arXiv:2601.07541v1 [math.DG] 12 Jan 2026

局部对称空间的整体单值群

ANTONIO J. DI SCALA

Abstract. 我们证明，对于一个没有局部平坦因子的连通黎曼局部对称空间（不一定完备），其整体单值群是紧的，并且在正交群中的正规化子内具有有限指数。

1. Introduction

本文旨在对以下事实给出详细证明：

定理 A. 设(M^n, g)是一个没有局部德拉姆平坦因子的连通黎曼局部对称空间，不一定完备。设H 为其整体单值群，$\mathrm{N}_{\mathrm{O}(n)}(\mathrm{H})$为其在正交群$\mathrm{O}(n)$中的正规化子。那么 H 和$\mathrm{N}_{\mathrm{O}(n)}(\mathrm{H})$ 均为紧群，维数相同，并且H 在$\mathrm{N}_{\mathrm{O}(n)}(\mathrm{H})$中的指数有限。

称{style id='1'>不含局部德拉姆平坦因子</style}，是指 M 每一点附近的局部德拉姆分解中都没有平坦的黎曼因子；等价地说，作用于切空间 T_pM的局部整体单值群 H_p^{Loc}没有非平凡的不动点（见下文定理 2.1）。

我们的研究动机来自 Graf 和 Patel 最近提出的一个问题 [GP25], ，该问题与 [Besse87，命题 10.114]中的类似断言有关。事实上，我们的定理比 Besse 的结果更一般。这证明，即使对于不一定完备的一般连通黎曼局部对称空间，Besse 的命题 10.114 仍然成立。

2. Preliminaries

2.1. 基本事实。 为了证明定理 A，我们需要以下关于李群和黎曼几何的事实：

事实 1) 设 G $\subset$ O(n) 是一个紧子群。那么它的正规化子 $\mathrm{N}_{\mathrm{O}(n)}$(G) 也是紧的。

事实 2）紧李群 G 的连通分支数有限。事实上，商群 G/G^0 是紧离散李群，因此是有限群。事实 3）在 $\mathbb{R}^n$ 上不可约地作用的连通子群 G $\subset$ O(n) 是紧的。这是 [KN63 附录中的定理 2 5]。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：53C35；次要分类号：53C29。
Key words and phrases. 全纯群、正规化子、对称空间。Antonio J. Di Scala 是都灵理工大学密码学与数论研究组（CrypTO）以及 INdAM 下属 GNSAGA 的成员。

事实 4）设（M, g）是一个黎曼流形，H_p^{Loc}是 $p \in M$处的局部整体单值群。那么，H_p^{Loc}是 p处受限整体群 H_p^0 的子群。若度量 g 是解析的，则 $\mathrm{H}_p^{Loc} = \mathrm{H}_p^0$。这是由 [KN63 命题10.1，第 95] 页，以及 [KN63 定理10.8，第 101]页直接得出的结论。

事实5）设 H 是 O(n) 的一个连通李子群，在 $\mathbb{R}^n$ 上以 s-表示作用，并设 $\mathrm{N}_{\mathrm{O}(n)}(\mathrm{H})^0$ 是 H 在 O(n) 中的正规化子的连通分支。那么 $\mathrm{H} = \mathrm{N}_{\mathrm{O}(n)}(\mathrm{H})^0$。参见 [BCO03，引理 6.2.2，第 192] 页，或 [BCO16，引理5.2.2，第 184] 页。

下面按照 [BCO16，第 45] 页，或 [BCO03，第 46]，页，回顾 s-表示的定义。设 $M = \mathrm{G}/\mathrm{K}$ 是一个单连通半单黎曼对称空间，其中 $\mathrm{G} = \mathrm{Iso}^0(M)$ 为半单群，$\mathrm{K} = \mathrm{G}_p$ 是 $p \in M$ 处的各向同性群。由于 M 是单连通的，且 G 连通，K 也连通。G/K 在 p 处的各向同性表示，即李群同态

$$\rho : K \to \mathrm{SO}(T_pM) \quad , \quad k \to (\mathrm{d}k)_p,$$

称为 s-表示。若存在一个单连通半单黎曼对称空间 G/K，以及同构 $\xi : \mathrm{H} \to \mathrm{K}$ 和 $\iota : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(T_pM)$，使下图交换，则称连通李子群 $\mathrm{H} \subset \mathrm{O}(n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上以 s-表示作用：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H} & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & \mathrm{K} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathrm{SO}(n) & \xrightarrow[\quad \iota \quad]{} & \mathrm{SO}(T_pM) \end{array}$$

其中，$i : \mathrm{H} \to \mathrm{SO}(n)$ 是由连通子群 H 包含于 O(n) 所诱导的同态。

2.2. **局部德拉姆分解**。这里我们回顾黎曼流形 (M, g) 在点 $p \in M$ 附近的局部德拉姆分解，以及相应的局部整体单值群 H_p^{Loc} 的分解。我们将以下定理称为局部德拉姆分解：

定理 2.1。设 (M, g) 是一个黎曼流形，且 $\mathrm{H}_p^{Loc} \subset \mathrm{SO}(T_pM)$ 是点 p 处的局部整体单值群。则切空间 T_pM 可分解为以下正交直和，其中各子空间均为H_p^{Loc}-不变子空间：

$$T_pM = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

其中 V_0 是 T_pM 的极大线性子空间，在该子空间上，H_p^{Loc}平凡地作用；并且在每个子空间 V_j上，$(0 < j \leq k)$，H_p^{Loc}的作用都是不可约的。

此外，通过平行移动，每个 V_j 都会在 p周围诱导出一个平行分布，其积分流形记作 $\mathcal{V}_j$。令 g_j 为黎曼度量 g 在 $\mathcal{V}_j$上的限制。那么，p 的一个邻域 $\mathcal{V}$ 等距于乘积 $\prod_{j=0}^{k}(\mathcal{V}_j, g_j)$。局部整体单值群 H_p^{Loc}也分解为以下连通子群的乘积

Φ_j: $(0 < j \leq k)$

$$\mathrm{H}_p^{Loc} = \prod_{j=1}^{k} \Phi_j$$

其中， Φ_j 不可约地作用于 V_j ，并在 V_i 上平凡地作用，对于 $i \neq j$。

每个 Φ_j 都是紧的，因此H_p^{Loc}和$\mathrm{N}_{\mathrm{O}(n)}(\mathrm{H}_p^{Loc})$ 都是紧李群。

上述结论证明见 [KN63，定理 5.4.，第 185]页。黎曼流形（$\mathcal{U}_0$， g_0）是平坦的，称为局部平坦德拉姆因子。注意，根据事实 3)，每个 Φ_j 都是紧的，因此H_p^{Loc}是紧的。于是，根据事实 1)，$\mathrm{N}_{\mathrm{O}(n)}(\mathrm{H}_p^{Loc})$也是紧的。

3. Proof of Theorem A

设 (M, g) 是一个没有局部德拉姆平坦因子的连通局部对称空间，并固定 $p \in M$。设 H_p^{loc} 是其在 p 处的局部整体单值群。由局部德拉姆定理（定理 2.1），切空间分解为

$$T_pM = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k,$$

其中每个 V_j 都是不可约 H_p^{loc}-模，且群 H_p^{loc} 分解为乘积

$$\mathrm{H}_p^{loc} = \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_k,$$

其中 Φ_j 在 V_j 上不可约地作用，并在其他因子上平凡地作用。

由于 (M, g) 是局部对称的，局部分解中的每个 $(\mathcal{V}_j, g_j)$ 都局部等距于某个不可约单连通对称空间 M_j 的开子集。局部对称空间的度量是实解析的，因此由事实 4 可知 $\mathrm{H}_p^{loc} = \mathrm{H}_p^0$ （受限整体群）。因此，每个Φ_j 都是不可约对称空间 M_j 的整体单值群（同构）；由此 Φ_j，进而 H_p^{loc}，作为 s-表示作用。

将事实 5 应用于 H =H_p^{loc}，得到

$$\mathrm{H}_p^{loc} = \left(\mathrm{N}_{\mathrm{O}(T_pM)}(\mathrm{H}_p^{loc})\right)^0.$$

现在令 H 为 (M, g) 的全整体群，H^0 为其单位连通分支。由事实 4 可得 $\mathrm{H}^0 = \mathrm{H}_p^{loc}$。因此 $\mathrm{H}^0 = \left(\mathrm{N}_{\mathrm{O}(T_pM)}(\mathrm{H}^0)\right)^0$。特别地，$\mathrm{H}^0$ 是紧的（事实 3），$\mathrm{N}_{\mathrm{O}(T_pM)}(\mathrm{H}^0)$ 也是紧的（事实 1）。由于 $\mathrm{H} \subset \mathrm{N}_{\mathrm{O}(T_pM)}(\mathrm{H}^0)$，群 H 也紧；再应用一次事实 1 可知，$\mathrm{N}_{\mathrm{O}(T_pM)}(\mathrm{H})$ 也紧。

最后，由于 $\mathrm{H}^0 = \left(\mathrm{N}_{\mathrm{O}(T_pM)}(\mathrm{H})\right)^0$ （包含映射 $\mathrm{H}^0 \subset \left(\mathrm{N}_{\mathrm{O}(T_pM)}(\mathrm{H})\right)^0 \subset \mathrm{N}_{\mathrm{O}(T_pM)}(\mathrm{H}^0)$ 必然是等号），群 H 与 $\mathrm{N}_{\mathrm{O}(T_pM)}(\mathrm{H})$ 的维数相同。此外，$\mathrm{N}_{\mathrm{O}(T_pM)}(\mathrm{H})$ 只有有限个连通分支（事实 2），因此 H 在其正规化子中的指数有限。证毕。

References

[BCO03] Berndt, J.; Console, S. 和 Olmos, C: *Submanifolds and holonomy* Chapman & Hall/CRC, 《数学研究札记》第 434 卷（2003 年）。[BCO16] Berndt, J.; Console, S. 和 Olmos, C: *Submanifolds and holonomy* 第二版，Chapman & Hall/CRC《数学研究札记》第 434 卷，2016 年。[Bes87] Besse, A.L.: *Einstein Manifolds* 《数学及其边界领域成果》系列第 10 卷。Springer-Verlag Berlin，1987 年。

[GP25] Graf, P. 和 Patel, A: *Slope zero tensors uniformizing variations of Hodge structure , and quotients of tube domains* 2510 15039 https://arxiv.org/pdf/ 。[63] *Foundations of differential geometry* KN Kobayashi, S. 和 Nomizu, K: 第 I 卷，Interscience 出版社，（1963 年）。

Dipartimento di Scienze Matematiche *G.L. Lagrange* ，都灵理工大学，阿布鲁齐公爵大道 24号，10129，都灵，意大利。*Email address*： antonio.discala@polito.it