arXiv:2601.07642v1 [math.FA] 12 Jan 2026

B样条生成元的 Gabor 框架集中的一类新型双曲线裂隙

Jakob Lemvig*

2026年1月13日

摘要： 我们展示了 B样条生成元的 Gabor 系统的框架集补集中的一类新的无限双曲曲线。证明方法结合了 Gröchenig 的方法 [单位分解与 *Gabor* 框架的新障碍，arXiv:1507.08432, 2015]，以及 Nielsen 和作者 [*Gabor* 框架 *B*样条猜想的反例中的一种部分单位分解论证，《傅里叶分析与应用杂志》，22(6):1440–1451, 2016]。我们将新的双曲障碍与所谓 Janssen 蝴蝶结的“右蝴蝶结”联系起来 [零点较少的 *Zak* 变换与蝴蝶结，载于*Gabor* 分析进展，Birkhäuser， 2003]。

1 引言

由 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 生成、沿格 $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$,$a, b > 0$ 进行时频移位的 Gabor 系统定义为

$$\mathcal{G}(g, a, b) = \left\{ \mathrm{e}^{2\pi i b m \cdot} \, g(\cdot - ak) \,\middle|\, k, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

The 系统$\mathcal{G}(g, a, b)$ 称为一个*Gabor* 框架，如果存在常数 $A, B > 0$，使得 t

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k,m\in\mathbb{Z}} |\langle f, \mathrm{e}^{2\pi i b m \cdot} \, g(\cdot - ak)\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \text{for all } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Gabor 分析中的一个基本问题是：给定 $g \in L^2(\mathbb{R})$，确定框架集$\mathcal{F}(g)$，该集合由参数值 $(a, b) \in \mathbb{R}^2_+$ 组成，其中 $\mathcal{G}(g, a, b)$ 是框架。现代表述由 Gröchenig 提出 [15]，，他强调这是时频分析中的一个重要问题；该问题本身可追溯至 20 世纪 90 年代，参见 [7, 10, 19]。

本文研究 N_n 阶数为 $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ 的基数 B样条的框架集。基数 B样条定义为单位区间 $[0, 1]$，示性函数的 n 重卷积，即

$$N_1 = \chi_{[0,1]}, \quad \text{and} \quad N_{n+1} = N_n * N_1, \quad \text{for } n \in \mathbb{N}.$$

由于具有紧支撑、光滑性和单位分解性质等诸多优良特性，这些 B 样条被广泛用作 Gabor 系统生成元。对 $\mathcal{F}(N_n)$ 的刻画是 Christensen 在 [3]提出的 Gabor 分析六个未解决问题之一。我们的主要结果——定理 1.3——证明了存在一个新的无限族双曲障碍，它们阻碍框架集 $\mathcal{F}(N_n)$。

2010 数学学科分类。主要分类：42C15。次要分类：42A60关键词和短语。B样条、框架集、Gabor 系统、单位分解、Zibulski-Zeevi 矩阵

*丹麦技术大学。电子邮箱： jakle@dtu.dk

示性函数 N_1 的框架集具有复杂的几何结构，这一点已有充分记载，最著名的例子是所谓的“Janssen 蝴蝶结” [19], ; Dai 和 Sun [6]最终完整刻画了 $\mathcal{F}(N_1)$。长期以来，人们并不清楚 $\mathcal{F}(N_1)$的复杂性是否只是 N_1不连续所造成的表象。然而， [21] 中的结果表明，所有阶数的 B 样条窗函数的框架集都必然具有极其复杂的结构，并且与 $\mathcal{F}(N_1)$有若干相似之处。本文进一步强化了这一观点：我们认为，某些关于 a 和 b 的数论约束决定了框架障碍，而且 Janssen 蝴蝶结中的双曲几何（至少其中一部分）并非 N_1所独有，而是所有基数 B样条 N_n 共有的一般现象。

我们的分析基于Gabor系统的Zak变换和Zibulski-Zeevi表示 [22]。因此，我们在此简要概述其主要思想。函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$的Zak变换定义为

$$(Z_\lambda f)(x,\gamma) = \sqrt{\lambda} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda(x-k))\, \mathrm{e}^{2\pi i k\gamma}, \quad a.e.\ x,\gamma \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

且在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$中收敛。我们仅考虑有理过采样Gabor系统，即$\mathcal{G}(g,a,b)$，其中

$$ab \in \mathbb{Q}, \quad ab = \frac{p}{q} \quad \gcd(p,q) = 1.$$

对于 $g \in L^2(\mathbb{R})$，我们定义列向量 $\phi_\ell^g(x,\gamma) \in \mathbb{C}^p$，其中 $\ell \in \{0,1,\dots,q-1\}$，定义为

$$\phi_\ell^g(x,\gamma) = \left(p^{-\frac{1}{2}} (Z_{\frac{1}{b}} g)(x - \ell\frac{p}{q}, \gamma + \frac{k}{p}) \right)_{k=0}^{p-1} \ a.e.\ x,\gamma \in \mathbb{R}.$$

由 $\Phi^g(x,\gamma) = [\phi_\ell^g(x,\gamma)]_{\ell=0}^{q-1}$定义的 $p\times q$矩阵称为Zibulski-Zeevi 矩阵，由此我们得到有理过采样Gabor系统框架性质的如下刻画：

定理 1.1 (Zibulski-Zeevi刻画)。 设 A、$B>0$，且令 $g \in L^2(\mathbb{R})$。假设 $G(g,a,b)$ 是过采样率为有理数的 *Gabor* 系统。那么下列命题等价：

(i) $G(g,a,b)$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 *Gabor* 框架，框架界为 A和 B；*(ii)* $\{\phi_\ell^g(x,\gamma)\}_{\ell=0}^{q-1}$是 $\mathbb{C}^p$ 上的框架，且几乎处处 $(x,\gamma) \in [0,1)^2$满足统一框架界 A和 B。

对于 Feichtinger 代数 $M^1(\mathbb{R})$中的窗函数，Zibulski-Zeevi 矩阵的元素连续，因此，要证明 $\mathcal{G}(g,\ a,\ b)$ 不是框架，只需找到一个点 $(x,\ \gamma) \in [0,1)^2$，使得集合 $\{\phi_\ell^g(x,\ \gamma)\}_{\ell=0}^{q-1}$不能张成 $\mathbb{C}^p$。

对于 $x\in\mathbb{R}$，我们用 $R(x)$ 表示最近整数舍入函数，即 $R(x) = \lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor$，并用 $F(x) = x - R(x)$- $\in (-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]$表示 x 的（带符号）小数部分。-[21] 的主要结果表明，$\mathcal{G}(N_n,\ a,\ b)$ 不是一个框架，适用于

$$ab = \frac{p}{q} < 1 \quad \text{for } |F(b)| \le \frac{1}{nq} \ \text{ and } \ b > \frac{3}{2}, \tag{1.2}$$

其中 gcd$(p,\ q) = 1$。基于 Kamilla H. Nielsen 大量借助计算机进行的符号计算，我们发现，对于 Gabor 系统 $\mathcal{G}(N_n,\ a,\ b)$ 的框架性质而言，在远离 $b = 2$、3、4、.....这些整数值的地方，还存在其他双曲障碍。事实上，我们在 [21] 中提出了以下猜想：$\mathcal{G}(N_2,\ a_0,\ b_0)$ 不是框架，

$$a_0 = \frac{1}{2m+1},\ b_0 = \frac{2k+1}{2},\ k,m\in\mathbb{N},\ k>m,\ a_0b_0<1, \tag{1.3}$$

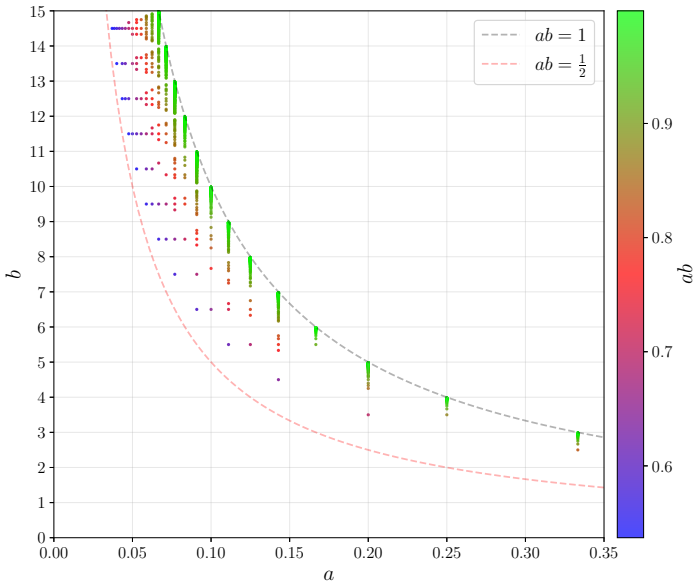


图 1：点阻碍集 P 定义于定理 1.2 绘制于 $b \leq 15$。在每个垂直带 $a_0 = 1/\mu$中，随着 r 增大，点变得越来越密集，其聚点为$(1/\mu,\ \mu)$，$\mu \geq 3$。颜色条表示 $ab \in (1/2,\ 1)$的值。

此外，$\mathcal{G}(N_2,\ a,\ b)$ 沿着这些双曲线不是框架

$$ab = \frac{2k+1}{2\,(2m+1)}, \quad \text{for } |b - b_0| \leq \frac{k-m}{2(2m+1)}, \tag{1.4}$$

对每个 a_0 和 b_0 由（1.3）定义。我们给出了 $m = 1$ 且 $k = 2$ 的情形的 [21]证明。Gröchenig 在论文 [13]中证明了该猜想的第一部分（1.3）。Ghosh 和 Selvan 最近成功验证了完整的猜想。 [12]

对本文的发展至关重要的是，Gröchenig [13] 意识到，1.3）中发现的模式 [21] 是更大一类障碍的一部分，这些障碍适用于 Feichtinger 代数 M^1（$\mathbb{R}$）中的任意 Gabor 系统生成元，其满足单位分解性质：

定理 *1.2*（*Gröchenig* [13]）。设 $\mu, \nu, r \in \mathbb{N}$ 满足 $r \geq 2$。设 $p = r\nu + j$ 和 $q = r\mu$，其中 $j = 1, \ldots, r-1$。定义点集 P，其点 (a_0, b_0) 满足 $\in \mathbb{R}^2_+$，其中 $a_0 = \frac{r}{q} = \frac{1}{\mu}$ 且 $b_0 = \frac{p}{r} = \nu + \frac{j}{r}$，并受约束条件 p 和 q 与 $q - \mu + 1 < p < q$ 互素。如果 (a_0, b_0) 满足 $\in P$，且 $g \in M^1(\mathbb{R})$ 满足单位分解性质 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(\cdot + k) = 1$，那么 $G(g, a_0, b_0)$ 不是 $L^2(\mathbb{R})$ 的框架。

若取 $\mu = 2m + 1$ 为奇数且 $r = 2$ 在 定理 1.2中，则可得到（1.3）中的障碍，因为 N_2 满足单位分解性质。Gröchenig 指出，P 包含可数多个形如 $(1/\mu, \mu - 1 + j/r)$的点，$r \in \mathbb{N}$ 且对每个 $\mu \geq 3$，都有一个聚点 $(1/\mu, \mu)$。关于集合 图 1 给出了集合 P的可视化。

本文旨在说明，对于 B 样条，由以下内容定义的点障碍 P会扩展为 $\mathcal{F}(N_n)$ 的双曲线障碍（参见图 2）：

定理 1.3。设 $n \in \mathbb{N}$。对于 $(a_0,\ b_0) \in P$我们令 $a_0 b_0 = p/q$，并令 $q = r\mu$，其中 p、q、r、μ 如定理 *1.2*中所述。定义集合

$$H = \bigcup_{(a_0,b_0)\in P} H_{(a_0,b_0)}, \tag{1.5}$$

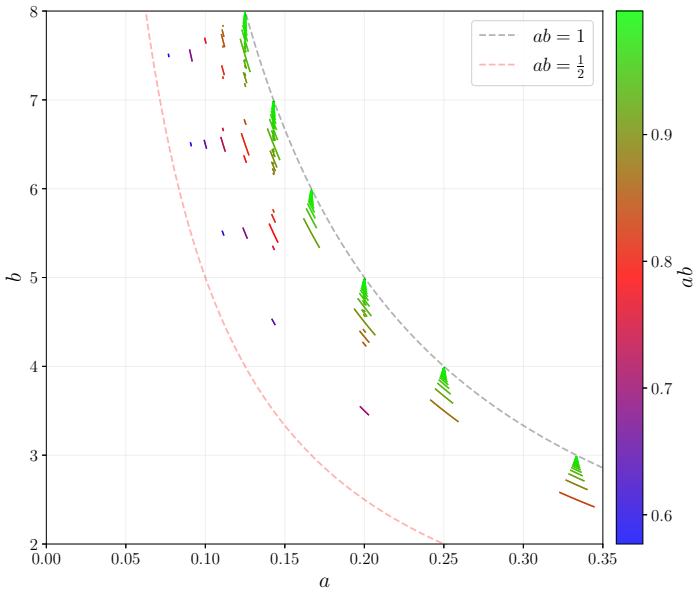


图 2：新的双曲阻碍集 H 对应于 N_n， $n = 2$，见 定理 1.3。由（1.6）定义的双曲线段，根据其 ab 取值着色。

其中

$$H_{(a_0,b_0)} = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2_+ \,\middle|\, ab = \frac{p}{q} \text{ and } |b - b_0| \le \frac{1}{nq}(\mu - (q - p + 1)) \right\} \tag{1.6}$$

如果（a, b） $\in H$，那么 G（N_n, a, b）不是一个关于 L^2（$\mathbb{R}$）的框架。换言之，框架集 $\mathbb{R}^2_+ \setminus F$（$N_n$）的补集包含集合 H。

在 [21] 中，Nielsen 和作者利用 Zibulski-Zeevi 矩阵的一行全零这一失败情形证明了框架障碍；也就是说，我们找到了一个点 （x， γ），使得 Zibulski-Zeevi 矩阵 Φ^{N_n} 的一整行都为零。Gröchenig 在 [13] 中的证明采用了更有力的方法，明确构造 $q - p + 1$ 出 Zibulski-Zeevi 矩阵核中的线性无关向量；这也是我们在此采用的证明技巧。

定理1.3 的证明将在第 3 节给出。首先，在下一节，即第 2 节中，我们将研究集合 P 和 H的几何性质，展示这些集合的复杂行为及其与 Janssen 蝴蝶结的联系。

关于 Gabor 分析和 B 样条的背景知识，请参阅教材 [4, 14]。关于 B 样条框架集的结果，请参阅 [1, 2, 5, 6, 11, 17–20]。

2 障碍集的性质

定理1.2中定义的点阻碍集 P 可以通过统一参数化改写为更简单、更紧凑的形式，其中和 p 及 q 均表示项 $r\mu$的平移。

定义1。设 μ、 k、 $r \in \mathbb{N}$ 为满足以下条件的整数

$$\mu \ge 3,\ r \ge 2,\ k \in \{1, 2, \dots, \mu - 2\},\ \gcd(k, \mu) = 1 \quad \text{and} \quad \gcd(k, r) = 1. \tag{2.1}$$

将该集合定义为

$$P' = \left\{ \left(\frac{1}{\mu}, \mu - \frac{k}{r} \right) \in \mathbb{R}^2_+ \,\middle|\, \mu, r, k \text{ satisfying } (2.1) \right\}. \tag{2.2}$$

我们将每个点 $(a_0,\ b_0)$ 与（2.2）相对应

$$a_0 = \frac{1}{\mu},\quad b_0 = \mu - \frac{k}{r},$$

and

$$p = r\mu - k,\quad q = r\mu \quad \text{such that} \quad a_0 b_0 = \frac{p}{q}.$$

我们来论证，点 $(a_0,\ b_0)$ 在（2.2）中确实对应于 Gröchenig 发现的障碍 [13]:

引理 2.1。 集合 P 定义于 定理 *1.2* 以及 P' 由 (2.2) 定义的集合相同，即$P = P'$。

证明。 我们首先注意到， a_0 在两种集合构造中的定义相同。

$P \subset P'$: 假设我们有 $(p,\ q)$ 如 定理 1.2所示。令 $k = q - p$。由 $p < q$可得 $k > 0$，因此 $k \geq 1$。由 $q - \mu + 1 < p = q - k$ 可得 $-\mu + 1 < -k$，所以 $k < \mu - 1$，因此 $k \leq \mu - 2$。

已知 $\gcd(p, q) = 1$。代入 $p = q - k$，得到 $\gcd(q-k, q) = 1 \iff \gcd(-k, q) = 1 \iff \gcd(k, q) = 1$。由 $q = r\mu$，关系 $\gcd(k, r\mu) = 1$ 意味着 $\gcd(k, r) = 1$，且 $\gcd(k, \mu) = 1$。

$P' \subset P$: 设 $p = r\mu - k$和 $q = r\mu$，且 $1 \leq k \leq \mu - 2$ 以及 $\gcd(k, r) = \gcd(k, \mu) = 1$。由于 $k \geq 1$，我们有 $p = q - k < q$。由于 $k \leq \mu - 2$，可得 $p = q - k \geq q - (\mu - 2) = q - \mu + 2 > q - \mu + 1$。因此 $q - \mu + 1 < p < q$。由 $\gcd(p, q) = \gcd(r\mu - k, r\mu) = \gcd(k, r\mu) = 1$ 可知， p 和 q 互素，因为 $\gcd(k, r) = \gcd(k, \mu) = 1$。

还需证明存在 ν, j 使得 $p = r\nu + j$，其中 $j \in \{1, \ldots, r-1\}$。由于$p \not\equiv 0 \pmod{r}$（因为 $\gcd(k, r) = 1$），我们可以写成 $p = r\nu + j$，其中 $j = p \bmod r \in \{1, \ldots, r-1\}$。此外，$p > q - \mu + 1 = r\mu - \mu + 1 \geq 2\mu - \mu + 1 = \mu + 1 > 0$，因此 $\nu \geq 1$。 □

从现在起，我们将点阻碍集简记为 P，并将在后续所有证明和讨论中使用定义1中的参数化。

如 [13], 所述，集合 P 从下方聚于$(1/\mu, \mu)$， $\mu \geq 3$。没有其他聚点，且 P 中的所有点都是孤立点。接下来，我们考察点集 P的其他一些性质。取$(a_0, b_0) \in P$。显然 $a_0 b_0 = \frac{p}{q} < 1$，因为 $p < q$。此外，我们有

$$a_0 b_0 = \frac{p}{q} = \frac{1}{\mu}\left(\mu - \frac{k}{r}\right) = 1 - \frac{k}{r\mu},$$

因此也有 $1/2 < a_0 b_0$，因为 $1 - \frac{k}{r\mu} \geq 1 - \frac{\mu - 2}{2\mu} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\mu} > \frac{1}{2}$，对于 $\mu \geq 3$ 和 $r \geq 2$。因此， P 和 H 中的所有点都位于 $\mathbb{R}^2_+$ 中由不等式 $1/2 < ab < 1$ 所定义的区域内。

显然，区间 $(1/2, 1)$ 中并非所有有理数都能表示为 $a_0 b_0$，因为 q 必须是形如 $q = r\mu$ 的合数，其中 $r \geq 2$ 且 $\mu \geq 3$，例如， q 不能是素数。然而，允许的逆密度 $a_0 b_0$ 是稠密的，因为对于任意 $d \in (1/2, 1)$，我们都可以取 $r = 2$、一个足够大的素数 μ 和一个奇整数 $1 \leq k \leq \mu - 2$，使得 $a_0 b_0 = 1 - \frac{k}{r\mu}$ 任意接近给定值 d。此外，每条双曲线 $ab = p/q < 1$ 至多包含有限条由 (1.6) 给出的线段 $H_{(a_0, b_0)}$，因为对于固定的 p 和 q，满足 $r \geq 2$ 且 $\mu \geq 3$ 的 $q = r\mu$ 的因式分解只有有限种。这与 (1.2) 形成对比，在 (1.2) 中，每条双曲线 $ab = p/q < 1$ 都包含无穷多条障碍双曲线段（每个整数 $b \geq 2$ 对应一条）。

集合中的点 P 如图 1所示，分布在不同的竖直带 $a_0 = \frac{1}{\mu}$ 的上界为水平线 $b = \mu$，其中第二个坐标为

$b_0 = \mu - \frac{k}{r}$其中 $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \mu - 2$ 以及 $r \geq 2$。由 $k \leq \mu - 2$，我们还可以得到b_0 的一个下界，只要固定 μ：

$$\frac{r-1}{r}\mu < \frac{r-1}{r}\mu + \frac{2}{r} < b_0, \tag{2.3}$$

因此，

$$\tfrac{1}{2}\mu \leq \frac{r-1}{r}\mu < b_0 < \mu, \tag{2.4}$$

对于 b_0 局限于某个水平带 $N \leq b_0 < N+1$ 的某个整数 $N \geq 2$，我们也可以得到 μ的界。由 $N < b_0 < \mu$，可得 $\mu \geq N+1$。另一方面，由（2.4）可得 $\frac{1}{2}\mu < b_0 < N+1$，因此 $\mu < 2(N+1)$。于是，$\mu \in \{N+1, \ldots, 2N+1\}$。

有了这些界，我们现在可以分析 P 中整数 b 值附近的“局部间隙”。这一现象与点在 $(1/\mu,\ \mu)$ 处的聚集互为补充，并显示出 P 中各点的位置具有明显的不对称性。证明基于鸽巢原理的一个版本：一个不等于零的整数大于一，这在丢番图逼近的证明中很常见。核心思想是，对于任意整数 K，由 $b_0 - K = (\mu - K) - \frac{k}{r} \neq 0$ 可得

$$|b_0 - K| = \frac{|\mu r - Kr - k|}{r} \geq \frac{1}{r} \tag{2.5}$$

由于 $\mu r - Kr - k$ 是一个非零整数。因此，为了给间隙 $|b_0 - K|$ 提供下界，我们需要在参数约束下最大化 r。这一思路导出了以下局部间隙界：

命题 2.2（沿 $a_0 = 1/\mu$ 的局部间隙）。设 $(a_0, b_0) \in P$，其中 $a_0 = 1/\mu$。设 $N = \lfloor b_0 \rfloor \geq 2$ 为满足 $N \leq b_0 < N+1$ 的整数。则

$$b_0 - N \geq \frac{\mu - N}{\mu - 1}. \tag{2.6}$$

并且，如果 $\mu \geq N+2$，则

$$(N+1) - b_0 \geq \frac{\mu - N - 1}{\mu - 3}. \tag{2.7}$$

证明。我们只证明（2.6），因为（2.7）的证明类似。令 $\delta = b_0 - N$。代入 $b_0 = \mu - \frac{k}{r}$ 的表达式，得到：

$$\delta = (\mu - N) - \frac{k}{r}.$$

Let $M = \mu - N \in \mathbb{Z}$。由于 $b_0 < \mu$，因此 M 是一个正整数。我们将 δ a s 重写为

$$\delta = M - \frac{k}{r} = \frac{Mr - k}{r}.$$

令 $X = Mr - k \in \mathbb{Z}$。由于 $\delta > 0$，我们有 $X > 0$。因为 X 是一个整数，我们甚至有 $X \geq 1$。将 $k = Mr - X$ 代入约束条件 $k \leq \mu - 2$，得到：

$$Mr - X \leq \mu - 2.$$

因此

$$r \leq \frac{\mu - 2 + X}{M}. \tag{2.8}$$

为了使 $\delta = \frac{X}{r}$ 最小化，我们必须使分母 r 最大化。利用由（2.8）推导出的界，我们得到

$$\delta \geq \frac{X}{\frac{\mu-2+X}{M}} = \frac{MX}{\mu-2+X}.$$

函数 $f(x) = \frac{Mx}{\mu-2+x}$ 在 $x > 0$上严格递增。因此，最小间隙出现在最小的整数 $X = 1$处：

$$\delta \geq f(1) = \frac{M}{\mu-2+1} = \frac{\mu-N}{\mu-1}.$$

□

虽然 P中的点从下方沿着 $(1/\mu,\ \mu)$ 趋近于 $a = 1/\mu$，但由定理 2.2 可知，在 P 中，整数 b 值正上方没有点：

Corolla 理 2.3 （整数 b值上方的间隙）。 设 $(a_0,\ b_0) \in P$，并设 $N = \lfloor b_0 \rfloor \geq 2$。则

$$b_0 \notin \left[N, N + \frac{1}{N}\right)$$

证明。 回顾一下， $\mu \in \{N+1, \ldots, 2N+1\}$。函数 $f(x) = \frac{x-N}{x-1}$在 $x > N$上递减。因此，由 (2.6) 得

$$b_0 - N \geq \frac{\mu-N}{\mu-1} \geq f(N+1) = \frac{N+1-N}{N+1-1} = \frac{1}{N}.$$

因此， $b_0 \notin \left[N, N + \frac{1}{N}\right)$。

□

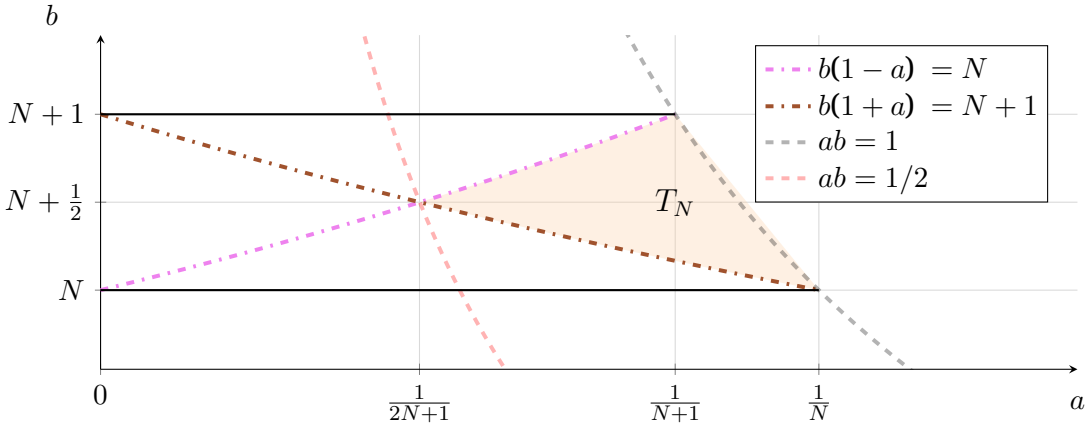


图 3： $b \in [N, N+1]$ 中 Janssen 蝴蝶结的示意图。阴影区域显示了瓦片 T_N。

Janssen 蝴蝶结是 $ab \leq 1$ 划分成曲线边界瓦片的区域，Janssen [19] 发现这些瓦片与 $\mathcal{F}(N_1)$的研究相关。对于 $b \in [N, N+1]$， $N \in \mathbb{N}$这些瓦片是由双曲线 $b(1-a) = N$、 $b(1+a) = N+1$以及 $ab = 1$ 和直线 $a = 0$、 $b = N$ 和$b = N+1$所围成的区域。本研究关注的是蝴蝶结的“右半部”，即：

$$T = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+ \;\middle|\; \frac{\lceil b \rceil}{1+a} \leq b \leq \frac{\lfloor b \rfloor}{1-a},\ b > 2,\ ab < 1\right\}. \tag{2.9}$$

我们将 T_N 表示每个单独的瓦片（见 图 3），使得 $T = \bigcup_{N=2}^{\infty} T_N$，其中

$$T_N = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2_+ \;\middle|\; \frac{N+1}{1+a} \le b \le \frac{N}{1-a},\ ab < 1 \right\}$$

对于 $N \ge 2$。盒样条 T_N 框架性质表现最复杂的区域 N_1 就在这条带上 [6, 17, 19]。事实上，在这一区域内，有理数和无理数 ab 都可能对应于$\mathcal{G}(N_1,\ a,\ b)$ 的框架与非框架性质，正如 Janssen 已经指出的那样 [19]。

这些集合 P 和 H 的几何结构，可以通过它们包含在以下双曲瓦片中来刻画：

定理 2.4。点集 P 由(2.2) 定义，而双曲阻碍集 H 在(1.5)中定义；二者满足

$$P \subset H \subset T. \tag{2.10}$$

证明。包含关系 $P \subset H$ 根据定义显然成立。另一方面，要证明包含关系 $H \subset T$ 则需要相当精确的界，下面的图4b以及尤其是图 5对此作了说明。从图中看， H 中的双曲线段似乎仅仅勉强包含在瓦片 T_N之内。

设 $(a,b) \in H$是双曲线段中以 $(a_0,b_0) \in P$为“中心”的一个点， $a_0 = 1/\mu$，且 $b_0 = \mu - k/r$。设 $N = \lfloor b_0 \rfloor$。我们需要验证 a 和 b 满足 $b(1+a) \ge N+1$ 以及$b(1-a) \le N$。

由于 $ab = a_0 b_0$ 在整个线段上是常数，我们可以消去变量 a，并将关于 b的不等式线性化：

$$\begin{aligned} b(1+a) \ge N+1 &\iff b + ab \ge N+1 \iff b \ge (N+1) - a_0 b_0, \\ b(1-a) \le N &\iff b - ab \le N \iff b \le N + a_0 b_0 \end{aligned}$$

我们先考虑下边界 $b \ge (N+1) - a_0 b_0$。只需证明线段的下端点满足该不等式，也就是说，该不等式对 $b = b_0 - \Delta b$成立，其中 $\Delta b = \frac{1}{nr}\left(1 - \frac{k+1}{\mu}\right)$。因此，我们需要验证

$$\Delta b \le b_0(1+a_0) - (N+1). \tag{2.11}$$

我们计算（2.11）的右端：

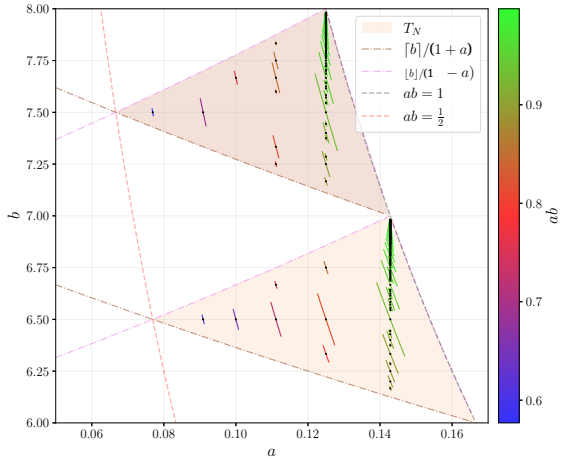
$$\begin{aligned} b_0(1+a_0) - (N+1) &= \left(\mu - \frac{k}{r}\right)\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) - N - 1 \\ &= (\mu - N) - \frac{k}{r} - \frac{k}{r\mu}. \end{aligned}$$

令 $X = r(\mu - N) - k \in \mathbb{Z}$。利用 $\mu - N - k/r = X/r$，右端化简为$\frac{1}{r}(X - k/\mu)$。因此，（2.11）可改写为

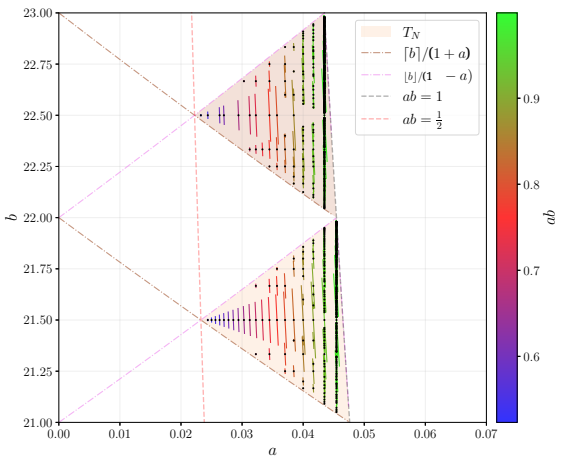
$$\frac{1}{nr}\left(1 - \frac{k+1}{\mu}\right) \le \frac{1}{r}\left(X - \frac{k}{\mu}\right).$$

这等价于

$$\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + \frac{k}{\mu}(n-1) \le nX. \tag{2.12}$$



(a) 放大图 $b \in [6,8]$，显示 $N=6$ 和 $N=7$ 的 T_N。



(b) 放大图 $b \in [21,23]$，显示 $N=21$ 和 $N=22$ 的 T_N。

图 4：阻碍点集 P（以黑点标记）以及 N_n 的双曲阻碍集 H，其中双曲线段按其 ab 值着色。阴影区域表示 Janssen 的领带 T_N 的“右半部分”，其上、下边界曲线以点划线表示。请注意，为避免聚点处过于杂乱，图示范围限制为 $r \leq 50$。

由 $b_0 = \mu - k/r > N$，我们得出 X 是一个正整数，即 $X \geq 1$。因此，由于$1-1/\mu < 1$且 $\frac{k}{\mu}(n-1) \leq n-1$，不等式（2.12）成立，这验证了下边界条件。

为验证上边界条件，我们同样需要证明 $\Delta b \leq N - b_0(1-a_0)$。令 $M = \mu - N \in \mathbb{Z}$。由于 $b_0 < N+1$，我们有 $M \geq 1$。令 $Y = k - r(M-1) \in \mathbb{Z}$。由于 $b_0 < N+1$，整数 Y 为正，即 $Y \geq 1$。直接计算可得右端化简为

$$\frac{1}{r}\left(Y - \frac{k}{\mu}\right).$$

从这里开始，证明的其余部分与下边界情形完全相同，只需用 Y 替换X，因此省略细节。

□

点集的结构 P和双曲阻碍集 H 与 a_0 和 b_0（进而与 μ、 r和 k的数论性质密切相关）。随着 b 增大， P 和 H 的结构也变得更加复杂。原因在于，较大的 μ 值拥有更多因数，从而使 r 中出现更多有效的定义1取值，进而形成更密集的障碍模式。这一现象在以下可视化图示中有所体现：图4a、图4b和图 5。

每个双曲线段$H_{(a_0,b_0)}$ 的长度由以下因素控制：

$$|b - b_0| \leq \frac{1}{nr}\frac{\mu - k - 1}{\mu} = \frac{1}{nq}(\mu - k - 1).$$

由于 $k \leq \mu - 2$，双曲线段在 b 方向上的可能长度为$\frac{2}{n\mu r}\cdot 1$， $\frac{2}{n\mu r}\cdot 2$，……， $\frac{2}{n\mu r}(\mu-2)$，其中 $q = \overline{\mu r}$。与 [21]中长度为 $\frac{2}{n\mu r}$（沿 b 方向）的双曲障碍相比，我们看到 H 中的新障碍最长可达 $(\overline{\mu}-2)$

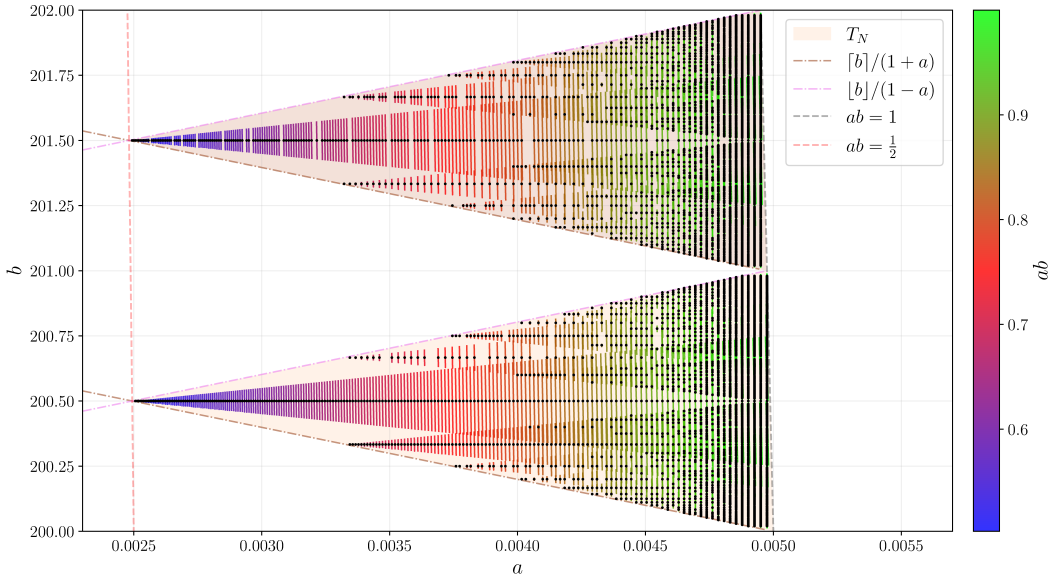


图 5：点集 P （黑点）和双曲阻碍集 H （对于 N_2 （即$n = 2$）在 b取较大值时。双曲线段根据其 ab 值着色。与 b 相比，这些集合结构的复杂程度随着 图 4的增加而增加。

倍。注意，由于 B样条 n 的阶数仅产生简单的缩放效应，因此图中我们只展示 $n = 2$ 的情况。

最后，我们回到 P的聚点，看看 H 中的双曲障碍曲线在这些点附近的表现。在图 6中，展示了双曲阻碍集 H 在聚点 $\mu = 5$ 附近的情况，即 $(1/5,\ 5)$。在带状区域 $a_0 = 1/5$ 中，双曲线段从下方聚集到点 $(1/5,\ 5)$，其弧长小于 $2/(nr)$。随着 r在这一聚集过程中增大，线段长度逐渐减小，并在极限处趋于零。

3 定理1.3 的证明

我们需要以下来自 [21] 的结果，它给出了膨胀参数 c接近某个整数时 B样条的部分单位分解性质。

引理 3.1 ([21])。 设 $n \in \mathbb{N}$和 $c > 0$。假设 $|F(c)| \leq \frac{1}{n}$。 –

(i) 若 $F(c) \geq 0$，则

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} N_n((x+k)/c) = \text{const} \quad for\ x \in \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m + nF(c), m + 1] \tag{3.1}$$

(ii) 若 $F(c) \leq 0$，则

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} N_n((x+k)/c) = \text{const} \quad for\ x \in \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m, m + 1 + nF(c)] \tag{3.2}$$

令 e_m 表示满足 $e_m(m) = 1$ 且 $e_m(\ell) = 0$ （$\ell \neq m$）的列向量。我们首先需要 B样条的 Zibulski-Zeevi 矩阵 $\Phi^{N_n}(x,\ \gamma)$ 具有消去性质。矩阵 $\Phi^{N_n}(x,\ \gamma)$ 的元素可用 $Z_{1/b}N_n$ 表示。然而，每 μ 列的列和都可以用 $Z_{1/(rb)}N_n$ 表示。这一点很有用，因为假设 rb 接近一个

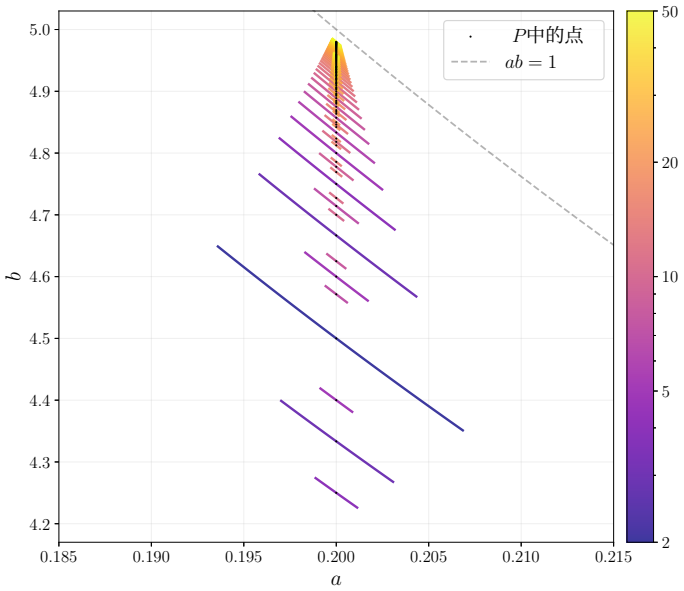


图 6：当 N_n、 $n = 2$ 时，累积点（$1/5$，5）附近双曲阻碍集 H 的放大视图（$\mu = 5$）。点 P 以黑点标出，双曲曲线根据其 r 值着色（对数刻度）。较大的 r 值会在H 中产生较短的阻碍曲线，因为每条双曲线段的长度都受 $2/(nr)$ 的限制。为便于观察，图形限制在$r \leq 50$ 范围内，因此聚点被截断。

整数，并且根据引理 3.1，我们可以很好地控制 Zak 变换的零点$Z_{1/c}N_n$ 对于任意 c 接近一个整数。从这些思路出发，我们可以证明以下消去引理。

引理3.2。 设 $n \in \mathbb{N}$。设 μ， r， $k \in \mathbb{N}$ 如 定义*1*所述。令 $p = r\mu - k$， $q = r\mu$，并且 $b_0 = \mu - k/r$。设 $b > 3/2$ 满足 $|b - b_0| \leq \frac{1}{nr}$，即 $|F(rb)| \leq \frac{1}{n}$。

(i) 若 $F(rb) \geq 0$，则存在一个常数 K，使得

$$\sum_{\ell=0}^{r-1} \phi_{\ell\mu}^{N_n}(\frac{x}{r}, 0) = Ke_0 \in \mathbb{C}^p \qquad for\ x \in \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m + nF(rb), m + 1].$$

(ii) 若 $F(rb) \leq 0$，则存在一个常数 K，使得

$$\sum_{\ell=0}^{r-1} \phi_{\ell\mu}^{N_n}(\frac{x}{r}, 0) = Ke_0 \in \mathbb{C}^p \qquad for\ x \in \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m, m + 1 + nF(rb)]$$

证明。 我们只证明 (i)，因为 (ii) 的证明类似。注意 $R(rb) = p$。因此， rb 通过 p 与整数 $0 \leq F(rb) \leq \frac{1}{n}$“接近”。

对于每个 $k = 0, 1, \ldots, p - 1$，我们计算：

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{r-1} \Phi^{N_n}(x, 0)_{k,\ell\mu} &= \sum_{\ell=0}^{r-1} p^{-1/2} Z_{\frac{1}{b}} N_n(x - \ell\mu\frac{p}{q}, \frac{k}{p}) \\ &= (bp)^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{r-1} \sum_{z\in\mathbb{Z}} N_n(\tfrac{1}{b}(x - \frac{p}{r}\ell - z))\, \mathrm{e}^{2\pi i z\frac{k}{p}}\end{aligned}$$

令 $z = pv + w$ 表示 $v \in \mathbb{Z}$ 和 $w = 0, 1, \ldots, p-1$，并继续：

$$= (bp)^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{r-1} \sum_{v\in\mathbb{Z}} \sum_{w=0}^{p-1} N_n(\tfrac{1}{rb}(rx - p\ell - rpv - rw))\, \mathrm{e}^{2\pi i w \frac{k}{p}}$$

记 $z = rv + \ell$ 为 $v \in \mathbb{Z}$ 和 $\ell = 0, 1, \ldots\ldots, r-1$，并继续：

$$= (bp)^{-1/2} \sum_{w=0}^{p-1} \sum_{z\in\mathbb{Z}} N_n(\tfrac{1}{rb}(r(x-w) - pz))\, \mathrm{e}^{2\pi i w \frac{k}{p}}$$

我们断言，存在一个常数 $d \in \mathbb{R}$，使得对每个 $w \in \{0, 1, \ldots\ldots, p-1\}$：

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}} N_n(\tfrac{1}{rb}(r(x-w) - pz)) = d \qquad \text{for } rx \in \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m + nF(rb), m+1].$$

暂时固定 $w \in \{0, 1, \ldots\ldots, p-1\}$。回忆一下，$p = R(rb)$。由于

$$\frac{1}{rb}(r(x-w) - pz) = \frac{R(rb)}{rb}\left(\frac{r(x-w)}{R(rb)} + z\right),$$

由引理 3.1 可知，$\sum_{z\in\mathbb{Z}} N_n(\frac{1}{rb}(r(x-w) - pz))$ 是常数

$$\frac{r(x-w)}{R(rb)} \in \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m + nF(\tfrac{rb}{R(rb)}), m+1],$$

也就是说，对于

$$\frac{r}{p}x \in \left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m + n\frac{F(rb)}{p}, m+1]\right) + \frac{r}{p}w.$$

因此，由于 $n\frac{F(rb)}{p} \le \frac{1}{p}$，并且由于 p 与 r 互素，我们看到 $\sum_{z\in\mathbb{Z}} N_n(\frac{1}{rb}(r(x-w) - pz))$ 对于 w 是常数

$$\frac{r}{p}x \in \bigcap_{w=0}^{p-1} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m + n\frac{F(rb)}{p}, m+1]\right) + \frac{r}{p}w = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [\frac{m + nF(rb)}{p}, \frac{m+1}{p}].$$

这就完成了该断言的证明。

因此，对于 $x \in \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m + nF(rb),\ m+1]$，我们可以得出：

$$\sum_{\ell=0}^{r-1} \Phi^{N_n}(x/r, 0)_{k,\ell\mu} = (bp)^{-1/2} \sum_{w=0}^{p-1} d\, \mathrm{e}^{2\pi i w \frac{k}{p}} = \begin{cases} b^{-1/2} d p^{1/2} & k = 0, \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

□

借助引理 3.1 中的消去性质，我们可以按照 [13]完成对定理 1.3的证明。

定理的证明 *1.3*。假设 $F(rb) \ge 0$。回忆一下，$q - p + 1 \le \mu - 1$。$\Phi^{N_n}(x, 0)$ 在 x 变量中、列索引为 $s \in \{0, 1, \ldots\ldots, q-p+1\}$ 的“样本”位于长度为 $\frac{q-p+1}{q}$ 的区间内（忽略准周期性）。由于根据假设，

$$\frac{q-p+1}{\mu} \le (1 - nF(rb))$$

或者等价地

$$\frac{q-p+1}{q} \le \frac{1}{r}(1-nF(rb)),$$

由定理 3.2 可知，对于 $s \in \{0, 1, \ldots, q-p+1\}$

$$\sum_{\ell=0}^{r-1} \Phi^{N_n}(x_0,0)_{k,\ell\mu+s} = \begin{cases} K_s & k=0, \\ 0 & k \neq 0, \end{cases}$$

对于某个 x_0。定义 $v_s = (1/K_s) \cdot \sum_{\ell=0}^{r-1} e_{l\mu+s}$，其中 $s = 0, 1, \ldots, \mu-1$。于是，$\Phi^{N_n}(x_0, 0)v_s = \delta_0 \in \mathbb{C}^p$，其中 $s \in \{0, 1, \ldots, q-p+1\}$。

我们找到了 $q-p+1$ 个线性无关向量 $v_s - v_0$, $s = 1, 2, \ldots, q-p+1$，它们属于 $\Phi^{N_n}(x_0, 0)$ 的核。根据秩-零化度定理，可得：

$$\dim\left(\operatorname{im}\left(\Phi^{N_n}(x_0,0)\right)\right) = q - \dim\left(\ker\left(\Phi^{N_n}(x_0,0)\right)\right) \le q-(q-p+1) = p-1.$$

因此，$\{\phi_\ell^{N_n}(x_0, 0)\}_{\ell=0}^{q-1}$ 不是 $\mathbb{C}^p$的生成集；特别地，它不是 $\mathbb{C}^p$的框架。根据定理1.1，我们得出$\mathcal{G}(N_n, a, b)$ 不是 $L^2(\mathbb{R})$的框架。情形$F(rb) < 0$ 的证明类似。

□

注记 1. 在 定理 1.3的证明中，我们默认使用了 Zak变换 $Z_\lambda N_n$ 是连续的。但对于 $n = 1$，这并不成立。不过，$Z_\lambda N_1$ 关于第二个变量是连续的，而关于第一个变量是分段连续的，且只有有限个跳跃间断点。因此，我们仍可得出结论：Zibulski-Zeevi 矩阵 $\Phi^{N_1}(x, \gamma)$ 在 $(x, \gamma) \in [0, 1)^2$ 上的最小奇异值的下确界为零，这正是我们需要的结论。

注记 2. 作者多年前就已知晓定理 1.3中的障碍。相关结果最初于*2016*年算子理论与应用国际研讨会（*IWOTA*）上报告，但此前从未正式发表。

现在我们回到猜想 (1.4)。关于帽样条 N_2框架障碍的这一结果如今已成为定理 [12] 。为了将 (1.4) 与我们的结果进行比较，我们必须将定理 1.3 限定在 $n = 2$、$r = 2$ 以及奇数 μ 的特殊情形下。对于 $ab = p/q$，(1.4) 中的界可写为$|b - b_0| \le \frac{1}{nr}(\mu - k) / \mu$，而定理 1.3 给出 $|b - b_0| \le \frac{1}{nr}(\mu - k - 1) / \mu$ （其中 $nr = 4$）。因此，(1.4) 中的线段在每个 b- 方向上都稍长 $1/(4\mu)$。这表明定理 1.3 中的障碍并非最优，但这与所用方法并不矛盾：证明并未确定 Zibulski-Zeevi 矩阵的核，只是在核中展示了$q-p+1$ 个线性无关向量。

我们以一条关于已知的、针对 B 样条及其他生成单位分解的函数的一般性障碍之性质的总体评述作为本文的结尾。对于生成单位分解的函数 $g \in M^1(\mathbb{R})$，框架性质存在两类障碍：

（I）对于 $b = 2, 3, \ldots\ldots$以及任意 $a > 0$，Gabor 系统 $\mathcal{G}(g, a, b)$ 不是框架 [8, 9, 16] ，
（II）对于 (a, b) 属于点集 P的情形，Gabor 系统 $\mathcal{G}(g, a, b)$ 不是框架 [13] 。

沿双曲线观察时 $ab = p/q < 1$，这两类障碍都是点障碍。对于 B 样条， [12] 中的双曲障碍是沿着(I) 这一第一类障碍“生长”出来的，方向为 $ab = p/q < 1$；而定理 1.3中的障碍则是沿着(II)这一第二类障碍“生长”出来的，方向同样为 $ab = p/q < 1$。反过来，随着 B 样条阶数 n 增大，这些双曲障碍会收缩，并在 $n \to \infty$时退化为点障碍。要理解为何 B 样条的点障碍会扩展为这些双曲障碍，首先注意，任何能生成单位分解的函数 g （ $\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(\cdot + k) = 1$

对于整数 c，也满足 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} g((\cdot+k)/c) = c$。此外，对于接近整数的3.1 中的 c，B 样条还满足部分单位分解性质——也就是说，$\sum_{k\in\mathbb{Z}} N_n((\cdot\ +k)/c)$ 在 $[0,1)$ 的某个子区间上为常数——这是将点障碍扩展为双曲线段的关键附加性质。事实上，任何足够良好的函数 g，只要它能生成单位分解，并且在膨胀$(1/c)\mathbb{Z}$ 下仍保留这种部分单位分解性质（其中 $c \approx 1$），就会具有类似的双曲障碍。

人工智能使用声明

在撰写本文期间，作者使用了 Gemini（Google）和 GitHub Copilot，以提高稿件的可读性和语法准确性、校对并检查数学论证，以及协助编写生成图表的代码。使用这些工具/服务后，作者根据需要审阅并编辑了内容，并对已发表文章的内容承担全部责任。

参考文献

[1] A. G. D. Atindehou、C. Frederick、Y. B. Kouagou 和 K. A. Okoudjou。关于二阶B样条的框架集。《应用与计算调和分析》，62:237–250，2023年。[2] P. G. Casazza 和 N. J. Kalton。复多项式的根与 Weyl-Heisenberg 框集。《美国数学会会刊》，130(8):2313–2318，2002年。[3] O. Christensen。框理论中的六个（七个）问题。载于 A. I. Zayed 和 G. Schmeisser 编，逼近与采样理论的新视角，应用与数值调和分析，第337–358页。Springer International Publishing，2014年。[4] O. Christensen。框架与 *Riesz*基导论。应用与数值调和分析。Birkhäuser/Springer，[Cham],第二版，2016年。[5] O. Christensen、H. O. Kim 和 R. Y. Kim。关于由变号窗函数和 B样条生成的 Gabor 框架。《应用与计算调和分析》，39(3):534–544，2015年。[6] X.-R. Dai 和 Q. Sun。Gabor 系统的 abc-问题。《美国数学会回忆录》，244(1152):ix+99，2016年。[7] I. Daubechies。小波变换、时频局部化与信号分析。《*IEEE* 信息论汇刊》，36(5):961–1005，1990年。[8] V. Del Prete。Gabor 框架对偶函数的估计、衰减性质与计算。《傅里叶分析与应用杂志》，5(6):545–562，1999年。[9] V. Del Prete。关于 B样条 Gabor 框架的一个必要条件。《数学研究》，59(1):161– 164，2010年。[10] H. G. Feichtinger 和 N. Kaiblinger。改变 Gabor 框架的时频晶格。《美国数学会汇刊》，356(5):2001–2023（电子版），2004年。[11] R. Ghosh 和 A. Antony Selvan。关于由 B样条、全正函数和 Hermite函数生成的 Gabor 框架。《应用数值数学》，207:1–23，2025年。[12] R. Ghosh 和 A. A. Selvan。二阶B样条 Gabor 框架的障碍。《计算数学进展》，51(3):第27号论文，39页，2025年。

[13] K. Gröchenig。单位分解与 Gabor 框架的新障碍。arXiv:1507.08432，未发表手稿（2015年）。[14] K. Gröchenig。时频分析基础。应用与数值调和分析。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，MA，2001年。[15] K. Gröchenig。Gabor 框架之谜。《傅里叶分析与应用杂志》，20(4):865–895，2014年。[16] K. Gröchenig、A. J. E. M. Janssen、N. Kaiblinger 和 G. E. Pfander。关于 B-样条、小波尺度函数与 Gabor 框架的注记。《*IEEE* 信息论汇刊》，49(12):3318–3320，2003年。[17] Q. Gu 和 D. Han。特征函数何时生成 Gabor 框架。《应用与计算调和分析》，24(3):290–309，2008年。[18] X.-G. He 和 K.-S. Lau。关于由简单函数生成的 Weyl-Heisenberg 框架。《泛函分析杂志》，261(4):1010–1027，2011年。[19] A. J. E. M. Janssen。零点较少的 Zak 变换与平局。载于*Gabor* 分析进展，应用与数值调和分析，第31–70页。Birkhäuser Boston，波士顿，MA，2003年。[20] T. Kloos 和 J. Stöckler。全正函数与指数 B样条的 Zak 变换和 Gabor 框架。《逼近理论杂志》，184:209–237，2014年。[21] J. Lemvig 和 K. Haahr Nielsen。Gabor 框架 B样条猜想的反例。《傅里叶分析与应用杂志》，22(6):1440–1451，2016年。[22] M. Zibulski 和 Y. Y. Zeevi。运用框架方法分析多窗 Gabor 型方案。《应用与计算调和分析》，4(2):188–221，1997年。