arXiv:2601.07624v1 [math.LO] 12 Jan 2026

强迫下某些拓扑性质的保持

CHRIS LAMBIE-HANSON 和 PEDRO MARU N

Abstract. 我们为强迫下拓扑性质保持理论增添了新结果。特别是，我们以强有力的方式回答了 Gilton 和 Holshouser 提出的问题：我们证明，若玩家 II 在空间某点的强可数扇紧致性博弈中拥有获胜策略，那么在宇宙的每一个集合强迫扩张中，这一性质仍然成立。Rothberger 博弈也有同样的结论，但可数扇紧致性博弈或 Menger 博弈则不然。

1. Introduction

假设 $V \subseteq W$ 是集合论的传递模型，并且 $(X,\tau) \in V$ 满足 $V \models$“(X,τ) 是一个拓扑空间”。从 W 的观点来看，(X,τ) 未必是一个拓扑空间，因为 W 可能包含 τ 的新子集，而这些子集的并不属于 τ。另一方面，从 W 的观点来看，τ 是集合 X 上某个拓扑的基，因此可以探究这一拓扑与 τ 的关系。实际中，人们通常从某个基模型 V 中满足性质 Φ 的拓扑空间 (X,τ) 出发，经过某个强迫 $\mathbb{P}$ 得到一个泛型扩张，并询问 $V^{\mathbb{P}}$ 中由 τ 生成的拓扑是否满足性质 Φ。一般而言，这个问题没有简单直接的答案；具体情况取决于空间 (X,τ)、性质 Φ 以及强迫偏序集 Φ。以下示例说明了这一点：

例 1.1 ([3, 例 4.1])。 设 X 为配备欧几里得拓扑的闭单位区间 $[0,1]$ 。若 $\mathbb{P}$是任意一个会添加新实数的强迫，那么 X 在 $V^{\mathbb{P}}$中不是紧致的，因为它包含 0 与 1 之间的所有有理数，因此作为泛型扩张中闭单位区间的子集，它不是闭集；而该闭单位区间在 $V^{\mathbb{P}}$中是一个紧致 *Hausdorff* 空间。

一个不那么平凡的例子：

例 1.2 (Burke, [12, 定理 17])。 空间 $X = {}^{\omega_1}2$ 配备积拓扑[1] 后，根据 *Tychonoff* 定理是紧致的，但在由 $\mathrm{Add}(\omega_1,1)$得到的泛型扩张中甚至不是 *Lindel¨of* 的。确切地说，设 $\dot{g}$ 为泛型函数 $\omega_1 \to 2$的一个名称。˙对于每个 $\alpha < \omega_1$，令 U_α 为集合的一个 $\mathbb{P}$-名称

$$\{x \in X : x(\alpha) = \dot{g}(\alpha)\}.$$

˙注意，任意泛型滤子对 U_α 的解释都是一个地模型中的开˙集，因此可以强迫得到：U_α 在 X 中是开集（相对于新的拓扑）。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E40, 54D20,54D99.*Key words and phrases.* 拓扑、强迫、强适当性、可数紧性、博弈。两位作者均得到捷克科学院（RVO 67985840）和 GAˇCR 项目 23-04683S 的资助。[1]其中每个 2 的副本都赋予离散拓扑

一个简单的泛型性论证表明 $\Vdash X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$，但 $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 的任何可数子族都无法覆盖 X。

在已发表的文献中，关于可数闭强迫下 Lindel¨of 性质的保留问题受到的关注最多，以至于“不可破坏的 Lindel¨of”通常指在任意可数闭强迫之后仍保持 Lindel¨of 性质的空间。关于这一问题的大量信息，请参见 [12] 和 [11]。

本文考察经典拓扑性质的博弈论版本的保留问题，即门格尔性质和 Rothberger 性质，它们强化了 Lindel¨of 性质；以及（强）可数扇紧致性，它强化了可数紧致度。在 [3, 问题 8.1]，中，Gilton 和 Holshouser 询问：玩家 II 在强可数扇紧致性博弈中拥有获胜策略这一性质，是否会在强适当强迫下得到保留（未定义的概念见第 2 节）？我们的主定理表明，答案是“是”，而且意义非常强：

定理 A. 设(X,τ) 是一个拓扑空间，且对于 X，玩家 *II* 在强可数扇紧致性博弈中拥有获胜策略。那么在 V 的任意强迫扩张中，这一性质仍然成立。

同样的证明将给出以下定理，它加强了 [3, 定理 72]:

定理 B. 设(X,τ) 是一个拓扑空间，且对于 X，玩家 *II* 在 *Rothberger* 博弈中拥有获胜策略。那么在 V 的任意强迫扩张中，这一性质仍然成立。

定理 A 和 B 中提到的博弈与密切相关的可数扇紧致性博弈和门格尔博弈之间，关键区别在于：在前一类博弈中，玩家 II 每一回合分别只对局一个点或一个开集；而在后一类博弈中，玩家 II 每一回合对局任意有限大小的点集或开集族。我们将看到，由于这一差异，可数扇紧致性博弈和门格尔博弈中与定理 A 和 B 相应的结论可以被证明是错误的。

2. Preliminaries

如果（X，τ）是一个拓扑空间，且 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念，那么我们令（X，$\tau^{\mathbb{P}}$）表示底集为 X、拓扑由 τ 在泛型扩张 $V^{\mathbb{P}}$ 中生成的空间（的一个名称）。我们将滥用记号，称之为“空间 X”，但应理解，在哪个模型中考察拓扑性质可以根据上下文推断出来。例如，当我们写“$\Vdash_{\mathbb{P}} X$ 具有性质 Φ”时，实际上是指 X 在 $\mathbb{P}$-泛型扩张中计算所得；也就是说，被强迫的是（X，$\tau^{\mathbb{P}}$）具有性质 Φ。Dow 在 [1]，中提出了一种绕开这些技术细节的方法：重新定义拓扑空间的概念，将其定义为一对（X，$\mathcal{B}$），其中 $\mathcal{B}$ 是 X 上某个（唯一）拓扑的基。对于 ZF 的传递模型而言，作为基这一性质是绝对的，因此上述记号方面的考量便不再重要；不过，我们仍将采用更为常见的、尽管略显含混的术语和定义。

如果 κ 和 λ 是基数，且 κ 为无限基数，那么 Add(κ，λ) 是用于添加λ个科恩子集的偏序集。更准确地说，Add(κ，λ) 由大小小于 κ 的部分函数 $\lambda \times \kappa \rightharpoonup 2$ 所组成。我们按照（反向）包含关系对 Add(κ，λ) 排序。

设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫偏序集。我们称正则基数 θ 对于 $\mathbb{P}$ 而言是充分大的，当且仅当 $\mathscr{P}(\mathbb{P}) \in H_\theta$。如果还涉及其他对象，例如拓扑空间 (X,τ)，那么“充分大”也意味着这些对象属于 H_θ。

以下定义可追溯至 Mitchell，见 [8]:

定义 2.1. 设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫偏序集，θ 是一个充分大的正则基数。给定 H_θ 的一个良序 $\lhd$、一个模型 $M \prec (H_\theta, \in, \lhd)$ 和一个条件 $q \in \mathbb{P}$，若对于偏序集 $\mathbb{P} \cap M$ 中每个稠密集 $D \subseteq \mathbb{P} \cap M$，都有 $q \Vdash_{\mathbb{P}} \check{D} \cap \dot{G} \neq \dot{\emptyset}$，其中 G 是泛型滤子的标准 $\mathbb{P}$-名称，则称 q 是 强$(M, \mathbb{P})$-泛型的（也称为 M 的强主条件）。当模型 M 和／或偏序集 $\mathbb{P}$ 可由上下文明确时，我们将省略对它们的提及。

给定 $M \prec H_\theta$，我们称 $\mathbb{P}$ 是 M-强真适当的，当且仅当对所有 $p \in \mathbb{P} \cap M$，都存在 $q \in \mathbb{P}$，使得 $q \leq p$，且 q 是强 $(M, \mathbb{P})$-泛型。

给定 H_θ 的非空初等子模型族 $\mathcal{S}$，且满足 $\mathbb{P} \in \bigcap \mathcal{S}$，我们称 $\mathbb{P}$ 是 $\mathcal{S}$-强真适当的，当且仅当对所有 $M \in \mathcal{S}$，$\mathbb{P}$ 都是 M-强真适当的。

关于强适当性的更多内容，特别是它与 Shelah 的适当性概念的比较，请参见 [9, 第 3] 节和 [3, 第 3]节。

回顾一下，拓扑空间 (X, τ) 称为林德 ¨夫空间，当且仅当每个开覆盖都有一个可数子覆盖。我们将关注林德尔¨夫性质的以下两种强化形式:

- 拓扑空间 (X, τ) 具有罗斯伯格性质 （或简称“是罗斯伯格的”），当且仅当对于每个开覆盖序列 $\langle \mathcal{U}_n : n < \omega \rangle$，都存在一个序列 $\langle U_n : n < \omega \rangle$，其中对于每个 $n \in \omega$ 都有 $U_n \in \mathcal{U}_n$，使得 $\{U_n : n < \omega\}$覆盖 X。
- 拓扑空间 (X, τ) 具有门格尔性质 （或简称“是门格尔的”），当且仅当对于每个开覆盖序列 $\langle \mathcal{U}_n : n < \omega \rangle$，都存在一个序列 $\langle \mathcal{F}_n : n < \omega \rangle$，其中对于每个 $n \in \omega$ 都有 $\mathcal{F}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$，使得 $\{\bigcup \mathcal{F}_n : n <\omega\}$ 覆盖 X。[2]

显然，每个紧空间都是门格尔空间，但罗特伯格性质更强:

例 2.2. 设 X 为赋予欧几里得拓扑的闭单位区间。取正数序列 $\langle r_n : n < \omega \rangle$，使得 $\sum_n r_n < 1$。对每个$n \in \omega$，令 $\mathcal{U}_n$ 为 X 中勒贝格测度不超过 r_n的开子集组成的集合。显然，$\mathcal{U}_n$ 覆盖 X。若对每个 n都有 $U_n \in \mathcal{U}_n$，则 $\bigcup_n U_n$ 的测度至多为 $\sum_n r_n < 1$，因而不能覆盖 X。因此，X 是紧致的，但不具有罗特伯格性质。

定义 2.3. 设 (X, τ) 是一个拓扑空间，且 $x \in X$。我们称

- (X, τ) 在 x处具有强可数扇紧致性，当且仅当对于 X 的任意子集序列 $\langle A_n : n < \omega \rangle$，若对每个 $n \in \omega$都有 $x \in \mathrm{cl}(A_n)$，则存在一个序列$\langle x_n : n < \omega \rangle$，使得对每个 $n < \omega$ 都有 $x_n \in A_n$，且 $x \in \mathrm{cl}(\{x_n : n < \omega\})$。
- (X, τ) 在 x 处具有可数扇紧致性，当且仅当对于每个序列 $\langle A_n : n < \omega \rangle$，其中各项都是 X 的子集，且对于每个 $n \in \omega$ 都有 $x \in \mathrm{cl}(A_n)$，存在一个序列$\langle F_n : n < \omega \rangle$，使得对于每个 $n < \omega$ 都有 $F_n \in [A_n]^{<\omega}$，并且 $x \in \mathrm{cl}(\bigcup_n F_n)$。

现在，我们将介绍上述拓扑性质的一系列博弈类比。关于拓扑博弈这一主题的综述，见 [13]。

若 (X, τ) 是一个拓扑空间，且 $x \in X$，则 X 在点 x 处的强可数扇紧致性博弈 是一个长度为 ω 的双人博弈，过程如下。每一回合，玩家 I 首先出一个集合 $A_n \subseteq X$，使得 $x \in \mathrm{cl}(A_n)$；然后玩家

[2]对于集合 A，$[A]^{<\omega}$ 表示 A 的有限子集族。

II 出一个点 $x_n \in A_n$。当且仅当 $x \in \mathrm{cl}(\{x_n : n < \omega\})$ 时，玩家 II 获胜；否则，玩家 I 获胜。

若 (X, τ) 是一个拓扑空间且 $x \in X$，那么 X 在点 x 处的可数扇紧致性博弈是一种长度为 ω 的双人博弈，规则如下。每一回合中，玩家 I 先选择一个集合 $A_n \subseteq X$，使得 $x \in \mathrm{cl}(A_n)$；然后玩家 II 选择一个有限集合 $F_n \subseteq A_n$。当且仅当 $x \in \mathrm{cl}(\bigcup_{n<\omega} F_n)$ 时，玩家 II 获胜；否则玩家 I 获胜。

若 (X, τ) 是一个拓扑空间，那么 X 的 ***Rothberger*** 博弈是一种长度为 ω 的双人博弈，规则如下。每一回合中，玩家 I 先选择 X 的一个开覆盖 $\mathcal{U}_n$；然后玩家 II 选择一个开集 $U_n \in \mathcal{U}_n$。当且仅当$\{U_n : n < \omega\}$ 覆盖 X时，玩家 II 获胜；否则玩家 I 获胜。

若 (X, τ) 是一个拓扑空间，那么 X 的门格尔博弈是一种长度为 ω 的双人博弈，规则如下。每一回合中，玩家 I 先选择 X 的一个开覆盖 $\mathcal{U}_n$；然后玩家 II 选择一个有限子集 $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$。当且仅当$\{\bigcup \mathcal{F}_n : n < \omega\}$ 覆盖 X时，玩家 II 获胜；否则玩家 I 获胜。

我们有以下众所周知的事实。

引理 2.4。设 (X, τ) 是一个拓扑空间。假设玩家 *II* 在 ***Rothberger***（分别地，门格尔、强可数扇紧致性、可数扇紧致性）博弈中具有获胜策略。那么 (X, τ) 具有 ***Rothberger*** 性质（分别地，是门格尔空间、具有强可数扇紧致性、具有可数扇紧致性）。

证明。我们证明门格尔性质的情形，其他情形类似。设 σ 是门格尔博弈中玩家 II 的获胜策略。给定 $\langle \mathcal{U}_n : n < \omega \rangle$ X的开覆盖序列，考虑这样一局博弈：玩家 I 在第 n回合对局 $\mathcal{U}_n$。根据 σ，令 $\mathcal{F}_n$ 为玩家 II 在第 n 回合的对局。那么 $\bigcup_n \mathcal{F}_n$ 覆盖X，因为 σ 是获胜的，因此 X 是门格尔的。□

对于任何未定义的集合论概念，请参见 [5] 或 [6]。对于任何未定义的拓扑学概念，请参见 [2]。

3. Strong Properness

以下命题由第二作者在其博士论文中证明（见 [7, 定理 3.32]），Gilton 和 Holshouser 也几乎同时独立证明了该命题（见 [3,定理 4.6]）。

命题 3.1. 设 $\mathbb{P}$ 为一个强迫概念，(X, τ) 为一个拓扑空间，θ 为一个充分大的正则基数。设 $\mathcal{S}$ 为 $[H_\theta]^\omega$ 的一个驻定子集，并假设 $\mathbb{P}$ 是 $\mathcal{S}$-适当的。若(X, τ) 是 ***Lindel¨of*** 空间，则 $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{X}$ 是 ***Lindel¨of*** 空间。

以下引理以更一般的形式出现在 [4, 引理 1.12]中。那里的证明有一个很小的漏洞，因此我们借此机会重新证明与我们相关的情形：

引理 3.2 (Gilton-Neeman)**.** 设 $\kappa \geq \omega_1$ 并令 $\mathbb{P} := \mathrm{Add}(\omega, \kappa)$。设 $\mathbb{Q}$ 是一个 $\mathbb{P}$-名称，表示一个 σ-闭强迫。设 θ是一个（相对于 $\mathbb{P} * \mathbb{Q}$）充分大的正则基数，且 $M \prec H_\theta$ 是可数的。则两步迭代 $\mathbb{P} * \mathbb{Q}$ 是 M-强适当的。

证明。固定一个满射 $\varphi : \omega \twoheadrightarrow M$和一个条件 $(p_0, \dot{q}_0) \in M \cap (\mathbb{P} * \mathbb{Q})$。选取一个序数 $\alpha \in \omega_1 \setminus M$，并令 $\dot{f}$ 为一个 $\mathbb{P}$-名称，表示由 $\mathbb{P}$添加的第 α个实数，即 $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{f} = \bigcup\{p(\alpha, \cdot) : p \in \dot{G}\}$，其中 $\dot{G}$ 是一个关于 $\mathbb{P}$-泛型滤子的名称。

递归定义 $\langle \dot{q}_i : i<\omega\rangle$ 如下（其中 $\dot{q}_0$ 已定义）：给定 $\dot{q}_i$，根据最大原理，我们可以找到一个名称 $\dot{q}_{i+1}$，表示 $\mathbb{Q}$ 中的一个条件，使得

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \left[\left(\varphi(\dot{f}(i)) \leq \dot{q}_i \to \dot{q}_{i+1} = \varphi(\dot{f}(i))\right) \wedge \left(\varphi(\dot{f}(i)) \not\leq \dot{q}_i \to \dot{q}_{i+1} = \dot{q}_i\right)\right].$$

注意，对每个 $i<\omega$，都有 $\Vdash \dot{q}_i \in M[G]$，但名称 $\dot{q}_i$ 本身不必属于 M。不过，我们有一个“局部”版本：

命题 3.3. 对每个 $n\in\omega$ 以及每个满足 $\mathrm{dom}(p(\alpha,\cdot)) \supseteq n$ 的 $p\in\mathbb{P}$，都存在一个$\mathbb{P}$-名称 $\dot{q}\in M$，它是 $\mathbb{Q}$ 中某个条件的名称，并且满足 $p\Vdash \dot{q}=\dot{q}_n$。

证明。证明对 n 作归纳，$n=0$ 的情形显然。假设引理对 n 成立，并设 $p\in\mathbb{P}$ 满足 $n+1\subseteq \mathrm{dom}(p(\alpha,\cdot))$。由归纳假设，我们可以找到 $\dot{q}'_n\in M$，一个 $\mathbb{Q}$ 中某个条件的 $\mathbb{P}$-名称，使得 $p\Vdash \dot{q}'_n=\dot{q}_n$。由于 $n\in\mathrm{dom}(p(\alpha,\cdot))$，令 $m:=p(\alpha,n)$，则有$p\Vdash f(n)=m$。注意

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \exists q\in\dot{\mathbb{Q}}\left[(\varphi(m)\leq \dot{q}'_n\to \dot{q}=\varphi(m))\wedge(\varphi(m)\not\leq \dot{q}'_n\to \dot{q}=\dot{q}'_n)\right].$$

由于所有参数都属于 M，根据初等性，我们可以找到 $\dot{q}'_{n+1}\in M$ so使得 $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{q}'_{n+1}\in\mathbb{Q}$ and

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \left[\left(\varphi(m)\leq \dot{q}'_n\to \dot{q}'_{n+1}=\varphi(m)\right)\wedge\left(\varphi(m)\not\leq \dot{q}'_n\to \dot{q}'_{n+1}=\dot{q}'_n\right)\right].$$

由于 $p\Vdash \dot{q}'_n=\dot{q}_n$，因此 $p\Vdash \dot{q}'_{n+1}=\dot{q}_{n+1}$。 □

名称序列 $\langle \dot{q}_i : i<\omega\rangle$ 被迫递减，因此根据可数闭合性，我们可以找到一个 $\mathbb{P}$-名称，表示条件 $\dot{q}_\omega$，它被迫成为 $\langle \dot{q}_i : i<\omega\rangle$ 的下界。我们将论证 $(p_0,\dot{q}_\omega)$ 对 M 是强泛型的。为此，固定D一个 $(\mathbb{P}*\mathbb{Q})\cap M$ 的稠密子集，我们将论证，$(p_0,\dot{q}_\omega)$ 的每个扩张都可以进一步扩张，以迫使 $D\cap K\neq\emptyset$，其中 K 是 $\mathbb{P}*\mathbb{Q}$-泛型滤子的名称。因此，固定 $(s,\dot{r})\leq(p_0,\dot{q}_\omega)$，并令 $s_0:=s\cap M$，使得 $s_0\in M$ 根据初等性成立。将该断言应用于 s 和 $n:=\min\{k\in\omega:(\alpha,k)\notin\mathrm{dom}(s)\}$，我们可以找到 $\dot{q}'_n\in M$ 一个 $\mathbb{P}$-名称，表示 $\mathbb{Q}$ 中满足 $s\Vdash \dot{q}'_n=\dot{q}_n$ 的元素。特别地，$(s_0,\dot{q}'_n)$ 是 $(\mathbb{P}*\mathbb{Q})\cap M$ 中的一个条件，因此根据 D 的稠密性，我们可以找到 $(t,\dot{u})\in D$，使得 $(t,\dot{u})\leq(s_0,\dot{q}'_n)$。由于 φ 是一个满射，我们可以固定 $m\in\omega$，使得$\varphi(m)=\dot{u}$。

设 $s':=s\cup t\cup\{(\alpha,\ n,\ m)\}$。由于 $t\leq s_0=s\cap M$且 $(\alpha,\ n)\notin\mathrm{dom}(s)$，$s'$ 是一个延伸 s 的条件。因此，$(s',\ \dot{r})$ 是 $\mathbb{P}*\mathbb{Q}$ 中的一个条件。我们进一步断言，它还延伸了 $(t,\ \dot{u})$。显然，$s'\leq t$，所以我们只需论证$s'\Vdash \dot{r}\leq\dot{u}$。注意到

- $s'\Vdash \dot{f}(n)=m$;
- $t\Vdash \dot{u}\leq\dot{q}'_n$;
- $s\Vdash \dot{q}'_n=\dot{q}_n$;

因此，根据 m 的选择，

$$s'\Vdash \varphi(f(n))=\varphi(m)=\dot{u}\leq\dot{q}_n.$$

因此，$s'\Vdash \dot{q}_{n+1}=\dot{u}$，从而

$$s'\Vdash \dot{r}\leq\dot{q}_\omega\leq\dot{q}_{n+1}=\dot{u}.$$

我们已经证明了（$s',\ \dot{r}$）$\leq$（$t,\ \dot{u}$）。由于（$t,\ \dot{u}$）$\in D$，特别是（$s',\ \dot{r}$）$\Vdash D\cap K\neq\emptyset$，如所求。□

结合命题3.1 和引理3.2，我们立即得到以下结果。该结果最初由 Dow 在 [1, 引理 3.3], 中证明，之后 Scheepers 和 Tall 又在 [11, 推论 12]中以不同的方法加以推广

推论 3.4 (Dow)。设 (X,τ) 是一个 *Lindel¨of* 空间。那么，在 $V^{\mathrm{Add}(\omega,\omega_1)}$中， X 是一个 *Lindel¨of* 空间，而且在可数闭迫 *forcing* 下不可摧毁。

证明。 根据命题 X 在 ¨of $V^{\mathrm{Add}(\omega,\omega_1)}$ 中是 Lindel¨of $V^{\mathrm{Add}(\omega,\omega_1)}$ ，这一点由命题 3.1 得出，因为对每个可数的 ω,ω_1)，Add($M \prec H_\theta$都具有强适当性。

If$\dot{\mathbb{Q}}$ 是一个可数闭迫 forcing 的 Add(ω,ω_1)-名称，那么两步迭代 Add(ω,ω_1) $*\dot{\mathbb{Q}}$ 根据引理 3.2，对平稳多个可数模型具有强适当性，因此结论由命题3.1得出。 □

在 [11, 问题 2], 中，Scheepers 和 Tall 提出：添加单个科恩实数是否会使基模型中的每个 Lindel¨of 空间都变得不可摧毁。我们不知道这个问题的答案，但可以证明，强适当性方法不足以解决这个问题。事实上，不仅在引理 3.2的证明中起关键作用，而且正如下面的引理所示，当 $\kappa \leq \omega$ 时，该陈述并不成立：

引理 3.5. 令 $\mathbb{R} := \mathrm{Add}(\omega,1)*\mathrm{Add}(\omega_1,1)$，其中 θ 是一个充分大的正则基数，且 $M \prec H_\theta$ 可数。那么， $\mathbb{R}$ 中没有任何条件是 M的强泛型。

证明。 为此，固定 $(p_0,\dot{p}_1) \in \mathbb{R}$；我们需要证明 $(p_0,\dot{p}_1)$ 不是强泛型。令 $\delta = M \cap \omega_1$，必要时延伸 $(p_0,\dot{p}_1)$，不妨设 $p_0 \Vdash \mathrm{dom}(\dot{p}_1) \supseteq \delta$。

由于 Add(ω,1) 可数，我们可以固定集合$\{q \in \mathrm{Add}(\omega,1) : q \leq p_0\}$ 的一个枚举 $\langle q_\alpha : \alpha < \delta\rangle$ ，使得对每个 $q \leq p_0$，集合 $\{\alpha < \delta : q_\alpha = q\}$ 在 δ 中无界。

对每个 $\alpha < \delta$，固定一个条件 $r_\alpha \leq q_\alpha$ 和一个整数 k_α ，使得 $r_\alpha \Vdash \dot{p}_1(\alpha) = k_\alpha$。令 D 为集合

$$\left\{(t_0,\ \dot{t}_1) \in M \cap \mathbb{R} :\ t_0 \perp p_0 \vee \exists \alpha < \delta \left[t_0 \leq r_\alpha \wedge t_0 \Vdash (\alpha \in \mathrm{dom}(\dot{t}_1) \wedge \dot{t}_1(\alpha) \neq k_\alpha)\right]\right\}.$$

断言 3.6。 D 在 $M \cap \mathbb{R}$中稠密

证明。 固定 $(s_0,\ \dot{s}_1) \in M \cap \mathbb{R}$。不妨假设 $s_0 \leq p_0$。由于 Add(ω, 1) 满足可数链条件，存在一个 $\beta < \delta$ ，使得 $s_0 \Vdash \mathrm{dom}(\dot{s}_1) \subseteq \beta$。固定 $\alpha \in \delta \setminus (\beta+1)$，使得$q_\alpha = s_0$。现在找到一个名称 $\dot{s}_2 \in M$ ，表示 $\dot{s}_1$ 的一个扩张，使得 $s_0 \Vdash \dot{s}_2(\alpha) \neq k_\alpha$。那么 $(r_\alpha,\ \dot{s}_2) \in D$ 扩张 $(s_0,\ \dot{s}_1)$。□

最后注意，若 $(t_0,\ \dot{t}_1) \in D$，则 $(t_0,\ \dot{t}_1) \perp (p_0,\ \dot{p}_1)$。因此，$(p_0,\ \dot{p}_1) \Vdash$ . . $D \cap K = \emptyset$，其中 K 是 (Add(ω, 1) $*$ Add(ω_1, 1))-泛型滤子的一个名称。□

4. 博弈

这里我们证明主要结果，该结果确立了引言中的定理 A 和 B。

定理 4.1。 设 (X,τ) 是一个拓扑空间，且玩家 *II* 在以下博弈之一中拥有获胜策略：

- 关于 X 在 $x \in X$处的强可数扇紧致性博弈；
- X的 *Rothberger* 博弈；

那么，这一性质在 V 的任何强迫扩张中都会得到保留。

证明。 我们将针对强可数紧密性博弈证明该定理；Rothberger 博弈的证明类似，留给读者。

令 $\mathbb{P}$ 为任意一个强迫概念。给定一点 $x \in X$，令 $\Game_x(X)$ 表示在点 x处关于 X 的强可数扇紧致性博弈。回忆一下， $\Game_x(X)$ 是一个长度为 ω的双人博弈。在每个回合中，玩家 I 首先选择一个集合 $A_n \subseteq X$，使得 $x \in \mathrm{cl}(A_n)$；然后玩家 II 选择一个点 $x_n \in A_n$。如果$x \in \mathrm{cl}(\{x_n : n < \omega\})$，则玩家 II 获胜；否则，玩家 I 获胜。

设 σ_x 是 $\Game_x(X)$ 中玩家 II 的获胜策略。具体而言， σ_x 是一个函数，其定义域 $\mathrm{dom}(\sigma_x)$ 是所有有限序列 $\vec{A} = \langle A_k$ 的集合： $k \leq n\rangle$ ，其中每个A_k 都是 X 的子集，且满足 $x \in \mathrm{cl}(A_k)$。对于每个这样的 $\vec{A}$，都有 $\sigma(\vec{A}) \in A_n$。

我们的目标是证明，在 $V^{\mathbb{P}}$ 中，玩家 II 在 $\Game_x(X)$ 中仍有获胜策略。假设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 在 V 上是泛型的，并转到 $V[G]$。我们将按对局长度递归定义玩家 II 在 $\Game_x(X)$ 中的获胜策略 σ^* 。我们将确保，对于一个序列 $\vec{A} = \langle A_k : k \leq n\rangle$ ，其中每个 A_k 都是 X 的子集，且满足 $x \in \mathrm{cl}(A_k)$，该策略不仅输出玩家 II 的对局 $\sigma^*(\vec{A})$，还输出以下类型的辅助对象：

- 一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{A}_n \in V$，使得 $(\dot{A}_n)_G = A_n$;
- 一个条件 $p_n \in G$;
- $A^*_n := \{y \in X : \exists p' \leq p_n\ p' \Vdash_{\mathbb{P}} y \in A_n\}$。

为了便于选择这些对象，在 V 中固定一个足够大的正则基数 θ ，以及 $H(\theta)$ 的一个良序 $\lhd$ 。

假设给定一个有限序列 $\vec{A} = \langle A_k : k \leq n\rangle$ ，其元素是 X 的子集，并且对所有 $k \leq n$ 都有 $x \in \mathrm{cl}(A_k)$ ；再假设我们已经为所有 $m < n$ 指定了 $\sigma^*(\vec{A} \restriction m)$，以及对所有 $k < n$ 指定了辅助对象 $\dot{A}_k$、 p_k 和 A^*_k 。假设我们已作安排，使得对所有 $k < n$ 都有 $x \in \mathrm{cl}(A^*_k)$。

首先，令 A_n 为满足 $(\dot{A}_n)_G = A_n$ 的 X 子集的 $\lhd$-最小 $\mathbb{P}$-名称。令 q_n 为满足以下条件的 G 中按 $\lhd$ 排序最小的元素：在 V 中有 $q_n \Vdash_{\mathbb{P}} x \in \mathrm{cl}(A_n)$。对每个 $p \leq q_n$，令 $A^*_{n,\ p}$ 为所有满足存在 $p' \leq p$ 使得 $p' \Vdash_{\mathbb{P}} y \in A_n$ 的 $y \in X$ 的集合。注意， $A^*_{n,\ p} \in V$ 且 $x \in \mathrm{cl}(A^*_{n,\ p})$。

断言 4.2. 存在 $p \leq q_n$ 属于 G ，使得 $\sigma_x\left(\langle A^*_k : k < n\rangle^\frown \langle A^*_{n,\ p}\rangle\right) \in A_n$。

证明。 反设不然。于是我们可以固定一个条件 $p^* \in G$ ，使得 $p^* \leq q_n$并且

$$p^* \Vdash \neg\exists p \leq q_n \left(p \in \dot{G} \wedge \sigma_x(\langle A^*_k : k < n\rangle^\frown \langle A^*_{n,p}\rangle) \in \dot{A}_n\right).$$

令 $y := \sigma_x\left(\langle A^*_k : k < n\rangle^\frown \langle A^*_{n,\ p^*}\rangle\right)$ 。由于 $y \in A^*_{n,\ p^*}$，我们可以找到 $p^{**} \leq p^*$ ，使得 $p^{**} \Vdash y \in A_n$。

令 G^* 为 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型，且满足 $p^{**} \in G^*$。由于 $p^{**} \leq p^*$，可得$p^* \in G^*$，因此

$$V[G^*] \models \neg\exists p \leq q_n \left(p \in G^* \wedge \sigma_x(\langle A^*_k : k < n\rangle^\frown \langle A^*_{n,p}\rangle) \in (\dot{A}_n)_{G^*}\right).$$

另一方面， $p^{**} \Vdash y \in A_n$，因此

$$V[G^*] \models \left(p^* \leq q_n \wedge p^* \in G^* \wedge \sigma_x(\langle A^*_k : k < n\rangle^\frown \langle A^*_{n,p^*}\rangle) \in (\dot{A}_n)_{G^*}\right).$$

这就产生了矛盾。 □

令 p_n 为满足该断言的 $\lhd$-最小 p，并令 $A^*_n := \{y \in X : \exists p' \leq p_n(p' \Vdash_{\mathbb{P}} y \in \dot{A}_n)\}$。最后，设 $\sigma^*(\vec{A}) = \sigma(\langle A^*_k : k \leq n\rangle)$。

在 V 中，令 $\dot{\sigma}^*$ 为上述策略的一个名称。我们断言 $\dot{\sigma}^*$ 被迫成为对玩家 II 的获胜策略。反设不然，并在 V 中固定一个序列$\langle B_n : n < \omega\rangle$ 和一个条件 $r \in \mathbb{P}$，使得 r 强迫

- 对于所有 $n < \omega$, B_n 都是 X 的子集，并且 $x \in \mathrm{cl}(B_n)$;
- 如果 $\langle \dot{x}_n : n < \omega\rangle$ 是玩家 II 对战$\langle B_n$ 时所产生的序列，其中玩家 II 按照 $\dot{\sigma}^*$ 进行对局: $n < \omega\rangle$，那么 $x \notin \mathrm{cl}(\{\dot{x}_n : n < \omega\})$。

如有必要，进一步延长 r 后，事实上我们可以假设存在一个开集$U \ni x$，使得 $r \Vdash_{\mathbb{P}} \{\dot{x}_n : n < \omega\} \cap U = \emptyset$。

对于 $n < \omega$，令 $\dot{a}_n$、$\dot{p}_n$以及 A^*_n 为 $\mathbb{P}$-名称，它们由 r 强制为等于辅助对象[3] $\dot{A}_n$、p_n和 A^*_n 在 $\Im_x(X)$这一局中产生，其中玩家 I 对局$\langle B_n : n < \omega\rangle$，玩家 II 则按照 $\dot{\sigma}^*$进行。递归地定义一个递减序列 $\langle r_n : n < \omega\rangle$ 中的条件 $\mathbb{P}$，使得对于所有 $n < \omega$，都有

- $r_n \leq r$;
- r_n 决定 $\dot{a}_n$、$\dot{p}_n$ 和 A^*_n 的取值，分别记为 A_n、p_n 和 A^*_n;
- $r_n \leq p_n$。

对于每个 $n < \omega$，注意到 $A^*_n = \{y \in X : \exists p' \leq p_n\ p' \Vdash_{\mathbb{P}} y \in A_n\}$。现在令 $\langle x_n : n < \omega\rangle$ 为一局 $\Im_x(X)$ 中玩家 II 所走的对局，其中玩家 I 采用 $\langle A^*_n : n < \omega\rangle$，而玩家 II 按照 σ_x 行动。由于 σ_x 是玩家 II 的获胜策略，我们有 $x \in \mathrm{cl}(\{x_n : n < \omega\})$；特别地，存在 $n < \omega$ 使得 $x_n \in U$。现在注意，根据我们对 $\dot{\sigma}^*$ 的定义，r_n 迫使$\langle x_k : k \leq n\rangle$ 是中一局 $\Im_x(X)$ 里玩家 II 所走的前 $(n+1)$ 步序列，其中玩家 I 采用 $\langle B_n : n < \omega\rangle$，玩家 II 则采用 $\dot{\sigma}^*$；也就是说，对于所有 $k \leq n$，都有 $r_n \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x}_k = x_k$。于是 $x_n \in U$ 与如下事实矛盾: $r_n \leq r$且 $r \Vdash_{\mathbb{P}} \{\dot{x}_i : i < \omega\} \cap U = \emptyset$。
□

注 4.3. 如果我们尝试将定理 4.1 推广到可数扇紧致性的情形，就会在命题 4.2的证明中遇到麻烦，因为玩家 II 在每个回合中不止选择一次: 如果令 $F := \sigma_x(\langle A^*_k : k < n\rangle^\frown\langle A^*_{n,p^*}\rangle)$，那么由$F \subseteq A^*_{n,p^*}$，我们可以对每个 $y \in F_n$找到某个 $p_y \leq p^*$，使得 $p_y \Vdash y \in A_n$，但没有理由认为 $\{p_y : y \in F\}$ 有下界。事实上，定理 4.1对于可数扇紧致性博弈并不成立: 取具有积拓扑的 $X = {}^{\omega_1}2$，并令 $Y = C_p(X)$。根据 [10, 例 4], ，玩家 II 在 Y的可数扇紧致性博弈中有获胜策略，但 Y在 $V^{\mathrm{Add}(\omega_1,1)}$中并非可数紧。因此，由引理 2.4，在 $V^{\mathrm{Add}(\omega_1,1)}$中，玩家 II 在 Y的可数扇紧致性博弈中没有获胜策略。

定理 4.1 对门格尔博弈也不成立。再次考虑空间 $X = {}^{\omega_1}2$，它带有积拓扑。根据 Tychonoff 定理，X 是紧致的，因此玩家 II 在门格尔博弈中有一个非常简单的获胜策略: 如果玩家 I 在阶段 0 的对局是 $\mathcal{U}_0$，那么玩家 II 就选择一个有限子覆盖 $\mathcal{F}_0$，并在游戏的其他各阶段任意对局。另一方面，根据例 1.2，X 不是 Lindel¨of 的（in $V^{\mathrm{Add}(\omega_1,1)}$），因此不是门格尔空间；根据引理 2.4，玩家 II 在 $V[G]$ 中没有门格尔博弈的获胜策略。

5. Open questions

虽然定理 A 和 B 都相当一般，讨论的是由任意强迫得到的泛型扩张，但证明非常强烈地依赖强迫工具，因此

[3]提醒读者，$\dot{a}_n$ 是一个名称的名称。

似乎不太可能只对先前的论证稍作修改，就能为任意一对传递模型 $V \subseteq W$ 建立类似的结果。这引出了以下问题：

问题 5.1。 假设 $0^\sharp$ 存在（甚至假设PFA 成立）。是否存在一个拓扑空间$(X, \tau) \in L$，使得对于某个 $x \in X$，在 L 中，玩家 *II* 在强可数扇紧致性博弈中有获胜策略，但在宇宙 V 中进行的博弈里，玩家 *II* 没有这样的策略？

问题 5.2。 假设 $0^\sharp$ 存在（甚至假设 PFA 成立）。是否存在一个拓扑空间$(X, \tau) \in L$，使得在 L 中，玩家 *II* 在 *Rothberger* 博弈中有获胜策略，但在宇宙 V 中进行的博弈里，玩家 *II* 没有这样的策略？

References

[1] A. Dow.《反射与强迫在拓扑学中的两个应用》。载于：《一般拓扑学及其与现代分析和代数的关系》，第六卷（布拉格，1986）。第16卷。数学研究与论文集。柏林：Heldermann，1988年，第155–172页。 ISBN: 978-3-88538-216-4.[2] Ryszard Engelking。《一般拓扑学》。第2版。第6卷。纯数学西格玛丛书。柏林：Heldermann Verlag，1989年，第viii+529页。 ISBN: 3-88538- 006-4.[3] Thomas Gilton 和 Jared Holshouser。《强适当强迫对拓扑性质的保留》。载于：《拓扑学及其应用》375（2025），论文编号109275，共21页。 ISSN: 0166-8641,1879-3207。 DOI: 10.1016/j.topol. 2025.109275.[4] Thomas Gilton 和 Itay Neeman。《侧条件与迭代理论》。载于：2016年阿巴拉契亚集合论会议论文集。即将发表于下一卷 AST 论文集。（2016）。[5] Thomas Jech。《集合论》。施普林格数学专著丛书。柏林：Springer-Verlag，2003年，第xiv+769页。 ISBN: 3-540-44085-2.[6] Kenneth Kunen。《集合论》。第34卷。《逻辑研究》（伦敦）。伦敦：College Publications，2011年。 ISBN: 978-1-84890-050-9.[7] Pedro Marun。《空间、树与标记集》。博士论文。卡内基梅隆大学，2024年。[8] William J. Mitchell。《用有限强迫添加ω_2的闭无界子集》。载于：《圣母大学形式逻辑杂志》46.3（2005），第357–371页。ISSN: 0029-4527,1939-0726。 DOI: 10.1305/ndjfl/1125409334.[9] Itay Neeman。《用两种类型的模型序列进行强迫》。载于：《圣母大学形式逻辑杂志》55.2（2014），第265–298页。 ISSN: 0029-4527,1939- 0726。 DOI: 10.1215/00294527-2420666.[10] Marion Scheepers。《关于可数紧致度的若干评述》。载于：《拓扑学及其应用》161（2014），第407–432页。 ISSN: 0166-8641,1879-3207。 DOI: 10. 1016/j.topol.2013.11.001.[11] Marion Scheepers 和 Franklin D. Tall。《Lindel¨of 不可毁性、拓扑博弈与选择原理》。载于：《数学基础》210.1（2010），第1–46页。 ISSN: 0016-2736,1730-6329。 DOI: 10.4064/fm210-1-1.[12] Franklin D. Tall。《关于具有 G_δ点的 Lindel¨of 空间的基数》。载于：《拓扑学及其应用》63.1（1995），第21–38页。 ISSN: 0166-8641,1879- 3207。 DOI: 10.1016/0166-8641(95)90002-0。

[13] Rastislav Telg´arsky。《拓扑博弈：纪念班纳赫–马祖尔博弈诞生50周年》。《落基山数学杂志》17.2（1987），第227–276页。 ISSN: 0035-7596,1945-3795。 DOI: 10.1216/RMJ-1987-17-2-227。

Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Žitná 25, Prague 1, 115 67,Czech Republic*Email address*: lambiehanson@math.cas.cz

Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Žitná 25, Prague 1, 115 67,Czech Republic*Email address*: marun@math.cas.cz