arXiv:2601.07569v1 [math.LO] 12 Jan 2026

一阶算术中 Ramsey 对偶的类低基定理

Hiroyuki Ikari[1] 和 Keita Yokoyama[2]

[1]AXA Life insurance Co., Ltd.* ，hiroyuki.ikari.q8@alumni.tohoku.ac.jp[2]数学研究所，东北大学，keita.yokoyama.c2@tohoku.ac.jp

摘要

我们在 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 内构造了 D^2 的 $\ll^2$解（也称为弱低解），并证明了 RT^2 在 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 上的 $\ll^2$基定理。$\ll^2$基定理是低基定理的一个变体，近年来在 Ramsey 型定理一阶部分的背景下受到关注。为完成该构造，我们在 WKL_0 的一个有效编码的ω模型中使用 Mathias 强迫，以确保在归纳法较弱的系统中具有足够的可计算性。采用类似方法，我们还在 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 内证明了 RT^2_2 和 $\mathrm{EM}_{<\infty}$ 的 $\ll^2$基定理，其中 EM 是 Erd˝os-Moser 原理的一个版本。这些结果作为推论，为关于 RT^2,RT^2_2 和 $\mathrm{EM}_{<\infty}$ 的 Π^1_1保守性已知结果提供了更简洁的证明。

1 引言

本文在具有弱归纳法的算术理论中，重构了 Ramsey 配对定理的类低解。为此，我们研究了 Ramsey 配对定理分解的类低基定理，具体包括 COH、D^2_2,D^2，和 $\mathrm{sEM}_{<\infty}$；这些分解在分析 Ramsey 配对定理的强度时已得到广泛研究。

拉姆齐配对定理及其变体的强度，尤其是 RT^2_2 和 RT^2, ，一直备受关注，因为这些原理严格介于 RCA_0 和 ACA_0 之间，却不等价于弱柯尼希引理$_0$。特别是，它们的一阶推论——即可以用一阶算术语言表达的数论命题——已得到广泛研究。下面简要回顾一些关于其强度的代表性结果。请注意，以下引用的所有结果均以 RCA_0 为基础理论。基于 Jockusch 对拉姆齐定理的可计算性理论分析，Simpson [7]， [15] 证明，ACA_0 等价于 RT^n （对于 $n \geq 3$），而弱柯尼希引理$_0$ 不能证明 RT^2_2。随后，Seetapun 和 Slaman [14] 证明，RT^2 不能证明 ACA_0, ；Liu [12] 之后又证明，RT^2 不能证明弱柯尼希引理$_0$。由此自然产生一个问题：如何才能最好地刻画 RT^2_2 和 RT^2 的强度？一种重要的视角是，衡量由它们可推出的归纳法或其他一阶（算术的）命题的数量。从这一视角出发，Hirst [6] 证明 RT^2 蕴含 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$。在一篇开创性论文中 [1], ，Cholak、Jockusch 和 Slaman 证明，$\mathrm{RT}^2_2+\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 对 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 是 Π^1_1-保守的，并且 $\mathrm{RT}^2+\mathrm{I}\Sigma^0_3$ 对 $\mathrm{I}\Sigma^0_3$ 是 Π^1_1-保守的。

*本研究独立于作者的所属机构开展。

近年来，对其一阶强度的研究取得了显著进展。关于 RT^2_2 的一阶部分，一个核心未决问题是：RT^2_2+RCA_0 对 $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 是否是 Π^1_1-保守的？Patey 和 Yokoyama [13] 对这一问题给出了部分解答，证明 RT^2_2 对 $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 是 Π^0_3-保守的，从而确定了其证明论强度。这一结果最近被推进到 Π^0_4-保守性 [8]。此外，RT^2_2 对 $\mathrm{B}\Sigma^0_2+\bigcup_n \mathrm{WF}(\omega_n)$ 的 Π^1_1-保守性也已得到证明[9]。关于 RT^2，的强度，Slaman 和 Yokoyama [17] 证明，RT^2+WKL_0 对 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 是 Π^1_1-保守的，由此确定了 RT^2 的一阶部分。

对 $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 和 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 的保守性证明通常采用基于低$_2$-基定理的模型构造，并运用 [1] 确立的“第二跳跃控制”技术（例如 [17, 18]）。另一方面，在某些情况下，也可以在 $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 上使用更简单的“第一跳跃控制”论证（例如[2, 9]），从而得到基于弱低解构造的保守性证明（按我们的术语，即 $\ll^2$-基定理）。Fiori-Carones、Ko lodziejczyk、Wong 和 Yokoyama[3], 近期基于弱柯尼希引理 WKL 的同构定理$^*_0$所做的工作表明，Π^1_1在 $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 或 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 上的保守性可以用 $\ll^n$-基定理来刻画。

本文沿着这一研究方向继续推进。我们仿照已有的弱低解构造，研究 RT^2 和 RT^2_2, 的分解，并为 $\mathrm{EM}_{<\infty}$提出了一种新的构造。我们的主要结果关注 $\ll^2$-基定理的可证性（定理 3.1），同时也推得相关的 Π^1_1-保守性结果作为推论。这些结果统一了 [1, 17], 以及 Towsner 和 Yokoyama 的结果 [18]。此外，将我们的结果与形式化强迫技术结合，还可得到关于证明变换的其他结果。具体细节将在与 Ko lodziejczyk 即将合作发表的论文中给出。

本文结构

第 2 节介绍预备知识，其中我们引入二阶算术子系统的基本框架，以及在其中进行的形式化讨论。本节还介绍 $\ll^2$-关系和可数编码的 ω-模型，它们在本文中发挥着重要作用。

第 3 节构成本文的核心，我们在此构造 RT $\ll^2$的分裂和 RT^2_2 的 ^{2}-低度类解。我们明确给出 COH、$\mathrm{EM}_{<\infty}$和 D^2的构造。*

2 预备知识

本文采用二阶算术子系统的通常设定。（详见 [15]。）二阶算术的语言是双类型的，由 0、1、$+$、$\cdot$、$=$、$<$和 $\in$组成。项和公式据此定义。公式类 Σ^0_n、Π^0_n、Σ^1_n 和 Π^1_n定义如下。 Σ^0_0 和 Π^0_0 是所有不含量词（有界量词除外）的公式所构成的类。 Σ^0_{n+1} 是所有形如 $\exists x\varphi$ （其中 $\varphi \in \Pi^0_n$）的公式所构成的类。 Π^0_{n+1} 是所有形如 $\forall x\varphi$ （其中 $\varphi \in \Sigma^0_n$）的公式所构成的类。 Σ^1_0 和 Π^1_0 是与$\bigcup_{n\in\omega}\Sigma^0_n$所定义的相同的类。对于固定的集合变量 X，类 Σ^X_n（分别为 Π^X_n）是由不含除 X 之外的自由集合变量的 Σ^0_n （分别为 Π^0_n）公式构成的类。若公式 φ 属于Σ^1_0，则称其为算术的。Σ^1_{n+1} 是所有形如 $\exists X\varphi$ （其中 $\varphi \in \Pi^1_n$）的公式所构成的类。Π^1_{n+1} 是所有形如 $\forall X\varphi$ （其中 $\varphi \in \Sigma^1_n$）的公式所构成的类。

*至于 COH，证明的实质并非原创；它是通过将 COH 的低度类解的众所周知的构造形式化而得到的（例如，[5, 定理 6.44]）。尽管这一构造已为人所知，我们仍然给出它，以便为后续证明（包括我们的主定理）的统一处理奠定基础。

对于公式类 Γ，IΓ 和 BΓ归纳法与有界原理是由以下关于公式 $\varphi \in \Gamma$的内容构成的纲领。

$$(\mathrm{I}\varphi) : \varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \to \varphi(n+1)) \to \forall n \varphi(n),$$
$$(\mathrm{B}\varphi) : \forall i < a \exists j \varphi(i,j) \to \exists b(\forall i < a \exists j < b \varphi(i,j)).$$

在本文中，我们经常关注 $\mathrm{I}\Sigma^X_n$ 和 $\mathrm{B}\Sigma^X_n$。它们使用相同的集合变量 X，且都是有限公理化的，因此我们将 $\mathrm{I}\Sigma^X_n$ 或 $\mathrm{B}\Sigma^X_n$ 视为恰好含有一个自由变量 X 的单一公式。于是，$\mathrm{I}\Sigma^0_n$ 和 $\mathrm{B}\Sigma^0_n$ 分别表示为 $\forall X(\mathrm{I}\Sigma^X_n)$ 和 $\forall X(\mathrm{B}\Sigma^X_n)$。

Γ-分离纲领（Γ-Sep）由对所有 φ、$\psi \in \Gamma$ 的以下公式组成。

$$\forall n(\varphi(n) \wedge \psi(n)) \to \exists X \forall n((\varphi(n) \to n \in X) \wedge (\psi(n) \to n \in X)).$$

最后，我们将 PA^- 视为离散有序半环的公理。

基于上述术语，我们定义本文中使用的一些系统。

定义 2.1。系统 $\mathrm{I}\Sigma^0_n$、$\mathrm{B}\Sigma^0_n$、RCA_0、WKL_0，和 ACA_0 定义如下。

$$\mathrm{I}\Sigma^0_n := \mathrm{PA}^- + \mathrm{I}\Sigma^0_n, \quad \mathrm{B}\Sigma^0_n := \mathrm{PA}^- + \mathrm{B}\Sigma^0_n,$$
$$\mathsf{RCA}_0 := \mathrm{I}\Sigma^0_1 + \Pi^0_1\text{-Sep}, \quad \mathsf{WKL}_0 := \mathrm{I}\Sigma^0_1 + \Sigma^0_1\text{-Sep}, \quad \mathsf{ACA}_0 := \mathrm{I}\Sigma^0_1 + \Pi^0_2\text{-Sep}.$$

注意，Π^0_1-Sep 等价于递归概括公理 Δ^0_1-CA，Σ^0_1-Sep 等价于弱柯尼希引理（WKL，即任何无限 0-1树都有一条无限路径），而 Π^0_2-Sep 等价于算术的概括公理（ACA）。

注 2.2。本文主要将在 $\mathsf{RCA}_0 + \mathrm{I}\Sigma^0_n$ 中进行工作，以构造拉姆齐型陈述的低度类解（定理 3.1）。然而，我们的构造通常不需要 RCA_0 的概括纲领的全部强度，因为它们是一阶陈述。事实上，已知 $\mathsf{RCA}_0 + \mathrm{I}\Sigma^0_n$ 是 I 的 Π^1_1-保守扩张Σ^0_n，因此我们无需关注这些系统之间的差异，可以写作“在 $\mathrm{I}\Sigma^0_n$中可证”，而不是“在 $\mathsf{RCA}_0 + \mathrm{I}\Sigma^0_n$中可证”。

2.1 形式化可计算性

我们首先定义可计算性理论中一些概念的形式化版本。由于我们主要关注形式系统中的讨论，除非另有说明，可计算性中的概念均应理解为本小节所定义的形式化版本。

基于克莱尼范式定理，我们固定一个通用的 Π^0_1 公式 $\pi(e,x,A)$，其中只有所显示的变量；该公式的形式为 $\forall m \pi_0(m,e,x,A\restriction m)$，其中 π_0 是一个固定的 Δ^0_0 公式。

定义 2.3。以下定义均在 RCA_0 中给出。对于 X 和 Y，$X \leq_{\mathrm{T}} Y$ 定义为

$$\exists e_1, e_2 \forall n_0 \exists m_0 \forall n \leq n_0 [(n \in X \leftrightarrow \exists m \leq m_0 \neg\pi_0(m, e_1, n, Y\restriction m)) \\ \wedge (n \notin X \leftrightarrow \exists m \leq m_0 \neg\pi_0(m, e_2, n, Y\restriction m))].$$

我们称这些 e_1 和 e_2（或它们组成的对 $\langle e_1, e_2\rangle$）为 Y-递归的 X指标（指标）。如果 $X \leq_{\mathrm{T}} Y$ 和 $Y \leq_{\mathrm{T}} X$ 都成立，我们记作 $X =_{\mathrm{T}} Y$。只要算术可定义集合 X, Y是正则的，我们就将此定义扩展到它们；换言之，它们的初始片段 $X\restriction m, Y\restriction m$ 始终可以作为（编码的）有限集取得。注意，当 $\mathrm{B}\Sigma^X_1$成立时，可定义集 X 是正则的。

定义 2.4（图灵跳跃）。 X X' =的图灵跳跃 TJ(X)定义为可定义集 $\{\langle e, x\rangle \mid \pi(e, x, X)\}$。对于每个 $n \in \omega$，我们还定义 n次跳跃 $X^{(n)} = \mathrm{TJ}(n, X)$，其中 $\mathrm{TJ}(0, X) = X$，$\mathrm{TJ}(n+1, X) = \mathrm{TJ}(\mathrm{TJ}(n, X))$。

在 RCA_0, 中，我们可以将图灵跳跃视为外部（可定义的）对象。对它们应用归纳法时，通常需要特别留意（见定理 2.6）。尽管如此，（可定义的）低集概念仍然是关键概念。

定义 2.5（低集）。若集合 X 满足 $X' \leq_{\mathrm{T}} (X \oplus A)'$，则称其相对于 A 为低集。若集合 X 满足 $X^{(n)} \leq_{\mathrm{T}} (X \oplus A)^{(n)}$，则称其相对于 A 为低集$_n$。

通过形式化图灵跳跃的普适性，可以轻易得到以下结论。

定理 2.6。设 n、$m \geq 1$。则 RCA_0 证明以下结论。

1. $\mathrm{I}\Sigma^X_n$ 和 $Y \leq_{\mathrm{T}} X$ 蕴含 $\mathrm{I}\Sigma^Y_n$。2. $\mathrm{B}\Sigma^X_n$ 和 $Y \leq_{\mathrm{T}} X$ 蕴含 $\mathrm{B}\Sigma^Y_n$。3. $\mathrm{I}\Sigma^X_{n+m}$ 等价于 $\mathrm{I}\Sigma^{X^{(m)}}_n$。4. $\mathrm{B}\Sigma^X_{n+m}$ 等价于 $\mathrm{B}\Sigma^{X^{(m)}}_n$。5. 若 Y 相对于 X 为低集$_m$，则 $\mathrm{I}\Sigma^X_{n+m}$ 蕴含 $\mathrm{B}\Sigma^{X\oplus Y}_{n+m}$。6. 若 Y 相对于 X 为低集$_m$，则 $\mathrm{B}\Sigma^X_{n+m}$ 蕴含 $\mathrm{B}\Sigma^{X\oplus Y}_{n+m}$。

下面这个版本的低基定理在全文中同样至关重要。

定理 2.7（低基定理 [4, 定理 3.8]）。存在一个 $\mathrm{bool}(\Sigma^X_1)$ 公式 $\theta(x, e_1, e_2, X)$，使得 $\mathrm{I}\Sigma^0_1$ 证明如下命题。（这里，$\mathrm{bool}(\Gamma)$ 表示由 Γ-公式通过布尔组合和有界量词得到的公式类。）对于任意集合 A 和具有递归指标 e_1、e_2 的无限 0-1 树 $T \leq_{\mathrm{T}} A$，可定义集 $W = \{x \mid \theta(x, e_1, e_2, A)\}$ 是 T 的一条路径，并且 $\mathrm{I}\Sigma^{A\oplus W}_1$ 仍然成立。此外，$\mathrm{B}\Sigma^A_2$ 蕴含 W 相对于 A 是低的。

接下来，我们定义带有一个可能是外部对象 Z 的原始递归概念。

定理 2.8（原始递归[15, 定理 II. 3]）。以下命题可在 RCA_0 中证明。设 Z 是满足 $\mathrm{B}\Sigma^Z_1$ 的可定义集，并考虑 $\mathcal{F}_Z = \{f : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \mid f \leq_{\mathrm{T}} Z\}$。那么 $\mathrm{I}\Sigma^Z_1$ 蕴含以下命题。

1. 对于 $f(y_0, \ldots, y_{m-1}, \vec{x})$ $g_0(\vec{x}) \ldots, g_{m-1}(\vec{x}) \in \mathcal{F}_Z$，下面定义的函数 h 存在且是 $\mathcal{F}_Z$ 的元素。

$$h(\vec{x}) = f(g_0(\vec{x}), \ldots, g_{m-1}(\vec{x}), \vec{x}).$$

2. 对于满足 $\forall \vec{x} \exists y f(\vec{x}, y) = 0$ 的 $f(\vec{x}, y) \in \mathcal{F}_Z$，下面定义的函数 h 存在且是 $\mathcal{F}_Z$ 的元素。

$$h(\vec{x}) = \text{the least } y \text{ such that } f(\vec{x}, y) = 0.$$

3. 对于 $f(z, \vec{x}, y)$ $g(\vec{x}) \in \mathcal{F}_Z$，下文定义的函数 h作为 $\mathcal{F}_Z$的一个元素存在。

$$h(0, \vec{x}) = g(\vec{x}), h(y+1, \vec{x}) = f(h(y, \vec{x}), \vec{x}, y).$$

注 2.9. 此定理保证，只要 I Z满足Σ^Z_1，我们就能在形式系统中实现任意 3原始递归过程。事实上，这一事实将成为第3节证明中的一项重要观察。

以下版本的极限引理也是我们进行构造的基本工具。

定理2.10。以下命题可在 RCA_0 中证明。设 Z 为一个满足 $\mathrm{B}\Sigma^Z_2$ 的集合。对于一个可定义集 W，以下各项等价。

1. $W \leq_{\mathrm{T}} Z'$。

2. 存在一个函数 $f\colon \mathbb{N}^2 \to 2$，使得 $f \leq_{\mathrm{T}} Z$，并且对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$n \in W \leftrightarrow \lim_{s\to\infty} f(n,s) = 1$，且 $n \notin W \leftrightarrow \lim_{s\to\infty} f(n,s) = 0$。

如果一个（可定义的）集合 W 满足上述条件之一，则称其为 Δ^Z_2-可定义的，或简称为 Δ^Z_2。

注释2.11。假设 $\mathrm{B}\Sigma^Z_n$，我们可以考虑（可定义的）集合 $W \leq_{\mathrm{T}} Z^{(n-1)}$ 的极限引理，从而可以相应地定义 Δ^Z_n-可定义集。

注释2.12。 定理2.10 中的等价性Σ^Z_1甚至仅在我们考虑较弱的图灵归约概念时也成立（无需假设 W 的正则性）。因此，我们甚至可以在 Δ^0_2-可定义集的类中考虑 RCA_0。

2.2 拉姆齐定理

现在我们考虑 Ramsey 配对定理，以及通过凝聚性和 Δ^0_2 k-划分对其进行的分解。根据极限引理，我们将 Δ^0_2 k-划分 $\sqcup_{i<k} A_i = \mathbb{N}$ 定义为一个可计算函数 $f\colon \mathbb{N}^2 \to k$，使得对于所有满足 $n \in A_i \leftrightarrow \lim_{s\to\infty} f(n,s) = i$ 的 $n \in \mathbb{N}$，$\lim_{s\to\infty} f(n,s)$ 存在。

定义2.13。1. RT^n_k 是如下陈述：对于自然数的 n元组上的任意 k-染色，至少存在一种颜色对应的无限齐次集。

2. RT^n 是陈述 $\forall k \mathrm{RT}^n_k$。

3. COH 是如下陈述。对于任意可数集序列 $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，存在一个无限集 C，使得对于所有 i，$C \subseteq^* R_i$ 或 $C \subseteq^* R^c_i$。这里，$X \subseteq^* Y$ 表示 $X \setminus Y$ 是有限的。4. D^2_k 是如下陈述。对于任意 Δ^0_2 k-划分 $\sqcup_{i<k} A_i = \mathbb{N}$，存在一个无限集 B，使得对于某个 i，有 $B \subseteq A_i$。5. D^2 是陈述 $\forall k \mathrm{D}^2_k$。

备注 2.14. 在标准数学中，通过对颜色数进行归纳法，显然 RT^2_2（分别是 D^2_2）蕴含 RT^2（分别是 D^2_n）。然而，由于缺少归纳法，我们需要在 RCA_0 中区分这两个概念。事实上，即使从 $\mathrm{I}\Sigma^1_0$ 出发也无法证明它们等价，而我们的大多数构造应当在 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 或 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 中进行。

命题 2.15 （[1, 引理 7.11 和 7.13]）。 RCA_0 证明如下结论。

1. $\mathrm{RT}^2_k \leftrightarrow \mathrm{COH} + \mathrm{D}^2_k$，

2. $\mathrm{RT}^2 \leftrightarrow \mathrm{COH} + \mathrm{D}^2$。

我们还考察了另一个原理，即 $Erd\prime\prime$os-Moser 原理。Erd$\prime\prime$os-Moser 原理（EM）作为拉姆齐配对定理分解的一部分而受到关注。Towsner 和 Yokoyama [18] 考察了 EM 的多着色变体，并证明其中一个变体 EM$_{<\infty}$ 是 Π^1_1-在 IΣ^0_2 上保守的。我们在 I $\ll^2$ 中证明了 EM 的-基定理$_{<\infty}$，Σ^0_2 采用了与 COH 和 D 类似的技术$^2_2$。这为上述保守性结果提供了一种新的、更简单的证明。关于 Erd$\prime\prime$os-Moser 原理的一些近期观察，另请参见 [10] 和 [11]。我们考察了下文定义的关于 fallowness 性质的 Erd$\prime\prime$os-Moser 原理。

定义 2.16. 若对任意满足 $x < y < z$ 的 $x, y, z \in A$，都有 $c(x, z) \in \{c(x, y)\ c(y, z)\}$，则称 k-染色 $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to k$ 在 $A \subseteq \mathbb{N}$ 上是闲置的。

定义 2.17. EM$_{<\infty}$ 是如下命题：对于任意 k 和 k-染色 c，存在一个无限集 $A \subseteq \mathbb{N}$，使得 c 在其上是闲置的。原理 sEM$_{<\infty}$ 是如下命题：对于任意k 和稳定的 k-染色 c，存在一个无限集 $A \subseteq \mathbb{N}$，使得 c 在其上是闲置的。这里，若对每个 x，$\lim_y c(x, y)$ 都存在，则称 k-染色c 是稳定的。

2.3 $\ll^n$-关系与类低基定理

在本小节中，我们介绍 $\ll^n$-关系以及 WKL$_0$ 的有效编码 ω-模型。$\ll^n$-关系由 [3] 引入，用于将递归论讨论与保守性结果结合起来。

定义 2.18. $X \ll^n_A Y$定义为：任何无限的 $\Delta^{X\oplus A}_n$-可定义 0-1树都有一条 $\Delta^{Y\oplus A}_n$-可定义路径。

当 $A = \emptyset$ 时，我们省略下标 A。注意，$X \ll^1_\emptyset Y$ 等价于如下陈述：X 相对于 Y具有 PA 度。本小节中出现的 $X \ll^n_A Y$ 的大多数性质，都是对 PA 度性质的重新表述。

以下定义可在 RCA$_0$+BΣ^0_n 中给出。

定义 2.19. 设 P是一个 Π^1_2语句，其形式为 $\forall X \exists Y\, \theta(X, Y)$，其中 θ 是一个 Σ^1_0公式。P 的 $\ll^n_A$-基定理是以下陈述：对于满足$X \ll^n_A Z$的集合 X、Z 和 A，存在一个 $\Delta^{Z\oplus A}_n$-可定义集 $\widetilde{Y}$，使得 $\theta(X, \widetilde{Y})$ 且 $(X \oplus \widetilde{Y}) \ll^n_A Z$。（这里，称 $\widetilde{Y}$是 X的一个 P-解。）

为了构造 $\ll^2$-基定理的一个解，我们使用具有额外可计算性的 WKL$_0$ 的编码 ω-模型。事实上，编码 ω-模型的概念与关系 $\ll^n$有着紧密而重要的联系。下面的定理仔细地重新表述了这一众所周知的事实：WKL$_0$ 证明了一个可数的 WKL$_0$编码 ω-模型的存在性。

定理 2.20。设 $(M, \mathcal{S})$ 是 RCA$_0$ 和 $A \in \mathcal{S}$的一个模型。那么存在一个 0-1树 $T \in \mathcal{S}$，使得 $T \leq_{\mathrm{T}} A$ 并满足以下条件：

> 若 $\mathcal{W}$ 是 T 的一个可定义路径，且 I$\Sigma^{A\oplus\mathcal{W}}_1$成立，那么它是形如 $\mathcal{W} = (\langle W_i\rangle_{i\in M}, f_{\mathcal{W}}, g_{\mathcal{W}})$ 的三元组，使得
>
> 1. $A = W_0$, 2. $\forall i, j (W_{f_{\mathcal{W}}(i,\ j)} = W_i \oplus W_j)$, 3. $\forall e, i (\forall n \exists \sigma \pi_0(n, e, \sigma, W_i\upharpoonright n) \to \forall n \pi_0(n, e, W_{g_{\mathcal{W}}(e,\ i)}\upharpoonright n, W_i\upharpoonright n))$。（回想一下，$\forall n \pi_0(n, e, \sigma, W_i\upharpoonright n)$ 是一个带有显式变量的全称 Π^0_1 公式。）

我们称这样的对象为一个有效编码的、包含 A 的 WKL$_0$ 模型 ω。

将其与形式化低基定理（定理2.7）结合起来，我们得到如下结论。

定理 2.21. 若 $(M,\mathcal{S})$ 是 RCA$_0$ 和 $A\in\mathcal{S}$ 的模型，则存在一个 bool(Σ^A_1)-可定义集合 $\mathcal{W}$，使得 I$\Sigma^{A\oplus\mathcal{W}}_1$，且 $\mathcal{W}=(\langle W_i\rangle_{i\in M},f_{\mathcal{W}},g_{\mathcal{W}})$ 是一个有效编码的 ω-模型，满足弱柯尼希引理$_0$，并包含 A。此外，BΣ^A_2 蕴含这样的 $\mathcal{W}$ 可以取为相对于 A 的低集。

注意，$(M,\langle W_i\rangle_{i\in M})$ 确实是弱柯尼希引理$_0$ 的一个模型，其中只包含 bool(Σ^A_1)-可定义集；并且如果 BΣ^A_2 在 $(M,\mathcal{S})$ 中成立，那么这些集合相对于 A 也是低的。

定理 *2.20* 的证明。 由于证明是标准的，我们概述有效编码的 ω-模型存在性的关键思想。核心思路与 [3]（引理 3.2）中的相同。我们定义一棵树T，其路径编码了在（ω，M，$\mathcal{S}$）中的一个有效编码的 $\sigma\in T$-模型。节点 W_i编码了关于 σ 的一段的信息。粗略地说， s 定义如下。这里 σ 是与 的长度相关的某个界。

- $\sigma(\langle 0,k\rangle)=1$ 当且仅当 $k\in A\restriction s$,
- $\sigma(\langle\langle 0,i,j\rangle,k\rangle)=1$ 当且仅当 $k\in W_i\oplus W_j$,
- 如果 $\langle 1,e,i\rangle<s$ 和 $\exists\tau\in M^s\forall n<s\pi_0(n,e,\tau\restriction n,W_i\restriction n)$，那么 $\forall n<s\pi_0(n,e,\{x<s\mid\sigma(\langle\langle 1,e,i\rangle,x\rangle)=1\},\{x<s\mid\sigma(\langle i,x\rangle)=1\})$。

注意， $\{x<s\mid\sigma(\langle k,x\rangle)=1\}$ 的作用如同它是 $W_k\restriction s$。如果我们有额外假设$A'\in\mathcal{S}$，就可以应用低基定理（在 $\mathcal{W}$中）来选取一条相对于 A低的路径。在此情形下$\langle 0,i,j\rangle$ 和 $\langle 1,e,i\rangle$ 分别充当 $f_{\mathcal{W}}$ 和 $g_{\mathcal{W}}$。 □

在有效编码的 ω模型中，我们可以得到第3节证明中使用的一些算子。换句话说，可以将一个算子实现为一个图灵可归约于 $\mathcal{W}$的函数，使得对于给定的输入 i_0、……、 i_{k-1}，输出一个 $\mathcal{W}$中集合的索引，该集合由W_{i_0}、……、 $W_{i_{k-1}}$得到。以下是一些典型例子。

例 2.22. RCA$_0$ 证明如下结论。对于给定的有效编码的 ω-模型 $\mathcal{W}$，以下算子 h_1、……、 h_6 图灵可归约于 $\mathcal{W}$。

1. 对于任意 e 和 i，如果第 e 个 $\Pi^{W_i}_1$ 类非空（换言之， $\forall n\exists\sigma\pi_0(n,e,\sigma,W_i\restriction n)$ 成立 †），那么 $W_{h_1(e,i)}$ 就是该类中的一个成员。2. 对于任意 e，令 Φ_e 为第 e 个 $\Pi^{\mathcal{W}}_1$ 句子。如果 $h_2(e)=0$，那么 Φ_e 为真；如果 $h_2(e)=1$，那么 Φ_e 为假。3. 给定 i 和 k， $W_{h_3(i,k)}$ 是从 W_i 中移除最小的 k 个元素后得到的集合（此处，如果 $|W_i|\leq k$，则 $W_{h_3(i,k)}=\emptyset$ ）。4. h_4、h_5、 h_6 用于描述集合的并集、交集和补集。对于我们的主要构造，以下实现最为重要。

†我们采用如下约定：将由 Π^X_1公式 Π^X_1类定义的集合称为可定义集。

命题 2.23。设 $R_0(i,X)$ 和 $R_1(i,X)$ 是 Π^X_2 公式。那么以下内容可在 RCA_0 中证明。设 X 为一个集合，且 $\mathcal{W}$ 是一个有效编码的 ω-模型 $\mathcal{W}=\langle W_i\rangle$，其中包含 X'（它作为一个集合存在）。那么存在一个函数 $h\leq_{\mathrm{T}}\mathcal{W}$，使得

$$\forall j[R_0(j,X)\vee R_1(j,X)\to(h(j)=0\to R_0(j,X))\wedge(h(j)=1\to R_1(j,X))].$$

证明。核心思路源自 [5]中定理 6.44 的证明。为简便起见，也为了后续使用，我们考虑这样的情形：R_0 表示 $W\cap W_j$ 是无限的，而 R_1 表示对于给定集合 $W\cap W_j^c$是无限的 W。就本文而言，我们将 W 视为 W_i，其中 i是某个固定指标。

定义一个 X'-部分可计算函数 $\psi(i,j)$，它找到 n 和 k，使得 $\forall m\geq n\neg(W_i(m)=1\wedge W_j(m)=1-k)$，并输出 k。根据 PA 度的众所周知的刻画，$X'\ll Z$意味着我们可以定义一个扩展 ψ 的全 Z-可计算函数 $\overline{\psi}$。若 $\overline{\psi}(i,j)=0$，则 (A)$W_i\cap W_j$是有限的，或 (B) $\psi(i,j)$ 未定义。在这两种情况下，$W_i\cap W_j^c$都是无限的。若 $\overline{\psi}(i,j)=1$，则 (C) $W_i\cap W_j$ 是无限的，或 (B) $\psi(i,j)$ 未定义。在这两种情况下，$W_i\cap W_j$ 都是无限的。□

为简化我们的构造，我们使用以下命题。

命题 2.24。在 RCA_0 中可以证明如下结论。设 $X\ll Y$ 的 ω-模型 $\mathcal{W}$，其中包含 X，且满足 $X\ll\mathcal{W}\ll Y$。

命题 2.25。P 的 $\ll^2$-基定理等价于以下陈述：对于满足 $A'\ll C$ 的集合 A 和 C，存在一个 P 的 B-解 A，使得 $(A\oplus B)'\ll C$。

作为一个引理，我们来看下面这个引理，它给出了 $\ll^n$-关系的完整刻画。

引理 2.26。在 RCA_0 中可以证明如下结论。对于任意集合 X 和 Y，$\mathrm{B}\Sigma^Y_n$ 意味着以下条件等价。

1. $X\ll^n Y$，
2. 存在一个 Δ^Y_n 集合 $\mathcal{W}$，它编码了一个包含 $X^{(n-1)}$ 的 WKL_0 的 ω-模型，
3. 任何非空的 $\Pi_1^{X^{(n-1)}}$-类都有一个 Δ^Y_n 元素。

即使在 RCA^*_0 中，条目 1 和 2 也等价；参见 [3], 引理 4.8 (b)。条目 1 和 3 等价，这直接由定义可得。

注意，“$\mathcal{W}$ 是一个有效编码的、包含 A 的 WKL_0 的 ω-模型”这一断言在 WKL_0 上是 $\Pi^0_1{}^{,A}$。

命题 2.24 的证明。由于 $X\ll Y$，由定理 ω-模型 $\mathcal{W}_1\leq Y$ 的弱柯尼希引理$_0$，存在一个有效编码的、包含 X 的模型2.20。于是，我们得到另一个有效编码的 ω-模型 $\mathcal{W}_2$，它在 X 中包含 $\mathcal{W}_1$。回顾定理 2 2.20 中的条件：$g_{\mathcal{W}_2}$ 指定了非空 $\Pi_1^{\mathcal{W}_1}$-类中的一个元素。这意味着 $\mathcal{W}_2\ll\mathcal{W}_1$。由于 $\mathcal{W}_1\leq_{\mathrm{T}}Y$，$\mathcal{W}_2$ 就是所需的编码模型。□

命题 2.25 的证明。一个方向只需简单修订。注意，$X\ll^2 Y$ 等价于$X'\ll Y'$。对于另一个方向，假设关于 P的 $\ll^2$基定理。取满足$A'\ll C$的集合 A 和 C。根据跳跃反演定理，我们可以取一个集合 D，其跳跃与C图灵等价。然后，由于 $A\ll^2 D$，我们可以应用关于 A 的 $\ll^2$基定理和 D。由此得到一个 P解B，使得（$A\oplus B$）$\ll^2 D$，这意味着（$A\oplus B$）$'\ll D'=C$。

□

3 拉姆齐定理分拆的类低基定理

低$_n$ 基定理在拉姆齐定理的背景下得到了充分研究。本文 $\ll^n$基定理是在第2.3 节中引入的，它是低$_n$基定理的推广。我们借鉴有关低$_n$ 基定理的一些结果，来探讨 $\ll^n$基定理并推导保守性结果。Fiori、Kołodziejczyk、Wong 和 Yokoyama 基本上讨论了 $\ll^2$基定理与 Π^1_1保守性之间的关系，见[3]。

本节中，我们证明 $\ll^2$-COH 的基定理、D^2_2,D^2 和 sEM 的基定理$_{<\infty}$。对于 COH 和 $\mathrm{D}^2_{(2)}$，利用 RT 的分解$^2_{(2)}$ （命题2.15），我们得出 RT 的 $\ll^2$-基定理是可证的$^2_{(2)}$。

定理 3.1. 1. $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 证明 RT^2_2, 的 $\ll^2$-基定理

2. $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 证明 $\mathrm{EM}_{<\infty}$ 的 $\ll^2$-基定理,

3. $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 证明 RT^2 的 $\ll^2$-基定理。

定理 3.1.1 的证明中所用的技巧，在可计算性视角下研究拉姆齐配对定理时，通常称为“首次跳跃控制论证”。在 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 中对该证明进行形式化（例如，基于[5]中的构造）仍然很直接（另见 [10]中的另一种证明）。在此，我们仔细改进该构造，从而在适当的系统中得到 $\mathrm{EM}_{<\infty}$ 和 RT^2 的首次跳跃控制证明。这为一些已知的保守性定理提供了更简单且统一的证明。此外，基于上述论证的保守性证明还可以改进为多项式时间可计算证明变换，这将发表于 Ikari-Kolodziejczyk-Yokoyama 即将发表的论文中。准确的表述见第 4节。本文其余部分将用于证明定理 3.1。

3.1 COH 的 $\ll^2$-基定理

COH 是 RT^2_2 和 RT^2的重要分解。在本小节中，我们展示 $\ll^2$-COH 的基定理可由 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 证明，以此说明主要技巧；该技巧是定理 3.1证明的一部分。本质上，这是对 [5]中定理 6.44 的形式化。更准确地说，我们证明以下定理。

定理 3.2. 以下内容可在 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 中证明。对于任意集合 X 和 Z，若满足 $X' \ll Z'$，且给定一个由 X-可计算的集合序列 $\vec{R}$，则存在一个 $\vec{R}$-相干集合 C，使得 $(X \oplus C)' \ll Z'$。

证明。设 $(M, \mathcal{S})$ 是 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 的一个模型。固定 X 和一个集合 Z，使得 $X' \ll Z'$ 属于 $\mathcal{S}$。考虑模型 $(M, \Delta^0_2(M, \mathcal{S})) \models \mathrm{RCA}_0$,，其中 $\Delta^0_2(M, \mathcal{S})$ 是所有可定义集 $Z \subseteq M$ 的集合，且对某个 $X \in \mathcal{S}$ 有 $(M, \mathcal{S}) \models Z \leq_{\mathrm{T}} X'$。

作为证明的准备，令 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{W}$ 为 WKL_0 的有效编码 ω-模型，使得$X' \in \mathcal{U}$、$\mathcal{U} \ll Z'$、$\mathcal{W} \in \mathcal{U}$、$X \in \mathcal{W}$和 $\mathcal{W}' \equiv X'$。我们构造一个集合 C，使其满足以下条件：(i) 是无限的；(ii) 对每个 i，满足 $C \subseteq^* R_i$ 或 $C \subseteq^* R_i^c$；(iii) C 的跳跃图灵可归约于编码的 ω-模型。这里我们使用定理 2.20.4 来满足 $\mathcal{W}' = X'$。我们在 $\mathcal{U}$ 中以可计算方式进行 Mathias 强迫。注意，由于 $Z' \in \Delta^0_2(M, \mathcal{S})$，因此 $\mathcal{U} \in \Delta^0_2(M, \mathcal{S})$；故本证明中可以使用 $\mathrm{I}\Sigma^{\mathcal{U}}_1$。这里，我们使用由配对 $p = (F, I)$ 构成的 Mathias 强迫概念，其中 $F \in \mathcal{W}$是有限集， $I \in \mathcal{W}$是无限集，并且 $\max F < \min I$。注意，每个 F都由其有限集的指标表示，

而每个 I 都由其在编码模型 $\mathcal{W}$中的指标表示。我们按如下方式在 $\mathbb{P}$ 上定义偏序 $\preceq$。

$$(F,I) \preceq (E,H) :\Leftrightarrow F \supseteq E \wedge F \setminus E \subseteq H \wedge I \subseteq H.$$

为确保泛型集满足这些条件，我们从 $\mathbb{P}$ 构造一个条件序列，并考虑关于 $(F,I) \in \mathbb{P}$ 的以下要求。注意，它们中的每一个都是Σ^I_1 或 Π^I_1。

(D_n) $I \subseteq R_n \vee I \subseteq R^c_n$, (E_n) $|F| \geq n$, (R_e) $\Phi^F_{e,\max F}(e)\downarrow$,
(N_e) $\nexists D \subseteq_{\text{fin}} I(\Phi^{F\cup D}_e(e)\downarrow)$.

我们逐阶段构造一个条件序列 $\langle p_s\rangle_{s\in\mathbb{N}}$，使其满足以下条件。

$$\forall e \exists s (p_s \text{ satisfies } E_e \wedge (R_e \vee N_e) \wedge D_e). \tag{1}$$

在阶段 $s+1$，从 $\{E_n\}_n$ 中选取尚未满足的最小要求，$\{R_e \vee N_e\}_e$ 和 $\{D_n\}_n$。注意，这一选择可以在 $\mathcal{U}$ 内确定。

对于要求 E_n：令 D 由 I_s 中最小的 $(n - |F_s|)$ 个元素组成，并定义$F_{s+1} = F_s \cup D$, $I_{s+1} = I_s \setminus [0, \max D]$。

对于要求 $R_e \vee N_e$：询问 $\mathcal{U}$ 是否存在一个 $D \subseteq_{\text{fin}} I_s$，使得 $\Phi^{F_s\cup D}_{e,\max D}(e)\downarrow$。如果答案是“是”，那么我们固定这样一个 $D \subseteq I_s$，以定义 $F_{s+1} = F_s \cup D$ 和 $I_{s+1} = I_s \setminus [0, \max D]$。如果答案是“否”，那么我们定义 $F_{s+1} = F_s$ 和 $I_{s+1} = I_s$。

对于要求 D_n，我们定义 $F_{s+1} = F_s$。我们让 $\mathcal{W}$ 从 $I_s \cap R_n$ 或 $I_s \cap R^c_n$ 中选取一个无限集，并将其定义为 I_{s+1}。

注 3.3。回顾一下，R 是一个 X-可计算的，而 $\mathcal{W}$ 在 $I \cap R$或 $I \cap R^c$ 中 I 为无限集时，可以选取一个无限集（命题2.23）。此外，上述出现的所有其他操作和判断都可以在有效编码的 ω-模型 $\mathcal{U}$中完成。

构造完成后，我们定义 $C = \cup_s F_s$。我们验证 C 满足所需条件。(i) 显然，n 对所有情况都成立，因为存在一个 C 的片段 F_s 满足 E_n。(ii) 对于 $\vec{R}$-凝聚性，我们固定 e 和 s，使得 p_s 满足 D_e。根据构造和 $\mathbb{P}$ 的定义，阶段 s 之后所有可能加入 C 的元素都包含在 I_s 中。因此，$C \setminus R_e \subseteq F_s$ 或 $C \setminus R^c_e \subseteq F_s$ 成立。这意味着 $C \subseteq^* R_e$ 或 $C \subseteq^* R^c_e$。(iii) $(C \oplus X)' \leq_{\text{T}} \mathcal{U}$ 的验证遵循标准论证。我们固定 e，并取一个 s，使得 p_s 满足 $R_e \vee N_e$，然后判断 $\mathcal{U}$ 哪一种成立。如果 p_s 满足 R_e，那么 $\Phi^{F_s}_e(e)\downarrow$。这意味着 $e \in C'$，因为 $F_s \subseteq C$。如果 p_s 满足 N_e，那么 $e \notin C'$，因为阶段 s 之后加入 C 的每个元素都是 I_s 的元素。这意味着 C' 可由 $\mathcal{U}$ 计算。由于 $\mathcal{U} \ll Z'$，C 满足所需的复杂度。

□

注 3.4。 1. 回想一下，我们可以使用 $\text{I}\Sigma^{\mathcal{U}}_1$，这有助于我们使用 $\mathcal{W}$-原始递归（定理 2.8）。这样就能顺利完成上述验证过程。

2. 证明某个构造出来的集合的跳跃可由一个固定预言机计算（在我们的情形中，是一个有效编码的 ω-模型），是递归论中的常用技巧。关于拉姆齐定理各组成部分背景下的讨论，见 [1] 或 [5]。事实上，我们在以下各节中重复使用这类证明，并仅简要提及而省略此类证明。

3.2 Erdős–Moser 原理的 $\ll^2$-基定理

回顾一下，Erd˝os-Moser 原理是拉姆齐定理的一种有意义的划分。通过类似于上一节的讨论，我们证明 EM$<\infty$ 的 $\ll^2$-基定理。更确切地说，我们证明以下定理。

定理 3.5。在 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 中可以证明如下结论：对于任意数 k、k-染色 c 以及满足 $c' \ll Z'$ 的任意集合 Z，存在一个无限集 B，使得 c 在 B 上是平凡的，并且 $(c \oplus B)' \ll Z'$。

证明。根据通常的讨论，我们可以证明 $\mathrm{RCA}_0+\mathrm{I}\Sigma^0_2 \vdash \mathrm{COH}+\mathrm{sEM}_{<\infty} \to \mathrm{EM}_{<\infty}$。因此，只需证明 sEM$<\infty$ 的 $\ll^2$-基定理。

设 $(M, \mathcal{S})$ 是 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 的一个模型。固定一个数 k、一个稳定的 k-染色 c，以及一个满足$c' \ll Z'$ 且属于 $\mathcal{S}$ 的集合 Z。考虑模型 $(M, \Delta^0_2(M, \mathcal{S})) \models \mathrm{RCA}_0$。

作为证明的准备，设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{W}$ 是经过有效编码的 ω 的模型弱柯尼希引理$_0$，满足$c' \in \mathcal{U}$，$\mathcal{U} \ll Z'$，$\mathcal{W} \in \mathcal{U}$，$c \in \mathcal{W}$，以及 $\mathcal{W}' \equiv X'$。这里我们使用定理 2.20.4 来满足 $\mathcal{W}' = c'$。我们在 $\mathcal{U}$ 中可计算地进行 Mathias 强迫。

我们构造一个集合 B，使得：(i) B 是无限的；(ii) 对任意 x、y、$z \in B$，满足 $x < y < z$、$c(x, z) \in \{c(x, y)\ c(y, z)\}$；(iii) B' 图灵可归约于编码的 ω-模型。

对每个 $i < k$，定义 $A_i = \{x \mid \lim_y c(x, y) = i\}$。我们将 Mathias 强迫$\mathbb{P}$ 定义为满足以下条件的有序对 $p = (F, I)$ 的集合：(i) $I \in \mathcal{W}$ 是无限的；(ii) $F \in \mathcal{W}$ 是有限的；(iii) $\max F < \min I$；(iv) c 在 F 上是 fallow 的；(v) $\forall z \in I$ c 在 $F \cup \{z\}$ 上是 fallow 的；(vi) $\forall x \in F, \forall z, z' \in I (c(x, z) = c(x, z'))$。当 (F, I) 满足 (ii)–(vi) 时，称其为前条件；满足 (i)–(vi) 时，称其为条件。注意，对于给定的 (F, I)，只要 E 是 I 的一个有限子集，且 c 在其上是 fallow 的，那么 $\in \mathbb{P}$, c 就在 $F \cup E$ 上是 fallow 的。(iv) 和 (v) 保证了这一点。

我们考虑关于前条件 $p = (F, I)$ 的以下陈述。

(E^+_n) $|F| \geq n$, (R_e) $\Phi^F_{e,\ \max F}(e)\downarrow$, (N_e) $\nexists D \subseteq_{\mathrm{fin}} I$ (c 在 $F \cup D \wedge \Phi^{F \cup D}_e(e)\downarrow$ 上具有 fallowness 性质)。

我们对自然数 n 和 e 的 Mathias 强迫要求为 $E^+_n, R_e \vee N_e$。

通过构造，我们在保持 fallowness 性质的同时满足这些要求。作为 Mathias 强迫构造的术语，我们定义以下三个概念：正向强迫、相容性和负向强迫。

~定义 3.6。设 (F, I) 是一个（前）条件，J 是 E^+_n 或 R_e 之一。

~ ~1. 当 F 满足 J 时，(F, I) 正向强迫 J；

~ ~2. 当 $\exists E \subseteq I (F \cup E$ 满足 $J \wedge c$ 在 $F \cup E$ 上具有 fallowness 性质) 时，(F, I) 与 J 相容；

~ ~3. 当 (F, I) 与 J 不相容时，(F, I) 负向强迫 J。换言之，$\forall E \subseteq I (c$ 在 $F \cup E \to F \cup E$ 上具有 fallowness 性质)不满足 J。此外，在 $J = R_e$ 的情况下，且 (F, I) 满足 N_e。

注 3.7. 1. 对于任意条件（F，I）和 n，（F，I）与 E^+_n 相容。换言之，在任何关注 E^+_n 的阶段，我们都能找到一个扩张来满足 E^+_n。

2. 这种对“满足”的分类与沿着 Mathias 强迫进行构造的基本策略一致。粗略地说，在每个阶段，我们将条件 p 扩张为一个条件：(i) 如果 p 与该阶段关注的要求相容，就将其扩张为正向强迫该要求的条件；(ii) 如果 p 与该要求不相容，就将其扩张为负向强迫该要求的条件。

~在阶段 $s+1$，对于固定的 (F, I)，$\in \mathbb{P}$ 令 J 为 E_n^+ 或 R_e 中在阶段 s 之前尚未被强迫的一个。我们提出以下 Σ_1^I 问题，$\mathcal{U}$ 可以回答该问题。

$$\exists t(\forall \langle C_i\rangle_{i<k} : \text{ partition of } I\restriction t)(\exists i<k)((F, C_i) \text{ is compatible with } \widetilde{J}). \tag{2}$$

根据答案，我们继续进行构造。注意，这一点是 Σ_1^I，因为我们在一个有效编码的 WKL ω-模型中工作，而 WKL_0 具有紧致性。

情形 1 答案是肯定的。固定这样一个 t。注意，$\langle A_i \cap I\restriction t\rangle_{i<k}$ 是 k的 $I\restriction t$划分。于是~存在一个 $i<k$，使得 $(F, A_i \cap I\restriction t)$ 与 J相容。取一个有限集 $E \subseteq A_i \cap I\restriction t$~，使得 $F \cup E$ 满足 J，且 c 在 $F \cup E$上是空闲的。利用 $\mathcal{U}$定义 m为满足 $\forall x \in F \cup E \forall m' \geq m(c(x, m) = c(x, m'))$ 的最小数。注意，由于 c是稳定的，这样的 m存在。此外，$\mathcal{U}$决定了该值，并且 E是 A_i的子集。现在，$(F \cup E, I \setminus [0, m])$ 是 (F, I)~的适当扩张，并且正向强迫 J。

情形 2 答案是否定的。这意味着 $\forall t(\exists \langle C_i\rangle_{i<k} : I\restriction t$ 的划分$)(\forall i<k)((F, C_i)$ 负向~强迫 $J)$。由于 $\mathcal{W}$ 是弱柯尼希引理的一个有效编码的 ω-模型，它选取了 k 的一个 $_0$, -划分 $\langle C_i\rangle_{i<k}$，使得 I ~ ~满足 $(\forall i<k)((F, C_i)$ 负向强迫 $J)$。固定这个 $\langle C_i\rangle_{i<k}$。在情形 $J = R_e$ 中，这意味着 $\nexists D \subseteq_{\text{fin}} C_i(c$ 在 $F \cup D \wedge \Phi_e^{F\cup D}(e)\downarrow$ 上是荒芜的)。于是，对任意 $i<k$，(F, C_i) 都满足 N_e。接着，我们固定一个无限集 C_i，以取一个恰当的扩张 (F, C_i)。注意，由于 I 是无限的，至少有一个 C_i 必须是无限的。我们可以（相对于 $\mathcal{W}$）应用命题 2.23 k 次，选出一个 i，使得 C_i 是无限的。

最后，我们得到一个条件序列 $\langle p_s\rangle_s$，使得

$$\forall e, n \exists s((F_s, I_s) \text{ satisfies } E_n^+ \wedge (R_e \vee N_e)).$$

为证明定理 3.5，我们定义 $B = \cup_s F_s$。根据构造，显然 c 在 B上具有 fallowness 性质。关于无限性以及跳跃的图灵可约性的论证，与定理 3.2的证明相同。

□

注记 3.8. 1. 基本思路是扩展有限集，同时保持其 fallowness 性质以及关于 B' 的正信息。我们限制无限储备集，以保留关于 B' 的负信息，具体来说，是关于其中至少那些“fallowness 候选者”的信息。

2. 构造的核心思路是考虑有限划分：如果没有候选者正向强迫相应的 Π_1^0 要求，那么就让下一个条件负向强迫一个Σ_1^0 要求。这是该领域的一个标准思路，源自 Cholak、Jockusch 和 Slaman 的研究（[1]）。如证明中所述，由于我们在弱柯尼希引理$_0$的编码模型中工作，因此必须形式化地实现这一方法。我们在下一个证明中也会使用这一技巧。

3.3 $\ll^2$基定理：D_2^2 和 D^2

如前所述，D_2^2 和 D^2 分别是 RT_2^2 和 RT^2 的重要拆分。此外，它们及其对应的 $\ll^2$-基定理在我们的结果中发挥着重要作用。本小节将在 $\mathsf{B}\Sigma_3^0$中证明 D^2 的 $\ll^2$-基定理。具体而言，我们证明以下定理。

定理 3.9. $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 证明以下命题：对于任意数 k、$\mathbb{N}$ 的 X, Δ^X_2 k-划分$\langle A_i\rangle_{i<k}$ 以及满足 $X'\ll Z'$的任意集合 Z，存在一个无限集 B，使得 $(X\oplus B)'\ll Z'$，并且对于某个 i，有 $B\subseteq A_i$。

仔细观察证明可知，其中包含了在 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 中证明 D^2_2 的 $\ll^2$-基定理。

证明。设 $(M,\mathcal{S})$ 是 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 的一个模型。固定一个 X, Δ^X_2-划分 $\langle A_i\rangle_{i<k}$，它是 $\mathbb{N}$ 的划分，并取一个集合 Z，使得 $X'\ll Z'$ 属于 $\mathcal{S}$。考虑模型 $(M,\Delta^0_2(M,\mathcal{S}))\models \mathrm{RCA}_0+\mathrm{B}\Sigma^0_2$。

为证明作准备，取两个经过有效编码的 WKL_0 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{W}$ 的 ω-模型，使得 $X'\in\mathcal{U}$、$\mathcal{U}\ll Z'$、$\mathcal{W}\in\mathcal{U}$、$X\in\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{W}'\equiv X'$。这里我们使用定理 2.21 来满足 $\mathcal{W}'=X'$。我们在 $\mathcal{U}$ 中以可计算的方式进行 Mathias 强迫。注意，由于 $Z'\in\Delta^0_2(M,\mathcal{S})$，所以 $\mathcal{U}\in\Delta^0_2(M,\mathcal{S})$；因此我们可以在证明中使用 $\mathrm{B}\Sigma^{\mathcal{U}}_2$。我们构造一个集合 B，使得：(i) 它是无限的；(ii) 对某个 $i<k$$B\subseteq A_i$；(iii) B 的跳跃图灵可归约于经过编码的 ω-模型。

我们将 Mathias 强迫 $\mathbb{P}$定义为满足以下条件的元组集合 $p=(F^0,\dots,F^{k-1},I)$：(i) 对所有 $i<k$均有 $F^i\subseteq_{\mathrm{fin}}A_i$；(ii) $I\in\mathcal{W}$；(iii) 对所有 $i<k$n，$\max F^i<\min I$；以及 (iv) I是无限的。当元组 $p=(F^0,\dots,F^{k-1},I)$满足 (i)-(iii) 时，我们称其为前条件；当其满足 (i)-(iv) 时，则称其为条件。回忆一下，$I\in\mathcal{W}$ 由 $\mathcal{W}$的指标表示。我们在 $\mathbb{P}$ 上定义偏序 $\preceq$ 如下。

$$(F^0,\dots,F^{k-1},I)\preceq(E^0,\dots,E^{k-1},H):\Leftrightarrow\bigwedge_{i<k}(E^i\subseteq F^i\wedge F^i\setminus E^i\subseteq H)\wedge I\subseteq H.$$

对于前条件 $p=(F^0,\dots,F^{k-1},I)$，我们考虑以下命题。

$(E^i,{}_n{}^+)$ $|F^i|\geq n$，$(E^i,{}_n{}^-)$
$\nexists D\subseteq_{\mathrm{fin}}I(|F^i\cup D|\geq n)$，$(R^i_e)$
$\Phi^{F^i}_e{}_{,\max F^i}(e)\downarrow$，$(N^i_e)$
$\nexists D\subseteq_{\mathrm{fin}}I\Phi^{F^i\cup D}_e(e)\downarrow$。

定义 3.10. 令 $\{J_{e^i}\}_e$ 为 E^i_n 和下文定义的 R^i_e 的一个枚举。

$$\widetilde{J_{(2e')^i}}=E^{i,+}_{e'},\widetilde{J_{(2e'+1)^i}}=R^i_{e'}.$$

我们按 $\langle e,i\rangle$对 $\{\widetilde{J_{e^i}}\}_e$ 排序。对于（前）条件 $p=(F^0,\dots,F^{k-1},I)$ 和 $\widetilde{J_{e^i}}$，我们定义以下术语。

1. 当 F^i 满足 $\widetilde{J_{e^i}}$时，p正向强迫 $\widetilde{J_{e^i}}$；2. 当 $\exists E\subseteq_{\mathrm{fin}}I(F^i\cup E,I)$满足 $\widetilde{J_{e^i}}$时，p与 $\widetilde{J_{e^i}}$相容；3. 当 p与 $\widetilde{J_{e^i}}$不相容时，p负向强迫 $\widetilde{J_{e^i}}$。在这种情况下，(F^i,I)满足 $E^{i,e/2}$或 $N^i_{(e-1)/2}$，$\widetilde{\ }$；4. 当 p 正向强迫 J_{e^i} 或负向强迫 J_{e^i}时，J_{e^i} 由 p 判定。

注释 3.11. 注意，对于给定的 $p=(F^0,\dots,F^{k-1},I)$，命题“$\widetilde{J_{e^i}}$由 p判定”是 Π^I_1，因此 $\mathcal{U}$ 可以判断它是否成立。

在阶段 $s+1$，对于给定的 $p_s=(F_s^0,\dots,F_s^{k-1},I_s)\in\mathbb{P}$，令 e^i_{s+1}为最小的 $e^i<s$，使得 $\widetilde{J_{e^i}}$ 未被 p_s判定。我们提出以下$\Sigma_1^{I_s}$问题， $\mathcal{U}$ 可以回答。

$\exists t(\forall\langle C_i\rangle_{i<k}$： $I_s\restriction t$的划分$)(\exists i<k)((F_s^0,\dots,F_s^{k-1},I_s\cap C_i)$ 与 $\widetilde{J_{e^i_{s+1}}}$相容$)$。

根据答案，我们继续进行构造。

情形 1 答案是肯定的。固定一个 t，使得 $(\forall\langle C_i\rangle_{i<k}$： $I_s\restriction t$的划分$)(\exists i<k)(F_s^0,\dots,F_s^{k-1},$ $I_s\cap C_i)$ 与 $J_{e^i_{s+1}}$相容。由于 $\langle A_i\cap I_s\restriction t\rangle_{i<k}$是 k的一个划分，存在 $i<k$使得 $(F_s^0,\dots,F_s^{k-1},A_i\cap I_s\restriction t)$ 与 $\widetilde{J_{e^i_{s+1}}}$相容。固定一个满足 $E\subseteq A_i\cap I_s\restriction t$。那么，下面的 p_{s+1} 是一个适当扩张，无论 e^i_{s+1} 是偶数还是奇数，它都正向强迫 $J_{e^i_{s+1}}$。

$$F^j_{s+1}=\begin{cases}F^j_s & (j\neq i)\\ F^i_s\cup E & (j=i)\end{cases},\quad I_{s+1}=I_s\setminus[0,\max E].$$

情形 2 答案是 否。按照定理 3.5证明中的同样讨论，我们可以取$\langle C_i\rangle_{i<k}$一个对 I_s的划分，使得对所有 $i<k$，$(F_s^0,\dots,F_s^{k-1},I_s\cap C_i)$ 都与$\widetilde{J_{e^i_{s+1}}}$不相容。这意味着 $(F_s^0,\dots,F_s^{k-1},I_s\cap C_i)$ 满足 $E^{i,-}_{e^i_{s+1}/2}$或 $N^{i}_{(e^i_{s+1})/2}$，对每个 $i<k$均如此。选取一个 $i<k$，使得 $I_s\cap C_i$是无限的，并取一个适当的扩张 $p_{s+1}=(F_s^0,\dots,F_s^{k-1},I_s\cap C_i)$，它$\widetilde{\text{负向强迫}}$ $J_{e^i_{s+1}}$。注意，在这种情况下， $J_{e^i_{s+1}}$必须是 $N_{(e^i_{s+1}-1)/2}$，因为 $I_s\cap C_i$ 是无限的。

注 3.12. 1. 在情形 1 和情形 2 中，对于激活颜色 i，以下结论成立：$\forall e'\leq e^i_{s+1}$ $\widetilde{J_{(e')^i}}$ 由 p_{s+1}判定。

2. 根据 e^i_s's 的定义，在任意阶段 s，都存在一个 $i<k$ 使得 $e^i_{s+1}\geq e^i_s+1$。因此，对于每个 s，$(\sum_{i<k}e^i_s)\leq s$ 成立。

根据构造和上述注释，对于所构造的序列 $\langle p_s\rangle_s$，以下结论成立。

$$\forall e\exists i<k\exists s\forall e'\leq e^i_s\ \widetilde{J_{(e')^i}}\text{ is decided by }p_s. \tag{3}$$

由于命题“$\widetilde{J_{(e')^i}}$ 由 p_s判定” $\Pi^{\mathcal{W}}_1$，我们可以将 $\mathrm{B}\Sigma^{\mathcal{U}}_2$ 应用于 (3) 从而得到以下结论。

$$\exists i<k\forall e\exists s\widetilde{J_{e^i}}\text{ is decided by }p_s. \tag{4}$$

固定在 (4) 中选定的颜色 i。当 $E^{i,}{}_e{}^+$由 p_s判定时， p_s 总是正向强迫 $E^{i,}{}_e{}^+$。这是因为，当情形 I_s 为无限时， $E^{i,}{}_e{}^-$从不被 p_s 强迫。

归根结底，对于序列 $\langle p_s\rangle_s$，以下结论成立。

$$\forall e,n\exists sp_s\text{ forces }(R^i_e\vee N^i_e)\wedge E^{i,+}_n.$$

因此，对于选定的颜色 i， $B=\cup_s F^i_s$是定理 3.9所需的集合。由构造可知，$B\subseteq A_i$ 显然成立。关于其无限性及其跳跃的图灵可约性的论证，与定理 3.2的证明相同。

□

注 3.13. 如果 $k=2$ 我们不必使用 $\mathrm{B}\Sigma^{\mathcal{U}}_2$ 来选择一种颜色，那么构造和验证就都可以在 $\mathrm{I}\Sigma^{\mathcal{U}}_1$中完成。也就是说，$\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 足以证明 D^2_2的 $\ll^2$-基定理。

4 结论

本文在 $\mathrm{I} \ll^2$中构造了 RT^2_2 -解，在 $\mathrm{I}\Sigma^0_2$中构造了 $\mathrm{EM}_{<\infty}$，并在 $\mathrm{B}\Sigma^0_2$中构造了 RT^2 （定理Σ^0_3 3.1）。稍加思考，我们发现这些结果为以下已知的保守性结果提供了更简洁的证明。

推论 4.1 （Towsner 和 Yokoyama [18]）。 弱柯尼希引理$_0 + \mathrm{EM}_{<\infty} + \mathrm{RT}^2_2 + \mathrm{I}\Sigma^0_2$ 是 Π^1_1的保守扩张 $\mathrm{RCA}_0 + \mathrm{I}\Sigma^0_2$。

推论 4.2（Slaman 和 Yokoyama [17]）。弱柯尼希引理$_0 + \mathrm{RT}^2$ 是 $\mathrm{RCA}_0 + \mathrm{B}\Sigma^0_3$的 Π^1_1-保守扩张。

实际上，我们将这些保守性结果扩展到关于证明变换和证明长度的结果。更具体地说，我们可以证明以下类型的陈述。

断言 4.3。存在一个多项式时间过程，对于给定的 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$-RT^2 证明，可以输出一个 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$-RT^2证明。

在证明中，我们使用强迫解释的方法，在这种意义下将基定理视为完备性。由此，我们还可以证明以下扩展结果。这是 Simpson、Tanaka 和 Yamazaki [16]结果的推广。

断言 4.4。设 P 是形如 $\forall X(\theta(X) \to \exists Y \alpha(X, Y))$ 的公式，其中 θ 和 α 是算术公式。若 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 证明了 $\ll^2$-自然数集的基定理，则存在一种多项式 Π^1_1-反射的 WKL_0+$\mathrm{B}\Sigma^0_3$+P 在 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 中的强迫解释。

结合断言 4.3 与本文的结果，我们得到断言4.4。我们将在与 Ko lodziejczyk 合作的一篇即将发表的论文中展示详细证明。

致谢

Ikari 部分受到日本科学技术振兴机构资助，资助项目为“面向科学技术创新的大学奖学金设立”，资助编号 JPMJFS2102。Yokoyama 部分受到日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号为 JP19K03601、JP21KK0045 和 JP23K03193。

参考文献

[1] P. A. Cholak、C. G. Jockusch 和 T. A. Slaman， *On the strength of Ramsey's theorem for pairs*，《逻辑符号杂志》66 (2001)，第 1 期，1–55 页（英文）。[2] C. T. Chong、T. A. Slaman 和 Y. Yang， *Π^1_1-conservation of combinatorial principles weaker than Ramsey'stheorem for pairs*，《数学进展》230 (2012)，第 3 期，1060–1077 页（英文）。[3] M. Fiori-Carones、L. A. Ko lodziejczyk、T. L. Wong 和 K. Yokoyama， *An isomorphism theorem for models ofWeak König's Lemma without primitive recursion*，《欧洲数学会杂志》（2024年）。[4] P. H´ajek 和 P. Pudl´ak， *Metamathematics of first-order arithmetic*，重印 Springer 于 1993 年出版的原版，《逻辑学视角》，剑桥：剑桥大学出版社；伊利诺伊州厄巴纳：符号逻辑协会（ASL），2016 年（英文）。[5] D. R. Hirschfeldt， *Slicing the truth. On the computable and reverse mathematics of combinatorial principles*（C. Chong、Q. Feng、T. A. Slaman、W. H. Woodin 和 Y. Yang 编），新加坡国立大学数学科学研究所讲义系列，第 28 卷，新泽西州哈肯萨克：世界科学出版社，2014 年（英文）。

[6] J. L. Hirst， *Combinatorics in subsystems of second order arithmetic*，宾夕法尼亚州立大学，198 7.

[7] C. G. jun. Jockusch, *Ramsey's theorem and recursion theory*, 《符号逻辑杂志》37 (1972), 268–280（英文）。[8] Q. Le Hou´erou, L. Levy Patey 和 K. Yokoyama, Π^0_4 *conservation of Ramsey's theorem for pairs*, 2024年。[9] Q. Le Hou´erou, L. L. Patey 和 K. Yokoyama, *Conservation of Ramsey's theorem for pairs and well-foundedness*, 美国数学会汇刊 378 (2025年), 第3期, 2157–2186（英文）。[10] , *Conservation of Ramsey's theorem for pairs and well-foundedness*, 美国数学会汇刊 378(2025年), 第3期, 2157–2186~~（英文）~~。[11] L. Levy Patey 和 A. Mimouni, *The weakness of the Erdős-Moser theorem under arithmetic reductions*, 2023年。[12] J. Liu, RT^2_2 *does not imply* 弱柯尼希引理$_0$, 《符号逻辑杂志》77 (2012), 第2期, 609–620（英文）。[13] L. Patey 和 K. Yokoyama, *The proof-theoretic strength of Ramsey's theorem for pairs and two colors*, 《数学进展》330 (2018), 1034–1070（英文）。[14] D. Seetapun 和 T. A. Slaman, *On the strength of Ramsey's theorem*, 圣母大学形式逻辑杂志 36 (1995), 第4期, 570–582（英文）。[15] S. G. Simpson, *Subsystems of second order arithmetic*, 第2版, 《逻辑学视角》, 剑桥：剑桥大学出版社；伊利诺伊州厄巴纳：符号逻辑协会（ASL）, 2009年（英文）。[16] S. G. Simpson、K. Tanaka 和 T. Yamazaki, *Some conservation results on weak König's lemma*, 纯粹与应用逻辑年刊 118 (2002), 第1–2期, 87–114（英文）。[17] T. A. Slaman 和 K. Yokoyama, *The strength of Ramsey's theorem for pairs and arbitrarily many colors*, 《符号逻辑杂志》83 (2018), 第4期, 1610–1617（英文）。[18] H. Towsner 和 K. Yokoyama, *Erdős-moser and* $I\Sigma_2$, 以色列数学杂志263 (2024年), 第2期, 843–870（英文）。