描述局部地形的点云中的点模式搜索

E. BEDNA RCZUK[1],R. BIEŃKOWSKI[1,2],R. KŁOPOTEK[3], J. KRYŃSKI[4], K. LEŚNIEWSKI[1], K. RUTKOWSKI[1] ,
以及 M. SZELACHOWSKA[4]

摘要。本文探讨如何比较和对齐由结构化几何模式形成的 $\mathbb{R}^3$中的空间点配置。每种模式都分解为若干臂，并在其上定义归一化有限差分算子，用于测量高度分量相对于模式平面几何的局部变化。该量提供了一种与参数化无关的局部描述符，可补充全局相似性度量。具体而言，它能够自然地与用于比较点分布的 Wasserstein 型距离，以及用于几何结构刚性对齐的 Procrustes 分析相结合。

arXiv:2601.07621v1 [cs.CG] 12 Jan 2026

1. 引言

地球表面的地貌特征通常通过对离散点进行测量来获取。要使测量结果发挥作用，必须确定这些点的坐标。在全球定位系统技术问世之前，此类点的平面坐标通常从地图上获取，因此精度较低。描述地球特征的量，主要是物理量，都是在这些点上测得的，即使以当时的标准来看，精度也相当高。利用有关地球表面的其他现有信息和计算算法，提高此类点的平面坐标精度，可获得对地球科学更有价值的数据集，而无需重复耗时极长且成本高昂的测量工作。

1957—1979年间，波兰全境大致均匀地布设了重力测站，并在这些测站测量重力。迄今为止，这组包含超过一百万个点的数据极为宝贵且独特，其中各点的重力测定精度优于0.1 mGal（$10^{-6}m/s^2$），并广泛应用于地球科学，尤其是地球物理学、大地测量学和地质学。重力测站的高程通过水准测量确定，精度约为5厘米。重力测站的位置，即其平面坐标，是根据印刷地图确定的。这些坐标误差有多个来源，包括：

- 点位识别不准确，
- 在野外县级地图上标记测量点不准确，
- 在比例尺为 1:50 000 的地形图上标记点不准确，
- 从地形图上读取点的坐标时出现错误。

重力测点位置不准确、有时甚至存在错误，是所研究的波兰重力数据集的一项弱点。可以预期，重力测站的平面坐标误差超过一百米 [5]。此外，作为上述地球物理工作的一部分，还在地形较为崎岖的重力测点处测量了地球表面局部走向。此类重力测点周围的地形数据以所谓的“十字形”形式给出，即沿相互垂直的剖面测得的高程；这些剖面从其交点（即重力测点）向各个方向延伸至 100 米。与最大坡度方向重合的方向被标记为第一方向。

近几十年来，地形高程数据已数字高程模型（DEM）的形式提供。数字高程模型是以网格形式对地形表面的离散表示。在过去十年中，数字高程模型的空间分辨率已达到 1 米（见 [2]），甚至低于 1 米（见 [1]）。

随着高精度、高分辨率数字高程模型日益普及，并且能够精确测定重力测点的高程及其周边地形信息，便可以更可靠地确定重力测点的位置，即其平面坐标。这可以通过

关键词和短语。比较地形模式、Wasserstein测度、普罗克鲁斯特斯测度、最小二乘法。[1] 波兰科学院系统研究所，华沙，波兰。[2]*WIT*学院，华沙，波兰。[3] 华沙红衣主教斯特凡·维申斯基大学计算机科学研究所，华沙，波兰。[4] 大地测量与制图研究所，华沙，波兰。

匹配数字高程模型所表示的三维表面来实现。本研究采用 Wasserstein度量和线性优化，对实际地理空间数据进行分析。

本研究开展的数值实验使用了唯一的文档资料，其中不仅包含重力点的坐标，还包含这些点附近地形的描述（第2.1节）。所采用数字高程模型的详细信息见第2.1节。本研究的问题表述及所采用的方法见第3节。所开发的算法见第4节。数值示例见第5节。

2. 使用的数据

将局部地形数据中的点模式与相应的高分辨率数字高程模型中的点模式进行匹配。研究中所用点的水平坐标和垂直坐标，以及沿剖面的长度，均以米为单位给出。此外，数值计算中使用的高度也以米为单位。

2.1. 局部地形数据。 对于坡度超过6度的每个重力测点，以离散形式提供其周围非常局部的地形信息，即半径100米范围内的信息 [5]。根据地形的复杂程度，测量沿着地平线上均匀分布的四个或八个方向的直线进行 [5]。坡度使用倾角仪测量，距离使用盘式钢卷尺测量。原始重力测点位置以Borowa Góra参考框架中的地理坐标给出，并转换为PL-1992参考框架中的平面坐标。高程值以Kronsztadt 60系统给出，并转换至PL-EVRF2007-NH参考框架。

剖面点相对于重力测点的高程精度为10厘米、位置精度为2米，这些数值是通过粗略估算得出的。图1展示了此类测量描述的一个示例。

沿四条彼此垂直的直线（臂、间隔）排列。此结构以下称为初始化目标。

2.2. 高分辨率数字高程模型。 本研究使用了分辨率为 1 m（以 1 m $\times$ 1 m 网格给出）的数字高程模型（DEM）。该模型主要基于机载激光扫描（ALS）数据构建，可从波兰政府门户网站[4]下载。数值实验使用了该模型的 52 个分区，每个分区表示 2.3 km $\times$2.3 km 的区域（图 2）。对于所研究的区域，数据提供方给出的 DEM 高程精度在大多数分区中评估为 15 cm；其中一个分区的精度为 50 cm，另有三个分区的精度为 20 cm。DEM 高程采用 PL-EVRF2007-NH参考框架，平面坐标采用 PL-1992参考框架。

3. 问题表述

在提高地图上点坐标精度的过程中，“线性和分配”模型被证明是一种很有价值的工具。本文探讨了如何应用该模型来校正坐标存在较大误差的点的位置。这项任务面临的一大挑战是，关于每个点周围地形的信息有限，只能通过四个相互垂直方向上的坡度来描述。尽管存在这一局限，该方法仍可表述为一个匹配问题，旨在依据现有但不完整的数据，将有误差的坐标与尽可能准确的位置相对应。该方法采用对地形更精确的表示，给出校正后的坐标；然而，由于初始信息有限且已知地形特征的制约，这些坐标仍存在偏差。

点模式 Q_ℓ 由三维空间中的点云 $\mathcal{P}$ 构建，其中元素数量为 N。 $\mathcal{P}$中的每个点都有坐标（x， y，z），目标是从 $\mathcal{P}$ 中选取若干点的子集，使其形成与给定参考模式 T相似的结构。通过恰当选择准则来确保相似性。构建过程确保 Q_ℓ 保留 T的几何性质。

3.1. 参考模式的属性 T 点。参考集中的点模式定义为：

$$T := \{P_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3 \mid i = 0, \ldots, m\},$$

其中， $t_0 =$(x0, y0, z0)被称为模式 T的中心。

点 T 绕z轴旋转角度 θ 后所形成的参考点模式 T_θ ，其坐标为(x, y)，以中心点 t_0为参照

$$T_\theta := \{P_i^\theta = (x_i^\theta, y_i^\theta, z_i) \mid i = 0, \dots, m\},$$

其中

$$[x_i^\theta, y_i^\theta]^T = [x_0, y_0]^T + \mathrm{rot}(\theta) \cdot [x_i - x_0, y_i - y_0]^T, \quad i = 0, \dots, m,$$
$$\mathrm{rot}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

也已被引入。

3.2. 所求模式的性质 Q_ℓ。所求的 Q_ℓ， $\ell = \{1, \dots, \binom{N}{m+1}\}$ 是由 $\mathbb{R}^3$个点构成的模式

$$Q_\ell := \{q_{\ell,i} = (\tilde{x}_{\ell,i}, \tilde{y}_{\ell,i}, \tilde{z}_{\ell,i}) \in \mathcal{P} \mid i = 0, \dots, m\},$$

包含在点云 $\mathcal{P}$ 中。点 $q_{\ell,\,0} = (\tilde{x}_{\ell,\,0},\ \tilde{y}_{\ell,\,0},\ \tilde{z}_{\ell,\,0})$ 称为 Q_ℓ 的中心。

要求：

(1) 搜索满足条件的 $q_{\ell,0}$

$$|z_0 - \tilde{z}_{\ell,0}| \le d_1 \quad \wedge \quad \|(x_0, y_0) - (\tilde{x}_{\ell,0}, \tilde{y}_{\ell,0})\|_\infty \le r\ , \tag{3.1}$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 为 ℓ_∞ 范数，且 $r > d_2$ 给定。

这使得可以将对 Q_ℓ中心的搜索限制在 $q_{\ell,0} = (\tilde{x}_{\ell,0}, \tilde{y}_{\ell,0}, \tilde{z}_{\ell,0})$，使其满足：

- $z_0 - d_1 \le \tilde{z}_{\ell,0} \le z_0 + d_1$,
- $x_0 - r \le \tilde{x}_{\ell,\,0} \le x_0 + r$ 和 $y_0 - r \le \tilde{y}_{\ell,\,0} \le y_0 + r$。

(2) 此外，对于满足 (3.1) 的每个$q_{\ell,0}$ ，存在满足以下条件的模式 Q_ℓ ：

$$\exists_{\theta\in[0,2\pi]} \quad \forall_{i\in\{0,1,\dots,m\}} \quad [\tilde{x}_{\ell,i}, \tilde{y}_{\ell,i}] - [\tilde{x}_{\ell,0}, \tilde{y}_{\ell,0}] \approx [x_i^\theta, y_i^\theta] - [x_0^\theta, y_0^\theta] = [x_i^\theta, y_i^\theta] - [x_0, y_0], \quad \tilde{z}_{\ell,i} = \mathrm{val}_{\mathcal{P},z}(\tilde{x}_{\ell,i}, \tilde{y}_{\ell,i}) \tag{3.2}$$

选取，其中 $[a, b] \approx [c, d]$ 表示 $|a - c| \le \frac{1}{2}d_1$ 和 $|b - d| \le \frac{1}{2}d_1$，而 $\mathrm{val}_{\mathcal{P},\,z}(\tilde{x}_{\ell,\,i},\ \tilde{y}_{\ell,\,i})$ 表示点云 $\mathcal{P}$中坐标为 $\tilde{x}_{\ell,\,i},\ \tilde{y}_{\ell,\,i}$ 的 z 的值。

3.3. 相似性度量。目标是找到 Q_ℓ、 $\ell = \{1, \dots, \binom{N}{m+1}\}$ 以及满足要求（3.1）和（3.2）的旋转角 $\theta \in [0, 2\pi]$ ，使其与 T_θ相似。模式 Q_ℓ 和 T_θ 的相似性度量定义为瓦瑟斯坦距离（例如参见 [6]），其定义如下:

$$W_2(U, V) = \min_\pi \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \pi_{ij} \|u_i - v_j\|_2^2 \right)^{1/2},$$
$$U = \{u_i = (u_i^x, u_i^y, u_i^z),\ i = 0, \dots, m\}, \quad V = \{v_i = (v_i^x, v_i^y, v_i^z),\ i = 0, \dots, m\}$$

约束条件:

- $\pi_{ij} \ge 0$,
- $\sum_{j=0}^m \pi_{ij} = \frac{1}{m+1}$ for all $i = 0, \dots, m$,
- $\sum_{i=0}^m \pi_{ij} = \frac{1}{m+1}$ for all $j = 0, \dots, m$,

其中 $\pi = [\pi_{ij}]$ 是运输计划， $\|u_i - v_j\|_2$ 表示 $\mathbb{R}^3$中的欧几里得距离。或者，也可以考虑最小二乘度量:

$$L(U, V) = \sqrt{\sum_{i=0}^m \|u_i - v_i\|_2^2},$$

3.3.1. 普罗克鲁斯特距离。为进一步评估刚性变换对模式相似性的影响，我们还采用了一种普罗克鲁斯特型距离（见 [3]）。设

$$\bar{p}^\theta = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m p_i^\theta, \qquad \bar{q} = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m q_i$$

分别表示 T_θ 和 Q的质心。我们将中心化构型定义为

$$\tilde{P}_i^\theta = P_i^\theta - \bar{P}^\theta, \qquad \tilde{q}_i = q_i - \bar{q}.$$

普罗克鲁斯特距离定义为

$$P(T_\theta, Q) = \min_{R\in \mathrm{SO}(3)} \left(\sum_{i=0}^{m} \|\tilde{p}_i^\theta - R\tilde{q}_i\|_2^2 \right)^{1/2}, \tag{3.3}$$

其中，SO(3)表示三维旋转矩阵构成的群。

在实践中，式（3.3）中的最小化问题可通过对中心化点集之间的交叉协方差矩阵进行奇异值分解，得到闭式解。与最小二乘距离不同，普罗克鲁斯特距离对于候选模式的刚性旋转和平移具有不变性。

在本研究中，参考模式的旋转 θ 已经进行了明确优化。因此，普罗克鲁斯特距离主要用于补偿由离散化以及最近邻投影到数字高程模型上所引入的残余旋转和平移差异。从经验上看，该度量在抑制虚假的局部极小值方面尤其有效，并能对图案中心给出高度稳定的估计。

3.3.2. 目标函数。 给定参考模式 T 以及从点云 $\mathcal{P}$构建的一组目标点模式 Q_ℓ, $\ell \in \mathcal{L} \subset\{1, \ldots, \binom{N}{m+1}\}$，且这些模式满足要求 (3.1) 和 (3.2)，目标是找到点模式 $Q_{\bar{\ell}}$ 和旋转角 θ，使所考虑的度量在 T_θ（T旋转后的版本）与 Q_ℓ, $\ell \in \mathcal{L}$之间达到最小值。该问题可表述为以下优化问题:

$$\min_{\theta\in[0,2\pi]} \min_{\ell\in\mathcal{L}} \mu(T_\theta, Q_\ell), \tag{Opt:gen}$$

其中:

- μ 是所考虑的度量，即 Wasserstein W_2 、最小二乘 $L2$ 或普罗克鲁斯特斯 P。
- T_θ 是 T 旋转 θ角后的版本,
- Q_ℓ, $\ell \in \mathcal{L}$ 是从 $\mathcal{P}$构建的点模式，在实际情况下， $\mathcal{P}$是地形的局部数字模型（局部数字高程模型）。

使用最小二乘 $L2$度量时，优化问题的形式为

$$\min_{\theta\in[0,2\pi]} \min_{\ell\in\mathcal{L}} L_2(T_\theta, Q_\ell). \tag{Opt:2}$$

使用普罗克鲁斯特斯度量 P 时，优化问题的形式为

$$\min_{\theta\in[0,2\pi]} \min_{\ell\in\mathcal{L}} P(T_\theta, Q_\ell). \tag{Opt:3}$$

为找到目标模式 $Q_{\bar{\ell}}$，提出以下算法。

4. 算法

应用算法前，需要对数据进行一些预处理。归一化可将不同取值范围的数据转换到共同的范围内，从而减小取值范围差异的影响并控制数据离散程度。

为处理空间坐标（X，Y）与高程（Z）之间显著的取值范围差异，所有点云坐标均通过以质心为中心并除以标准差进行归一化。这可确保每个轴对基于距离的度量（如 Wasserstein 距离）的贡献大致相当。这种归一化可避免我们的匹配算法受到平面坐标绝对值的支配。因此，归一化后的表示能更好地反映表面片的内在几何结构。

4.1.**归一化**。设

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i, y_i, z_i)$$

为点云的质心（质量中心）。对于点云中的每个点 $\mathcal{P}$

$$(x_i', y_i', z_i') = (x_i - \mu_x, y_i - \mu_y, z_i - \mu_z)$$

计算标准差

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i')^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i')^2}, \quad \sigma_z = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i')^2}$$

并对点云进行归一化 $\mathcal{P}$

$$(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i) = \left(\frac{x'_i}{\sigma_x}, \frac{y'_i}{\sigma_y}, \frac{z'_i}{\sigma_z} \right) \tag{4.1}$$

4.2. 缩放 z。惩罚参数 $\lambda > 0$

$$(\hat{\hat{x}}_i, \hat{\hat{y}}_i, \hat{\hat{z}}_i) := (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \lambda \hat{z}_i) \tag{4.2}$$

已被引入。

4.3. 构造 步骤 / 算法。给定 $T = \{P_i = (x_i, \ y_i, \ z_i) \in \mathbb{R}^3 \mid i = 0, \ldots, \ m\}$ 一个 d 参数 $\lambda > 0$。Q_ℓ 的构造涉及以下步骤：

(1) 中心点的选择： 从 $\mathcal{P}$ 中选取点 $q_{l,\ 0} := (\tilde{x}_{l,\ 0}, \ \tilde{y}_{l,\ 0}, \ \tilde{z}_{l,\ 0})$，使其位于距中心$q_{l,\ 0}$ 半径 r 范围内（满足条件 (3.1)）：

$$\|(x_0, y_0) - (\tilde{x}_{l,0}, \tilde{y}_{l,0})\|_\infty \le r,$$

其中 $\| \cdot \|_\infty$ 是 ℓ_∞ 范数，且高度约束满足条件 (3.1)

$$|\tilde{z}_{l,0} - z_0| \le 1$$

其中 z_0 是 T 中心的 z 坐标。这些点 $q_{l,\ 0}$ 用作构造Q_ℓ的中心。

(2) 角度离散化： 将区间 $[0, 2\pi]$ 离散化为有限个角度 θ_1，θ_2、.....、θ_n。**(3) 定义** $Q_{l,\ \theta}$：对于满足步骤 1 的每个 $q_{l,\ 0}$ 以及每个角度 $\theta_i \in \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$，定义目标 $Q_{l,\ \theta}$ 如下

$$\begin{aligned} Q_{l,\theta} := \{ & (\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{z}_j) \in \mathcal{P}, \ j = 0, \ldots, m : \\ & (\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) = \arg \min_{(x,y) \in \mathcal{P}_{x,y}} \|(x, y) - (x'_j, y'_j)\|_2, \ \tilde{z}_j = \mathrm{val}_{\mathcal{P},z}(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) \ j = 0, \ldots, m, \\ & \text{where } [x'_j, y'_j]^T = [\tilde{x}_{\ell,0}, \tilde{y}_{\ell,0}]^T + \mathrm{rot}(\theta) \cdot [x_j - x_0, y_j - y_0]^T \}, \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{P}_{x,y}$ 是由点云 $\mathcal{P}$ 中的 x, y 坐标构成的点云。上述构造 $Q_{l,\theta}$ 确保 $Q_{l,\theta}$ 满足条件 (3.2)。对于给定的中心 $q_{\ell,0}$，点 (x'_j, y'_j) 作为相对于中心 $q_{\ell,0}$ 旋转后的参考模式 T（即 T_θ）的近似；点 $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ 是点云 $\mathcal{P}$ 中距离 (x'_j, y'_j) 最近的点（相对于 x, y 坐标），而 $\mathrm{val}_{\mathcal{P},z}(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ 表示点云 $\mathcal{P}$ 中一个 $\tilde{x}_j, \tilde{y}_j$ 坐标的 z 值。

(4) 计算所考虑的相似性度量（W_2、 L_2 **或** P）对于步骤 3 中的每个 $Q_{l,\ \theta}$，均计算所考虑的度量 $\mu(T_{\theta_i}, \ Q_{l,\ \theta_i})$，其中 T_{θ_i}、 $Q_{l,\ \theta_i}$ 根据公式 (4.1) 和 (4.2) 归一化并缩放后，由 $T_{\theta_i}, \ Q_{l,\ \theta_i}$ 得到。

(5) 最小化： 求 $Q_{\bar{\ell}} := Q_{\bar{l},\ \bar{\theta}}$ 使所考虑的度量最小：

$$(\bar{l}, \bar{\theta}) = \mathrm{argmin}_{\ell, \theta_i} \mu(\hat{\hat{T}}_{\theta_i}, \hat{\hat{Q}}_{\ell,\theta_i}).$$

5. 计算实验

本次计算实验旨在测试所考虑算法结合不同度量和不同缩放参数 λ 以查找给定目标模式时的性能。给定点云 $\mathcal{P}$——波兰某地区的数字高程模型数值 1 米地形模型，区域为 $[511511.48, 512511.48] \times [216199.39, 217199.39]$，目标模式 $T = \{P_i = (x_i, \ y_i, \ z_i) \in \mathbb{R}^3 \mid i = 0, \ldots\ldots, \ m\}$ 以及缩放参数λ——在本次计算实验中选定为 $\lambda \in \{1, 20, 40, 60, 80, 100, 200\}$。

5.1. 检查用于匹配离散表面模型的算法运行情况。给定点云 $\mathcal{P}$——空间分辨率为 d_2 的数字高程模型、上述定义的十字形参考模式 $\mathcal{P}$ 以及参数 $\lambda > 0$。在本次计算实验中，采用了反映波兰数字高程模型分辨率的 $d_2 = 1$ m（第 2.2 节）。此外，为了进行本次实验，选取了 $\lambda \in \{1, 20, 40, 60, 80, 100, 200\}$。

我们的测试包含以下步骤。我们通过以下过程选择初始化模式 T_0、目标模式 T 和˜扰动模式 T：

(1) 从区域 $[511511.48, 512511.48] \times [216199.39, 217199.39]$ 中获取的随机中心点 $P_0 = (y_0, \ x_0, \ z_0)$，以及该坐标 $(y_0, \ x_0)$ 处的数字高程模型值 z_0，构建出“十字形”结构。该结构由 401 个点组成，每条臂包含 100 个点，沿四个依次相互垂直的方向（逆时针）排列；第一个方向相对于北方向（逆时针）形成 α 度角（$[0, 360$ 中的随机角度），每个方向均包含 100 个测量点

点间距为 1 米（直至距中心最后一个条目 100 米）。该结构被称为初始化模式 T_0。

(2) 对初始化模式的每条臂 T_0 在该臂上：
(a) (y_k, x_k, z_k), $k \in \{1, \ldots, 99\}$, (b) (y_k, x_k, z_k), $k \in \{101, \ldots, 199\}$, (c) (y_k, x_k, z_k), $k \in \{201, \ldots, 299\}$, (d) (y_k, x_k, z_k), $k \in \{301, \ldots, 399\}$
为了测量 z 的增量与曲线上 (x, y) 增量之比，我们按照离散曲线导数的构造方法，采用经弦长归一化的中心有限差分格式，计算高度剖面的离散弧长导数，

$$(\Delta_{(x,y)}z)_k = \begin{cases} \frac{z_{k+1}-z_{k-1}}{\sqrt{(y_{k+1}-y_{k-1})^2+(x_{k+1}-x_{k-1})^2}}, & \text{对于 } k \in \{2, \ldots, 399\} \setminus \{100, 101, 200, 201, 300, 301\}, \\ \frac{z_{k+1}-z_0}{\sqrt{(y_{k+1}-y_0)^2+(x_{k+1}-x_0)^2}}, & k \in \{1, 101, 201, 301\}. \end{cases}$$

对于

我们在每组中取 9 个索引（k）： $\{1, \ldots, 99\}$, $\{101, \ldots, 199\}$, $\{201, \ldots, 299\}$, $\{301, \ldots, 399\}$取值最高的（$\Delta_{(x,y)}z$）$_k$作为精确索引。我们还将索引 0， 100， 200， 300，400 视为精确索引（即臂的中心点和末端点）。点（y_k， x_k， z_k）中， k 对应于精确索引的点构成目标模式 T[1]。

(3) 第2步中获得的目标模式 T 的 yx 值，通过随机向量$\vec{v} = [v_x, y_y]$进行平移，其中 v_x, $v_y \in [-400, 400]$。这样我们就得到了受扰动模式 T。

5.2. **结果**。 进行8次实验的结果如表1和表2所示；对于实验2，归一化数据的生成模式以及臂的剖面均显示在图5.1中。

编号 目标十字形中心 受扰动十字形中心（第5节） 欧氏距离 1 (509489.09,215942.17) (509457.09, 215833.17) 113.60 2 (509547.09,216261.17) (509399.09, 216096.17) 242.99 3 (509468.09,216009.17) (509615.09, 216344.17) 365.83 4 (509410.09,215979.17) (509204.09, 216100.17) 238.90 5 (509470.09,215992.17) (509305.09, 216319.17) 366.27 6 (509497.09,216005.17) (509617.09, 215997.17) 120.26 7 (509496.09,215956.17) (509351.09, 215898.17) 156.16 8 (509437.09,215939.17) (509785.09, 216062.17) 369.09

表1。该表展示了数值实验：目标中心- 原始模式中心的位置，扰动十字中心- 扰动模式中心的位置，之间的欧几里得距离- 目标十字中心与扰动十字中心之间的欧几里得距离值。

[1]请注意，模式 T 由41个点组成。

No.	W_1	$\tilde{W}_1$	$\tilde{W}_{20}$	$\tilde{W}_{40}$	$\tilde{W}_{60}$	$\tilde{W}_{80}$	$\tilde{W}_{100}$	$\tilde{W}_{200}$
1	38.18	38.18	7.81	7.81	7.81	7.81	7.81	7.81
2	123.00	118.22	33.83	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41
3	121.03	106.04	4.47	4.47	4.47	4.47	4.47	4.47
4	89.89	106.92	122.03	11.31	11.31	11.31	11.31	11.31
5	155.97	161.83	63.41	229.10	10	10	10	25.23
6	131.52	121.31	2	2	2	2	2	2
7	70.21	81.60	3.60	3.60	3.60	3.60	3.60	3.60
8	371.38	371.38	317.80	1	1	1	1	1

No.	$\tilde{LS}_1$	$\tilde{LS}_{20}$	$\tilde{LS}_{40}$	$\tilde{LS}_{60}$	$\tilde{LS}_{80}$	$\tilde{LS}_{100}$	$\tilde{LS}_{200}$	PC
1	38.18	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41
2	115.20	17.20	17.20	17.20	17.20	9.43	9.43	31.90
3	106.04	4.47	4.47	4.47	4.47	4.47	4.47	4.47
4	106.92	12.04	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1
5	161.83	27.01	10	10	10	10	10	7.07
6	121.31	2.82	2.82	2.82	2.82	2.82	2.82	2.82
7	81.60	18.02	22.47	22.47	22.47	22.47	425.77	419.31
8	371.38	1	1	1	1	1	1	1

表2。该表表示数值实验：W_1 - 未归一化数据，使用基于瓦瑟斯坦距离的算法，通过 $\lambda = 1$.W_λ 获得的原始模式中心与解模式中心之间的欧几里得距离； λ.LS_λ - 归一化数据，使用基于Wasserstein测度并采用选定 λ的算法获得的原始模式中心与解模式中心之间的欧几里得距离； λPC - 归一化数据，使用基于最小二乘度量并采用选定 λ的算法获得的原始模式中心与解模式中心之间的欧几里得距离；归一化数据，使用基于Procrusters测度的算法获得的原始模式中心与解模式中心之间的欧几里得距离。

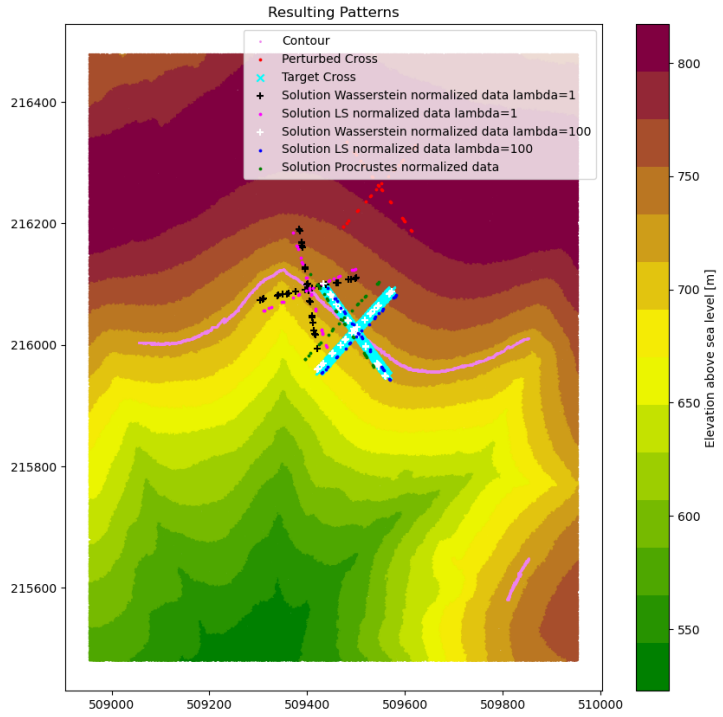
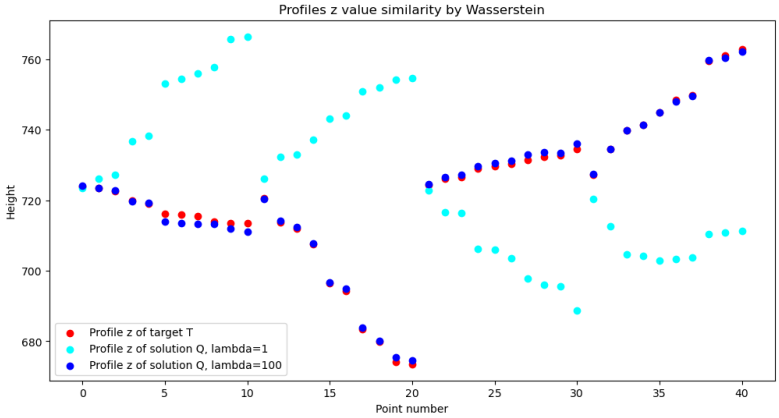
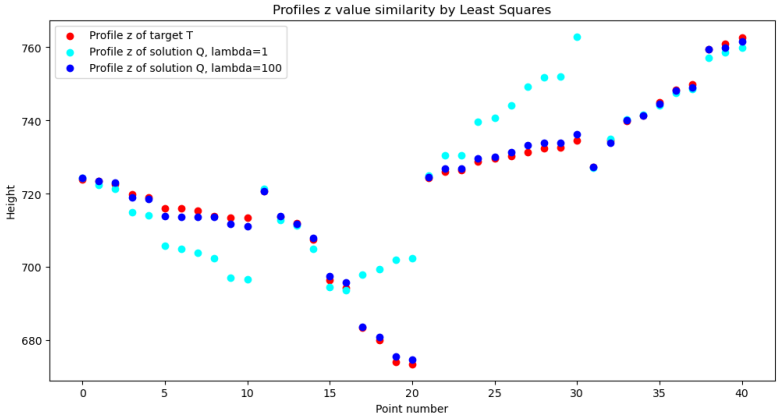


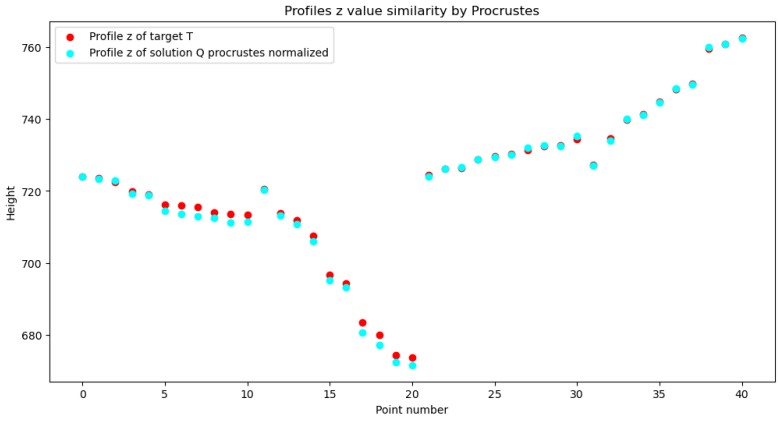
图5.1。地图上的模式



(a) 通过瓦瑟斯坦距离衡量相似性的解的高度剖面



(b) 通过最小二乘距离衡量相似性的解的高度剖面



(c) 通过普罗克鲁斯特距离衡量相似性的解的高度剖面

图 5.2 高度剖面

6. 致谢

本文是波兰科学院系统研究所、红衣主教斯特凡·维申斯基大学和大地测量与制图研究所科研团队合作的成果。作者谨此感谢 PBG地球物理勘探有限公司分享有关所选重力测点周围局部地形及其坐标的档案文献，并感谢波兰地质研究所—国家研究院（PGI-NRI）提供有关所用局部地形数据的补充信息，以及人工筛选出新的、更有可能的测试重力测量点位置。

参考文献

[1] 环境署。2017 年激光雷达复合数字地形模型（25 厘米）。https://www.data.gov.uk/dataset/3122ade0-2d0d-4ed8-bb1f-96e8ce74d0a56b/lidar-composite-dtm-2017-25cm，2025。访问日期：2026-01-12；数据集已停止提供；由环境署发布于 data.gov.uk，最后更新于 2025 年 8 月 22 日。[2] Geoportal.gov.pl——大地测量与制图总局（GUGiK）。数字高程模型（DEM）——geoportal.gov.pl。https://www.geoportal.gov.pl/en/data/digital-elevation-model-dem/，2026。访问日期：2026-01-12。[3] Colin Goodall。形状统计分析中的普罗克鲁斯特斯方法。英国皇家统计学会杂志：*B*辑（方法论），53(2):285–321，1991。[4] 大地测量与制图总局（GUGiK）。大地测量与制图总局（GUGiK）——gov.pl 网站。https://www.gov.pl/web/gugik-en，2026。访问日期：2026-01-12。[5] Jan Kryński。波兰区域准大地水准面的精确建模——结果与精度评估。大地测量与制图研究所专著丛书，（7）：266，2007。[6] Filippo Santambrogio。《应用数学家的最优传输》。2015。