玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子波的激发谱及其与希格斯模和戈德斯通模的联系

G.M. Kavoulakis[1, 2, *1] *Department of Mechanical Engineering, Hellenic Mediterranean University, P.O. Box 1939, GR-71004, Heraklion, Greece* [2] *HMU Research Center, Institute of Emerging Technologies, GR-71004, Heraklion, Greece*

[*] *Corresponding author: G. M. Kavoulakis, email address: kavoulak@cs.hmu.gr*（日期: 2026年1月13日）

我们研究了玻色-爱因斯坦凝聚原子被限制在准一维环形势中的问题。我们关注原子之间存在有效吸引相互作用的情形。当相互作用足够强时，会形成一个局域团块（即“亮”孤波），这为自发对称性破缺提供了一个实例。我们对均匀密度分布和局域密度分布这两种情形的激发谱进行了解析和数值计算。通过考察激发谱中类似戈德斯通模和希格斯模的出现，并评估各种相关可观测量，我们进一步认识了这两种基本激发模。

arXiv:2601.07575v1 [cond-mat.quant-gas] 12 Jan 2026

一、引言

自发对称性破缺的概念在各种物理系统中都发挥着基础性作用。一般而言，当哈密顿量具有某种连续对称性，而其解却打破这种对称性时，就会发生自发对称性破缺。众所周知，当系统发生相变而进入对称性破缺的态时，相应序参量 [1, 2] 的相位和密度的集体涨落分别产生戈德斯通模 [3]和希格斯模 [4], 。

许多物理系统都呈现这些模态。尽管全面列举此类系统超出了本文的讨论范围，我们还是会提及几个例子。首先，在粒子物理学领域，希格斯模赋予基本粒子 [5–7] 质量。包括超导体[8–12], 、反铁磁体 [13] 和超冷原子 [14–21]在内的各种系统中，已有支持希格斯模存在的实验性证据；另请参阅理论研究 [22–24]。

在本研究中，我们展示了这两种模态如何出现在一个相当简单的物理系统中，即被限制在（一维）环形势中的原子玻色-爱因斯坦凝聚体，原子之间具有有效吸引相互作用。这类阱已在实验中实现，参见例如文献 [25–35]。此外，借助所谓的费什巴赫共振 [36]，可以调节描述原子间相互作用的有效势的强度和符号。在我们考虑的准一维运动条件下，当耦合 γ 低于某个临界值 γ_c时，系统会发生相变，从均匀密度分布转变为局域团块（即“明亮”孤波） [37–40]。因此，这是一个自发对称性破缺的实例。

本文的主要结果是系统在 γ 小于和大于 γ_c这两种情况下的激发谱。我们对多体问题的解析结果在 γ 保持固定、N趋于无穷大的极限下是精确的，这一点也可以从与通过对角化多体哈密顿量得到的完整数值解的比较中看出。

下文中，我们首先在第二节介绍所采用的模型。接着，在第三节展示自发对称性破缺机制如何在我们的问题中出现。在第四节和第五节中，我们分别针对均匀和非均匀密度分布这两种情况，对哈密顿量进行解析对角化。在第六节中，我们分析得到的激发谱，并将其与多体哈密顿量数值对角化所得的解进行比较。此外，我们还讨论该谱与希格斯模和戈德斯通模的关联。最后，我们评述研究结果的实验相关性。在最后一节，即第七节中，我们概述本研究的主要结果。

II. 模型

我们所考虑的物理系统由受环形势束缚的玻色-爱因斯坦凝聚原子构成。系统在横向受到强约束，使原子的运动呈（准）一维。因此，我们采用满足周期性边界条件的一维纯势的单粒子本征态作为基底，即 $\phi_m(\theta) = e^{im\theta}/\sqrt{2\pi R}$，其本征值为 $e_m = \hbar^2 m^2/(2MR^2)$。这里，$m$ 是对应于单粒子角动量的量子数， θ 是方位角， M是原子质量，而 R 是环面的“平均”半径。我们将原子间相互作用建模为接触相互作用。对于 s 波弹性原子间碰撞，其矩阵元 U_0 为 $U_0 = 2\hbar^2 a/(MRS)$。这里， a 是原子间碰撞的散射长度， S 是环的横截面积，其中 $\sqrt{S} \ll R$。因此，系统的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2MR^2}\sum \hat{c}_m^\dagger \hat{c}_m m^2 + \frac{U_0}{2}\sum_{m,n,l,k} \hat{c}_m^\dagger \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_l \hat{c}_k\, \delta_{m+n,l+k}. \tag{1}$$

这里，$\hat{c}_m^\dagger(\hat{c}_m)$ 是角动量等于 m 的粒子的产生（湮灭）算符。

我们引入无量纲参数 γ，其中$\gamma/2$是均匀相中每个粒子的相互作用能 $N\hbar^2 a/(MRS)$ 与动能 $e_1 = \hbar^2/(2MR^2)$ 之比，即 $\gamma = 4NaR/S$，其中N 为原子总数。下文中，$\hbar$、$2M$ 和 R 均设为 1。当 $\gamma < 0$ 时，系统具有（有效）吸引相互作用；而当 $\gamma > 0$ 时，系统具有（有效）排斥相互作用。正如我们在第三节中详细说明的，在平均场近似下，当$\gamma > \gamma_c = -1/2$时，密度均匀；而当 $\gamma < \gamma_c = -1/2$ 时，系统会发生向局域密度分布的（连续）相变。显然，随着 γ 降至临界值 $\gamma_c = -1/2$ 以下，密度分布会变得越来越窄。

在下面的结果中，我们采用式 (1) 的哈密顿量，并将讨论限制在具有 $m = -1$、0 和 1 的单粒子态子空间内。在平均场近似下（类似的论证也适用于多体态），可以将序参量 $\Psi(\theta)$ 在单粒子态 ϕ_m 上展开，即

$$\Psi(\theta) = \sum_m d_m \phi_m(\theta). \tag{2}$$

在均匀相中，序参量显然为 $\phi_0(\theta)$。这里的关键观察是，接近向局域相的相变时，即对于 $\gamma \lesssim \gamma_c = -1/2$，对序参量贡献占主导的单粒子态是具有 $m = -1$ 和 $+1$ 的态（当然，还包括具有 $m = 0$ 的态）。这是因为单粒子能量 e_m 随单粒子角动量的量子数 m 按二次方增长，即 $e_m \propto m^2$。通过比较动能与相互作用能进行的数量级估算表明，有显著贡献的态大致是满足$|m| \leq \sqrt{|\gamma|}$的态。实际上，在接近相变且处于局域密度分布区域时，$\gamma \lesssim \gamma_c = -1/2$，可以针对小参数 $\gamma + \gamma_c$，对振幅 d_m 作幂级数展开。因此，参数 d_m 随着$|m|$的增大而受到越来越强的抑制，其中 $|m| > 1$ [38]。

虽然我们在第三节中使用平均场近似，但在论文的其余部分，我们采用多体哈密顿量的对角化方法。在平均场近似中，假设多体态具有乘积形式。采用这种方法时，隐含地假设了 $N \to \infty$ 和 $L \to \infty$，其中 L 为总角动量，且 L/N 和γ 固定。在对角化多体哈密顿量时，我们使用有限的 N 和 L，考虑原子数算符和总角动量算符的本征态，并对所得的哈密顿矩阵进行解析和数值对角化。我们强调，由所计算的哈密顿量本征态得到的单粒子密度分布始终是轴对称的。这是因为我们使用的是角动量算符的本征态。

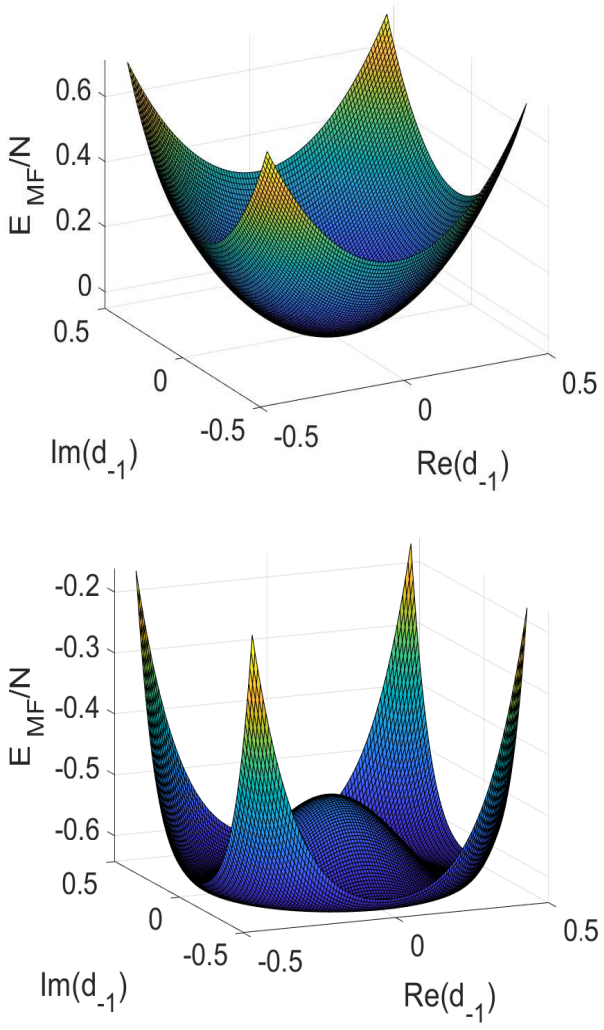


图1：公式（7）的能量 E_{MF}/N （以 e_1 为单位），在 $L/N = 0$ 时以及 γ的两种取值下，作为 Re(d_{-1}) 和 Im(d_{-1}) 的函数。上图中 $\gamma = -0.1 > \gamma_c$，且势的最小值位于中心，此处 $d_{-1} = d_1 = 0$。因此，原子的密度分布是均匀的。下图中 $\gamma = -1 < \gamma_c$、$|d_{-1}| = |d_1| \neq 0$，并形成了一个局域团块（即一列“明亮”孤波）。

III. 自发对称性破缺

在继续之前，通过显式计算展示自发对称性破缺机制是很有启发性的。因此，只有在本节中，我们才采用平均场近似。

考虑公式（2）的序参量，仅保留具有 $m = 0$ 和 $m = \pm 1$ [38]的态，

$$\Psi(\theta) = d_{-1}\phi_{-1}(\theta) + d_0\phi_0(\theta) + d_1\phi_1(\theta). \tag{3}$$

归一化条件意味着 $|d_{-1}|^2 + |d_0|^2 + |d_1|^2 = 1$。由于我们考虑固定的角动量，因此施加附加约束 $|d_1|^2 - |d_{-1}|^2 = L/N$。

单粒子能量的期望值为

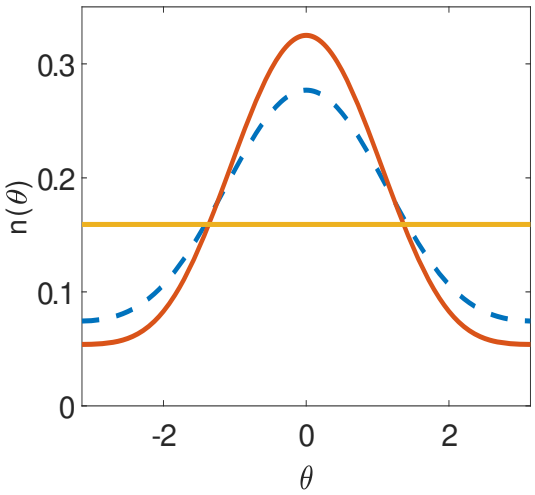


图 2：式（8）中的密度 $n(\theta) = |\Psi(\theta)|^2$ （单位为$1/R$），对应于 $L/N = 0$ 以及 $\gamma > -1/2$ （水平直线）、 $\gamma = -0.55$ （虚线曲线）和 $\gamma = -0.6$ （实线曲线）这三个取值。此处 $\varphi_c = 0$。

由下式给出

$$\frac{E_{\rm MF}}{N} = \int_{-\pi R}^{\pi R} \left|\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right|^2 dx + 2\pi R \frac{\gamma}{2} \int_{-\pi R}^{\pi R} |\Psi|^4 \, dx. \quad (4)$$

由式（3）和式（4）可得

$$\frac{E_{MF}}{N} = |d_{-1}|^2 + |d_1|^2 + \\ + \frac{\gamma}{2}[|d_{-1}|^4 + |d_0|^4 + |d_1|^4 + 4|d_{-1}|^2|d_0|^2 \\ + 4|d_{-1}|^2|d_1|^2 + 4|d_0|^2|d_1|^2 + 2|d_0|^2(d_{-1}d_1 + d_{-1}^* d_1^*)]. \quad (5)$$

由于序参量的整体相位是任意的，我们在式（3）中假设 d_0 为实数。归一化和角动量固定这两个约束［（见式（3）下方的两个方程）］使我们能够消去 d_0 和 d_1，从而将能量表示为 d_{-1}的函数，

$$\frac{E_{MF}}{N} = \frac{L}{N} + \frac{\gamma}{2}\left(1 + 2\frac{L}{N} - 2\frac{L^2}{N^2}\right) + \\ + 2(1+\gamma)|d_{-1}|^2 - 3\gamma\frac{L}{N}|d_{-1}|^2 - 3\gamma|d_{-1}|^4 + \\ + 2\gamma(1 - \frac{L}{N} - 2|d_{-1}|^2)\sqrt{|d_{-1}|^2(|d_{-1}|^2 + \frac{L}{N})}. \quad (6)$$

对于特殊情况 $L = 0$， $|d_1| = |d_{-1}|$ ，式（6）可写为

$$\frac{E_{MF}}{N} - \frac{\gamma}{2} = 2(1+2\gamma)|d_{-1}|^2 - 7\gamma|d_{-1}|^4. \quad (7)$$

由此式可知，对于 $\gamma > -1/2$，使能量最小的 d_{-1} 取值为零；而对于 $\gamma < -1/2$， $|d_{-1}|^2 = (1+2\gamma)/(7\gamma)$。

事实上，在图1中，我们绘出了公式（7）的单粒子能量 E_{MF}/N关于 Re(d_{-1}) 和 Im(d_{-1}) 的函数图像，取值为 γ 的两个值，即 $\gamma = -0.1$ （较高，此时系统处于均匀相）和 $\gamma = -1$ （较低，此时系统处于非均匀相）。正如预期的那样，我们观察到，对于 $\gamma = -0.1$ ，极小值出现在中心，即 $d_{-1} = 0$ ，且与 Ψ 对应的密度是均匀的。另一方面，对于 $\gamma = -1$，会形成“墨西哥帽”势，并且$d_{-1} \neq 0$，也就是说，密度变得不均匀。

如果 $d_{\pm 1} = |d_{\pm 1}|e^{i\varphi_{\pm 1}}$，能量的最小化意味着 $\varphi_{+1} = -\varphi_{-1} \equiv \varphi_c$。对于 $\gamma < \gamma_c$，密度为

$$n(\theta) = |\Psi(\theta)|^2 = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 4|d_0||d_{-1}|\cos(\theta - \varphi_c) + \right. \\ \left. + 2|d_1|^2\cos[2(\theta - \varphi_c)]\right). \quad (8)$$

图 2 展示了三种 γ 取值以及 $\varphi_c = 0$ 时的密度 $n(\theta) = |\Psi(\theta)|^2$，即公式 (8)。水平线对应任意 $\gamma > -1/2$ 值（即均匀相），虚线曲线对应 $\gamma = -0.55$，实线曲线对应 $\gamma = -0.6$。

我们看到， $n(\theta)$ 取决于 $\theta - \varphi_c$，而其最大值出现在 $\theta = \varphi_c$。此外，能量与 φ_c 的取值无关。更确切地说，这里存在简并，因为系统的能量与团块的位置无关。因此，这是自发对称性破缺的一个例子：尽管哈密顿量具有轴对称性，解却打破了这种对称性。

IV. 保对称解

我们从 $-1/2 < \gamma < 0$ 的情形开始，此时系统处于均匀相。下面的分析针对原子数 N “较大”、而 L 为 1 量级的极限。

利用福克态 [43]

$$|k\rangle = |(-1)^k, 0^{N-L-2k}, (+1)^{k+L}\rangle, \quad (9)$$

我们将多体态表示为

$$|\Psi(L)\rangle = \sum_k f_k |k\rangle. \quad (10)$$

我们强调，这些态是角动量本征态（我们将在下文进一步分析这一点）。现在来计算矩阵元 $H_{k,\ k'} = \langle k|H|k'\rangle$。先从对角矩阵元开始，

$$H_{k,k} = 2k + L + \\ + \frac{U_0}{4\pi}[N(N-1) + 2NL - 2L^2 + 4kN - 6kL - 6k^2]. \quad (11)$$

转向非对角线元素，

$$H_{k,k+1} = \\ = \frac{U_0}{2\pi}\sqrt{(N-L-2k)(N-L-2k-1)(k+1)(k+L+1)}, \quad (12)$$

也就是说，哈密顿矩阵是三对角的。对于较大的 N，我们得到

$$H_{k,k} = L + \frac{\gamma}{2}\left[(N-1) + 2L - 2\frac{L^2}{N}\right] + \\ +2(1+\gamma)k - 3\gamma k\frac{L}{N} - 3\gamma\frac{k^2}{N}, \qquad (13)$$

而

$$H_{k,k+1} \approx \frac{U_0}{2\pi}(N-2k-L)\sqrt{k(k+L)} = \\ = \gamma N\left(1 - 2\frac{k}{N} - \frac{L}{N}\right)\sqrt{\frac{k}{N}\frac{k+L}{N}}. \qquad (14)$$

如图3所示，对多体态有显著贡献的 k 数值为一的量级。如前所述，假设 L 为一的量级，而 N 则假设为“很大”。因此，可以忽略量级为 kL/N 和 k^2/N 的项，从而得到

$$H_{k,k} - \frac{\gamma}{2}\left[(N-1) - 2\frac{L^2}{N}\right] = (1+\gamma)(L+2k). \qquad (15)$$

此外，

$$H_{k,k+1} = \gamma\sqrt{(k+L+1)(k+1)}. \qquad (16)$$

由最后两个方程可知，哈密顿量可写成如下形式

$$H - \frac{\gamma}{2}\left[(N-1) - 2\frac{L^2}{N}\right] = \\ = (1+\gamma)(\hat{c}_{-1}^\dagger\hat{c}_{-1} + \hat{c}_1^\dagger\hat{c}_1) + \gamma(\hat{c}_{-1}^\dagger\hat{c}_1^\dagger + \hat{c}_{-1}\hat{c}_1). \qquad (17)$$

该哈密顿量可通过博戈留波夫变换对角化，参见例如 [38]，

$$\hat{b} = \lambda_1\hat{c}_{-1}^\dagger + \lambda_2\hat{c}_1 \\ \hat{d} = \lambda_2\hat{c}_{-1} + \lambda_1\hat{c}_1^\dagger. \qquad (18)$$

按照通常的步骤，可得能谱为

$$E_{n_b,n_d}(L) - \frac{\gamma}{2}\left[(N-1) - 2\frac{L^2}{N}\right] = \\ = -(1+\gamma) + \sqrt{2\gamma+1}(1 + n_b + n_d), \qquad (19)$$

其中，n_b 和 n_d 分别是数算符 $\hat{b}^\dagger\hat{b}$ 和 $\hat{d}^\dagger\hat{d}$的本征值。当 γ 较小时，上式给出（忽略 $1/N$阶的项）

$$E_{n_b,n_d}(L) - \frac{\gamma}{2}(N-1) = (1+\gamma)(n_b + n_d). \qquad (20)$$

此外，$\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{d}^\dagger\hat{d} = c_1^\dagger c_1 - c_{-1}^\dagger c_{-1} = L$。因此，$n_b - n_d = L$，从而能谱为

$$E_n(L) - Ne_{\rm hom}(\gamma) = (2n + L + 1)\,\omega_{\rm hom} - \gamma\frac{L^2}{N}. \qquad (21)$$

由上式可得

$$\Delta E_n(L) = E_n(L) - E_0(0) = (2n+L)\,\omega_{\rm hom} - \gamma\frac{L^2}{N}. \qquad (22)$$

此处 $n = n_d = 0$、1、2、.....，并且

$$e_{\rm hom} = \frac{\gamma}{2} - \frac{1+\gamma}{N} + \frac{\sqrt{2\gamma+1}}{N}, \qquad (23)$$

而

$$\omega_{\rm hom} = \sqrt{2\gamma+1}. \qquad (24)$$

关于公式（21）有三个重要观察：（i）如声子激发所预期，存在一个关于 L的一次项。（这是因为此处的单粒子密度是均匀的。）即使纳入更多单粒子态，这个一次项仍然存在，也就是说，它与所施加的截断无关。此外，一次项的系数可识别为声速 c，即 $c = \omega_{\rm hom} = \sqrt{2\gamma+1}$。在 γ较小的极限下，$c \approx 1+\gamma$。（ii）除了右侧最后一个 L^2/N阶的项之外，与量子数 n 和 L 相关的能级间距相等，其能量差为 $\omega_{\rm hom}$阶，即为一阶量。（iii）能量量子 $\omega_{\rm hom}$ 在 $\gamma = -1/2$ 时消失，并且是 γ的递增函数。

关于方程(10)中的振幅 f_k，如图3所示，它们随 k迅速衰减。这种快速衰减与该态未发生碎片化这一事实有关（对于$\gamma > -1/2$而言），即 $\langle k\rangle$ 为数量级为1的量 [42]。在此图中，我们绘出了通过对角化 $\gamma = -0.1$、$N = 1000$ 和 $L = 0$对应的哈密顿量得到的 f_k^2。我们还绘出了解析结果 $f_k \approx (|\gamma|/2)^k$，该结果在 $|\gamma| \ll 1$足够小时成立。这个结果可由本征值方程推出——见下文方程(25)——取 γ较小的极限即可得到。

V. 对称性破缺解

对于 $\gamma < -1/2$，众所周知，在平均场近似下会形成亮孤子波，正如我们在第三节中看到的那样。从振幅 f_k出发，这里的行为与上一节截然不同。如图4所示，振幅在某个 k_0 附近达到峰值（其数量级为 N）。这反映出三个单粒子态都被宏观占据，因此多体态发生了碎片化 [42]。

本征值方程的形式为

$$H_{k,k-1}f_{k-1} + H_{k,k}f_k + H_{k,k+1}f_{k+1} = Ef_k, \qquad (25)$$

其中 E 是本征值。假设振幅f_k 是光滑且可微的函数，我们将[44]展开

$$f_{k\pm1} = f_k \pm \partial_k f_k + \frac{1}{2}\partial_k^2 f_k. \qquad (26)$$

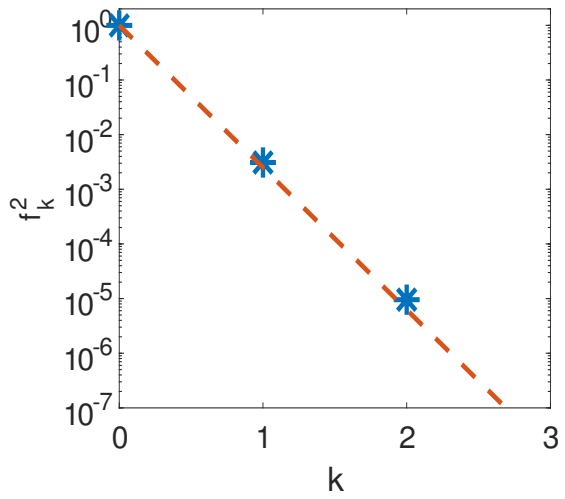


图 3 f_k^2 10 k =: 蓝色星形标记：由多体哈密顿量的数值对角化得到的振幅，方程（ ），对应于 、 和 （采用对数刻度），其中 $N = 1000$ 和 $L = 0$。虚线曲线：解析表达式 $f_k^2 = (|\gamma|/2)^{2k}$。 0 1 2 y $\gamma = -0.1$

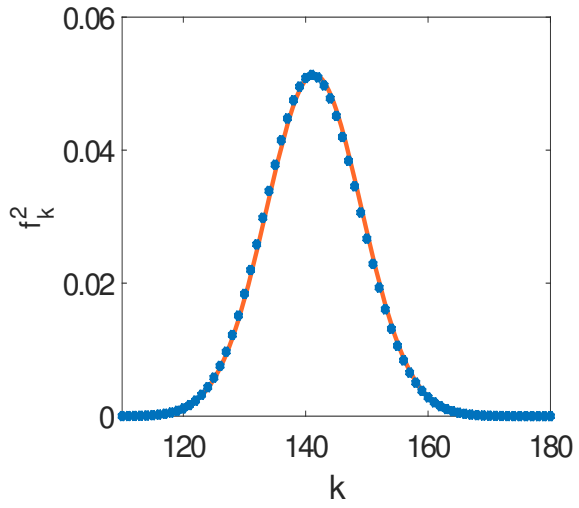


图 4 f_k^2 10 k =: 蓝色圆点：由多体哈密顿量的数值对角化得到的振幅，方程（ ），对应于 、 、 、 ，其中 $\gamma = -1$、 $N = 1000$ 和 $L = 5$。实线曲线：解析表达式，方程（42）。圆点与曲线之间的差异几乎不可见。 0 1 2 . . . 180

于是，本征值方程变为（在 N的主导阶上）

$$\frac{1}{2}(H_{k,k-1} + H_{k,k+1})\partial_k^2 f_k + V(k) f_k = E f_k, \qquad (27)$$

其中 $V(k) = (H_{k,\,k-1} + H_{k,\,k} + H_{k,\,k+1})$。上式也可写为

$$-\frac{1}{2\mu}\partial_k^2 f_k + V(k) f_k = E f_k, \qquad (28)$$

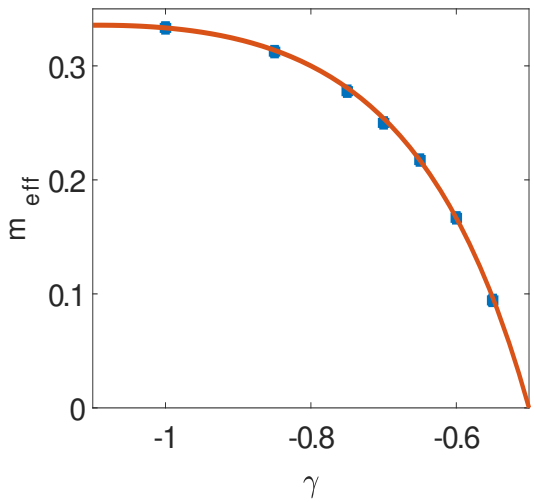


图5：由方程（41）得到的有效质量 m_{eff} （以 $2M$ 为单位）（实线曲线），以及我们从多体哈密顿量的对角化中提取的数值（方块），随 γ 的变化。这里，我们在哈密顿量的对角化中考虑了 $N = 1000$ 个原子。

其中

$$\frac{1}{\mu} = -(H_{k,k-1} + H_{k,k+1}). \qquad (29)$$

因此，该问题可化为谐振子问题。

有效势变为

$$V(k) = L + \frac{\gamma}{2}\left(N - 1 + 2L - 2\frac{L^2}{N}\right) + \\ +2(\gamma+1)k - 3\gamma k\frac{L}{N} - 3\gamma\frac{k^2}{N} + \\ +2\gamma N\left(1 - \frac{L}{N} - 2\frac{k}{N}\right)\sqrt{\frac{k}{N}\frac{k+L}{N}}. \qquad (30)$$

我们注意到， $V(k)/N$ 与式（6）一致，即与平均场解的能量一致，其中代入了 $|d_{-1}|^2 = k/N$，正如预期的那样 [44]。

现在假设 $L \ll k_0$ （我们将在下文回到这一假设）。那么，式（30）可写为

$$\frac{V(k)}{N} = \frac{\gamma}{2} + \frac{L}{N}(1+2\gamma) - \frac{3}{2}\gamma\left(\frac{L}{N}\right)^2 + \\ + \left[2(1+2\gamma) - 7\gamma\frac{L}{N}\right]\left(\frac{k}{N}\right) \\ -7\gamma\left(\frac{k}{N}\right)^2 - \frac{\gamma}{4(k/N)}\left(\frac{L}{N}\right)^2. \qquad (31)$$

对上述表达式关于 k 求极小值，可得最小值在某个 k_0 处取得，

$$\frac{k_0}{N} = \frac{1+2\gamma}{7\gamma} - \frac{L}{2N} + \frac{7}{8}\frac{\gamma^2}{(1+2\gamma)^2}\left(\frac{L}{N}\right)^2. \qquad (32)$$

相应的每原子最小能量为

$$\frac{V_{\min}}{N}=\frac{\gamma}{2}+\frac{(1+2\gamma)^2}{7\gamma}+\frac{\gamma}{4}\frac{1-5\gamma}{1+2\gamma}\left(\frac{L}{N}\right)^2. \tag{33}$$

此外，公式（30）的有效势 V可写为

$$V(k)=V_{\min}+\frac{1}{2}\lambda(k-k_0)^2, \tag{34}$$

其中

$$\lambda=-\frac{14\gamma}{N}. \tag{35}$$

最后，公式（29）中的 μ 为

$$\frac{1}{\mu}=-\frac{2}{7^2}\frac{N}{\gamma}(3\gamma-2)(1+2\gamma). \tag{36}$$

由公式（35）和（36）可推导出 $\omega_{\rm loc}$,

$$\omega_{\rm loc}=\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}=\sqrt{\frac{4}{7}}\sqrt{(3\gamma-2)(1+2\gamma)}. \tag{37}$$

整个激发谱的最终表达式为

$$E_n(L)-Ne_{\rm loc}(\gamma)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_{\rm loc}+\frac{L^2}{N}\frac{1}{2m_{\rm eff}}. \tag{38}$$

由公式（38）可知

$$\Delta E_n(L)=E_n(L)-E_0(0)=n\omega_{\rm loc}+\frac{L^2}{N}\frac{1}{2m_{\rm eff}}. \tag{39}$$

这里 $\omega_{\rm loc}$由式（37）给出，且 $n=0$、1、2，.....，而

$$e_{\rm loc}(\gamma)=\frac{\gamma}{2}+\frac{(1+2\gamma)^2}{7\gamma}, \tag{40}$$

and

$$m_{\rm eff}=\frac{2}{\gamma}\frac{2\gamma+1}{1-5\gamma}. \tag{41}$$

该方程表明， $m_{\rm eff}$ 是 γ的非单调函数，其最大值出现在 $\gamma\approx-1.09$。然而，对于$\gamma\ll-1$ ，将单粒子态截断为 $m=-1$、0 和 1，预计无法得到准确结果。

在图5中，我们绘出了式（41）给出的 $m_{\rm eff}$结果（实线曲线）。同一图中的方块表示通过对哈密顿量进行数值对角化得到的 $m_{\rm eff}$ 值。具体而言，对于 $N=1000$ 个原子以及图中所示的 γ 值，我们考察了 L的一个范围。随后，我们根据推导出的色散关系 E（L）提取曲率，进而得到$m_{\rm eff}$。我们发现这两种结果彼此吻合。

如前所述，在推导上述解析结果时，我们假设 $L\ll k_0$。由式（32）可知，若 γ 比 γ_c 小一个 L/N 量级，则满足这一条件。对于 L 的取值

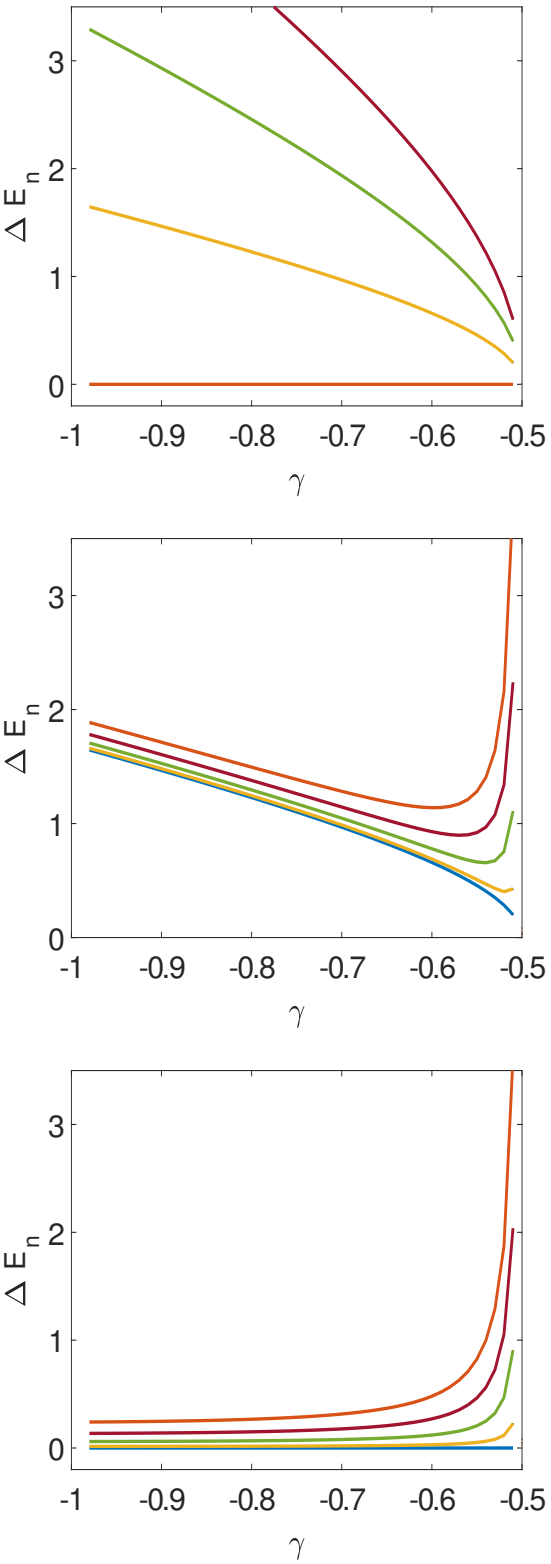


图 6：激发谱， $\Delta E_n(L)=E_n(L)-E_0(0)$，公式（39），以最低能态的能量为基准测量（单位为 e_1），作为 γ 的函数；对于 $N=100$，在单粒子态的截断空间中， $m=-1$ 为 0 和 1。此处 $-1\le\gamma\le-0.5$，即系统处于局域相。在上图中， $n=0$，.....，3（从底部曲线到顶部曲线），且 $L=0$。在中图中， $n=0$，且 $L=0$，.....，4（从底部曲线到顶部曲线）。在下图中，$n=1$，且 $L=0$，.....，4（从底部曲线到顶部曲线）。

我们所考虑的取值（量级为 1），L/N 的量级为$1/N$。

再次，关于公式（38），这里有三个重要观察：（i）公式（38）中没有关于L 的一次项，只有二次项（这是局域团块形成所致）。这与前面公式（21）的情形形成对比；在该情形下（对于 $\gamma > \gamma_c$，即均匀相），存在关于 L的一次项。与前一种情形一样，这一结果具有普遍性，并非将态截断到 $m = -1$为 0 和 1 的单粒子态所导致。（ii）与量子数 n 相关的能级等间距，其能量差为 $\omega_{\rm loc}$量级，即为单位量级，与前一种情形相同。另一方面，角动量所对应的能量为 L^2/N量级。（iii）能量量子 $\omega_{\rm loc}$ 在 $\gamma = \gamma_c$ 时为零（与前一种情形相同），且是 γ 的递减函数（与前一种情形相反）。

关于振幅 f_k，由式（27）可知

$$f_k \propto \exp(-\sqrt{\lambda\mu}(k-k_0)^2/2). \tag{42}$$

图 4 绘出了这些振幅，以及通过对哈密顿量进行数值对角化得到的振幅，情形为 $N = 1000$、$L = 5$ 和 $\gamma = -1$。两条曲线之间的差异几乎看不出来。

VI. 结果讨论与实验相关性

A. 深入了解激发谱——与希格斯模和戈德斯通模的联系

我们研究的两个基本结果是式（21）和式（38），以及式（41）中的有效质量 $m_{\rm eff}$。式（21）和式（38）分别解析地给出了我们所考察系统在 γ 小于 γ_c（即局域相，此时存在一个“明亮”孤波）和大于 γ_c（即均匀相）这两种情况下的基态能量和激发谱。这些结论适用于平均场方法；正如前文所述，在我们的方法中，由于采用了角动量本征态，单粒子密度分布始终具有轴对称性。

当 $\gamma > \gamma_c$，即处于均匀相时，由公式（21）得到的谱相当容易分析。首先，对于较大的 N 且 L 为一的量级，项 $-\gamma L^2/N$ 趋于零。此外，涉及两个量子数 n 和 L 的两项在激发谱中的表现方式相同，即 $(2n + L)\,\omega_{\rm hom}$。

另一种情形 $\gamma < \gamma_c$，即存在亮孤立波时，则更有趣。接近相变时，当 γ趋近于γ_c^-时，$\Delta E_n(L)$由项$L^2/(2m_{\rm eff}N)$主导，见公式（39），因为在此极限下 $\omega_{\rm loc}$趋于零。和之前一样，当 N 较大且 L 为量级为 1 的数时，项 $L^2/(2m_{\rm eff}N)$趋于零。另一方面，分母中出现 $m_{\rm eff}$ 使得这一项更加有趣。根据公式（41），$m_{\rm eff}$ 是 γ 的递减函数，并且在 $\gamma \to \gamma_c^-$处趋于零。因此，当 γ 趋近于 γ_c^-时，在 L 和 N 固定的情况下，项 $L^2/(2m_{\rm eff}N)$增大（见图 6 中的两个下图）。

为了深入了解两个量子数 n 和 L 对激发谱的影响，我们在图 6 中聚焦于 $\gamma < \gamma_c$ 的情况，并考察三种不同情形。具体而言，我们考虑 $N = 100$ 个原子，并在单粒子态的截断空间中进行研究，其中 $m = -1$ 取 0 和 1。上图中，我们令 $L = 0$，并考察 $n = 0$ 取 1、2 和 3 的情形。量子数 n 对应于我们在第五节推导出的有效谐振子势的能级。因此，$n = 0$ 对应于基态，而 $n = 1$、2 和 3 这三个值对应于有效谐振子势的三个最低激发态。更具体地说，在平均场近似下，这些是局域相（其中存在一个“明亮”孤波）的呼吸模的三个最低激发态。在平均场层次上，这些呼吸模对应于对称性破缺态下序参量的振幅涨落。因此，这些模与希格斯模类似。需要强调的是，这些模是通过对哈密顿量进行对角化（而非采用平均场近似）得到的，且原子数有限。因此，可以说它们与希格斯模“类似”。

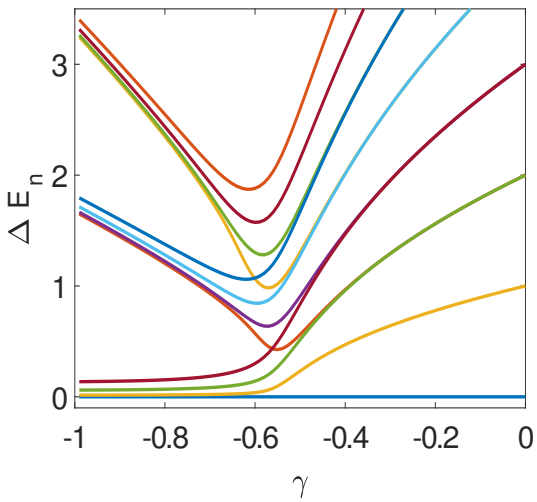
在图 6 的中间图中，我们设定 $n = 0$，并令 $L = 0, \ldots, 4$。对于 $L \neq 0$，这些是低能激发态（量级为 $1/N$），然而，随着 γ 趋近于γ_c，$\Delta E_n(L)$ 会增大，这是由于 $m_{\rm eff}$ 对 γ的依赖，正如我们前面讨论过的。由于角动量是沿环平移/旋转的生成元，这些态对应于局域团块沿环平移。因此，这些模式的线性叠加可以恢复对称性。

有人可能会认为，这些模式——在对哈密顿量进行对角化时、针对有限数目的原子计算得到——与戈德斯通模式“类似”。这是因为它们源于对称性破缺，在热力学极限（ N 很大）下无质量，最后，它们的线性叠加可以恢复对称性 [45]。最后，在图 6 的底部图中，我们设定 $n = 1$，并令 $L = 0, \ldots, 4$；对于 $\Delta E_n(L)$，也出现了与中间图类似的情形。

B. 解析结果与数值结果的比较

现在我们将解析结果与多体哈密顿量数值对角化所得的结果进行比较。

在图7和图8中，我们分别绘出了 $N = 100$和 $N = 1000$时，前几个激发态的激发谱$\Delta E_n(L) = E_n(L) - E_0(0)$ 随 γ 变化的曲线。这类曲线最早由文献 [37, 39, 40], 通过数值计算给出，而类似的曲线已发表于



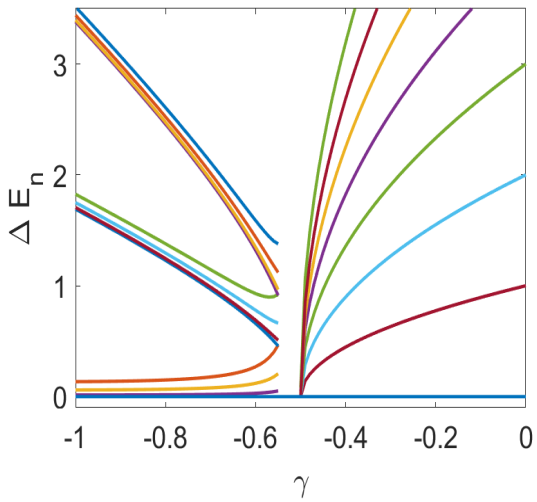
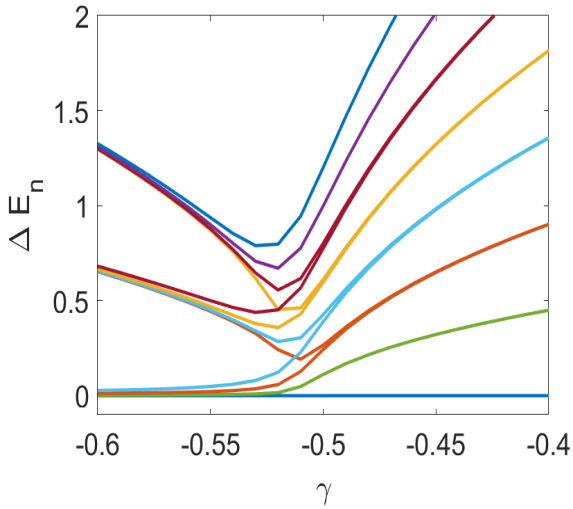


图 7：前几个激发态的激发谱，以最低能态的能量为基准（单位为 e_1），$\Delta E_n(L) = E_n(L) - E_0(0)$，其对应的态为 $n = 0$、1、2 和 $L = 0$、1、2、3；激发谱随 γ 的变化关系适用于 $N = 100$，并在由满足 $m = -1$、0 和 1 的单粒子态构成的截断空间中计算。从图左侧曲线由高到低的顺序为：(n, L) =(2, 3)、(2, 2)、(2, 1)、(2, 0)、(1, 3)、(1, 2)、(1, 1)、(1, 0)、(0, 3)、(0, 2)、(0, 1)、(0, 0)。对于 $\gamma = 0$，(n, L) = (2, 1) 和 (1, 3) 对应的态简并；此外，(n, L) =(2, 0) 和 (1, 2)、(n, L) =(0, 3) 和 (1, 1)，以及最后 (n, L) =(1, 0) 和 (0, 2) 也分别简并。上图是通过对多体哈密顿量进行对角化而得到的数值结果。下图展示了 $-0.5 \le \gamma \le 0$ 时公式（22）的结果，以及 $-1 \le \gamma \le -0.55$ 时公式（39）的结果。在区间 $-0.55 < \gamma < -0.5$ 内未显示结果，因为正如正文所述，当 γ 接近 γ_c（量级为 L/N）时，公式（39）并不准确。



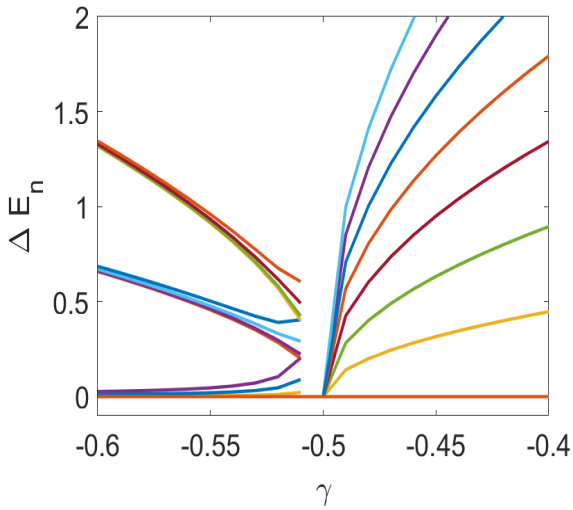


图 8：前几个激发态的激发谱，以最低能态的能量为基准（单位为 e_1），$\Delta E_n(L) = E_n(L) - E_0(0)$，分别对应 $n = 1, \ldots, 7$ 和 $L = 0, \ldots, 3$；其随 γ 的变化关系，适用于 $N = 1000$，并取单粒子态的截断空间，其中 $m = -1$ 为 0 和 1。图中左侧曲线从高到低的顺序为：(n, L) =(2, 3), (2, 2), (2, 1), (2, 0), (1, 3), (1, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 3), (0, 2), (0, 1), (0, 0)。对于 $\gamma = 0$，(n, L) =(2, 1)；(1, 3) 对应的态简并；此外，(n, L) =(2, 0)；(1, 2)、(n, L) =(0, 3)；(1, 1)，以及最后 (n, L) =(1, 0)；(0, 2) 这些态对也分别简并。上图是我们通过对多体哈密顿量进行对角化而数值计算得到的结果。下图展示了公式（22）（对于 $-0.5 \le \gamma \le -0.4$）和公式（39）（对于 $-0.6 \le \gamma \le -0.51$）的结果。在区间 $-0.51 < \gamma < -0.5$ 内未显示结果，因为如正文所述，对于接近 γ_c（量级为 L/N）的 γ 值，公式（39）并不准确。

文献 [41], 中，讨论的是环形势中量子液滴的形成。

两幅图中的上图是通过对多体哈密顿量进行数值对角化得到的。下图展示了公式（22）（对于$-1/2 < \gamma < 0$）和公式（39）（对于 $-1 < \gamma < -1/2$）的结果。在

在我们考虑的所有情形中，我们都在单粒子态的截断空间内进行计算，其中 $m = -1$ 取 0 和 1。我们在式（22）和（39）中选取的 n 和 L 的值分别为 $n = 0$、1 和 2，以及 $L = 0$、1、2、3。显然，整个激发谱还包含许多由更高的 n 和

L 值产生的态。对 n 和 L 取这些值，会形成三个能级“多重态”，如图左侧所示。

如预期，N取较大值时，解析结果与数值结果的一致性更好。关于 $\Delta E_n(L)$ 对 γ 的依赖关系，对于 $\gamma = 0$，激发能分别为 e_1 的 1、2、.....、7 个单位。对于 $\gamma = 0$，正如公式（22）所示，具有 $(n, L) = (2, 1)$；$(1, 3)$ 的态是简并的；同样，具有 $(n, L) = (2, 0)$；$(1, 2)$、具有 $(n, L) = (0, 3)$；$(1, 1)$，以及最后具有 $(n, L) = (1, 0)$；$(0, 2)$ 的态也分别成对简并。正如我们所论证的，对于 $-1/2 < \gamma < 0$，当 $\Delta E_n(L)$ 减小时，γ 下降。

当 γ 接近 γ_c时，$\omega_{\rm loc}$ 和 $\omega_{\rm hom}$ 都趋于零，即最低激发能消失（对于$N \to \infty$），或者换言之，该模式发生“软化”。这种软化的发生是因为对于 $\gamma = \gamma_c$，公式（7）中的二次项消失了。在对角化得到的数值数据中，能量差并未完全消失，这是由于我们所考虑系统的有限性。

对于 $\gamma < -1/2$，在图的左半部分，我们可以看到局域相的激发谱；正如我们在上一小节中所论证的，预期会出现戈德斯通模和希格斯模。公式（38）中量子数 n 的每个取值对应的能级相差约为单位量级的能量（另见图 6 上图）。此外，对于 n 的每个取值，都有一族对应于旋转自由度的模，$L = 1$、2、.....（另见图 6 下方两图）。这些能级与 $L = 0$ 对应的能级之间仅相差很小的能量差，其量级为 L^2/N。

C. 实验相关性

关于本研究的实验相关性，此类环形势已在实验中实现，例如参见文献 [25–35]。例如，若考虑文献 [33], 中的实验，其中使用了 ^{23}Na 原子，则半径R 为 ≈ 19.5 μm，因此 $e_1/\hbar = \hbar/(2MR^2) \approx 3.6$ Hz。已知散射长度为 $a \approx 28$ $^\circ$A，对于 $N \approx 4 \times 10^5$ 个原子和 $S = \pi a_1 a_2$，其中 $a_i = [\hbar/(M\omega_i)]^{1/2}$，即 $a_1 \approx 2.42$ μm 和 $a_2 \approx 3.83$ μm，无量纲参数 $\gamma = 2NaR/S$ 的值为 ≈ 1500。显然，在当前情形下，应将散射长度 a 调节为负值。例如，若同时将 N 减小两个数量级（$N \approx 4 \times 10^3$），且 a 的量级为 -1 $^\circ$A，则 $|\gamma|$ 的值将达到单位量级。

VII. 总结与结论

本研究所考察的问题，即被限制在环形势中的玻色–爱因斯坦凝聚原子，是研究各种超流性相关效应的理想系统。

对于具有吸引性且相对较弱的相互作用，单粒子密度是均匀的。对于更强的（且仍具有吸引性）相互作用，原子会形成一个“明亮”孤波。在这一相位中，我们实现了自发对称性破缺这一概念。因此，除与超流性相关的现象之外，我们在此考察的系统还提供了一个著名的戈德斯通模和希格斯模的实例，其含义正如前几节以及下文所讨论的那样。

我们通过解析和数值方法推导出的激发谱由两个量子数表征：n（与局域团块的密度振荡相关）和 L（角动量）。在均匀密度分布的情况下，它们对于激发态[的作用类似，见公式（21）]（除了一项很小的项，其阶数为$1/N$）。

另一方面，在密度分布不均匀且发生自发对称性破缺的区域，这两个量子数会产生两种不同的激发态“类别”[见公式（38）]。与量子数 n 对应的激发态是低能激发态，其激发能为单位量级（当 L 为单位量级时）。在平均场层次上，它们对应于局域团块的呼吸模，类似于希格斯模。与角动量 L 对应的激发态也是低能激发态，能量差为 $1/N$ 量级（当 L 为单位量级时）。在平均场层次上，其中最低的几个类似于戈德斯通模。

我们应当强调，我们采用的多体哈密顿量对角化方法无法给出任何序参量。此外，由于我们使用的是角动量本征态，相应的单粒子密度分布始终具有轴对称性。最后，我们研究的是有限数目的原子。上述几点意味着，不应断言这些模与希格斯模和戈德斯通模完全相同。另一方面，我们在所得激发谱中识别出的这些模，具备这两种著名模式的所有特征。

本研究的结果之所以值得关注，原因有很多。首先，这些结果有助于我们深入理解这些模式，而它们在物理学的诸多领域中都有出现。值得注意的是，我们所研究系统的简洁性使我们得以解析地推导出完整的激发谱（我们的结果适用于 L 为数量级为 1 的情形）。此外，我们成功解析求得的各种物理可观测量（例如有效质量），或许有助于尝试通过实验测量这些量，并在桌面实验中验证理论预言。

[1] D. Pekker 和 C. M. Varma，《凝聚态物理年度评论》6, 269 (2015). [2] R. Shimano 和 N. Tsuji，《凝聚态物理年度评论》

11, 103（2020）。[3] J. Goldstone，Il Nuovo Cimento（1955-1965）19，154（1961）。[4] P. W. Higgs，Phys. Rev. Lett. 13，508（1964）。[5] L. H. Ryder，《量子场论》，第 2 版（剑桥大学出版社，剑桥，英格兰，1996）。[6] CMS 合作组，Phys. Lett. B 716，30（2012）。[7] ATLAS 合作组，Phys. Lett. B 716，1（2012）。[8] R. Sooryakumar 和 M. V. Klein，Phys. Rev. Lett. 45，660 1980( )。[9] P. B. Littlewood 和 C. M. Varma，Phys. Rev. Lett. 47，811 1981( )。[10] R. Matsunaga，N. Tsuji，H. Fujita，A. Sugioka，K. Makise，Y. Uzawa，H. Terai，Z. Wang，H. Aoki 和 R. Shimano，Science 345，1145（2014）。[11] M.-A. M´easson，Y. Gallais，M. Cazayous，B. Clair，P. Rodi`ere，L. Cario 和 A. Sacuto，Phys. Rev. B 89，060503 2014( )。[12] D. Sherman，U. S. Pracht，B. Gorshunov，S. Poran，J. Jesudasan，M. Chand，P. Raychaudhuri，M. Swanson，N. Trivedi，A. Auerbach，M. Scheffler，A. Frydman 和 M. Dressel，Nat. Phys. 11，188（2015）。[13] C. R¨uegg，B. Normand，M. Matsumoto，A. Furrer，D. F. McMorrow，K. W. Kr¨amer，H. U. G¨udel，S. N. Gvasaliya，H. Mutka 和 M. Boehm，Phys. Rev. Lett. 100，205701（2008）。[14] U. Bissbort，S. G¨otze，Y. Li，J. Heinze，J. S. Krauser，M. Weinberg，C. Becker，K. Sengstock 和 W. Hofstetter，Phys. Rev. Lett. 106，205303（2011）。[15] M. Endres，T. Fukuhara，D. Pekker，M. Cheneau，P. Schauß，C. Gross，E. Demler，S. Kuhr 和 I. Bloch，Na- ture（伦敦）487，454（2012）。[16] J. L´eonard，A. Morales，P. Zupancic，T. Donner 和 T. Esslinger，Science 358，1415（2017）。[17] A. Behrle，T. Harrison，J. Kombe，K. Gao，M. Link，J.-S. Bernier，C. Kollath 和 M. K¨ohl，Nat. Phys. 14，781（2018）。[18] L. Bayha，M. Holten，R. Klemt，K. Subramanian，J. Bjer- lin，S. M. Reimann，G. M. Bruun，P. M. Preiss 和 S. Jochim，Nature（伦敦）587，583（2020）。[19] P. Dyke，S. Musolino，H. Kurkjian，D. J. M. Ahmed- Braun，A. Pennings，I. Herrera，S. Hoinka，S. J. J. M. F. Kokkelmans，V. E. Colussi 和 C. J. Vale，Phys. Rev. Lett. 132，223402（2024）。[20] A. Kell，M. Breyer，D. Eberz 和 M. K¨ohl，Phys. Rev. Lett. 133，150403（2024）。[21] C. R. Cabrera，R. Henke，L. Broers，J. Skulte，H. P. Ojeda Collado，H. Biss，L. Mathey 和 H. Moritz，电子版预印本 arXiv:2407.12645。[22] L. Liu，K. Chen，Y. Deng，M. Endres，L. Pollet 和 N. Prokof'ev，Phys. Rev. B 92，174521（2015）。[23] G. M. Bruun，Phys. Rev. A 90，023621（2014）。[24] J. Bjerlin，S. M. Reimann 和 G. M. Bruun，Phys. Rev.

《物理评论快报》116, 155302 (2016). [25] S. Gupta, K. W. Murch, K. L. Moore, T. P. Purdy, and D. M. Stamper-Kurn,《物理评论快报》95, 143201 (2005). [26] S. E. Olson, M. L. Terraciano, M. Bashkansky, F. K. Fatemi,《物理评论A》76, 061404(R) (2007). [27] C. Ryu, M. F. Andersen, P. Clad´e, V. Natarajan, K. Helmerson, and W. D. Phillips,《物理评论快报》99, 260401 2007( ). [28] B. E. Sherlock, M. Gildemeister, E. Owen, E. Nugent, and C. J. Foot,《物理评论A》83, 043408 (2011). [29] A. Ramanathan, K. C. Wright, S. R. Muniz, M. Zelan, W. T. Hill, C. J. Lobb, K. Helmerson, W. D. Phillips, and g. K. Campbell,《物理评论快报》106, 130401 (2011). [30] S. Moulder, S. Beattie, R. P. Smith, N. Tammuz, and Z. Hadzibabic,《物理评论A》86, 013629 (2012). [31] S. Beattie, S. Moulder, R. J. Fletcher, and Z. Hadzibabic,《物理评论快报》110, 025301 (2013). [32] C. Ryu, K. C. Henderson, and M. G. Boshier,《新物理学杂志》16, 013046 (2014). [33] S. Eckel, J. G. Lee, F. Jendrzejewski, N. Murray, C. W. Clark, C. J. Lobb, W. D. Phillips, M. Edwards, and G. K. Campbell,《自然》（伦敦）506, 200 (2014). [34] P. Navez, S. Pandey, H. Mas, K. Poulios, T. Fernholz, and W. von Klitzing《新物理学杂志》18, 075014 (2016). [35] S. Pandey, H. Mas, G. Drougakis, P. Thekkeppatt, V. Bolpasi, G. Vasilakis, K. Poulios, and W. vo n Klitzing,《自然》（伦敦）570, 205 (2019). [36] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott and R. G. Hulet,《自然》（伦敦）417, 2002 (2002). [37] Rina Kanamoto, Hiroki Saito, and Masahito Ueda,《物理评论A》67, 013608 (2003). [38] G. M. Kavoulakis,《物理评论A》67, 011601(R) (2003). [39] R. Kanamoto, H. Saito, and M. Ueda,《物理评论快报》94, 090404 (2005). [40] Rina Kanamoto, Hiroki Saito, and Masahito Ueda,《物理评论A》73, 033611 (2006). [41] L. Chergui, J. Bengtsson, J. Bjerlin, P. St¨urmer, G. M. Kavoulakis, and S. M. Reimann,《物理评论A》108, 023313 2023( ). [42] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and M. Magiropoulos,《物理评论A》78, 063623 (2008). [43] 在此计算中，我们假设 $L > 0$。若$L < 0$，则必须改用福克态$|k\rangle = |(-1)^{k+L}、0^{N-L-2k}(+1)^k\rangle$。由此很容易得出，在公式（21）中，$L$ 应替换为 $|L|$。更一般地，L 与 $-L$ 之间的对称性意味着能量取决于 $|L|$。[44] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, B. Mottelson, and S. M. Reimann,《物理评论快报》86, 945 (2001). [45] Masahito Ueda and Tatsuya Nakajima,《物理评论A》73, 043603 2006( ).