times} \subset T^*M_{\times}$，以及通过移去 $M_{\times} - \mathcal{Q}_{\times}$中所有混合区域上方的零截面而得到的闭子集 $\mathbb{L}^{\circ}_{\times}$。

引理 1.20。拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^{\circ}_{\times}$ 是一个带边界的光滑三维流形。其边界 $\partial\mathbb{L}^{\circ}_{\times}$ 同构于曲面 Υ 与立方体曲面 ∂C$_q$ （对应所有四重交点 q）的不交并：

$$\partial\mathbb{L}^{\circ}_{\times} = \Upsilon \cup \partial\mathrm{C}_{q_1} \cup \ldots \cup \partial\mathrm{C}_{q_m}. \tag{28}$$

证明。图 $\mathcal{Q}_{\times}$ 在局部上是区间与余定向坐标十字的乘积。因此，我们可以应用引理 1.9 证明中的三维版本构造。具体而言，取一组不交的三维区域 $\mathcal{D}'_*$，与着色区域 $\mathcal{D}_*$ 相匹配，属于 $M - \mathcal{Q}$。对于 e 上的每条交边 $\mathcal{Q}$，都有两个着色区域 $\mathcal{D}_{\bullet}$ 和 $\mathcal{D}_{\circ}$ 共享该边 e。将它们的不交副本分别记为 $\mathcal{D}'_{\bullet}$ 和 $\mathcal{D}'_{\circ}$。沿着替代交边的一座桥将它们粘合，并施加 $180°$的扭转，得到一个记为 $\Sigma_{\mathcal{Q}}$的光滑三维流形。于是得到第一个结论。第二个结论显然。 □

定义 1。 21. 带边界三维簇 $\mathbb{L}^{\circ}_{\times}$ 是图 $\mathcal{Q}$对应的谱三维簇 $\Sigma_{\mathcal{Q}}$ $\mathcal{Q}$– .

接下来，令 N 为任意带边界三维簇 S。那么，在交换情形下， S 上的交配对给出典范元

$$W_N \in \mathcal{O}^{\times}(\mathrm{Loc}_1(S)) \wedge \mathcal{O}^{\times}(\mathrm{Loc}_1(S)). \tag{29}$$

[5]注意，由于 ∂M 没有边界，曲面 $\partial\mathbb{L}^{\circ}$ 是闭的，相关的簇泊松叠是辛的 .

引理 1.22。元素 W_N 在子空间 $\mathrm{Loc}_1(S,N)$ 上的限制为零。该子空间属于 $\mathrm{Loc}_1(S)$，由能够延拓到 N 的 S 上的线丛给出。

证明。由限制映射 $H^1(N;\,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\partial N;\,\mathbb{Z})$ 的像是 $H^1(S;\mathbb{Z})$ 上 $\cup-$ 配对下的拉格朗日子流形这一事实可知。 □

回忆映射

$$\begin{aligned} &d\log : \mathcal{O}^\times(\mathrm{Loc}_1(S)) \wedge \mathcal{O}^\times(\mathrm{Loc}_1(S)) \longrightarrow \Omega^2_{\log}(\mathrm{Loc}_1(S)), \\ &d\log : f \wedge g \longrightarrow d\log(f) \wedge d\log(g). \end{aligned} \tag{30}$$

元素 W_N 给出了 K_2-辛结构 $d\log(W_N)$ 在 $\mathrm{Loc}_1(S)$ 上。由引理 1.22 可知，子空间 $\mathrm{Loc}_1(S,N)$ 是一个 K_2-拉格朗日子流形。

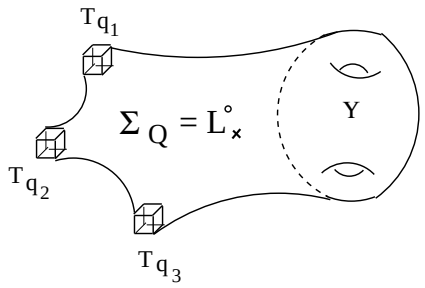


图 7：谱三维簇 $\Sigma_{\mathcal{Q}} = \mathbb{L}^\circ_\times$。其边界是不交并，由闭曲面 Υ组成，见图5，以及环面 T^{q_i}。环面 T^q 是立方体曲面 C 上二分图的谱曲面$_q$。

将此应用于谱三维簇 $\Sigma_{\mathcal{Q}} = \mathbb{L}^\circ_\times$，并使用 (28)，得到一个 K_2-拉格朗日子流形

$$\Lambda_{\mathcal{Q}} \subset \mathrm{Loc}_1(\Upsilon) \times \prod_q \mathrm{Loc}_1(\partial \mathrm{C}_q).$$

在定理 2.7w　　我们描述基本的 K_2-拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_{\mathrm{C}_q} \subset \mathrm{Loc}_1(\mathrm{C}q)$。它们的乘积是一个 K_2-拉格朗日子流形n

$$\mathcal{L}_{\mathrm{C}} := \prod_q \mathcal{L}_{\mathrm{C}_q} \subset \prod_q \mathrm{Loc}_1(\mathrm{C}_q).$$

我们将 $\Lambda_{\mathcal{Q}}$ 视为辛簇 $\mathrm{Loc}_1(\Upsilon)$ 与$\prod_q \mathrm{Loc}_1(\partial \mathrm{C}q)$ 之间的一个 K_2-拉格朗日对应。将其应用于 K_2-拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_{\mathrm{C}}$，便得到我们所寻求的 K_2-拉格朗日子流形：

$$\Lambda_{\mathcal{Q}} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{C}} \subset \mathrm{Loc}_1(\Upsilon).$$

由构造可知，它附带一个显式的定义方程组，参见第 2.1.3 和 2.1.4节。

引理 1.22 的非交换版本更为复杂。我们将在别处讨论其显式版本。它也可由 [BrD1], [BrD2]中建立的一般理论框架推出。

1.3.6 集合 $\mathcal{Q}$ 中的所有曲面 S_i 均为圆盘的情形。

用圆盘填满曲面 $\Sigma_{\mathcal{Q}}$ 上的所有孔洞，便得到紧化谱曲面 $\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{T}}$。如果图 $\mathcal{Q}$ 中的所有曲面都是圆盘，那么曲面 $\Upsilon_{\mathcal{Q}}$ 就是紧化谱曲面　　面 $\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{T}}$ ：

$$\Upsilon = \mathbf{\Sigma}_{\mathcal{T}} \qquad \textit{if all surfaces } S_i \textit{ of the collection } \mathcal{Q} \textit{ are discs.} \tag{31}$$

这一情形对于特征簇的应用十分重要。记 $\mathcal{U}_{[\mathcal{T}]} \subset \mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}$ 为在 $\mathcal{T}$ 的股线余法丛上具有平凡微局部化的层的子叠。由于圆盘上的任何局部系统都是平凡的，$\mathrm{Loc}_1(S_i)$ 是点，且限制映射的像落在 $\mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}$ 中。因此

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}} &\subset \mathrm{Loc}_1(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{T}}). \\ \mathcal{L}_{[\mathcal{Q}]} &\subset \mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}. \end{aligned} \tag{32}$$

定理 1.23。设 $\mathcal{Q}$ 是三维簇中的一个由圆盘组成的 $\mathcal{Q}$–图，并在边界上诱导出一个交替图 $\mathcal{T}$。则 $\mathcal{L}_{[\mathcal{Q}]} \subset \mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}$ 是一个非交换簇拉格朗日子流形。其簇环面是辛环面 $\mathrm{Loc}_1(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{T}})$，对应于处在同一可容许变形类中的交替图 $\mathcal{T}$。

定理 1.23直接由定理 1.19推出。参见第 5.4节。

1.3.7 到（非交换）特征簇的应用。

在第5 节中，我们描述了栈 $\mathcal{U}_{m,\ S}$ 该栈参数化了曲面上的m–维局部系统 R–，曲面具有穿孔 S，且穿孔周围的单值化为幺幂单值。具体而言，我们证明，任何一个以带有填充后穿孔的曲面 S 为边界的三维簇 M，都会产生这样的非交换簇拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_m(M)$，并通过一个方程组对其进行描述。

关键步骤在第 5.3 节完成：我们从 $\mathcal{Q}$– 中余定向圆盘的图出发，该图由 M 的四面体分解构造而来，并取整数 $m \geq 2$ ——即 ∂M 上局部系统的秩。然后我们使用定理 1.23。我们利用第 $\mathcal{L}_m(M$ 节中赋予任意三维簇内 $\mathcal{A}$–余定向圆盘图的簇坐标，来描述拉格朗日子流形 $\mathcal{A}$–。

在交换情形下，空间 $\mathcal{U}_m$ 上的簇 K_2– 辛结构通过 Beilinson–Deligne 符号模 ´er ´e[B], [D],，在 $\mathcal{U}_m$ 的簇部分上导出一个带联络的典范线丛。第 5 节的结果给出了其在拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_m(M)$ 上的限制的平凡化，该平凡化取决于在 M 中选择的一个 $\mathcal{Q}$– 图。这推广了 [DGG] 的工作。如果 $m = 2$，则这与 Freed 和 Neitzke [FN] 的工作密切相关。

1.3.8 论文结构。

在第 2.1 节中，我们描述立方体中基本 $\mathcal{Q}$–图所对应的非交换拉格朗日子流形。

在第 2.2 节中，我们证明一个关键结果，即定理 2.1。

在第 2.3 节中，我们给出基本非交换簇拉格朗日量的另一种描述。我们将其与 $\mathcal{A}$–二乘二变换的坐标描述 [GKo], 联系起来，从而揭示后者令人惊讶的 $\mathbf{A}_4$–对称性。

在第 3 节中，我们引入锥形拉格朗日子流形的无穷远边界。它参与定理 1.19的表述。

在第 4 节中，我们构造与三维簇中某一类（称为理想的）交错 $\mathcal{Q}$–图相关的谱覆盖。该构造使用分配给这些图的之字形曲面。

在第5.1 节中，我们讨论非交换簇 $\mathcal{A}$–簇及其典范商，它们具有簇辛结构，该结构源自 $\mathcal{Q}$–三维簇中的图。

在第5.2 节中，我们证明，一个 $\mathcal{Q}$–三维簇中的余定向圆盘图 M 会在 $\mathcal{A}$–边界所对应的簇辛商中，产生一个簇拉格朗日子流形，其中的簇 M。

在第5.3 节中，我们定义一个 $\mathcal{Q}$–三维簇中的余定向圆盘图 M，其构造始于将 M 分解为四面体，以及一个整数 $m \geq 2$ ——即 ∂M上局部系统的秩。

在第 5.4 节我们利用上述内容来描述非交换簇拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_m(M) \subset \mathcal{U}_{m\ S}$.

致谢。本文的关键结果是在2021年夏季取得的，当时第一作者担任高等科学研究所的格雷琴与巴里·马祖尔讲席。本文于2025年在第一作者访问高等科学研究所期间完成。第一作者获得了美国国家科学基金会项目DMS-2153059的部分资助。我们感谢高等科学研究所和美国国家科学基金会给予的接待与支持。

2 基本非交换簇拉格朗日量

2.1 基本 $\mathcal{Q}$–图的非交换簇拉格朗日子流形

2.1.1 基本 $\mathcal{Q}$–图。

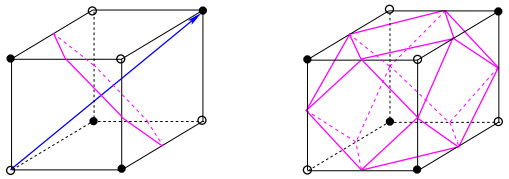


图8：垂直于立方体一条主对角线的中央平面截面切出一个六边形。四个平面切出一个有8个三角形面和6个正方形面的多面体。它们将立方体分成四个
$\circ$–区域、四个 $\bullet$–区域和六个混合区域。这些区域是以分配给 $\circ/\bullet$ –顶点的三角形及正方形为底的锥。

取立方体 C 作为我们的三维簇 M。它的 1-骨架是一张二分带图 Γ_{cube}，在切换 $\bullet \leftrightarrow \circ$下定义良好，见图8。考虑四个平面 H_1，……，H_4 它们经过中心，并垂直于立方体的对角线。我们按 $\circ \to \bullet$为对角线定向。平面由对角线余定向。四个平面构成一个 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}_{\text{cube}}$，只有一个四重交点 p。它称为基本 $\mathcal{Q}$–图。每个平面与立方体相交形成一个六边形。这些六边形将立方体细分为六个正方形和八个三角形。六边形可以变形为图 γ_i 上的一个之字形环 Γ_{cube}，如图9左侧的箭头所示。上有四个之字形环 Γ_{cube}，它们与 $\circ$–顶点对应。

选取一个 $\bullet$–顶点 $v_\circ$。记 X_1，X_2，X_3 为与顶点 v相邻的各面周围的单值化，见图9，并将其视为纤维 L 上的自同态v:

$$X_1, X_2, X_3 \in \text{End}(\text{L}_v). \tag{33}$$



图9：设 L_v 是图上平坦丛 L 在 $\bullet$–顶点 v处的纤维。那么，X、Y、$Z \in \text{End}(\text{L}_v)$ 是各面周围的单值化，这些面与 v 相邻，方向与 v处各边的循环次序一致。

记 $\text{Loc}_1^{\text{tr}}(\Gamma_{\text{cube}})$ 为非交换环面 $\text{Loc}^{\text{tr}}(\Gamma_{\text{cube}})$ 的子叠，其参数化了二分带图 Γ_{cube} 上的平坦秩一丛，这些丛沿之字形环的单值化均为平凡单值。

以下定 理2.1 是本文的主要结果之一。其证明见第2.2节。

定理 2.1. 对于基本的 $\mathcal{Q}$-图 $\mathcal{Q}_{\text{cube}}$，限制函子（*24*）是一个全忠实嵌入

$$\text{Res}^\circ_{\partial C} : \mathcal{X}^\circ_{\mathcal{Q}_{\text{cube}}} \hookrightarrow \text{Loc}_1^{\text{tr}}(\Gamma_{\text{cube}}). \tag{34}$$

它的像 $\mathcal{L}^\circ_{\mathcal{Q}_{\text{cube}}}$ 由以下关于单值化的方程描述 $\{X_1, X_2, X_3\}$ 见（*33*） :

- 对于立方体 C 的每个 $\bullet$–顶点 v，我们有:

$$X_1X_2X_3 + X_2X_3 + X_3 = 0. \tag{35}$$

$$-X_1X_2X_3 = 1. \tag{36}$$

方程（*3* *5*）在 •–立方体的顶点C 彼此共轭，因此等价 .

沿着与顶点 •–相对的之字形环 γ 的单值化 Mon_γ 由下式给出：[6]

$$\mathrm{Mon}_\gamma = -X_1X_2X_3. \tag{37}$$

方程（36）仅表示此单值化是平凡的。

引理 2.2。二分曲面图 Γ_{cube} 的谱曲面是一个带有四个穿孔的环面 T^*_4。群 A_4 自然地作用于此环面上。环面 T^*_4 的完备化 T 自然同构于奇点处拉格朗日子流形 $\mathbb{L}_{\mathrm{cube}}$ 的链接。此同构是 A_4–等变的。

证明。它是一个连通定向曲面，与图 Γ_{cube}同伦等价。其穿孔与图 Γ_{cube}上的之字形环相对应。因此，它必定是一个带有四个穿孔的环面。群 A_4 实现为保持二分图不变的立方体对称变换群。

奇点处拉格朗日子流形 $\mathbb{L}_{\mathrm{cube}}$ 的链接，被识别为二分曲面图 Γ_{cube}上与之字形环相关的二维拉格朗日子流形之上的锥。 □

设 $\mathcal{F}$ 是立方体 C 内的一个容许层，其微局部支撑位于拉格朗日子流形 $\mathbb{L}_{\mathrm{cube}}$ 上，并且在混合区域上消失。那么，它在补集 $\mathsf{C} - q$（相对于四重交点 $q \in \mathsf{C}$）的限制，在 $R^\times$ 的元素所作的伸缩变换下是等变的。因此，根据 [GKo]，它由图 Γ_{cube} 上的一个平坦线丛描述。确切地说，在 $\mathsf{C} - q$ 中这类在混合区域上消失的容许层所成的范畴，与图 Γ_{cube} 上平坦线丛的群胚之间存在典范等价。根据引理 2.2，后一个群胚可与穿孔环面 T^*_4 上平坦线丛的群胚等同。正如我们在第 2.2 节中证明的，$\mathcal{F}$ 的微局部支撑与 $T^*_p\mathsf{C}$ 的交点支撑于平面 H_1、.....、H_4 的余法丛之并这一条件，等价于对 Γ_{cube} 的所有顶点 •– 均满足方程 (35)–(36)。特别地，赋予 $\mathcal{F}$ 的环面 T^*_4 上的平坦线丛可延拓至各穿孔。事实上，条件 (36) 恰好意味着它绕每个穿孔的单值化都是平凡的。于是，最有趣的条件 (35) 刻画了 $\mathsf{Loc}_1(\mathsf{T})$ 中的一个拉格朗日子流形。

关于这个非交换拉格朗日子流形的另一种重要描述将在第 2.3 节讨论。

2.1.2 交换 R 的 K_2–拉格朗日子流形。

图 Γ_{cube} 上的平坦线丛模空间是 5 维的：立方体有 6 个面，但所有面坐标的乘积等于 1。通过施加分配给立方体36 个 •–顶点的四个单项式方程（36），可以描述以之字形环为绕行路径且单值化平凡的平坦线丛所参数化的子簇。所有 •–顶点对应关系式（36）的乘积等于 1。由此得到的空间是一个二维辛环面。它可以实现为环面 $(\mathbb{C}^\times)^3$ 中的子环面，其坐标为 X_1，X_2，X_3，并满足关系式 $X_1X_2X_3 = -1$。于是辛形式为 $d\log(X_2)\wedge d\log(X_3)$。它的子空间 $\mathcal{L}^\circ_{\mathcal{Q}_{\mathrm{cube}}}$ 是一维的，因此自动成为拉格朗日子流形。然而，它实际上是 K_2–拉格朗日子流形，这是一个强得多的条件。这意味着方程 $X_2X_3 + X_3 = 1$ 蕴含[7]

$$\{X_2, X_3\} = -\{X_2, 1 + X_2\} = 0 \quad \text{in } K_2 \text{ mod 2-torsion.}$$

2.1.3 描述栈 $\mathcal{X}^\circ_{\mathcal{Q}}$。

给定三维簇 M 中的任意 $\mathcal{Q}$-图 $\mathcal{Q}$，令

$$M_\times = M - \{\text{位于 } M \text{ 内、围绕四重交点的}\}\mathcal{Q}_\times \text{ 小开球：} = \mathcal{Q} \cap M_\times. \tag{38}$$

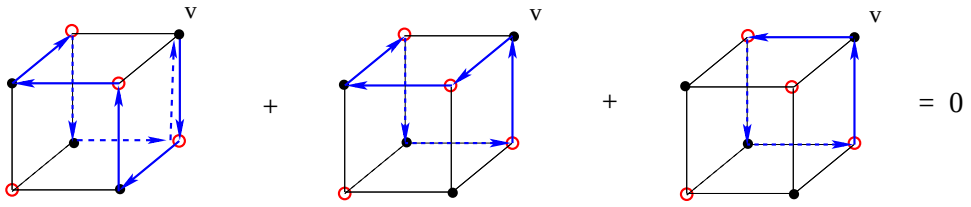


图10：关系式 $X_1X_2X_3+X_2X_3+X_3=0$。结合条件 $X_1X_2X_3=-1$，可得$X_2X_3+X_3=1$。这里 X_i 是从顶点 v出发、沿各面绕行的单值化，如图 9所示。

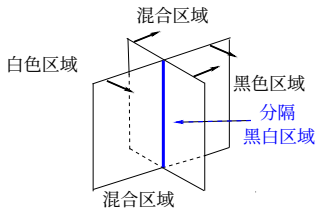


图11：两个余定向平面的交点，以及分隔黑白区域的边。

定义2.3。给定一个 $\mathcal{Q}$-图 $\mathcal{Q}\subset M$，定义一个二分图 $\Gamma_{\mathcal{Q}}$。其黑色（分别为白色）顶点是 $\bullet$–区域（分别为 $\circ$–区域） $\mathcal{Q}$。顶点 $\mathcal{D}_\bullet$与 $\mathcal{D}_\circ$ 之间的边对应于 $\mathcal{Q}$ 中分隔这两个区域的边，见图 *11*。

图 $\Gamma_{\mathcal{Q}}$ 中与分配给有色多面体 $\mathcal{D}$ 的顶点相接的边，与该多面体的边相匹配。

定理 2.4。栈 $\mathcal{X}^\circ_{\mathcal{Q}_\times}$ 等价于图 $\Gamma_{\mathcal{Q}}$上的秩一局部系统的栈。

证明。栈 $\mathcal{X}^\circ_{\mathcal{Q}_\times}$ 的描述方式与曲面上的交替图相同，见 [GKo]。 □

因此，由于 $\pi_1(\Gamma_{\mathcal{Q}})$ 是自由群，栈 $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}_\times}$ 是一个非交换环面。

Let

$$\mathbb{L}_\times := \mathbb{L} - \{\text{small open balls in } T^*M \text{ around the singular points of } \mathbb{L}\}. \tag{39}$$

令 q为 $\mathcal{Q}$的一个四重交点，且 S^2_q为 q周围的一个小球面。那么 $\mathcal{Q}_\times\cap S^2_q$是球面 S^2_q上的一个交替图。与之相关的二分曲面图同构于 Γ_{cube}。任意 $\mathcal{F}\in\mathcal{X}^\circ_{\mathcal{Q}}$在 S^2_q上的限制，由图 Γ_{cube}上的一个平坦线丛 $\mathrm{L}_{\mathcal{F}}$描述，它满足定理 35中的方程（2.1 ）。

拉格朗日子流形 $\mathbb{L}_\times$ 的边界是不交并，由（21）中的曲面 Υ （在 $T^*\Upsilon$中实现为零截面）以及环面 T_q 组成；这些环面由 q 的奇点 $\mathbb{L}$的链接给出：

$$\partial\mathbb{L}_\times = \Upsilon \bigcup \bigcup_{q\in\mathrm{Sing}(\mathbb{L})} \mathrm{T}_q. \tag{40}$$

根据引理 2.2，环面 T_q 是二分曲面图 Γ_{cube}的谱曲面，带有填充后的穿孔。因此，空间 $\mathrm{Loc}_1(\mathrm{T}_q)$ 具有自然的辛结构。

因此 限制到边界拉格朗日的函子 $\partial\mathbb{L}_\times$ 给出了一个拉格朗日子流形

$$\Lambda_{\mathcal{Q}} := \mathrm{Res}_{\partial\mathbb{L}_\times}(\mathcal{X}^\circ_{\mathcal{Q}_\times}) \subset \mathrm{Loc}_1(\Upsilon)\times \prod_{q\in\mathrm{Sing}(\mathbb{L})} \mathrm{Loc}_1(\mathrm{T}_q). \tag{41}$$

我们将其视为拉格朗日对应。因此，它作用于 $\mathrm{Loc}_1(\mathrm{T}_q)$ 中基本拉格朗日的乘积，而这一作用的像就是拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}$。下面详细说明。

[6]这个 $-$ 符号反映了我们处理的是扭曲层这一事实。[7]回想一下，Steinberg 关系 $\{x,1-x\}$ 在 K_2 中意味着 $\{z,-z\}=0$，但 $\{z,-1\}$ 只是一个 2-挠元。

2.1.4 用方程描述拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}$ 。

给定辛流形 $\mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_2$ 以及拉格朗日子流形 $\mathrm{L}_1 \subset \mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$，在辛空间的 Weinstein 范畴中，通过拉格朗日对应 $\mathcal{L}$ 作用于拉格朗日子流形 L_1，可得到拉格朗日子流形 $\mathrm{L}_2 \subset \mathcal{S}_2$：

$$\mathrm{L}_2 := \mathcal{L} \circ \mathrm{L}_1 \subset \mathcal{S}_2.$$

我们将其应用 于拉格朗日对应 $\Lambda_{\mathcal{Q}}$ （41）中。它作用于由基本拉格朗日子流形构成的乘积 s

$$\prod_{q \in \mathrm{Sing}(\mathbb{L})} \mathcal{L}_{\mathrm{cube}} \subset \prod_{q \in \mathrm{Sing}(\mathbb{L})} \mathrm{Loc}_1(\mathrm{T}_q)$$

参数化 由 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}$ 的奇点 q 参数化，并给出 $\mathrm{Loc}_1(\Upsilon_{\mathcal{Q}})$ 中的一个拉格朗日子流形 :

$$\Lambda_{\mathcal{Q}} \circ \prod_{q \in \mathrm{Sing}(\mathbb{L})} \mathcal{L}_{\mathrm{cube}} \subset \mathrm{Loc}_1(\Upsilon_{\mathcal{Q}}). \tag{42}$$

它由方程（35）-（36）描述，这些方程由 $\mathbb{L}$ 的奇点参数化。所得拉格朗日子流形可通过消元显式求得。

2.2 定理2.1的证明

2.2.1 设定。

设 $\mathcal{F}$ 是三维簇 M上的一个容许层，其微局部支撑位于一个 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}$上，并且在混合区域上消失。我们给出这种情况下 $\mathcal{F}$ 的显式描述。假设 $\mathcal{F}$ 的微局部秩为一，我们得到相应模空间的簇描述，它是由方程（35）-（36）定义的非交换环面中的一个子簇。这就完成了定理2.1的证明。

我们先描述 $\mathcal{F}$ 在四重交点补集上的情形。在这种情况下，描述可简化为 [GKo第 10 节1]中研究的二维图景。 $\mathcal{F}$ 限制到一个
•–区域 $D_\bullet$ 的内部是一个 $V_{D_\bullet}$ 0 次常值层。 $\mathcal{F}$ 限制到一个 ∘–区域$D_\circ$ 的内部是 $V_{D_\circ}[-1]$ 1 次常值层。在 $\mathcal{Q}$中两个曲面的交点附近，其横截面如图12所示。

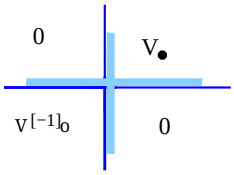


图12：曲面上交点附近的一个容许层，在混合区域上消失；其微局部支撑位于阴影区域以及四边形 I 和 III 上方的零截面处。穿孔坐标轴上的纤维消失。对象 V, W 的度数为 0。结构映射 h :
$V_\circ[-1] \to V_\bullet[-1]$ 是一个同构。

现在我们来考察 $\mathcal{F}$ 四重交点 q附近的情形。记 B 以q为中心的小球为 $\mathcal{F}$。对 $B - q$ 在穿孔球 ∂B上的限制由其在球面 $\mathcal{F}_{\mathrm{C}}$ 上的限制决定。后者是一个容许 dg-层 Γ_{C}，其微局部支撑位于诱导二分带图的之字形曲线上，该图可识别为立方体 C ∂B =上的图。这里我们使用自然的拓扑识别 $\mathcal{F}_{\mathrm{C}}$ C。dg-层 [在混合区域上消失。对于任意二分带图，这类秩一容许 dg-层的模空间是一个非交换泊松环面]GKo。

$\mathcal{F}$ 在 $T_q^* M - \{0\}$ 上的微局部支撑限制是一个锥形层。我们对 $\mathcal{F}$在点 q 附近的条件如下:

• 微局部支撑从 $\mathcal{F}$ 到 $T^*_qM-\{0\}$ 的限制集中在四条有向余法线 $\eta_1,...,\eta_4$ 上；这些余法线对应于在四重交点 q 处相交的 $\mathcal{Q}$ 的余定向曲面。

微局部支撑在非零余向量 $\eta\in T^*_qM$ 处的纤维 $\mathrm{ml}(\mathcal{F})_\eta$ 描述如下。取一个包含 q 的小球 $\mathcal{U}$。用 $\mathcal{U}_\eta$ 表示它沿方向 η 的微小平移。于是

$$\mathrm{ml}(\mathcal{F})_\eta := \mathrm{Cone}\Big(\mathcal{F}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathcal{F}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_\eta}\Big).$$

先验地，我们并不知道纤维 $\mathcal{F}_q=\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$。然而，根据条件 •，对于任何非余定向曲面在 q 处相交所产生的余法丛的 η，锥都为零。因此，复形 $\mathcal{F}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_\eta}$ 由于与 $\mathcal{F}_q$ 同构，在去心余法向球面上构成一个平凡的局部系统

$$S^2_q-\{\eta_1,...,\eta_4\},\qquad S^2_q:=(T^*_qM-\{0\})/\mathbb{R}_{>0}.$$

让我们计算 $S^2_q-\{\eta_1,...,\eta_4\}$ 上的局部系统 $\mathcal{L}$，其在余向量 η 处的纤维由下式给出

$$\mathcal{L}_\eta := \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{F}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_\eta}). \tag{43}$$

接下来，我们施加局部系统 $\mathcal{L}$ 平凡这一条件，并将 $\mathcal{F}_q$ 定义为一般 η 处的纤维：

$$\mathcal{F}_q := \mathcal{L}_\eta. \tag{44}$$

于是存在唯一的 df-层 $\mathcal{F}$，其在 $B-q$ 上的限制如上所述，且在 q 处的纤维由（44）给出。让我们实施这一方案。

从现在起，我们在拓扑意义下将余法向球面 S^2_q 与立方体 C 识别为二分图 Γ_C。余向量 η_i 指向立方体的 ∘–顶点，见图 8。我们需要计算局部系统 $\mathcal{L}$ 在余向量 η 绕立方体 ∘–顶点一周时的单值化。

下面的图片 展示了图 Γ_C 在立方体曲面相关部分上的之字形曲线 .

2.2.2 热身： •–顶点周围的局部系统是平凡的。

考虑立方体 C 上由余向量 $\mathcal{L}$ 张成的射线附近、某个 •–顶点 $v_\bullet$ 附近的局部系统。 $-\eta_1$图 13 中的七个彩色三角形是以 q为中心的三角锥与立方体的交集，这些三角锥包含立方体除 $v_\bullet$以外的所有顶点。

当余向量 η 接近 $-\eta_1$时，区域 $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_\eta$ 的球面投影位于一个红色圆盘内——即图 13中红色圆圈内的圆盘。该圆盘包含中央红色三角形和一个蓝色三角形。与它们相对的三角形不与该圆盘相交。其余四个三角形与该圆盘部分相交。图 13 中间的图表明，根据图 12中的约定，中央三角形的边在三角形内侧余定向。因此它是一个 •–三角形。图 13左侧的区域包含四个红色 •–三角形、三个蓝色 ∘–三角形和三个矩形。六个外部交叉点由 • 标出，位于图 13的左侧。[8] 红色圆盘包含三个连续的交叉点。

我们声称，局部系统 $\mathcal{L}$ 在余向量 $-\eta_1$ 附近严格来说是平凡的。事实上，余向量 $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_\eta$ 对应的区域 η 在 $-\eta_1$ 附近，是图 13 中的红色圆盘。我们来计算纤维 $\mathcal{L}_\eta$ 在 $\mathcal{L}$ 上的平行移动。将 η 绕余向量 $-\eta_1$ 移动，相当于移动红色圆盘。圆盘有六个不同的位置，由圆盘内部交叉点的连续三元组确定。第一个位置就是红色圆盘。接下来是图 13右侧的绿色圆盘，以此类推。

图 12 - 13 表明，红色三角形内部的纤维在 W_0、W_{12}、W_{23}、W_{31} 处于 0 次，而蓝色三角形内部的纤维在 $W_1[-1]$、$W_2[-1]$、$W_3[-1]$ 处于 1 次。带穿孔弧上的纤维为零。实弧上的纤维与附近蓝色三角形内部的纤维同构。对于分隔两个着色区域的每个交叉点，两个区域上的对象之间都有一个同构：

$$W_i \xrightarrow{\sim} W_0,\quad i=1,2,3;\qquad W_j \xrightarrow{\sim} W_{ij},\quad W_i \xrightarrow{\sim} W_{ij},\quad i\neq j. \tag{45}$$

要计算复形 $\mathrm{R}\Gamma(\mathcal{F}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_\eta})$，我们使用以下一般方法：

[8]另外仅有的交叉点是红色中央三角形的三个顶点。

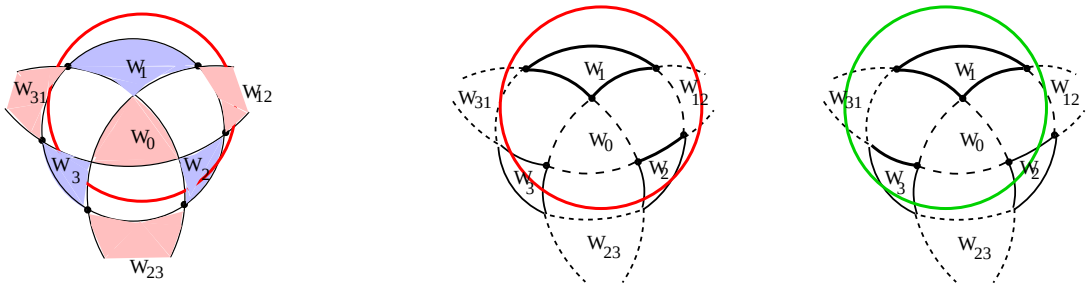


图 13：局部系统 $\mathcal{L}$ 本身是平凡的。

- 给定一个由可缩子集与分层相交的区域 $\mathcal{U}$，要计算 $\mathrm{R}\Gamma\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$，我们将定义微分分次层 $\mathcal{F}$ 的数据限制到 $\mathcal{U}$。然后，$\mathrm{R}\Gamma\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ 就是由限制后的微分分次层数据所给出的复形。我们只需要限制到完全位于 $\mathcal{U}$ 中的分层 $\mathcal{V}$。

因此，图 $\Gamma(\mathcal{F}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_\eta})$ 中红色圆盘对应的 R 复形为[9]，次数为 $[1,2]$:

$$W_1 \oplus W_1 \oplus W_3 \longrightarrow W_0.$$

绿色圆盘对应的类似复形给出相同的结果。由于答案在循环移位下保持不变，另外四个区域也给出相同的结果。因此，从一个区域到另一个区域的平行移动是平凡的，局部系统 $\mathcal{L}$ 也是平凡的，这正如预期，因为 $\mathcal{F}$ 在 $-\eta_1$附近没有微局部支撑。

2.2.3 ◦ –顶点附近的局部系统 $\mathcal{L}$ 。

我们来计算图 Γ 中将 $\mathcal{F}$ 限制到红色圆盘上的 R 复形。图 14。图 12 和 14 表明，蓝色区域各点处的纤维是 $V_0[-1]$、$V_{12}[-1]$、$V_{23}[-1]$、$V_{31}[-1]$ 这些对象，次数为 1；红色区域对应的对象为 V_1、V_2、V_3，次数为 0。对于每个交叉点，着色区域上的对象之间都存在一个同构:

$$\psi_{0,j} : V_0 \xrightarrow{\sim} V_i, \quad i = 1,2,3; \qquad \varphi_{ij} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_j, \quad \varphi_{ji} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_i, \quad i \neq j. \tag{46}$$

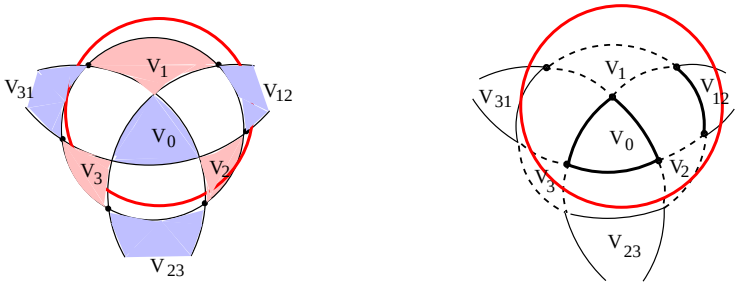


图14：计算限制 dg-层 $\mathcal{F}$ 到红色圆盘上的 $\mathrm{R}\Gamma$ 。

我们引入如下简写:

$$V_{0+12+23} := V_0 \oplus V_{12} \oplus V_{23}, \quad V_{0+23+31} := V_0 \oplus V_{23} \oplus V_{31}, \quad V_{0+31+12} := V_0 \oplus V_{31} \oplus V_{12}, \quad \text{etc.}$$

[9]中央开三角形在 0 次携带对象 W_0。闭三角形上的层为 $j_!W_0$，其中 j 是从开三角形到闭三角形的嵌入。因此我们得到上同调 $W_0[-2]$。等价地，对由以各顶点为中心的开圆盘 $\mathcal{U}_1$、$\mathcal{U}_2$、$\mathcal{U}_3$ 构成的三角形切赫覆盖，只有 $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3$ 上的截面有贡献，因此我们得到 $W_0[-2]$。

配方 • 到 t　　红色圆盘的微分分次层 $\mathcal{U}$ 在图 14 给出了以下次数的复形：$[1,2$　　$]$:

$$V_{0+12+31} \to V_1. \tag{47}$$

确实，包含对象 V_3 的区域没有贡献。位于红色圆盘内的区域 V_2边界上的带穿孔弧贡献 0。红色圆盘内唯一的带穿孔三角形贡献 $V_0[-2]$。蓝色三角形贡献 $V_{31}[-1]$ 和 $V_{12}[-1]$：前者是顶点上的截面，后者是红色圆盘内唯一线段上的截面。

存在由模去无环子复形 $V_{13} \to V_1$ 和 $V_{12} \to V_1$给出的拟同构：

$$\begin{aligned}(V_{0+12+13} \longrightarrow V_1) &\longrightarrow V_{0+12}.\\ (V_{0+12+13} \longrightarrow V_1) &\longrightarrow V_{0+13}.\end{aligned} \tag{48}$$

旋转红色　　圆盘，使其包含下一组三个交叉点，我们便得到图15中的绿色圆盘　　.

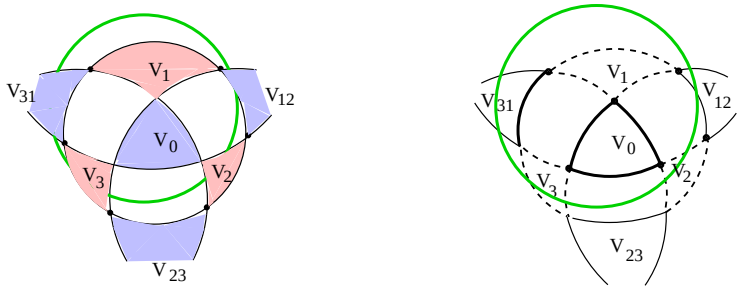


图 15：绿色圆盘的 RΓ($\mathcal{F}$) 与图Γ($\mathcal{F}$) 中红色圆盘的 R 完全一致，后者见图14。

它直接生成相同的复形（47）。因此，旋转对应于显然同构。

同样旋转绿色圆盘，我们得到图16中的蓝色圆盘，以及复形次数 $[1,2]$:

$$V_{0+31+23} \to V_3. \tag{49}$$

存在准同　　构，它们由对无环子复形取商给出 $V_{13} \longrightarrow V_3$ 和 $V_{23} \longrightarrow V_3$　　:

$$\begin{aligned}(V_{0+23+13} \longrightarrow V_3) &\longrightarrow V_{0+23}.\\ (V_{0+23+13} \longrightarrow V_3) &\longrightarrow V_{0+13}.\end{aligned} \tag{50}$$

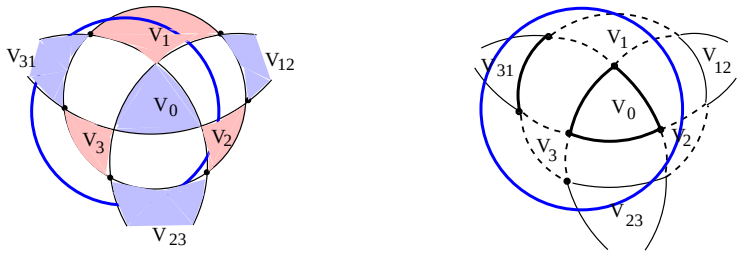
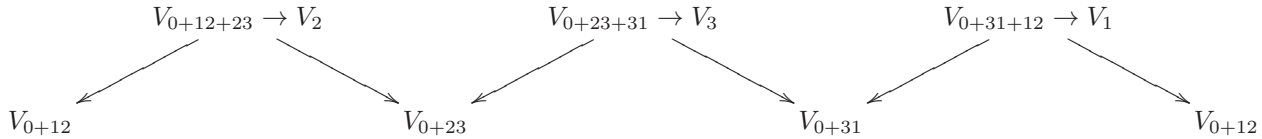


图16：计算将微分分次层 $\mathcal{F}$ 限制到蓝色圆盘所得的 $R\Gamma(\mathcal{F})$。

我们重复进行圆盘旋转，直到回到图中的红色圆盘14。然后我们得到一幅图

拟同构：



(51)

让我们计算（51）中底部对象之间的拟同构的复合：

$$V_0 \oplus V_{12} \longrightarrow V_0 \oplus V_{23} \longrightarrow V_0 \oplus V_{31} \longrightarrow V_0 \oplus V_{12}. \tag{52}$$

其中每个映射（52）中的映 2×2 射都由下三角矩阵给出。让我们计算它们的乘积 t.

1. 映射 $V_0 \longrightarrow V_0$ 是恒等映射，因为它是相同映射的复合：

$$V_0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_0.$$

2. 映射 $V_{12} \longrightarrow V_{12}$ 相当于以下映射的复合

$$V_{12} \longrightarrow V_{23} \longrightarrow V_{31} \longrightarrow V_{12}.$$

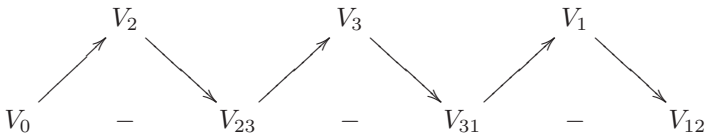
后者是由下列六个同构 $V_{ij} \longrightarrow V_i$ 及其在（46）中的逆映射复合而成：

$$V_{12} \longleftarrow V_2 \longrightarrow V_{23} \longleftarrow V_3 \longrightarrow V_{31} \longleftarrow V_1 \longrightarrow V_{12}. \tag{53}$$

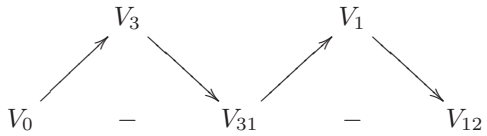
3. 映射 $V_0 \longrightarrow V_{12}$ 由以下三个项相加得到，具体定义如下：

$$(55) + (56) + (57). \tag{54}$$

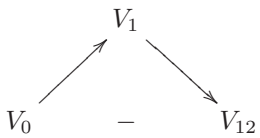
E它们各自都是由下列“上行和下行”拟同构复合而成的 :



(55)

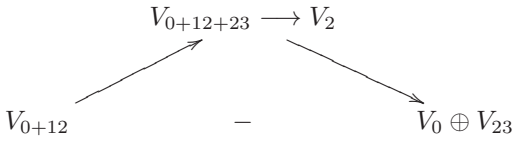


(56)



(57)

下面详细说明（ $V_0 \longrightarrow V_{23}$ ）中左三角形给出的同构55。



(58)

令 $(a, b) \in V_{0+12}$。它可提升为复形 $V_{0+12+23} \longrightarrow V_2$中的一个循环 $(a, b, b') \to 0$，其中 $\psi_{0,2}(a) + \varphi_{12}(b) + \varphi_{32}(b') = 0$. 随后，它投影到元素

$$b' = -(\varphi_{32}^{-1} \circ \psi_{0,2}(a) + \varphi_{32}^{-1} \circ \varphi_{12}(b)) \in V_{23}.$$

我们强调这个公式中的符号与 – （ – （55）-（57）中的符号相同。

2.2.4 条件 2) 和 3) 的含义。

四重交点附近的一个在混合区域上消失的容许 dg-层，会在立方体 C 的表面上诱导出一个类似的微分分次层。由于后者在混合区域上消失，因此可由图 Γ_{C} 上的一个秩一局部系统 $\mathcal{L}_{\mathrm{C}}$ 描述。

图的白色顶点 w 与立方体的定向对角线 Γ_{C} 相匹配 bw，因此也与余法向量$\eta_w \in \{\eta_1, \ldots, \eta_4\}$以及 Γ_{C}上的之字形环相匹配。我们用 γ_w 表示对应于 w的之字形环。复合（53）是沿着 $\mathcal{L}_{\mathrm{C}}$ 上的之字形环 γ_{w_0} 的单值化，见图 Γ_{C} 17。

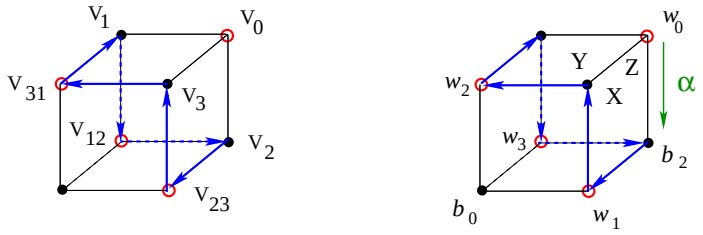


图17：二分图 Γ_{C} 上的之字形环 γ_{w_0}。沿着以顶点 w_0 为底点、环绕共享 w_0 的面的环的单值化为 X_{w_0}、Y_{w_0}、Z_{w_0}。这些面按顺时针方向排列。

记 X_w、Y_w、Z_w 为环绕共享一个 $\circ$–顶点 w的面的单值化，它们沿着以 w为底点的环。面的排列次序和环路定向与 Γ_{C}的带状结构所诱导的循环次序相容。从立方体外部观察，这就是图 17中的顺时针次序。

将路径 α_1 后接 α_2 的复合记为 $\alpha_2\alpha_1$。设 α 为图 17 中的边路径 $w_0 \to b_2$。则沿从顶点 b_2 出发的之字形环 γ 的单值化 $\mathrm{Mon}_{\gamma,\, b_2}$ 为：

$$\alpha^{-1}\mathrm{Mon}_{\gamma, b_2}\alpha = Z_{w_0}Y_{w_0}X_{w_0}. \tag{59}$$

显　　然相等，其中右侧是由以下复合给出的映射 $V_0 \longrightarrow V_0$：

$$\begin{aligned} &- X_{w_0} = V_0 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_{23} \longrightarrow V_3 \longrightarrow V_0, \\ &- Y_{w_0} = V_0 \longrightarrow V_3 \longrightarrow V_{31} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_0, \\ &- Z_{w_0} = V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_{12} \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_0. \end{aligned} \tag{60}$$

左侧的 $-$ 号出现是因为我们考虑的是扭曲 dg-层。因此，绕一圈时，我们将切向量旋转 2π，从而得到一个额外的 -1 因子，而右侧则是普通的单值化。

引理2.5。对于图 w 中的每个白色顶点 Γ_{C}，复合(*53*)对于余法向量 η_w 是恒等映射这一条件，仅意味着局部系统 $\mathcal{L}_{\mathrm{C}}$ 在图 Γ_{C} 上沿之字形环 γ_w具有平凡单值。等价地，我们有单项式关系

$$Z_wY_wX_w = -1. \tag{61}$$

这等价于单项式关系（*67*）。

证明。第一和第二个断言由（59）和（60）得出。最后一个断言..... □

引理 2.6。对于二分图 w 的每个白色顶点 Γ_{C}，余法向量 η_w 满足和式（*54*）为零的条件，等价于以下关系式：

$$Z_wY_w + Z_w = 1. \tag{62}$$

证明。合成　　由映射（55）-（57）中的每个映射与映射 $V_{12} \longrightarrow V_0$，我们通过（60）和（61）得到（62）。 □

2.2.5 结论。

设 q 是一个四重交点。设 $\mathcal{F}^\circ$ 是穿孔球 $B-q$ 上的一个容许 dg-层，在混合区域上消失。则复合（52）是恒等映射这一条件等价于以下两点：

(i) 存在一个容许 dg-层 $\mathcal{F}$，其定义在 U 上，且其在 $U-q$ 上的限制由 $\mathcal{F}^\circ$ 给出；(ii) $\mathcal{F}$ 在 q 处的微局部支撑，支撑于 $\mathcal{Q}$ 的曲面的余法丛，这些曲面交于 q。

2.3 $\mathcal{A}$–坐标中的基本非交换簇拉格朗日量

在第 2.3 节中，我们给出基本非交换簇拉格朗日量的另一种描述。事实上，这种描述使用了 $\mathcal{A}$–坐标；这些坐标由 [GKo] 引入，并在第 6.1节中回顾。然而，第 2.3 节基本上是自成一体的，读者无需了解非交换 $\mathcal{A}$–坐标的定义。事实上，本节提供了后者的关键示例。

第 2.3 节中对基本非交换簇拉格朗日量的描述，将其与 $\mathcal{A}$–坐标中的非交换二乘二变换联系起来；这些坐标由 [GKo], 引入，并揭示了其令人惊讶的 A对称性。

2.3.1 非交换环面 $\mathcal{A}_{\text{cube}}$中的 A_4–不变拉格朗日子簇 $\mathbb{L}$ 。

立方体 C 的 1-骨架是一个二分图 Γ_{cube}，见图 18。它给出一个非交换环面 $\mathcal{A}_{\text{cube}}$，其函数代数由变量 (a_i, b_i, c_i) 生成， $i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$并满足与立方体顶点对应的单项式关系：

$$\begin{aligned} &a_4a_1c_1=-1, \quad b_2b_1c_2=-1, \quad a_2a_3c_3=-1, \quad b_4b_3c_4=-1;\\ &b_1b_4c_1=-1, \quad a_1a_2c_2=-1, \quad b_3b_2c_3=-1, \quad a_3a_4c_4=-1. \end{aligned} \tag{63}$$

这里，前四个关系式赋给 ○–顶点，后四个赋给 ●–顶点。

每个单项式都是共享同一顶点的边上的变量按与该顶点处循环次序一致的顺序相乘所得，图中以逆时针方向显示。

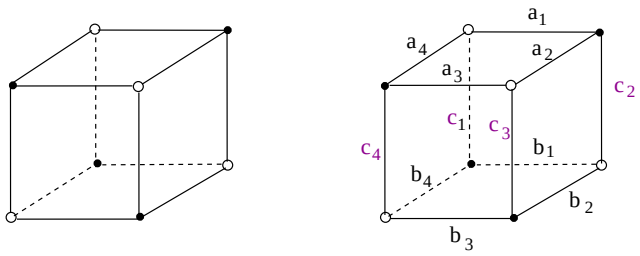


图18：立方体 Γ_{cube} 上的二分带图。右侧：图上的 $\mathcal{A}$–坐标。

回顾方程组（64），共含 12 个方程，如图 20所示：

$$\begin{aligned} &a_4b_2+(c_3c_1)^{-1}=1, \quad b_2a_4+(c_4c_2)^{-1}=1,\\ &a_2b_4+(c_1c_3)^{-1}=1, \quad b_4a_2+(c_2c_4)^{-1}=1,\\ &\\ &a_1b_3+(b_2a_4)^{-1}=1, \quad b_3a_1+(a_2b_4)^{-1}=1,\\ &a_3b_1+(b_4a_2)^{-1}=1, \quad b_1a_3+(a_4b_2)^{-1}=1,\\ &\\ &c_1c_3+(b_3a_1)^{-1}=1, \quad c_3c_1+(b_1a_3)^{-1}=1,\\ &c_2c_4+(a_3b_1)^{-1}=1, \quad c_4c_2+(a_1b_3)^{-1}=1. \end{aligned} \tag{64}$$

定理 2.7。 方程（*64*）定义了非交换环面 $_4$–A $\mathbb{L}$不变的拉格朗日子簇 $\mathbb{L}$，该非交换环面 $\mathcal{A}_{\text{cube}}$ 由方程（*63*）给出，其中 a_i， b_i， $c_i \in R^*$。

定理 2.7 的证明见第 2.3.6节。

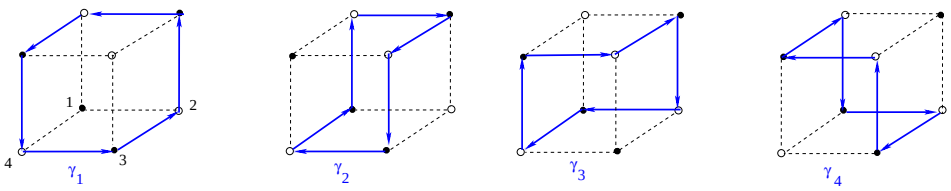


图 19：立方体上的四个之字形六边形 $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$。

我们将在下文引理 5.5 中证明，方程（63）+（64）与方程（36）+（35）等价。

方程组（64）与 [GKo第 6] 节中讨论的方程组一致。该文证明，后者描述了由非交换簇 $\mathcal{A}$–簇流形上的二乘二变换的图所给出的非交换簇拉格朗日子流形，相关公式为（123）。我们的描述清楚地揭示了这个拉格朗日子流形隐藏的 A_4–对称性，而在（123）中，这种对称性完全晦涩难明。

利用单项式关系（63），方程（64）可以写成多项式形式。[10]

$$\begin{aligned}
&a_4b_2 + a_4a_1a_2a_3 = 1, \quad b_2a_4 + a_1a_2a_3a_4 = 1.\\
&a_2b_4 + a_2a_3a_4a_1 = 1, \quad b_4a_2 + a_3a_4a_1a_2 = 1.\\
&\\
&a_1b_3 + a_1c_1b_1c_2 = 1, \quad b_3a_1 + c_1b_1c_2a_1 = 1.\\
&a_3b_1 + c_2a_1c_1b_1 = 1, \quad b_1a_3 + b_1c_2a_1c_1 = 1.\\
&\\
&c_1c_3 + a_2c_2b_2c_3 = 1, \quad c_3c_1 + c_3a_2c_2b_2 = 1.\\
&c_2c_4 + c_2b_2c_3a_2 = 1, \quad c_4c_2 + b_2c_3a_2c_2 = 1.
\end{aligned} \tag{65}$$

2.3.2 另一种看待方程的视角（**64**）。

二分图上有四个之字形六边形 Γ_{cube}，见图19。它们对应于立方体的主对角线。也就是说，垂直于这样一条对角线并经过其中心的平面会在立方体上截出一个六边形，这就是分配给该对角线的之字形环。每个之字形六边形产生三个方程，描述如下。对之字形路径进行定向，使得我们在 $\bullet$–顶点处右转，在 $\circ$–顶点处左转。[11]。选取一条之字形路径 γ，以及其上的一个 $\bullet$–顶点。于是，γ 的各条边从离开 $\bullet$–顶点的边开始，沿着 γ的定向依次排列。记z_1、 z_2、 z_3、 z_4、 z_5、 z_6 为 R 在各条边上的元素，见图20。

引理 2.8。在 γ的各条边上，元素 z_1、 z_2、 z_3、 z_4、 z_5、 $z_6 \in R^\times$ 满足以下方程：

$$z_1z_4 + (z_5z_2)^{-1} = 1, \qquad z_5z_2 + (z_3z_6)^{-1} = 1, \qquad z_3z_6 + (z_1z_4)^{-1} = 1. \tag{66}$$

$$z_3z_6 \cdot z_1z_4 \cdot z_5z_2 = -1. \tag{67}$$

这些关系式在循环移位 2 下保持不变，因此与所选的 $\bullet$–顶点无关。

[10]例如，由于根据（63）我们有 $a_4a_1 = -c_1^{-1}$ 且 $a_2a_3 = -c_3^{-1}$，因此得到 $c_1^{-1}c_3^{-1} = a_4a_1a_2a_3$。所以，$(a_4b_2 + (c_3c_1)^{-1} = 1)$ 中的方程（64）等价于 $a_4b_2 + a_4a_1a_2a_3 = 1$（65）中的方程。注意，单项式方程（63）中的符号可以改变，而不影响上述论证。 [11]在图中，我们从立方体外部观察一个面。

证明。 例如，对于 γ 图 20中的之字形，方程（66）为

$$a_4b_2+(c_3c_1)^{-1}=1,\quad c_3c_1+(b_1a_3)^{-1}=1,\quad b_1a_3+(a_4b_2)^{-1}=1. \tag{68}$$

利用单项式关系（63），我们得到 $c_1b_1a_3a_4b_2c_3=(b_3c_4b_4)^{-1}=(-1)^{-1}=-1$. 等价地，$b_1a_3a_4b_2c_3c_1=-1$。这等价于（67）。 □



图20：立方体上的一个定向之字形六边形。

命题2.9。 单项式方程（67）可由单项式方程 (63)在 p 处推出。这十二个方程（66）对应于点 p 和相交于 p 处的四个曲面 H_i，它们等价

证明。 这三个方程（66）等价，这可由以下观察得出。

引理 2.10。假设 $xyz=-1$。那么以下三个方程等价：

$$x+y^{-1}=1 \quad\longleftrightarrow\quad y+z^{-1}=1 \quad\longleftrightarrow\quad z+x^{-1}=1.$$

证明。将第一个方程右乘 y，并利用 $xy=-z^{-1}$，即可得到第二个方程。依此类推。 □

根据引理 2.10，(64) 中的任意方程都等价于前四个方程之一：

$$\begin{aligned} a_4b_2+(c_3c_1)^{-1}&=1, \quad b_2a_4+(c_4c_2)^{-1}=1.\\ a_2b_4+(c_1c_3)^{-1}&=1, \quad b_4a_2+(c_2c_4)^{-1}=1. \end{aligned} \tag{69}$$

引理 2.11。 (69) 中的每个方程都可由其中一个方程经共轭得到。

证明。将第一个方程用 b_2 共轭，即得第二个方程。将第三个方程用 b_4 共轭，即得第四个方程。将第一个方程用 c_3 共轭，即得第三个方程。 □

命题 2.9 的证明可由这些引理直接得出。 □

2.3.3 缩放作用。

我们用集合 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$标记立方体的主对角线，使得第 $i-$条对角线包含与坐标为 a_{i-1},a_i 的边相连的顶点，如图 20所示。记 γ_i 为垂直于第 $i-$条对角线的锯齿六边形。那么，边 E 携带分配给生成与该边 E平行平面的对角线的锯齿形。

让我们将之字形 γ 上使线丛平凡化的每个截面 s_γ 按 $s_\gamma\longmapsto\lambda_\gamma s_\gamma$ 进行缩放。将这些截面 s_{γ_i} 按 λ_i 缩放，即可得到群 $(R^\times)^4$ 在 $\mathcal{A}-$坐标上的作用：

$$\begin{aligned} &a_1\longmapsto\lambda_1^{-1}a_1\lambda_2,\quad a_2\longmapsto\lambda_2^{-1}a_2\lambda_3,\quad a_3\longmapsto\lambda_3^{-1}a_3\lambda_4,\quad a_4\longmapsto\lambda_4^{-1}a_4\lambda_1,\\ &b_1\longmapsto\lambda_4^{-1}b_1\lambda_3,\quad b_2\longmapsto\lambda_1^{-1}b_2\lambda_4,\quad b_3\longmapsto\lambda_2^{-1}b_3\lambda_1,\quad b_4\longmapsto\lambda_3^{-1}b_4\lambda_2,\\ &c_1\longmapsto\lambda_2^{-1}c_1\lambda_4,\quad c_2\longmapsto\lambda_3^{-1}c_2\lambda_1,\quad c_3\longmapsto\lambda_4^{-1}c_3\lambda_2,\quad c_4\longmapsto\lambda_1^{-1}c_4\lambda_3. \end{aligned} \tag{70}$$

对角子群 $R^\times$ 通过共轭作用。

命题 2.12。 群的作用（70）$(R^\times)^4$ 于 $\mathcal{A}$–坐标上具有以下性质：i）共轭方程（63）-（64）。

ii) 保持非交换 2–形式 Ω。

证明。 i) 群（$R^\times$）^{4} 对单项式方程（63）进行共轭：

$$a_i a_{i+1} c_2 \longmapsto \lambda_i^{-1}(a_i a_{i+1} c_2)\lambda_i; \quad b_{i+1} b_i c_{i+1} \longmapsto \lambda_i^{-1}(b_{i+1} b_i c_{i+1})\lambda_i, \quad \forall i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

关系式（ $z_a z_{a+3}$ 66）中的每个单项式都对应一个之字形 γ_i ，并被 λ_i^{-1}共轭。因此，对应于之字形 γ_i 的三个关系式都被 λ_i^{-1} 共轭，例如：

$$a_4 b_2 + (c_3 c_1)^{-1} \longmapsto \lambda_4^{-1}(a_4 b_2 + (c_3 c_1)^{-1})\lambda_4.$$

ii) 设 $\{a, b\}' := dadbb^{-1}a^{-1}$。我们有

$$\{a_i, a_{i+1}\}' \longmapsto \lambda_i^{-1}\{a_i, a_{i+1}\}'\lambda_i, \quad \{b_{i+1}, b_i\}' \longmapsto \lambda_i^{-1}\{b_{i+1}, b_i\}'\lambda_i.$$

2-形式 $\{a, b\}$ 是 $\{a, b\}'$到循环移位的余不变量的投影。 □

2.3.4 与 $\mathcal{A}$–坐标的突变公式进行比较，参见 [GKo]。

可以利用单项式关系 (63) 消去 c_i，将方程 (64) 改写为一个双有理变换：

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \longmapsto (b_1, b_2, b_3, b_4), \tag{71}$$

$$\begin{aligned} a_4 b_2 &= 1 - a_4 a_1 a_2 a_3, \quad & b_2 a_4 &= 1 - a_1 a_2 a_3 a_4, \\ a_2 b_4 &= 1 - a_2 a_3 a_4 a_1, \quad & b_4 a_2 &= 1 - a_3 a_4 a_1 a_2. \end{aligned} \tag{72}$$

单项式 关系式 (63) 蕴含 $a_i a_{i+1} = b_{i+1} b_i, \quad i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. 然而，$\mathbf{A}_4$–对称性遭到了破坏。

另一方面，二乘二变换的公式 (123) 借自 [GKo], , 形式如下：

$$\begin{aligned} a_4 \overline{b}_2^{-1} &= 1 - a_4 a_1 a_2 a_3, \quad & \overline{b}_2^{-1} a_4 &= 1 - a_1 a_2 a_3 a_4, \\ a_2 \overline{b}_4^{-1} &= 1 - a_2 a_3 a_4 a_1, \quad & \overline{b}_4^{-1} a_2 &= 1 - a_3 a_4 a_1 a_2. \end{aligned} \tag{73}$$

通过代换，公式 (73) 可转换为公式 (72：

$$\overline{b}_i := b_i^{-1}, \quad i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

下面来解释一下。对矩形 $ABCD$ 进行三角剖分翻转，不会改变矩形定向。另一方面，将一个四面体切成两个矩形，见图 21。我们可以将对应边相匹配的矩形识别为同一个矩形。然而，它们从四面体定向继承的定向彼此相反。改变二分图的定向，意味着将顶点处各边的循环次序反转。边上的 $\mathcal{A}$–坐标如下变化：

$$a_E \longrightarrow \overline{a}_E := a_E^{-1}. \tag{74}$$

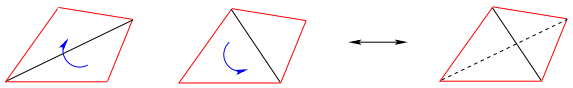


图 21：C 将四面体切成两个矩形，会使矩形的定向相反 s.

综上，我们得到以下结果。

定理 2.13。 非交换簇的突变公式 (72) 与二乘二变换对应的 $\mathcal{A}$–变换等价于方程组 (64，其中变量 (a_i、 b_i、c_i)满足单项式关系 (63)，该关系对应于立方体顶点。

2.3.5 二乘二变换的几何。

取一个四面体 T。考虑由 T 的边的中心构成的凸包所确定的八面体 O。令 C 为由八面体 O 各面的中心构成的凸包所确定的立方体。它带有一个由立方体 C 的一维骨架给出的图 Γ_{C}。图 Γ_{C} 是一个二分图：其 $\bullet$– 顶点对应于位于四面体各面上的八面体 O 的三角形，见图 22。

二分图 Γ_{C} 图 22 与图 18上的二分图相对应。 Γ_{C} 上的边的坐标与八面体的边上的坐标相对应。我们将它们对应到二乘二变换中的蓝色边上，见图 22。因此存在以下双射：

{立方体 C 的绿色边} = {八面体 O 的红色边} = {二乘二变换的蓝色边}。

根据立方体与八面体之间的对偶性， $\mathcal{A}$–变量被赋给

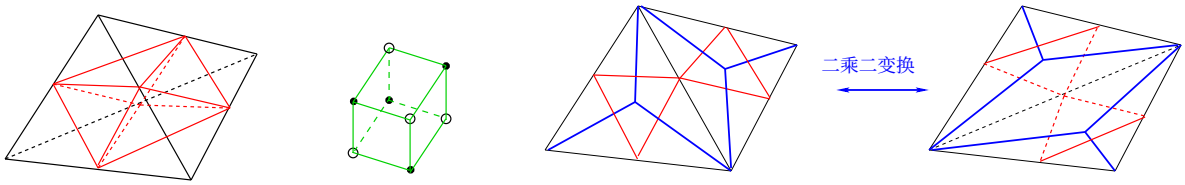


图 22：左侧：一个黑色四面体及其内接的红色八面体。中间：内接于红色八面体的绿色立方体，带有一个二分图。右侧：蓝色的二乘二变换。

八面体 O，单项式关系对应于八面体的三角形面。然后， $\mathcal{A}$–变量被赋予蓝色立方体的边，该立方体由图22右侧的两个蓝色图的并集构成。蓝色立方体有两类顶点：四面体各面的中心，以及四面体的顶点。因此，我们在立方体的 1–骨架上得到二分图。

2.3.6 定理**2.7**的证明。

我们已经知道， $\mathbb{L}$ 对于典范 2-形式 Ω 是各向同性的。另一方面，取一个二维 R–向量空间中装饰旗的一般四元组（$\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$、 $\mathcal{C}$、 $\mathcal{D}$）。那么，矩形 ABCD 的三角剖分 AC 会产生对应二分图上的一组簇 $\mathcal{A}$–坐标 Γ_2。对此三角剖分进行翻转，会得到对应变异二分图的一组簇 $\mathcal{A}$–坐标 Γ'_2。请注意，这也是定理5.4中非常一般的断言的推论。

2.3.7 交换情形。

交换环面 $\mathcal{A}_{\mathrm{cube}}$ 是 5 维的。事实上，立方体的边上有 12 $\mathcal{A}$–个变量。立方体的顶点上指定了 8 个单项式关系 $r_v \quad v$，见（63）。这些关系之间有一个关系式：

$$\prod_{\bullet-\text{vertices } b} r_b = \prod_{\circ-\text{vertices } w} r_w.$$

因此我们得到一个维数为 $12-8+1=5$ 的环面。它描述了四点穿孔球面上二维局部系统的模空间，其中每个穿孔附近都选取一个不变向量，并对所有这些向量同时缩放取商。

群 $(R^\times)^4$ 通过对四条之字形路径的平凡化进行缩放来作用。对角子群 R_{diag}的作用是平凡的。因此，我们得到一个维数为 $12-8+1-3=2$的环面。

3 奇异拉格朗日子流形的无穷远边界

3.0.1 拉格朗日子流形 $\mathbb{L}_{\mathcal{H}} \subset T^*X$。

设 X 是一个边界为 Y的流形，其上有一个由 $\mathcal{H}$ 个光滑余定向超曲面 $\{H_i\}$ 组成的有限集，这些超曲面带有彼此不相交的勒让德子流形。我们假设，这些超曲面 H_i 与边界横截相交，且其交集由带有彼此不相交的勒让德子流形的光滑余定向超曲面 $\partial H_i \subset Y$ 构成。考虑 T^*X 中的拉格朗日子流形，它由零截面 X° 和这些定向超曲面的余法丛构成：

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathcal{H}} := X^\circ \cup \coprod_i T^*_{H_i} X. \tag{75}$$

3.0.2 边界拉格朗日 $\partial(\mathbb{L}_{\mathcal{H}})$。

我们的目标是定义拉格朗日子流形 $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathcal{H}}$ 的边界。该边界是在下文引入的辛空间 $\mathcal{S}$ 中维数低一维的拉格朗日子流形：

$$\partial\mathbb{L} \subset \mathcal{S}. \tag{76}$$

I首先考虑边界 Y 为空的情形，这有助于阐明答案。

取一个 足够大的紧集 $C \subset \mathbb{L}$，使得 $\mathbb{L} - C$ 是 $\mathbb{R}_{[0,\infty)} \times H_i$ 的连通分支之并 ：

$$\mathbb{L} - C = \coprod_i \Big(\mathbb{R}_{[0,\infty)} \times H_i\Big).$$

设 $H_{i,\ \infty}$ 是 H_i的副本，将其视为 $\infty \times H_i$。那么 $\partial\mathbb{L}$ 是无穷远边界 $\partial_\infty\mathbb{L}$，定义为辛空间 $\mathcal{S}$中的零截面拉格朗日子流形：$= \coprod T^*H_{i,\ \infty}$，参见图 23：

$$\partial\mathbb{L} := \partial_\infty\mathbb{L} := \coprod H_{i,\infty} \quad \subset \quad \coprod T^*H_{i,\infty}. \tag{77}$$

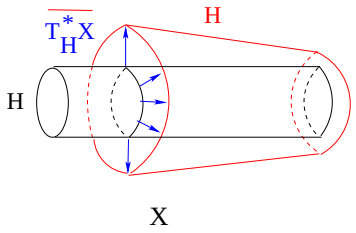


图 23：超曲面 H_∞ 是 $T^*_H X$ 的无穷远边界。拉格朗日子流形 $\partial_\infty\mathbb{L}$ 是 T^*H_∞ 的零截面。

现在，设 H 是 X 中带有边界 $\partial H \subset Y$ 的单个余定向超曲面，并且 $L = T^*_H X$。我们定义如下图：

$$\begin{array}{ccc} T^*Y & & T^*H \\ \cup\uparrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \cup\uparrow{\scriptstyle \beta_2} \\ T^*_{\partial H}Y & & H \\ \cup\uparrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \cup\uparrow{\scriptstyle \beta_1} \\ \partial H \times [0,1] & \xrightarrow{=} & \partial H \times [0,1] \end{array} \tag{78}$$

映射 α_1 是零截面的领圈邻域 $\partial H \times [0,1]$ 到 $T^*_{\partial H} Y$ 的嵌入。α_2： $T^*_{\partial H} Y \hookrightarrow T^* Y$ 是自然映射。映射 β_1 将 $\partial H \times [0,1]$ 与 H 中 ∂H 的一个领圈邻域相对应。 β_2 是零截面 $H \hookrightarrow T^* H$。复合这些竖直映射，我们得到如下图

$$\begin{array}{ccc} T^*Y & & T^*H \\ & {\scriptstyle \alpha_2\circ\alpha_1} \nwarrow \quad \nearrow {\scriptstyle \beta_2\circ\beta_1} & \\ & \partial H \times [0,1] & \end{array} \tag{79}$$

我们通过将辛簇 $\mathcal{S}$与辛簇 T^*Y和 T^*H沿 $\partial H \times [0,1]$粘合来定义辛簇，并通过映射嵌入到 T^*Y，再通过映射 $\alpha_2 \circ \alpha_1$嵌入到 T^*H，见图（79）：

$$\mathcal{S} := T^*Y \ *_{\partial H \times [0,1]} \ T^*H. \tag{80}$$

拉格朗日子流形 $\partial \mathbb{L}$ 通过类似的粘合得到，使用图（78）的下半部分，见图 24:

$$\partial \mathbb{L} := \left(Y^\circ \cup T^*_{\partial H} Y \right) \ *_{\partial H \times [0,1]} \ H. \tag{81}$$

嵌入 $\partial \mathbb{L} \subset \mathcal{S}$由嵌入 $Y^\circ \cup T^*_{\partial H} Y \hookrightarrow T^*Y$和 $H \hookrightarrow T^*H$诱导得到。

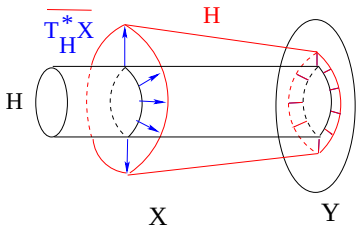


图 24: 拉格朗日子流形 $\partial \mathbb{L}$ 通过将 $\partial_\infty \mathbb{L} = H_\infty$ 的边界端 $\partial (H_\infty)$ 与 $T^*_{\partial H} Y$的无穷远边界 $(\partial H)_\infty$粘合得到。

将这一构造应用于超曲面的并集 H_i，我们一般得到辛空间 $\mathcal{S}$ 和拉格朗日子流形 $\mathbb{L} \subset \mathcal{S}$。

定义 3.1. 给定流形 X 上带有互不相交的勒让德子流形的有限集光滑超曲面 $\{H_i\}$，其边界为 Y，则辛簇 $\mathcal{S}$ 通过粘合 T^*Y 和 $\coprod_i T^*H_i$ 定义：

$$\mathcal{S} := T^*Y \ *_{\coprod_i \partial H_i \times [0,1]} \ \coprod_i T^*H_i. \tag{82}$$

其拉格朗日子流形 $\partial \mathbb{L}$ 定义为

$$\partial \mathbb{L} := \mathbb{L}_Y \ *_{\coprod_i \partial H_i \times [0,1]} \ \coprod_i H_i, \tag{83}$$

其中 $\mathbb{L}_Y \colon = Y^\circ \cup \cup_i T^*_{\partial H_i} Y \subset T^*Y.$

3.0.3 拉格朗日子流形的无穷远边界。

这里给出一个更一般的图景。设 $\mathbb{L}$ 是辛空间 M 中一个可能奇异、非紧的闭拉格朗日子集，其中包含一个紧集 C，且 $\mathbb{L} - C$ 具有如下形式：存在一个可能奇异的拉格朗日子流形 $\mathbb{L}'$，其维数比辛空间 U_ε（L'）的维数小一；它可收缩到 $\mathbb{L}'$，并且存在 M 中的一个邻域 M_ε，使得

$$(\mathbb{L} - C \subset M_\varepsilon) = \left(\mathbb{L}' \subset U_\varepsilon(L') \right) \times \left([0,\infty) \subset ([0,\infty) \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \right), \qquad \dim(\mathbb{L}') = \dim(\mathbb{L}) - 1.$$

第二个因子是平面（p, q）中的拉格朗日子流形 $[0,\infty)$，其中 $0 \le p < \infty$ 和 $-\varepsilon < q < \varepsilon$ 配备辛形式 $dp \wedge dq$，因此

$$\mathbb{L} - C = \mathbb{L}' \times [0,\infty).$$

那么，无穷远边界 $\partial_\infty \mathbb{L}$ 就是辛空间 $U_\varepsilon(\mathbb{L}')$中的拉格朗日子流形 $\mathbb{L}'$：

$$\partial_\infty \mathbb{L} := \mathbb{L}' \subset U_\varepsilon(\mathbb{L}').$$

特别地，考虑一个光滑超曲面 H，它没有边界，且位于流形 X中。它产生拉格朗日子流形 $\mathbb{L}$，该子流形由以下部分的并组成： $T^*_H X$ 以及零截面 X°。拉格朗日子流形 $\mathbb{L}$ 在 $T^*_H X \cap X^\circ$ 处有一个奇点，其类型为（一个有 3 条边的单顶点图） $\times \mathbb{R}^{n-2}$，其中 $n = \dim(X)$。然后，应用上述一般定义，我们得到定义（77）。

可以定义带角的无穷远处的拉格朗日子流形。下面详细说明余维一角的情形，这与本文讨论相关。在这种情况下，我们假设补集 $\mathbb{L} - C$ 有两个端。也就是说，存在一个可能奇异的拉格朗日子流形 $\mathbb{L}''$，其维数比 $\mathbb{L}$ 小二，位于辛空间$U_\varepsilon(L'')$中；它可以收缩到 $\mathbb{L}'$，并且存在一个邻域 M_ε，位于 M中，使得

$$\mathbb{L} - C = \Big(\mathbb{L}'' \subset U_\varepsilon(\mathbb{L}'')\Big) \times \Big([0,\infty)^2 \subset ([0,\infty) \times (-\varepsilon,\varepsilon))^2\Big), \qquad \dim(\mathbb{L}'') = \dim(\mathbb{L}) - 2.$$

第二个因子是辛空间 $\mathbb{R}^4$ 中的子空间，其坐标为 (p_1, q_1, p_n, q_n)，辛形式为 $dp_1 \wedge dq_1 + dp_n \wedge dq_n$，由 $0 \le p_n, q_1 < \infty$ 和 $-\varepsilon < q_n, p_1 < \varepsilon$给出。它包含拉格朗日子流形 $[0,\infty)^2$，其坐标为 (p_n, q_1)。我们将其紧集化为一个正方形 $[0,\infty]^2$。正方形中包含角 (∞,∞)的两条边构成角域 $([0,\infty] \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times [0,\infty])$。角拉格朗日子流形 $\partial_{(2)}\mathbb{L}$ 是拉格朗日子流形 $\mathbb{L}''$ 与该角域的乘积：

$$\partial_{(2)}(\mathbb{L}) := \mathbb{L}'' \times \Big(([0,\infty] \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times [0,\infty])\Big).$$

它包含角 $\mathbb{L}'' \times \{\infty\}^2$。拉格朗日子流形 $\partial_{(2)}(\mathbb{L})$位于辛空间中

$$\partial_{(2)}\mathcal{S} = U_\varepsilon(\mathbb{L}'') \times \Big(([0,\infty] \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times [0,\infty])\Big) \times (-\varepsilon,\varepsilon)^2.$$

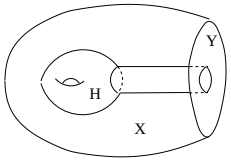


图 25：

3.0.4 范畴层 $\mathcal{C}_\mathbb{L}$ 及其对边界拉格朗日的限制。

回顾奇异的拉格朗日子流形 $\mathbb{L}$ （75）中的范畴层 $\mathcal{C}_\mathbb{L}$ 在 $\mathbb{L}$上，详见第1.3.1节。回顾零截面 $H^\circ \subset T^*H$。对于开集 $\mathbb{R}_{(a,\infty]} \times H_i$ 存在典范等价

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_{\mathbb{R}_{(a,\infty]} \times H_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{H_i}; \\ &\mathcal{C}_{\mathbb{L}-C} = \prod_i \mathcal{C}_{\mathbb{R}_{(a,\infty]} \times H_i} \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathcal{C}_{H^\circ_{i,\infty}}. \end{aligned} \tag{84}$$

因此，限制函子 $\mathrm{Res}_{\mathbb{L}-C} : \mathcal{C}_\mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{L}-C}$ 利用（84）给出无穷远处限制函子

$$\mathrm{Res}_\infty : \mathcal{C}_\mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{H}^\circ_\infty} := \prod_i \mathcal{C}_{H^\circ_{i,\infty}}.$$

超曲面族 $\mathcal{H}$ 与边界 ∂X 的横截交在边界上诱导出一个族 $\partial\mathcal{H}$。存在拉格朗日子流形 $\mathbb{L}_{\partial\mathcal{H}} \subset T^*\partial X$，见（75）。对 ∂X 的边界限制 X 给出函子

$$\mathrm{Res}_{\partial X} : \mathcal{C}_{\mathbb{L}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{L}_{\partial\mathcal{H}}}.$$

此外还有限制函子，其中底行的函子由顶行的函子给出：

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_i^\circ} &\longrightarrow \mathcal{C}_{\partial H_i^\circ}, \qquad \mathcal{C}_{\mathbb{L}_{\partial\mathcal{H}}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\partial H_i^\circ}. \\ \mathcal{C}_{\mathcal{H}_\infty^\circ} &\longrightarrow \mathcal{C}_{\partial\mathcal{H}_\infty^\circ}, \qquad \mathcal{C}_{\mathbb{L}_{\partial\mathcal{H}}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\partial\mathcal{H}_\infty^\circ}. \end{aligned} \tag{85}$$

函子 Res $_\infty$ 和 $\mathrm{Res}_{\partial X}$ 给出到范畴纤维积的限制函子：

$$\mathrm{Res} : \mathcal{C}_{\mathbb{L}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{H}_\infty^\circ} \times_{\mathcal{C}_{\partial\mathcal{H}_\infty^\circ}} \mathcal{C}_{\mathbb{L}_{\partial\mathcal{H}}}. \tag{86}$$

以下结论可由 Brav-Dyckerhoff 的结果推出 [BrD1]-[BrD2]。

定理 3.2。 限制函子（*86*）的像是导出拉格朗日子。

3.0.5 三维簇的情形。

考虑一个带边界 M ∂M 的三维簇，并配备一组 $\mathcal{Q}$–光滑余定向曲面$\{S_i\}$。回顾光滑闭曲面 $\Upsilon_{\mathcal{Q}}$。

Lemma 3.3. 拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^\circ$ 的边界 $\partial\mathbb{L}^\circ$ 是光滑闭曲面 $\Upsilon_{\mathcal{Q}}$：

$$\partial\mathbb{L}^\circ = \Upsilon_{\mathcal{Q}}.$$

对边界的限制给出投影

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \mathrm{Loc}_1(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Loc}_1(\partial\Sigma). \\ \pi_2 &: \mathrm{Loc}_1(S_i) \longrightarrow \mathrm{Loc}_1(\partial S_i). \end{aligned} \tag{87}$$

回顾限制函子：

$$\mathrm{Res}_{\partial\mathbb{L}^\circ} : \mathcal{C}_{\mathbb{L}}^\circ \longrightarrow \prod_i \mathrm{Loc}_1(S_i) \times_{\mathrm{Loc}_1(\partial\Sigma)} \mathcal{C}_{\mathcal{T}}^\circ. \tag{88}$$

范畴 $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^\circ$ 等价于群胚 $\mathrm{Loc}_1(\Sigma)$。因此我们得到限制函子

$$\mathrm{Res}_{\partial\mathbb{L}^\circ} : \mathcal{C}_{\mathbb{L}}^\circ \longrightarrow \mathrm{Loc}_1(\Upsilon_\Sigma) = \prod_i \mathrm{Loc}_1(S_i) \times_{\mathrm{Loc}_1(\partial\Sigma)} \mathrm{Loc}_1(\Sigma). \tag{89}$$

定理 3.4。 限制函子（*89*）的像是拉格朗日子流形。

特别地，如果曲面 S_i 是圆盘，我们就得到一个拉格朗日子簇

$$\mathrm{Res}_{\partial\mathbb{L}^\circ}(\mathcal{C}_{\mathbb{L}}^\circ) \subset \mathrm{Loc}_1(\Sigma). \tag{90}$$

证明。 第一个断言由定理3.2得出。若曲面 S_i 是圆盘，则 $\mathrm{Loc}_1(S_i)$ 是点，而限制函子 (89) 简化为 $\mathrm{Res}_{\partial\mathbb{L}^\circ}$: $\mathcal{C}_{\mathbb{L}}^\circ \longrightarrow \mathrm{Loc}_1(\Sigma)$。 □

4 谱　　覆盖三维簇中的交替图和 $\mathcal{Q}$–图

设 M 是一个三维簇。设 $\mathcal{Q}$ 是 M 中的一个 $\mathcal{Q}$– 图。回顾拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}}$，以及通过从 $\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}}$ 中切除奇点而得到的其子集 $\mathbb{L}^{\circ}_{\times}$；这些奇点对应于 $\mathcal{Q}$ 的四重交点。回顾三维簇

$$M_{\times} := M - \{\text{quadruple intersection points}\}.$$

在第4节中，在对 $\mathcal{Q}$作出温和假设后，我们构造了一个带边界的光滑三维流形 $\Sigma_{\mathcal{Q}}$。三维簇 $\Sigma_{\mathcal{Q}}$ 与 $\mathbb{L}^{\circ}_{\times}$同胚，并带有一个有限投影

$$\pi_{\mathcal{Q}} : \Sigma_{\mathcal{Q}} \longrightarrow M_{\times}.$$

为此，我们在 M中为交替图 $\mathcal{H}$ 构造谱覆盖。该构造使用分配给交替图的之字形曲面。我们将此构造应用于通过消解 $\mathcal{Q}$的四重交点并切除所得 $\bullet$–四面体而得到的交替图。

4.0.1 交替图 $\mathcal{H}$的奇异曲面 $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$ 。

设 $\mathcal{H}$ 是三维簇 M中的一个交替图。其奇点是孤立的三重交点，而边 E则由 $\mathcal{H}$ 的奇异轨迹中去除三重交点后所得的连通分支给出。L

et 我们假设 that th^{e} $\bullet$–an d $\circ$–domai$^{\text{ns are po}}$ lyhed$_{\text{rons.}}$ Let us defi$^{\text{ne a s}}$ ingul$^{\text{ar sur}}$ face

$$\mathbb{S}_{\mathcal{H}} \subset X.$$

D 是一个彩色多面体。取一个内点 $c_D \in D$。以 c_D 为顶点，作 D 的 1–骨架的锥，得到奇异曲面 $\mathbb{S}_D \subset D$。

定义　4.1。奇异曲面 $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$ 是所有彩色多面体中的曲面 $\mathbb{S}_D$ 的并集　　*s:*

$$\mathbb{S}_{\mathcal{H}} := \cup_{D_\bullet} \mathbb{S}_{D_\bullet} \cup_{D_\circ} \mathbb{S}_{D_\circ}.$$

给定 $\mathcal{H}$的一条边 E，恰有两个彩色多面体$D_{E,\ \bullet}$ 和$D_{E,\ \circ}$ 共享这条边。它们的颜色不同。在这两个多面体$D_{E,\ *}$ 中，各有一个三角形$t_{E,\ *}$，其底边为 E，顶点位于$c_{D_{E,\ *}}$。将它们的并集所构成的矩形记为 r_E：

$$r_E = t_{E,\bullet} \cup t_{E,\circ}.$$

奇异曲面 $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$ 是二分带图的二维类比。
T点 c_D 和矩形 r_E 分别对应二分图的顶点和边　　*h.*

4.0.2 交替图 $\mathcal{H}$ 的余定向之字形曲面。

对于每个面 f 的彩色多面体 D，考虑锥 $C_{D,\ f}$ 其上方为 f 且顶点为 c_D。多面体曲面 $\gamma_{D,\ f}$是 $C_{D,\ f}$的边界。它是 ∂f上的锥。对 $\gamma_{D,\ f}$其余定向是将其角光滑化后所得曲面的余定向，见图 26。我们对该曲面进行余定向

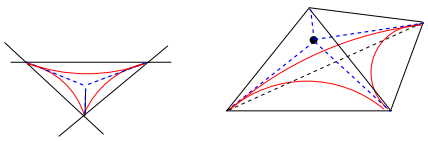


图 26：三角形/单形中的光滑化股线/曲面$\gamma_{D,\ i}$ （红色）。

$\gamma_{D,\ f}$ 在锥$C_{D,\ f}$ 的内部（若 D 是 $\circ$–多面体），在外部（若 D 是 $\bullet$–多面体）。

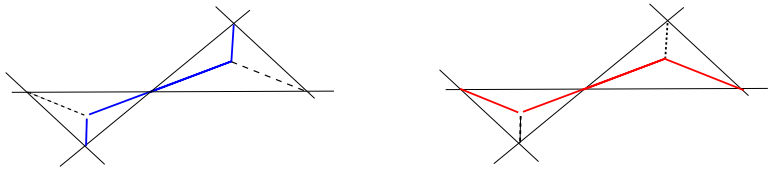


图 27：两条蓝色和红色的之字形弦共享一条公共边。

对于共享 E 的两个三角形$t_{E,*}$，其中 $\mathcal{H}$，且 $*=\circ,\bullet$，有两个包含该锥的曲面γ_{D_*,f_1}和γ_{D_*,f_2}。这里，f_1,f_2 是共享 E的$D_{E,*}$ 的两个面。两个曲面$\gamma_{D_\circ,f}$ 中的每一个都可以只与两个曲面$\gamma_{D_\bullet,f}$ 中的一个连接，从而形成一个余定向圆盘；二维类比见图 27。这样，每个圆盘都延伸为唯一的余定向多边形曲面 γ，我们称之为之字形曲面。

之字形曲面是二分图 Γ 的之字形曲线的类似物。

4.0.3 谱覆盖。

假设每个之字形曲面 γ 将 M 切分为两个区域。对于其中一个区域，记为 $\mathbb{D}_\gamma$，“区域内部”的边界余定向与 γ 的余定向一致。取该区域 $\mathbb{D}_\gamma$ 的一个副本 $\mathcal{D}_\gamma$。于是，所有区域 $\mathcal{D}_\gamma$ 的不交并以自然方式投影到 M，使得每个区域 D_γ 都映射到其在 M 中的副本 $\mathbb{D}_\gamma$：

$$\coprod_\gamma \mathcal{D}_\gamma \longrightarrow M.$$

我们将这些区 域 $\mathcal{D}_\gamma$ 和 $\mathcal{D}_{\gamma'}$ 粘合起来，条件是它们的投影共享一个矩形 r_E，从而得到谱空间 $\overline{\Sigma}_\mathcal{H}$：

$$\overline{\Sigma}_\mathcal{H} := \frac{\coprod_\gamma \mathcal{D}_\gamma}{\text{gluing domains } \mathcal{D}_\gamma \text{ and } \mathcal{D}_{\gamma'} \text{ along the rectangle } r_E}. \tag{91}$$

于是存在典范映射，将区域 $\mathcal{D}_\gamma$ 映射到区域 $\mathbb{D}_\gamma$:

$$\overline{\Sigma}_\mathcal{H} \longrightarrow M. \tag{92}$$

定义 4.2。若一个交替图的边界M 上存在特殊点 $\{s_i\}$，使得对于每个之字形曲面 γ，区域 $\mathbb{D}_\gamma$ 都是一个（半）球，且仅包含一个特殊点，则称该交替图为理想的。

若 $\dim M=2$，我们便恢复理想网络 [G]。考虑谱三维簇 谱三维簇

$$\Sigma_\mathcal{H} := \overline{\Sigma}_\mathcal{H} - \{\text{singular points}\}.$$

它推广了赋予二分带图 Σ_Γ 的谱曲面 Γ，其中 [GKe]。注意，谱曲面是光滑的，而空间 $\overline{\Sigma}_\mathcal{H}$ 是奇异的。映射 (92) 诱导出谱覆盖 映射

$$\pi_\mathcal{H} : \Sigma_\mathcal{H} \longrightarrow M_\times. \tag{93}$$

它推广了从 [G] 得到的谱覆盖构造。

定理 4.3。 映射 (*93*) 仅在奇异的 $\bullet$–边和 $\bullet$–顶点上发生分歧，其中 $\mathbb{S}_\mathcal{H}$。对于理想交替图 $\mathcal{H}$，谱三维簇 $\Sigma_\mathcal{H}$ 与拉格朗日子流形同胚 $\mathbb{L}^\circ_\mathcal{H}$。

证明。 1. 映射 π 显然在粘合点之外没有分歧，并且在开矩形 r°_E中的粘合点处也没有分歧。它在 $\circ$–顶点和 $\circ$–区域中的 $\circ$–边处也没有分歧。事实上，共享一个 $\mathbb{D}_\gamma$ 顶点或一条 $\circ$–边的区域恰好覆盖其附近的每个点一次，见图 28：在一个...

...附近

$\circ$–点处的区域 $\mathbb{D}_\gamma$ 是锥 $C_{D_\circ,\ f}$，它们覆盖多面体 D_∞

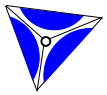


图 28：多面体 $D_\circ$ 是蓝色区域 $\mathbb{D}_\gamma \cap D_\circ$的并集

映射 π 在顶点 $\bullet$–和边 $\bullet$–处分歧。事实上，在顶点 $\bullet$–附近，区域 $\mathbb{D}_\gamma$是锥 $C_{D_\bullet,\ f}$的补集。因此，顶点 $\bullet$–处的分歧指数 $c_{D_\bullet}$ 等于 #(面的数量 $D_\bullet$) - 1。类似地，在 $D_\bullet$ 的顶点 v 上方的边 $\bullet$–处，分歧指数等于与 v相交的面的数量 $D_\bullet$ -1。

区域 $\mathcal{D}_\gamma$ 是光滑的。因此， $\Sigma_\mathcal{H}$ 的奇点都包含在粘合点的集合中。显然，在开矩形 r_E° 上粘合两个区域所得的点是光滑的。容易看出，连接点 c_D 与多面体顶点的线段开部分上的点D 也是光滑的。利用点 $\mathbb{D}_\gamma$ 附近区域 c_D 是锥 $C_{D,\ f}$ 或其补集这一描述进行简单的局部分析，可知点 c_D 也同样光滑。因此， $\Sigma_\mathcal{H}$ 只可能在对应于 $\mathcal{H}$三重交点的点处奇异。其余结论由引理 4.5得出。

2. 由于交替图 $\mathcal{H}$ 是理想的，余定向之字形曲面γ 的余法丛 $T^*_\gamma M$ 与穿孔区域 $\mathbb{D}^\circ_\gamma$同胚。我们通过将锥边界 $\partial C_{D,f}$ 推向相应的面 f，对之字形曲面 $\gamma \longrightarrow \gamma'$ 作同伦变形。于是， γ' 就是 $\mathcal{H}$所对应的曲面 H_i。将锥 $C_{D,f}$加回去，我们便恢复区域 $\mathbb{D}^\circ_\gamma$。但是，由于 $D = \cup_f C_{D,f}$（并集遍历 D的所有面 f），加上所有这些锥等价于粘合所有着色区域 D的零截面 T^*D。

□

由于映射 $\pi_\mathcal{H}$ 在余维 ≤ 2上是覆盖映射，一般纤维中的点数相同。这个数称为映射 $\pi_\mathcal{H}$的度数。它是图的不变量，称为秩。

4.0.4 赋予三维簇 M中交替图的拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^\circ_\mathcal{H}$ 的奇点

引理 4.4. 设 $\mathcal{H}$ 是三维簇 M中的一个交替图。那么拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^\circ_\mathcal{H}$ 是奇异的。其奇点 $t_\circ$ 是 $\mathcal{H}$的三重交点 t 处的零余向量 $0 \in T^*_t M$。 $p_\circ$ 周围的一个小球与裤子曲面的锥同胚。

证明。 给定一个三重交点 t，在 T^*X 中取一个小球面，使其包含 $0 \in T^*_t X$。它与 $\mathbb{L}^\circ_\mathcal{H}$ 的交集由两个三角形 $\tau_\bullet$ 和 $\tau_\circ$粘合而成，这两个三角形来自与覆盖 $\bullet$ 和 $\circ$ 且共享点 p的区域上的零截面的交集；另外，三个圆盘来自在 t相交的曲面的余法丛。我们按图 29所示粘合这些三角形和圆盘。每个圆盘都可以看作一个矩形，并将它的两条相对边粘合到两个三角形上，而另外两条边保持不动。由此得到一个带三个孔的球面。每个孔都是一个双边形，其边是矩形未粘合的边。

□

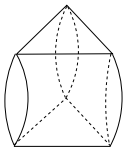


图29：对于三维簇中的交替图 $\mathcal{H}$ ，奇点附近的拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^\circ_\mathcal{H}$ 是一个以裤子曲面为底的锥。

引理 4.5。对应于三重交点的点 $t' \in \overline{\Sigma}_\mathcal{H}$ 是奇异的。 p' 周围的小球同胚于以一条裤子曲面为锥的空间。因此，$\overline{\Sigma}_\mathcal{H}$ 是一个带边界空间。

证明。 点 t' 的邻域同胚于拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{H}}$ 在点 $0 \in T^*_t M$附近的邻域。拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^{\circ}_{\mathcal{H}}$ 的奇点已在引理 4.4中描述。 □

4.0.5 与 $\mathcal{Q}$–图字相关的谱三维流形。

给定一个 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}$ 位于三维簇 M中，将其四重交点解消，得到一个交替图 $\mathcal{H}$。于是存在谱空间 $\Sigma_{\mathcal{H}}$ 和谱覆盖映射（93）。

挖去 $B_\bullet$ 中围绕 $\mathcal{Q}$里四重交点所产生的 $\mathcal{H}$ 中的 $\bullet$–四面体的小球，我们得到一个带边界三维簇 $M_{\times\circ}$。令 $p:$ $T^*M \longrightarrow M$ 为典范投影。设

$$\Sigma_{\mathcal{Q}} := \Sigma_{\mathcal{H}} \cap p^{-1}(M_\times).$$

我们称 $\Sigma_{\mathcal{Q}}$ 为赋予 $\mathcal{Q}$的谱三维簇。

引理 4.6。谱三维簇 $\Sigma_{\mathcal{Q}}$ 是一个带边界的光滑三维流形。

If $\mathcal{Q}$ 是一个理想图，谱三维簇 $\Sigma_{\mathcal{Q}}$ 与拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^{\circ}_{\times}$同胚:

$$\Sigma_{\mathcal{Q}} = \mathbb{L}^{\circ}_{\times}.$$

证明。 第一个断言由引理 1.20 得出。第二个断言由定理 4.3 得出。 □

若 $\mathcal{Q}$是理想的，则投影 $T^*M \to M$诱导出从谱三维簇到 M的投影:

$$\pi_{\mathcal{Q}} : \Sigma_{\mathcal{Q}} \longrightarrow M_\times. \tag{94}$$

这称为谱覆盖映射。

5 非交换特征簇中的簇拉格朗日子流形

5.1 从 $\mathcal{Q}$–圆盘图中得到的两类簇簇

5.1.1 曲面上交替图所产生的簇簇

给定这样的 $\mathcal{T}$，存在栈 $\mathcal{A}_{[\mathcal{T}]}$，其扎里斯基开子叠为:

$$\mathcal{A}^{\circ}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{A}_{[\mathcal{T}]}. \tag{95}$$

接下来，考虑子叠 $\mathcal{U}_{[\mathcal{T}]} \subset \mathcal{X}_{[\mathcal{T}]}$，其中的层在 $\mathcal{T}$ 的股线的锥法丛上具有平凡秩一微局部化。它包含一个由在混合区域上消失的层构成的子叠 $\mathcal{U}^{\circ}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}$。这些子叠都是非交换环面。

环面的集族 $\{\mathcal{A}^{\circ}_{\mathcal{T}}\}$ 和 $\{\mathcal{U}^{\circ}_{\mathcal{T}}\}$，对应于给定可容许变形类中的交替图，赋予了两种类型的非交换簇簇结构 [GKo]:

栈 $\mathcal{A}_{[\mathcal{T}]}$ 是一种非交换簇 $\mathrm{l}_{\text{簇}}$ $\mathcal{A}$–簇，配备 d with th$^{\text{e canonica}}$ l 2-form $\Omega_{\mathcal{A}}$.

栈 $\mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}$ 是一个带有辛形式 Ω 的非交换簇辛簇。

回忆一下，$\mathbf{Loc_1(\Sigma_T)}$ 是紧化谱曲面 $\mathbf{\Sigma_T}$ 上平坦线丛的群胚。其中有

$$\mathcal{U}^{\circ}_{\mathcal{T}} = \mathrm{Loc}_1(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{T}}). \tag{96}$$

设 $\mathbf{Loc}^{\mathrm{triv}}_1\mathbf{(\Sigma_T)}$ 为 $\mathbf{\Sigma_T}$ 上平坦线丛的群胚，这些线丛在原有穿孔点处被平凡化。则

$$\mathcal{A}^{\circ}_{\mathcal{T}} \cong \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv}}_1(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{T}}). \tag{97}$$

环面 $\mathcal{A}^{\circ}_{\mathcal{T}}$ 带有一个非交换 2-形式 $\Omega_{\mathcal{A}}$，见（130）。2-形式 $\Omega_{\mathcal{A}}$ 经由自然映射 $\mathcal{A}^{\circ}_{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{U}^{\circ}_{\mathcal{T}}$（该映射遗忘平凡化）下降到环面（96），并在那里给出一个辛形式 Ω。

5.1.2 来自三维簇中 $\mathcal{Q}$–圆盘图的簇簇

现在我们转而讨论三维簇 M 中的 $\mathcal{Q}$–图。

定义 5.1. 给定三维簇 M 中由余定向圆盘 $\mathcal{Q}$ 构成的 $\mathcal{Q}$–图，我们考虑：

1) 参数化其微局部支撑线丛的平凡化的栈 $\mathcal{A}_{[\mathcal{Q}]}$ $\mathcal{F} \in \mathcal{X}_{[\mathcal{Q}]}$ + 。2) 其子叠，由在混合区域上消失这一附加条件指定：

$$\mathcal{A}^{\circ}_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{A}_{[\mathcal{Q}]}. \tag{98}$$

像 嵌入（98）在目标中是扎里斯基开的。遗忘平凡化后，我们得到投影 s

$$\mathcal{A}^{\circ}_{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathcal{X}^{\circ}_{\mathcal{Q}}, \quad \mathcal{A}_{[\mathcal{Q}]} \longrightarrow \mathcal{X}_{[\mathcal{Q}]}. \tag{99}$$

它们是由群 $\mathcal{R} = R^{\times\{}$ 对 $\mathcal{Q}\}$ 曲面的作用所得的商，该作用通过重标度平凡化实现。现在假设余定向圆盘 $\mathcal{Q}$ 的 $\mathcal{Q}$–图与边界 ∂M 横截相交，交替图由环 $\mathcal{T}$ 构成。于是限制函子给出函子

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res} : \mathcal{X}_{[\mathcal{Q}]} \longrightarrow \mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}. \\ &\mathrm{Res} : \mathcal{X}^{\circ}_{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathcal{U}^{\circ}_{\mathcal{T}}. \end{aligned} \tag{100}$$

事实上，由于圆盘上的任意局部系统都是平凡的，限制函子的像是一个层，其在任意之字形环的穿孔余法丛上的微局部化都是平凡的。因此它属于 $\mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}$。我们设

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{[\mathcal{Q}]} := \mathrm{Im}\ \mathrm{Res}(\mathcal{X}_{[\mathcal{Q}]}) \subset \mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}. \\ &\mathcal{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}} := \mathrm{Im}\ \mathrm{Res}(\mathcal{X}^{\circ}_{\mathcal{Q}}) \subset \mathcal{U}^{\circ}_{\mathcal{T}} \overset{(96)}{=} \mathrm{Loc}_1(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{T}}). \end{aligned} \tag{101}$$

对于 $\mathcal{A}$–叠，有限制函子：

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{[\mathcal{Q}]} := \mathrm{Im}\ \mathrm{Res}(\mathcal{A}_{[\mathcal{Q}]}) \subset \mathcal{A}_{[\mathcal{T}]}. \\ &\mathcal{L}^{\mathcal{A},\circ}_{\mathcal{Q}} := \mathrm{Im}\ \mathrm{Res}(\mathcal{A}^{\circ}_{\mathcal{Q}}) \subset \mathcal{A}^{\circ}_{\mathcal{T}} = \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv}}_1(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{T}}). \end{aligned} \tag{102}$$

5.2 $\mathcal{A}$–圆盘图的坐标

我们从任意 $\mathcal{Q}$–图的奇点图 $\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$ 的定义开始。

定义 5.2. $\mathcal{Q}$–曲面图的交点构成奇点图 $\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$。其顶点是四重交点，边是双重交点的线段。

例如，立方体 C 中基本 $\mathcal{Q}$–图的奇点图由十二条边组成，这些边连接中心与立方体各棱的中点。我们将这些边定向为从中心向外。奇点图的边与立方体的棱相对应。因此，我们可以认为，基本 $\mathcal{Q}$–图的 $\mathcal{A}$–坐标赋予立方体（无向）的边。于是

$$\{\textit{The edges of the singularity graph of the basic diagram}\} \overset{1:1}{\Longleftrightarrow} \{\textit{The cube edges}\}.$$

任意四重交点 p 一个 $\mathcal{Q}$–图的局部与基本 $\mathcal{Q}$–图微分同胚。因此有 6 条奇异线穿过点 p，提供了 12 条共享 p的边。对于每一对 $(p,\ H)$，其中 $p \in H$ 是曲面 H 上的一个四重交点 $\mathcal{Q}$–，图中有两个三角锥 $C_{\bullet}$，$C_{\circ}$。其顶点为 p，见图30。它们由在 p处相交的其他三个曲面给出。在图8中，这些锥是立方体上两个三角形的锥，这两个三角形包含对角线（该对角线垂直于 H）。

我们为奇点图 $\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$ 的定向边 E 指定变量 $\mathcal{A}$–，$a_E \in R^{\times}$，并满足以下关系式。设 $\overline{E}$ 为将 E 的定向反转后得到的定向边。那么

$$a_{\overline{E}} = a_E^{-1}. \tag{103}$$

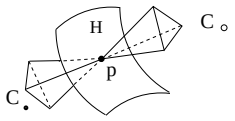


图 30：两个三角锥 $C_\circ$、$C_\bullet$，其顶点位于曲面 H 上的四重点 p 处 .

我们引入关于变量 $\mathcal{A}-$ $\mathcal{R}_\mathcal{Q}$ 的方程组。设 a、b、c 为锥 C_* 的边上的变量 $\mathcal{A}-$，这些边从 p 向外定向，并从点 p 看去按逆时针顺序排列。对于每一对 (H,p)，其中 p 是图的曲面 H 上的四重点，我们在 H 上有一个带交叉点 p 的三重交叉图 $H\cap\mathcal{Q}$。设 z_1、z_2、z_3、z_4、z_5、$z_6\in R^\times$ 为奇点图 $\mathcal{S}_\mathcal{Q}$ 中边上的变量 $\mathcal{A}-$，这些边位于 H 内，共享顶点 p，且从 p 向外定向，见图31。

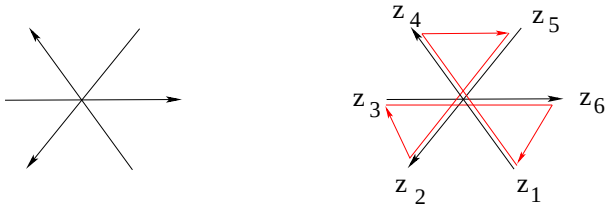


图31：三重交叉图及关系式 $z_3z_6\cdot z_1z_4\cdot z_5z_2=-1$。

定义5.3。 设 $\mathcal{Q}$ 是定向三维簇中的 $\mathcal{Q}-$余定向圆盘图。考虑以下关于 $\mathcal{R}_\mathcal{Q}$ 定向边 $\mathcal{A}-$上的变量的方程 E，其中这些定向边属于奇点图 $\mathcal{S}_\mathcal{Q}$，并满足（*103*）：

对于每一对 $(H,\,p)$，其中 $p\in H$ 是 $\mathcal{Q}$ 的四重交点，我们有：
1）对于两个锥 $C_\bullet$ 和 $C_\circ$ 中的每一个，其单项式关系为

$$abc=-1. \tag{104}$$

2)

$$z_1z_4+(z_5z_2)^{-1}=1,\qquad z_5z_2+(z_3z_6)^{-1}=1,\qquad z_3z_6+(z_1z_4)^{-1}=1. \tag{105}$$

$$z_3z_6\cdot z_1z_4\cdot z_5z_2=-1. \tag{106}$$

包含四重交点的四个曲面 H_i 分别给出三个方程（105）。因此，在 p处我们得到十二个方程。根据命题2.9，单项式方程（106）可由方程（104）推出，而105处的十二个方程（ p 是等价的。

定理 5.4. 设 $\mathcal{Q}$ 是定向三维簇 M 中的一幅余定向圆盘 $\mathcal{Q}-$图，它与边界 ∂M 的交由交替图 $\mathcal{T}$ 描述。那么：

1。 $\mathcal{L}^\mathcal{A}_{[\mathcal{Q}]}$ 是簇 $\mathcal{A}-$簇簇 $\mathcal{A}_{[\mathcal{T}]}$ 中的一个非交换簇拉格朗日子流形。

2. 拉格朗日子流形 $\mathcal{L}^\mathcal{A}_{[\mathcal{Q}]}$ 的簇图册由拉格朗日子流形 $\mathcal{L}^{\mathcal{A},\ \circ}_{\mathcal{Q}}\subset \mathrm{Loc}_1^{\mathrm{triv}}(\mathbf{\Sigma}_\mathcal{T})$ 给出，其中图 $\mathcal{Q}$ 属于同一个可容许变形类。它们各自由方程组 $\mathcal{R}_\mathcal{Q}$描述。

3. 同样， $\mathcal{L}_{[\mathcal{Q}]}$ 是辛栈 $\mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}$ 中的一个非交换簇拉格朗日子流形。

4. 在交换情形下， $\mathcal{L}_{[\mathcal{Q}]}$ 是 K_2-簇辛栈 $\mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}$中的一个 K_2-拉格朗日子流形。

注。子叠 $\mathcal{L}_{[\mathcal{Q}]}$ 和 $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{[\mathcal{Q}]}$ 可以针对任意 $\mathcal{Q}$–图定义。它们带有 $\mathcal{A}$–坐标，定义如下。然而，如果图中的曲面不是圆盘，它们就不是拉格朗日子流形。

证明。 （1）由定理 3.4得出。

（2）给定一个 $\mathcal{A}^{\circ}_{\mathcal{Q}}$的对象 $\mathcal{F}$，我们在奇点图 $\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$的定向边 E 上定义元素 $a_E \in R^{\times}$，称为 $\mathcal{A}$–坐标。任意一条边 E 恰好包含于两个曲面中：

$$E \subset H_1 \cap H_2.$$

横截圆盘 π_E 于 E 包含两条共定向直线 $\gamma_i := \pi_E \cap H_i$。边$E$ 和三维簇 M 的定向为圆盘 π_E提供了一个定向。根据 π_E的定向，这些直线按 h_1、h_2排序。考虑唯一的 $\bullet$–扇区 $b_{h_1,\, h_2} \subset \pi_E$，以及一条路径 γ，其将 h_1 的余法向量沿该扇区内的路径传输至 h_2 的余法向量。记 $\gamma(s_{H_1})$ 为截面 s_{H_1}沿路径 γ 的平行变换。我们通过写出以下式子来定义元素 $a_E \in R^{\times}$

$$\gamma(s_{H_1}) = a_E s_{H_2}.$$

2-形式 Ω 在 $\mathcal{L}^{\mathcal{A},\,\mathcal{Q}\,\circ}$ 上消失这一断言，归结为 [GKo第 6]节中的计算。子空间 $\mathcal{L}^{\circ}_{\mathcal{Q}} \subset \mathrm{Loc}^{\mathrm{tr}}_1(\Gamma)$ $\overset{(96)}{=}$ $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$根据（1）是拉格朗日子流形。因此 $\mathcal{L}^{\mathcal{A},\,\mathcal{Q}\,\circ}$ 是极大各向同性的。所以对于每个 $\mathfrak{q}$

四重交点 p 有 8 个单项式方程（63），以及方程（64）

引理 5.5。 方程（*63*）+（*64*）等价于方程（*36*）+（*35*）。

证明。给定图 Γ_{cube}的一条边 E，有两条之字形路径 γ_{E-} 和 γ_{E+} 包含 E的中点e。因此，在平坦线丛 L 的纤维 L_e 上有两个平凡化 s_+ 和 s_-，其中 L 是 e上的平坦线丛。于是$s_+ = a_{\mathrm{E}} s_-$，其中 $a_{\mathrm{E}} \in R^{\times}$.。 a_{E} 是赋给边 E的 $\mathcal{A}$–变量。结论由此得出。 □

（3）投影 $\mathcal{A}_{[\mathcal{Q}]} \longrightarrow \mathcal{U}_{[\mathcal{Q}]}$ 是对曲面 $\mathcal{Q}\}$ 上的平凡化进行重标度所得的群 $R^{\times\,\{}$作用的商。于是（3）由（1）和（2）推出。

(4) 这显然可由方程的一般形式看出 $x + y = 1$ 方程（105）。另见引理 1.22。 □

5.3 $\mathcal{Q}$–来自三维簇理想三角剖分的圆盘图

在第 5.3 节中，我们考虑由单形粘合而成的三维簇 M，它们可能带有边界。单形的某些面可能不属于 M。例如，取一个紧集三维簇，并移除有限个非空的点集，称这些点为穿孔。带尖点的双曲三维流形属于这一类。

给定 M 边界上的一组特殊点， M 的理想三角剖分 τ 是一种顶点位于这些点的三角剖分。给定整数 $m \geq 2$ 以及三维簇M 的理想三角剖分 τ，我们定义一个理想 $\mathcal{Q}$– 图 $\mathcal{Q}_{\tau,\, m}$于 M 中。它给出一个奇异曲面

$$\mathbb{S}_{\tau,m} \subset M.$$

第4.0.5 节中的构造为 $\mathcal{Q}$– 图 $\mathcal{Q}_{\tau,\, m}$ 赋予以下对象： m： 1 个谱覆盖：

$$\pi : \Sigma^{\times}_{\tau,m} \longrightarrow M^{\times}, \tag{107}$$

以及其在奇点 π 上的完备化：$\Sigma_{\tau,\, m} \longrightarrow M$。

5.3.1 超单纯形分解。

给定一对整数 p、$q \geq 0$，超单纯形 $\Delta^{p,\,q}$ 是一个维数为 $p+q+1$ 的多面体，定义为单位立方体的整超平面截面：

$$\Delta^{p,q} := \{x \in \mathbb{R}^{p+q+2} \;\mid\; x_0 + \ldots + x_{p+q+1} = p+1,\;\; 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

因此 $\Delta^{0,\,0}$ 是一条线段；$\Delta^{0,\,1}$ 和 $\Delta^{1,\,0}$ 是三角形；$\Delta^{2,\,0}$ 和 $\Delta^{0,\,2}$ 是四面体，而 $\Delta^{1,\,1}$ 是一个八面体 .

超单纯形 $\Delta^{p,\,q}$ 的边界是 $p+q+2$ 个 $\Delta^{p-1,\,q}$ 类型的超单纯形和$p+q+2$ 个 $\Delta^{p,\,q-1}$类型的超单纯形的并集。将一个坐标 x_i 设为 0 或 1，即可得到该边界。[12]

*Exa*形。1. 单形 $\Delta^{n,\,0}$ 的边界由 $n+1$ 个 $\Delta^{n-1,\,0}$类型的单形组成。

2. 八面体 $\Delta^{1,\,1}$ 的边界由四个 $\Delta^{1,\,0}$–三角形组成，称为 ∘–三角形；还有四个 $\Delta^{0,\,1}$–三角形，称为 •–三角形。每个边界三角形的边都与不同类型三角形的边重合。对于图（35）中的八面体，•–三角形位于四面体的面上。

给定整数 $d \geq 1$、$m \geq 2$，取 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中正锥的超平面截面：

$$\mathrm{T}_d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \;\mid\; x_0 + \ldots + x_d = m,\;\; x_i \geq 0\}. \tag{108}$$

单形 T_d 在（108）中的超单纯形分解 $\mathcal{H}_{\mathrm{T}_d,\,m}$由与其中一个面平行的 $d+1$族 $m-1$超平面给出，这些超平面由方程 $x_i = 1$、...、$m-1$定义。它将单形 $\mathrm{T}_{d,\,m}$ 分割为 Δ^{p}型的超单纯形，^{q} 其中 $p+q = d-1$。

例。1. 如果 $d = 2$，我们得到一个将三角形分解为朝上和朝下三角形的 m–分解。2. $d = 3$ 情形。我们考虑四面体

$$\mathrm{T} := \{x \in \mathbb{R}^4 \;\mid\; x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = m,\;\; x_i \geq 0\}, \qquad m \geq 2. \tag{109}$$

该超单纯形分解$\mathcal{H}_{\mathrm{T},\,m}$ 将四面体 T 分割为 $\Delta^{2,\,0}$–个四面体（朝上）、八面体 $\Delta^{1,\,1}$，以及 $\Delta^{0,\,2}$–个四面体（朝下），见图32。

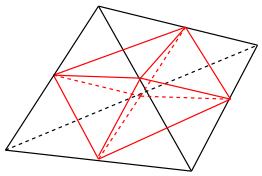


图32：将一个四面体的超单纯形分解$\mathcal{H}_{\mathrm{T},\,2}$ 为四个 $\Delta^{2,\,0}$–四面体和一个八面体。

定义5.6. 给定一个整数 $m \geq 2$ 和流形 X的一个理想三角剖分 τ，X 的超单纯形分解$\mathcal{H}_{\tau,\,m}$ 是 τ中每个单形 T 的超单纯形分解$\mathcal{H}_{\mathrm{T},\,m}$ 的并：

$$X = \mathcal{H}_{\tau,m} = \cup_{\mathrm{T}\in\tau}\mathcal{H}_{\mathrm{T},m}. \tag{110}$$

5.3.2 奇异超曲面$\mathbb{S}_{\tau,\,m} \subset X$。

我们归纳地定义一个奇异多面体超曲面

$$\mathbb{S}^{p,q} \subset \Delta^{p,q}.$$

点 $\mathbb{S}^{0,\,0}$ 是线段 $\Delta^{0,\,0}$的中心。

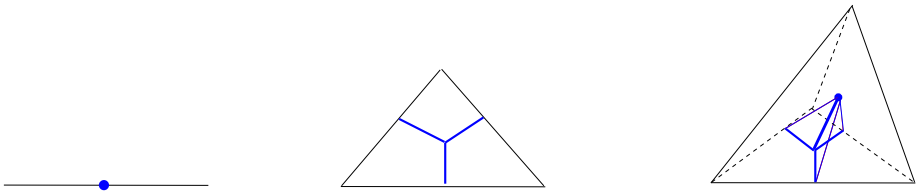


图 33：点 $\mathbb{S}^{0,\,0}$。奇异图 $\mathbb{S}^{1,\,0}$。奇异曲面 $\mathbb{S}^{2,\,0}$的四分之一。

定义 5.7。超曲面 $\mathbb{S}^{p,\,q}$ 是边界超单纯形中超曲面 $\mathbb{S}^{p-1,\,q}$ 和 $\mathbb{S}^{p,\,q-1}$ 以 $\Delta^{p,\,q}$的中心为中心的锥，参见图 *33*、*34*。

定义 5。 8. 给定整数 $m \geq 2$ 和 X的理想三角剖分 τ，奇异超曲面 *ce*

$$\mathbb{S}_{\tau,m} \subset X$$

是若干奇异超曲面的并 奇异超曲面 $\mathbb{S}^{p,\,q}$ 位于超单纯形分解（*110*）的超单纯形中 .

奇异超曲面 $\mathbb{S}^{p,\,q}$ 彼此吻合，因为它们在超单纯形分解的每个面上诱导出相同的奇异超曲面。

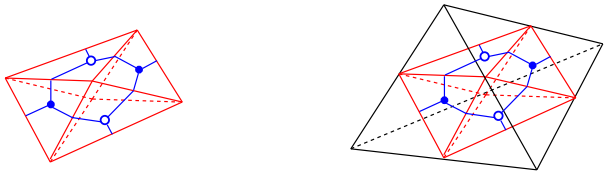


图 34：八面体中的曲面 $\mathbb{S}^{1,\,1}$ 是其边界上二分图的锥。

当 X 是一个曲面 S时，曲面图 $\mathbb{S}_{\tau,\,m}$ 是二分图 $\Gamma_m \subset S$，它由一个整数$m \geq 2$ 以及 [G] 中曲面的三角剖分确定。

*Th*奇异超曲面 $\mathbb{S}_{\tau,\,m} \subset X$ 是二分图的高维类似物 .

让我们详细讨论 X 为三维簇 M的情形。

5.3.3 三维簇的超单纯形分解。

三维簇 M 的超单纯形分解 $\mathcal{H}_{\tau,\,m}$ 由八面体 O_p、四面体$t_\circ$（它们是 $\Delta^{2,\,0}$–超单纯形）以及四面体 $t_\bullet$（它们是 $\Delta^{0,\,2}$–超单纯形）组成：

$$M = \cup_p \mathrm{O}_p \cup_\bullet t_\bullet \cup_\circ t_\circ. \tag{111}$$

四面体与八面体粘合在一起。三角形的颜色保持一致：四面体的一个 $\bullet$–三角形与八面体的一个 $\bullet$–三角形粘合， $\circ$–三角形也同样如此。八面体 O_p 对应于 $\mathcal{Q}$–图$\mathcal{Q}_{\mathrm{T},\,m}$的四重交点 p 。

5.3.4 奇异曲面 $\mathbb{S}_{\tau,\,m} \subset M$。

奇异曲面 $\mathbb{S}^{2,\,0}$ / $\mathbb{S}^{0,\,2}$ 通过将四面体的中心与其各个面上的图连接起来得到，见图 33。曲面奇异轨迹的边 $\mathbb{S}^{0,\,2}$ / $\mathbb{S}^{2,\,0}$ 称为奇异 $\bullet$–边 / $\circ$–边。四面体的中心 $\mathbb{S}^{0,\,2}$ / $\mathbb{S}^{2,\,0}$ 称为奇异 $\bullet$–顶点 / $\circ$–顶点。

[12]注意， $\Delta^{-1,\,q}$ 和 $\Delta^{p,\,-1}$ 都是空集。

曲面 $\mathbb{S}^{1,\ 1} \subset \Delta^{1,\ 1}$ 是八面体边界上的二分图的锥。其奇异轨迹由连接中心与边界三角形 $\bullet$–顶点的四条 $\bullet$–边以及四条类似的 $\circ$–边组成。给定 M的三角剖分 τ，奇异曲面 $\mathbb{S}_{\tau,\ m} \subset M$ 是超单纯形分解 $\mathcal{H}_{\tau,\ m}$中曲面 $\mathbb{S}^{2,\ 0}, \mathbb{S}^{0,\ 2}, \mathbb{S}^{1,\ 1}$ 的并集。其奇异轨迹由 $\bullet$–边和 $\circ$–边组成。奇异边的端点是超单纯形分解中各超单纯形的中心。

5.3.5 奇异曲面 $\mathbb{S}_{\tau,\ m} \subset M$ 的之字形曲面。

每个奇异曲面 $\mathbb{S}^{p,\ q} \subset \Delta^{p,\ q}, p+q=2$ 都带有四个余定向之字形曲面。它们的余定向与 $\Delta^{p,\ q}$ 边界上诱导的双色图中之字形曲线的余定向一致。具体而言，它们如下所示。

$\mathbb{S}^{2,0}$ / $\mathbb{S}^{0,2}$ 的之字形曲面同胚于四面体 $\Delta^{2,0}$ /$_{\Delta^{0,2}}$ 各顶点周围的半球面。它们同胚于包围该顶点的 $\mathbb{S}^{2,0}$ / $\mathbb{S}^{0,2}$ 的一部分，并且从 $\mathbb{S}^{2,0}$ / $\mathbb{S}^{0,2}$ 的中心向外定向或朝向中心余定向。 $\mathbb{S}^{1,1}$ 的之字形曲面描述如下。在图 35 的八面体 $\Delta^{1,1}$ 中，取绿色立方体 C_p 中的四个锥形曲面；这些曲面由以 p 为中心、以图 19 中余定向的之字形六边形 [13] γ_1、...、 γ_4 为底的锥给出，然后将它们扩展到该八面体。

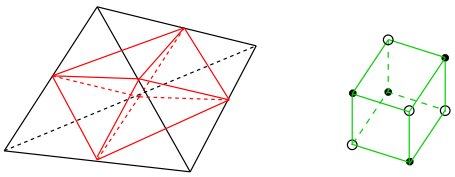


图35：绿色立方体内接于红色八面体。其 $\bullet$–顶点是八面体 $\bullet$–三角形的中心——即位于黑色四面体各面上的那些三角形。 $\circ$–顶点是八面体 $\circ$–三角形的中心。

将超单纯形中的之字形曲面拼接起来，我们得到超单纯形分解$\mathcal{H}_{\tau,\ m}$ 的之字形曲面 M。另一方面，考虑 $\mathcal{Q}$–图$\mathcal{Q}_{\tau,\ m}$。

5.3.6 三维簇 M的理想三角剖分所对应的曲面图 $\mathcal{Q}$–。

定义5.9。 该 $\mathcal{Q}$–图$\mathcal{Q}_{\mathrm{T},\ m}$ 由以下 $4m$四面体（*109*）中的余定向平面给出：

$$x_i = k + \frac{1}{2}, \quad i \in \{0,1,2,3\}, \quad k = 0, ..., m-1. \tag{112}$$

每个平面都平行于其中一个面，并朝向该面余定向。四重交点q 是八面体 $\Delta^{1,\ 1}$的中心。它们具有正的半整数坐标，且坐标之和为 m:

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3); \quad q_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = m.$$

$\mathcal{Q}$–图$\mathcal{Q}_{\mathrm{T},\ m}$ 在每个面上切出一个标准三重交叉图。因此，我们可以将它们拼接起来，得到理想三角剖分 τ 中 M各四面体 T 对应的 $\mathcal{Q}$–图

$$\mathcal{Q}_{\tau,m} := \cup_{\mathrm{T} \in \tau} \mathcal{Q}_{\mathrm{T},m} \subset M. \tag{113}$$

它产生了奇异曲面$\mathbb{S}^{\mathcal{Q}}_{\tau,\ m}$。

[13]朝向立方体中不在之字形曲线上的 $\bullet$ 顶点进行余定向。

5.3.7 三维簇中的两类奇异曲面重合。

给定 M的三角剖分 τ和一个整数 $m \geq 2$， M中有两族奇异曲面：

1. 赋予超单纯形分解 $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}_{\tau}$的奇异曲面$m$。 2. 赋予 m–图$\mathcal{H}_{\tau}$的奇异曲面m， 见（113）。

命题 5.10。奇异曲面 $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}_{\tau,\,m}$ 与$\mathbb{S}^{\mathcal{Q}}_{\tau,\,m}$ 重合，并与它们的之字形曲面相匹配。因此， M 的相关两个谱覆盖重合。

证明。只需对一个四面体 T 证明这一点。我们断言， $\bullet$ / $\circ$–区域分别与超单纯形分解中 T 的 $\Delta^{2,\,0}$ / $\Delta^{0,\,2}$ 单形相对应。图 36 显示，奇异曲面 $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}_{\mathrm{T},\,m}$ 和 $\mathbb{S}^{\mathcal{Q}}_{\mathrm{T},\,m}$ 与超单纯形分解的八面体 $\Delta^{1,\,1}$ 的交点完全重合。事实上，$\mathbb{S}^{\mathcal{Q}}_{\mathrm{T},\,m} \cap \Delta^{1,\,1}$ 是以八个蓝色三价图为锥、且每个图中有一个顶点位于八个绿色三角形中的锥。这些绿色三角形是八个有色的——即 $\bullet$ 或 $\circ$ ——以四重交点 q 为中心的三角锥与 $\Delta^{1,\,1}$边界的交点。因此，根据定义，$\mathbb{S}^{\mathcal{H}}_{\mathrm{T},\,m} \cap \Delta^{1,\,1}$ 是以相同蓝色图为锥的锥。于是得到

$$\mathbb{S}^{\mathcal{Q}}_{\mathrm{T},m} \cap \Delta^{1,1} = \mathbb{S}^{\mathcal{H}}_{\mathrm{T},m} \cap \Delta^{1,1}.$$

奇异曲面与$\mathbb{S}^{\mathcal{H}}_{\mathrm{T},\,m}$ 和 $\mathbb{S}^{\mathcal{Q}}{}_{\mathrm{T}\,m}$ 的超单纯形分解中的每个四面体 $\Delta^{2,\,0}$ $/_{\Delta^{0,\,2}}$ 的交点也完全重合，这一点从图36 中同样可以清楚看出。

根据定义，这一对应与相应的之字形曲面相匹配。 □

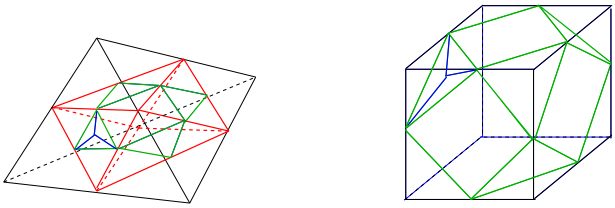


图 36：左图：四面体的 $m = 2$ 超单纯形分解中的红色八面体。中心有四重交点的 $\mathcal{Q}$–图在八面体上截出八个绿色三角形。右图： $\mathcal{Q}$–图与一个立方体的交点包含八个绿色三角形，与左图中的绿色三角形相匹配。绿色三角形内部的区域已着色。

$\mathbb{S}_{\mathrm{T},\,m}$ 的每个之字形曲面都围成一个球/半球，其中包含一个穿孔 s ，该穿孔属于 ∂M，并且方向从穿孔向外。因此，这些之字形曲面构成一个理想的 $\mathcal{Q}$–图。谱空间$\Sigma_{\mathrm{T},\,m}$ 通过粘合这些区域的副本得到。存在一个谱映射

$$\pi : \Sigma_{\mathrm{T},m} \longrightarrow M. \tag{114}$$

推论 5.11. 谱空间 $\Sigma_{\tau,m}$ 与和 $\mathcal{Q}_{\tau,m}$相关联的拉格朗日子流形 $\mathbb{L}^{\circ}_{\tau,m}$ 同胚。(*114*) 中的谱映射 π 是一个 m: 1 覆盖映射，在奇异的 $\mathbb{S}_{\tau,m}$的边 $\bullet$–和顶点 $\bullet$–处分歧。在 $\mathbb{S}_{\tau,m}$的奇异顶点 $\bullet$–处，其分歧度为 3；在奇异的边 $\bullet$–处，其分歧度为 2。

证明。这是定理4.3的一个特例。靠近穿孔$_{,i}$ 处一点的区域数为 m。因此，映射 π 的度数也为 m。

□

5.4 非交换特征簇中的簇拉格朗日子流形 s

5.4.1 各种类型曲面上的特征簇。

栈 $\mathcal{U}_m(S$参数化了曲面上 m维 R–向量空间的局部系统 S，这些局部系统在穿孔周围具有幺幂单值，并且在每个穿孔附近都有一个不变旗，[FG1], [GKo]。

栈 $\mathcal{A}_m(S)$ 参数化了 S 上的扭曲 $m-$ 维 $R-$ 局部系统，并在每个穿孔附近带有一个不变的装饰旗。忘掉装饰后，我们得到一个满射映射 $p:\ \mathcal{A}_m(S) \to \longrightarrow \mathcal{U}_m(S)$。

为将这些栈纳入一般框架，我们回顾一类二分带图 Γ，位于 S上，称为 GL_m–图 [G]。其 $\mathcal{T}$之字形环的集合 Γ 具有以下特征，可用来刻画这类图：

i）对于 s 上的每个穿孔 S，该集合中恰有 m 个之字形环 $\mathcal{T}$围绕着 s。ii）该集合 $\mathcal{T}$中的每个之字形环只围绕一个穿孔。iii）谱覆盖的秩等于 m，详情见[G] 。

引理 5.12。成立：

$$\mathcal{U}_m(S) = \mathcal{U}_{[\mathcal{T}]}, \quad \mathcal{A}_m(S) = \mathcal{A}_{[\mathcal{T}]}.$$

引理 5.12 阐释了标架在定义栈 $\mathcal{U}_m(S)$ 和 $\mathcal{A}_m(S)$ 中的作用。

证明。设 S 为一条曲面，其穿孔构成有限集 P。记 $\mathcal{C}_m$ 为在每个穿孔附近取一条同心圆所得到的集合。由定义可得典范等价

$$\mathcal{U}_{\mathcal{C}_m} = \mathcal{U}_m(S), \quad \mathcal{A}_{\mathcal{C}_m} = \mathcal{A}_m(S).$$

可以将 $\mathcal{C}_m$ 变形为一组 GL_m–图在 S [G]上的之字形环。因此，这些栈在容许变形下的不变性证明了该结论。 □

栈 $\mathcal{U}_m(S)$ 带有一个非交换簇辛结构，该结构在 S的映射类群 Mod_S 作用下保持不变。其簇环面包括赋予 S 上 GL_m- 图的那些簇环面。

5.4.2 曲面上非交换局部系统模空间中的簇拉格朗日子流形。

闭曲面 S 上的 m–维局部系统所构成的栈 $\mathrm{Loc}_m(S)$ 是辛的。边界为 S 的三维簇 M给出一个拉格朗日子流形，它由可延拓到 M的 S 上的局部系统构成：

$$\mathrm{Loc}_m(M) \subset \mathrm{Loc}_m(S).$$

将其推广到带 puncture 的曲面如下。设 S 是一个带穿孔的曲面，S' 是将 S紧化后的曲面，而 M 是一个三维簇，其边界为 S'，并有一组特殊边界点 P，与 S上的穿孔相对应。设 $\mathcal{L}_m(M, \mathrm{P})$ 是 S上非交换的 m–维带框架局部系统的栈，其穿孔周围具有幺幂单值，并且可以延拓到 M：

$$\mathcal{L}_m(M, \mathrm{P}) \subset \mathcal{U}_m(S). \tag{115}$$

定理 5.13。子叠（*115*）是一个非交换簇拉格朗日子流形。M的每个理想三角剖分 $\mathcal{T}$都给出一个方程组 $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{T}},\ m}$，其变量为 $\{a_E\}$，描述了 $\mathcal{L}_m(M, \mathrm{P})$的一个开子集。

在交换情形下，我们重新得到 [DGG] 的主要结果。

例如，设 D 是一个球，且 $S = S^2 - \{p_1, ..., p_n\}$。设 $\mathcal{F}_m$ 是m–维向量空间中的旗簇。那么

$$\mathcal{L}_m(\mathrm{D}, \mathrm{P}) = (\underbrace{\mathcal{F}_m \times \ldots \times \mathcal{F}_m}_{n \text{ copies}})/\mathrm{GL_m}.$$

事实上，球上的任何局部系统都是平凡的。因此，标架等同于点上纤维中的 n 旗标：将旗标平行传输至该点后，再对 $\mathrm{GL}_m(R)$ 的作用取商。

注意，$\mathrm{Loc}_m(\mathrm{D})$ 只是一个点。因此，标架至关重要。

5.4.3 拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_m$(M,P) 的簇描述。

我们将引理5.12 与其三维类比结合起来。具体而言，我们将集合 $\mathcal{C}_m$ 中的同心圆扩展为 M中的同心半球，从而得到一组余定向曲面 $\mathcal{S}_m \subset M$。我们得到拉格朗日子流形

$$\mathcal{U}_{[\mathcal{S}_m]} = \mathcal{L}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{L}_m(M, \mathrm{P}).$$

现在，定理 5.13 由定理5.4 及以下关键结果推出。

定理 5.14. 可以将 $\mathcal{S}_m$ 变形为 M 中的一个 $\mathcal{Q}$– 图 $\mathcal{Q}$，使得 $\partial\mathcal{Q}$ 是 S 上某个 GL_m– 图 Γ 的之字形环集。

证明。根据构造，图中的每个曲面$\mathcal{Q}_{\tau,\ m}$ 内部恰好包含 S 的一个穿孔 p，并且从点 p 余定向向外。因此，可以将曲面适当地朝其所包含的唯一穿孔 p 变形，从而得到一个新的曲面图 $\mathcal{Q}'_{\tau,\ m}$ 使得每个穿孔恰好被 m 个曲面包围。该变形不会改变相关的模空间。因此，我们得到叠的等价

$$\mathcal{L}_{\mathcal{Q}_{\tau,m}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_m(M, \mathrm{P}). \tag{116}$$

它与 $\mathcal{U}_{m,\ S}$ 中的簇辛环面 $\mathrm{Loc}_1(\Sigma_{\tau,\ m})$ 的交集包含一个由方程组 $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}_{\tau,\ m}}$ 定义的子环面。它参数化了在与图 $\Gamma_{\tau,\ m}$ 相关的交替图的混合区域上消失的层。

□

定理 5.15. 设 M 是一个带边界的三维簇 S'。设 Γ 是 S 上的一个 GL_m–二分图。则存在一个 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}_\Gamma$，位于 M 中，并在边界上诱导出 Γ 的之字形曲线集。

证明。取 M 的一个理想三角剖分 τ。它产生 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}_{\tau}$、$_m$，见第 5.3.6 节。理想三角剖分 τ 在 S 上诱导出一个理想三角剖分 τ_S。令 Γ_{τ}、$_m$ 为 S 上标准的 GL_m–二分图，并将其嵌入该三角剖分 [G] 中。图 $\mathcal{Q}_{\tau}$、$_m$ 在 S 上诱导出二分图 Γ_{τ}、$_m$ 的之字形曲线集。现在令 Γ 为 S 上任意一个 GL_m–二分图。则存在一系列图 Γ 的二乘二变换，将其变换为图 Γ_{τ}、$_m$ [G]。

引理 5.16. 给定 M 中的任意一个 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}$，其在边界上诱导出 S 上二分图 Γ 的 $\mathcal{Z}_\Gamma$ 之字形曲线集；再给定一个二乘二变换 $\mu:\ \Gamma \longrightarrow \Gamma'$，则存在一个规范的$\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}'$，位于 M 中，并在边界上诱导出 Γ' 的 $\mathcal{Z}_{\Gamma'}$ 之字形曲线集。

证明。取标准四面体 T，并在其上取标准 $\mathcal{Z}_{\mathrm{T}}$ 之字形曲线集。二乘二变换 $\mu_\alpha:\ \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ 在 α 上的某个区域 S内进行，如图39所示。二乘二变换 μ_α 对 $\mathcal{Z}_\Gamma$ 上的之字形曲线集 S 的作用可以描述为：沿两个面将四面体 T 粘合到 S上，使这两个面上的之字形曲线与区域 α 内 S的之字形曲线相匹配。然后，T 的另外两个面上的之字形曲线会在区域 Γ' 内诱导出 α的之字形曲线集，见图22。

另一方面，T 中存在一个典范的 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}$，它在边界 ∂T 上诱导出上述之字形曲线集。因此，二乘二变换 μ_α 对 $\mathcal{Q}$–图$\mathcal{Q}$ 的作用相当于将 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}$粘合到该图上。所得 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}'$ 正是我们所需要的。

□

给定一个 GL_m–图 Γ 在 S上，存在一系列二乘二变换，可将其变换为 GL_m–图 $\Gamma_{\mathrm{T},\ m}$。将引理 5.16 应用于这一系列变换，可得到 $\mathcal{Q}$–图 $\mathcal{Q}_\Gamma$。

□

6 附录

6.1 A：非交换簇 $\mathcal{A}$–簇簇簇簇簇

In 第 6.1 节中，我们简要回顾本文所用的 [GKo] 中的一些构造 .

曲面 S 上的扭曲平坦向量丛是定义在穿孔切丛$TS - \{$零截面$\}$ 上的向量丛；对于每个 $p \in S$，沿 T'_pS 中绕 $= T_pS - \{0\}$ 的环路，其单值化为 –Id

生成 $H_1(T'_pS,\mathbb{Z})$。取定向曲面 S 上的扭曲平坦线丛 $\mathcal{L}$，该曲面带有边界 ∂S。选取一个向量场 v，使其与 S 的边界相切，并沿着边界定向。线丛 $\mathcal{L}$ 在边界 ∂S 上的平凡化由线丛 $\mathcal{L}$ 在 v 上的限制的一个非零截面给出。

设 Γ 为一个二分带图，S_Γ 为其关联曲面。共轭二分带图Γ^* 提供了谱曲面 $\Sigma_\Gamma := S_{\Gamma^*}$. 于是，{条之字形路径位于 S_Γ} = {个边界分支上，而 Σ_Γ}.考虑如下群胚:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\circ_\Gamma :=&\{\text{谱曲面 } \Sigma_\Gamma\text{上的扭曲平坦线丛，在边界}\}\text{处平凡化}\\ =&\{\text{Twisted flat line bundles on the surface } S_\Gamma\text{, trivialized at the zig-zag strands}\}.\end{aligned} \tag{117}$$

我们通过 $\mathcal{A}$–坐标给出非交换环面 $\mathcal{A}^\circ_\Gamma$ 的坐标描述。

定义 6.1。设 Γ为一个带状图。其 $\mathcal{A}$–坐标[14] 在 Γ 上是 $\{\Delta_E \in R^\times\}$赋予定向边 E 的元素 Γ，满足以下单项式关系:

- 设 E 为一条定向边，$\overline{E}$ 为取相反定向的同一条边。则

$$\Delta_E\Delta_{\overline{E}} = -1. \tag{118}$$

- 设 E_1、.....、E_n 为与 Γ的任意顶点 v关联的边，从顶点 v向外定向，且其次序与循环次序一致。则

$$\Delta_{E_1}\Delta_{E_2}\dots\Delta_{E_n} = -1. \tag{119}$$

我们使用相同的 name $\mathcal{A}$–带状图来表示具有一组 $\mathcal{A}$–坐标的带状图。

给定一个带状图 Γ，其 $\mathcal{A}$–坐标在 Γ 曲面上以边界处平凡化的扭曲平坦线丛的同构类为参数化 S_Γ。事实上，一条边 E 的 Γ 确定了两个面f^+_E 以及 f^-_E的 S_Γ。存在一条路径的规范同伦类 p_E，连接 f^+_E和 f^-_E，见图37。沿着 p_E的平行移动作用于边界分支 $s^\pm_E$处的平凡化 $f^\pm_E$，

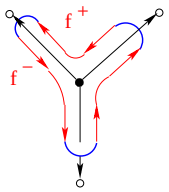


图37:

定义元素 $\Delta_E \in R^\times$:

$$\mathrm{par}_{p_E} : s^+_E \longrightarrow \Delta_E s^-_E, \quad \Delta_E \in R^\times. \tag{120}$$

沿任意一条边，或按照该顶点处的循环次序绕任意顶点一周，如图37所示，我们将切向量旋转 2π，从而得到关系式（118）和（119）。 $-$ 符号源于绕圆一周相当于单值化 -1。反过来，$\mathcal{A}$–坐标在 Γ 上确定一个扭曲平坦线丛 S_Γ。

我们将这一约定用于二分带图 Γ^*，因为扭曲平坦线丛位于 S_{Γ^*} 上。注意，二分带图 Γ 和 Γ^* 作为图是相同的，但 $\bullet$–顶点处边的循环次序不同。我们将 Γ 上的循环次序表示为逆时针，并在下文中采用以下关于图 Γ^* 与图 Γ 之间关系的约定:

$$\begin{aligned}&\text{共享一个 } \circ\text{–顶点的边上的元素，其逆时针乘积等于 } -1。\\ &\text{共享一个 } \bullet\text{–顶点 } v \text{ 的边上的元素，其逆时针乘积为 } (-1)^{\mathrm{val}(v)-1}。\end{aligned} \tag{121}$$

因此，描述 曲面上的扭曲平坦线丛 S_{Γ^*} 用 Γ 的术语来表示时，我们采用约定（121）。

[14]将元素称为 Δ_E “坐标”是术语误用，因为它们并不独立 t.

6.1.1 二分带图上 $\mathcal{A}$–坐标的二乘二变换。

回顾图 $\Gamma \to \Gamma'$ 38 中二分图的二乘二变换。我们来定义相应的

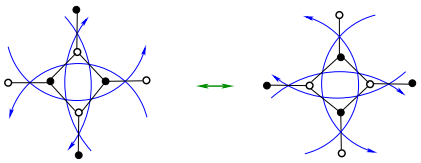


图 38：二分图的二乘二变换。

双有理同构

$$\mathcal{A}^{\circ}_{\Gamma} \longrightarrow \mathcal{A}^{\circ}_{\Gamma'}.$$

考虑图 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 和 $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ 上的内部边坐标，见图39。

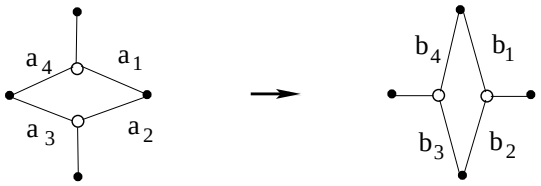


图 39：装饰二分带图的二乘二变换由公式（ $\mathcal{A}$–描述123）。

Set

$$A_i = a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3}, \qquad B_i = b_i b_{i+1} b_{i+2} b_{i+3}, \qquad i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \tag{122}$$

考虑图 39所示的坐标变换。

$$\begin{aligned} b_1 = (1 - A_3^{-1})a_3 \ &= \ \ a_3(1 - A_4^{-1}); \\ b_2 = (1 - A_4)^{-1} a_4 \ &= \ \ a_4(1 - A_1)^{-1}; \\ &\text{and the cyclic shift } i \longmapsto i + 2 \text{ of these two equations.} \end{aligned} \tag{123}$$

注意，对于任意 $i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，我们有 $a_i A_{i+1} = A_i a_i$，$A_i = B_{i+2}^{-1}$，并且

$$b_i b_{i+1} = -(a_i a_{i+1})^{-1}. \tag{124}$$

例如，$b_1 b_2 a_1 a_2 = a_3(1 - A_4^{-1})(1 - A_4)^{-1} a_4 a_1 a_2 = -1$。或者，图 40 表明公式 (124) 与方程 (119) 一致。



图 40：采用约定 (119)，$a_4 a_1 \alpha = -1$，$\alpha\beta = -1$，$b_4 b_1 \beta = -1$。因此 $a_4 a_1 = -(b_4 b_1)^{-1}$.

命题 6.2。*[GKo]* 二乘二变换（*123*）的平方是恒等变换。二乘二变换的坐标变换（*123*）满足五边形关系。

我们来定义赋予二分带图 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{|\Gamma|}$ 的非交换簇簇 Γ。其簇以可通过二乘二变换及收缩二价顶点从 Γ 得到的二分带图为参数化对象。我们为每个簇赋予非交换环面 $\mathcal{A}_\Gamma$，并使用二乘二变换对应的坐标变换（123）将它们粘合起来。根据引理6.2，此定义是合理的。

6.1.2 非交换簇 $\mathcal{A}$–簇簇簇上的典范 2-形式。

分次向量空间 V 的张量代数 T(V) 的循环包络是由以下元素张成的分次向量空间

$$\begin{aligned} &v_1v_2\dots v_n := (v_1\otimes v_2\otimes\dots\otimes v_n)_{\mathcal{C}},\\ &(v_1\otimes v_2\otimes\dots\otimes v_n)_{\mathcal{C}} = (-1)^{|v_1|\cdot(|v_2|+\dots+|v_n|)}(v_2\otimes\dots\otimes v_n\otimes v_1)_{\mathcal{C}}. \end{aligned} \tag{125}$$

我们通过如下定义 $d\log(a_1)\wedge\dots\wedge d\log(a_n)$ 的非交换类比

$$\{a_1,\dots,a_n\} := da_1\dots da_n a_n^{-1}\dots a_1^{-1}. \tag{126}$$

对于一个三价带图 Γ_v，其顶点为 v，并按循环顺序标记为 a、b、c，其中 $abc=\pm1$，我们定义

$$\Omega_v := \{a,b\} = da\ db\ b^{-1}a^{-1}. \tag{127}$$

条件 ab $c=\pm1$ 意味着它在循环移位（a、b、c）$\longmapsto$（b、c、a）下保持不变。注意 t

$$3d\{a,b\} = -(a^{-1}da)^3-(b^{-1}db)^3-(c^{-1}dc)^3. \tag{128}$$

给定一个只有一个度为 >3 的顶点 v 的带状图 Γ_v，我们通过添加颜色相反的二价顶点来展开这个顶点，从而得到一个二分带图 Γ'_v，其中原颜色的顶点为三价顶点，颜色相反的顶点为二价顶点，并令

$$\Omega_v := \sum_{x\in\Gamma'_v}\Omega_x. \tag{129}$$

Th总和取遍图 Γ'_v的三价顶点。它不依赖于 Γ 的选择 $'_v$.

给定一个任意的 $\mathcal{A}$–装饰二分带图 Γ，我们引入 2-形式

$$\Omega_\Gamma := \sum_{w\in\Gamma}\Omega_w - \sum_{b\in\Gamma}\Omega_b. \tag{130}$$

这里，第一个求和遍历 Γ 的所有 $\circ$–顶点，第二个求和遍历所有 $\bullet$–顶点。

2-形式 Ω_Γ 在二乘二变换下是不变的。这仅仅意味着，使用记号 (123)，

$$\{a_4,a_1\}-\{a_1,a_2\}+\{a_2,a_3\}-\{a_3,a_4\} \;=\; \{b_1,b_2\}-\{b_2,b_3\}+\{b_3,b_4\}-\{b_4,b_1\}. \tag{131}$$

我们将 3-形式赋给装饰二分带图 Γ 的每条边 E；该图由元素 a_E 装饰，且为 $\mathcal{A}$–装饰带状图

$$\omega_E := (a_E^{-1}da_E)^3. \tag{132}$$

因此，由式（128），对于一个 $\mathcal{A}$–装饰二分带图 Γ，我们得到：

$$d\Omega_\Gamma = \sum_{E\text{: external edges of }\Gamma}\omega_E. \tag{133}$$

定理 6.3。 2-形式 Ω 在公式（*123*）给出的二乘二变换下保持不变

证明。 这可由 [GKo，定理 4 得出。12]不过请注意，公式（123）在 [GKo]中的符号相反：

$$\begin{aligned} b_1 &= (1+A_3^{-1})a_3; \quad & b_2 &= (1+A_4)^{-1}a_4; \\ b_3 &= (1+A_1^{-1})a_1; \quad & b_4 &= (1+A_2)^{-1}a_2. \end{aligned} \tag{134}$$

然而，如果将 a_i 替换为 $-a_i$，则 2-形式不会改变； b_i同理。因此，改变 $a_1 \longmapsto -a_1$， $b_3 \longmapsto -b_3$，并保持其余六个变量不变，我们便将（134）变换为（123）。 □

命题 *6.2* 的评注。 问题在于，我们使用的是公式（123），而不是（134）。不过，第一个断言可通过与上文相同的符号变换技巧得出。

6.2 B：容许 dg 层

我们使用相对于 X 上由 [GKo 第 10 节中某个分层构造的层复形导出范畴的 dg 增强。 1]其对象称为 dg-层。

设 $\mathcal{H}$ 是流形 X中的一族余定向超曲面。若定义在 X 上的可构造层复形的微局部支撑包含于 T^*X 的零截面与 $\mathcal{H}$中这些余定向超曲面的余法丛之并集内，则称该复形为 $\mathcal{H}$-支撑的。

下面我们假设 $\mathcal{H}$ 中的超曲面正规交叉相交。在 $\mathcal{H}$支撑的 dg-层中，我们区分出子范畴 $\mathcal{H}$-容许 dg 层，该子范畴由 [GKo第 10 节引入。1]下面我们具体说明对我们而言重要的情形下的定义，即 $\dim(X) = 2$， 3。

三维簇 M 上的 $\mathcal{H}$-容许 dg-层由以下数据给出：

- 在 $M - \mathcal{H}$的每个区域 $\mathcal{D}$ 上都有一个局部系统复形 $\mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}}$，其次数集中于 $[0,1]$:
- 对于 $\mathcal{H}$}中余维 ≥ 2 分层的每个分支 γ，若其相邻区域为 $\mathcal{D}^+$，且 $\mathcal{D}^-$ 并朝向 $\mathcal{D}^+$定向，则有一个复形映射

$$\begin{aligned} &\varphi_\gamma : \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}^-} \to \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}^+}, \\ &H^i\mathrm{Cone}(\varphi_\gamma) = 0 \ \text{ if } i \neq 0. \end{aligned} \tag{135}$$

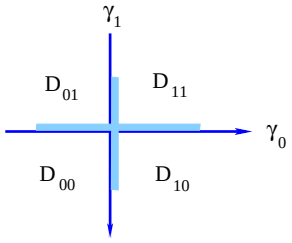


图41：在余定向超平面 γ_0, γ_1 的余维二交点附近，分层包含一个余维二层 $\gamma_0 \cap \gamma_1$、四个余维一层和四个区域 $\mathcal{D}_{**}$。

- 对于每个余 维数二分层，由两个余维一层的交点给出，一个同伦 :

$$h : \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{00}} \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{11}}[-1], \quad dh + hd = \varphi_2 \circ \varphi_1 - \varphi_4 \circ \varphi_3.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{01}} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{11}} \\ {\scriptstyle\varphi_1}\uparrow & \overset{h}{\nearrow} & \uparrow{\scriptstyle\varphi_4} \\ \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{00}} & \xrightarrow[\varphi_3]{} & \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{10}} \end{array} \tag{136}$$

- 类似地，对于每个余维三层，一个更高阶同伦

$$h_2 : \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{000}} \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{111}}[-2], \quad dh_2 + h_2 d = \dots .$$

- 令 D 为 $\mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{***}}$ 上的微分、映射 φ_*、同伦 h和高阶同伦 h_2 的带符号和。于是得到以下复形：它是赋给立方体顶点的茎的直和，微分为 D：

$$\mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{000}} \oplus \left(\mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{001}} \oplus \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{010}} \oplus \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{001}}\right)[-1] \oplus \left(\mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{011}} \oplus \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{101}} \oplus \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{011}}\right)[-2] \oplus \mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{D}_{111}}[-3]. \tag{137}$$

我们假设这些数据满足以下条件

$$\text{Complexes (136) and (137) are acyclic.} \tag{138}$$

当 X 是曲面时，不存在高阶同伦 h_2，且数据（137）为空。

命题 6.4。 条件（*138*）分别等价于以下条件： $\mathcal{F}$ 的微局部支撑不包含余维二和余维三分层的余法丛中的任何向量，但 $\cup_i T^*_{H_i} X$除外。

当 X 是曲面时，这由 [GKo，引理 105] 及其中的讨论可得。

情形 三维簇的部分，涉及复形 (137) 无挠这一条件，情况类似。

确切地说，给定一个点 $q \in X$，记 T^+_q，$\mathcal{H}^X$ 为 $T^*_q X$ 中由来自 $T^*_{H_i}$ 的非零余向量的正线性组合所确定的开锥，其中 $q \in H_i$。于是得到以下引理。

引理 6.5。 给定一个 $\mathcal{H}$-支撑的层复形 $\mathcal{F}$ 于 X上，以及一个余维为三的分层 q 中的$\mathcal{H}$，则 $\mathcal{F}$ 在任意 $\eta \in T^+_q$ 处的微局部支撑的纤维，$\mathcal{H}^X$ 拟同构于复形 (*137*)。

很容易看出，正如文献所引第 10 节中那样，这就推出了所要证明的结论。

因此，将一个 $\mathcal{H}$-容许 dg-层限制到 $\mathcal{H}$ 的每个曲面的余法丛上，得到的都是局部系统。若这些局部系统位于零次且维数为一，我们就称该 dg-层具有秩一微局部支撑。 X 的零截面上的微局部支撑可能更为复杂。

参考文献

[B] Beilinson A.：高阶调节子与 L 函数的特殊值，《苏联数学杂志》30 (1985)，2036-2070。

[BR] Berenstein A., Retakh V.： 非交换标记曲面。 arXiv:1510.02628。

[BrD1]Brav C. 和 Dyckerhoff T.：相对 Calabi–Yau 结构。《Compositio Mathematica》155.2 (2019)，第 372–412 页。

[BrD2] Brav C. 和 Dyckerhoff T.：相对 Calabi–Yau 结构 II：对象模空间中的移位拉格朗日子流形。《Selecta Mathematica》27.4 (2021)，第 63 页。

[D] Deligne P.：《模符号》。IH´ES 数学出版物，第 73 卷 (1991)，第 147-181 页。

[DGG]Dimofte T., Gabella M., Goncharov A.B.：K分解与三维规范理论arXiv:1301.0192。

[FG1] Fock V.、GoncharovA.：局部系统模空间与高阶 Teichm ¨uller 理论。IHES 数学出版物，第 103 期（2006），1–212。arXive:0311149。[FG2] Fock V.、Goncharov A.：簇系综、量子化与二对数。高等师范学校科学年刊（2009）。arXive:0311245。

[FN] Freed D.、Neitzke A.：三维谱网络与经典陈–西蒙斯理论。arXiv:2208.07420。[GPS1] Ganatra S.、Pardon J.、Shende V.：Liouville 扇区上的协变函子性的缠绕 Floer 理论，IHES 数学出版物 131（2020），73–200。[GPS2] Ganatra S.、Pardon J.、Shende V.：缠绕 Fukaya 范畴的微局部 Morse 理论，数学年刊（第 2 辑）199（2024），第 3 期，943–1042。[GPS3] Ganatra S.、Pardon J.、Shende V.：缠绕 Fukaya 范畴的扇区下降，美国数学学会杂志 37（2024），第 2 期，499–635。[GSV]Gekhtman M.、Shapiro M.、Vainshtein A.，簇代数与 Weil–Petersson 形式，arXiv:0309138。[G] Goncharov A.B. 理想网络、局部系统模空间与三维 Calabi–Yau 范畴。载于《21st 世纪的代数、几何与物理》。Kontsevich 纪念文集。数学进展，324，2017，第 31–99 页。arXive:1607.05228。[GKe] Goncharov A.B.、Kenyon R.：二聚体与簇可积系统。高等师范学校科学年刊，2013，第 46 卷，第 5 期，747–813，arXive:1107.5588。[GKo] Goncharov A.B.、Kontsevich M.：曲面上非交换局部系统与非交换簇簇的谱描述。arXiv:2108.04168。[GKS] Guillermou S.、Kashiwara M.、Schapira P.：哈密顿同痕的层量子化及其在不可位移问题中的应用，杜克数学杂志 161（2012），201–245。[KS]Kashiwara M.、P. Schapira P.：《流形上的层》，数学基础原理 292，（施普林格出版社，1994）。[K] Kontsevich M.：同调代数的辛几何。波恩 Arbeitstagung，2009。[N] Nadler D.：树状奇点，arXive:1309.4122。[STZ] Shende V.、Treumann D.、Williams H.：Legendrian 结与可构造层。数学研究 207（3），1031–1133。arXive:1402.0490。[STWZ] Shende V.、Treumann D.、Williams H.、Zaslow E.：由 Legendrian 结构得到的簇簇。杜克数学杂志 168（15），2801–2871，arXive:1512.08942。[STW] Shende V.、Treumann D.、Williams H.：关于精确拉格朗日曲面的组合学。arXive:1603.07449。[Th] Thurston D.：从多米诺骨牌到六边形。arXive:0405482。