arXiv:2601.07658v1 [math.MG] 12 Jan 2026

低非负秩矩阵补全的几何

Kaie Kubjas 和 Lilja Metsälampi

2026年1月13日

摘要

我们研究具有非负元素的部分矩阵补全为非负秩至多为 r 的矩阵，其中 $r \in \mathbb{N}$。我们的大部分结果针对 $r \leq 3$。我们证明，具有非负元素的部分矩阵存在非负秩-1 补全，当且仅当其存在秩一补全。当 $r \geq 2$时，这一结论一般并不成立。对于 3×3 矩阵，我们刻画了所有观测条目模式，使得存在秩-2 补全等价于存在非负秩 2 补全。如果具有非负元素的部分矩阵存在一个非负的秩-r 补全，其中 $r \in \{1, 2\}$，那么它存在非负秩-r 补全。我们将展示 $r = 3$ 的示例，其中这一结论不成立。为此，我们引入了非负秩-r 补全的几何刻画，该刻画利用嵌套多胞体族，并推广了Cohen和Rothblum（1993年）提出的非负秩几何刻画。

1 引言

设 $M \in \mathbb{R}^{p\times q}_{\geq 0}$ 是一个具有非负元素的实矩阵。 M 的大小为 r 的非负分解是$M = AB$，其中 $A \in \mathbb{R}^{p\times r}_{\geq 0}$ 且 $B \in \mathbb{R}^{r\times q}_{\geq 0}$。 M 的非负秩是使得存在 M 的大小为 r 的非负分解的最小 $r \in \mathbb{N}$。记为 rank$_+(M)$。本文旨在研究将具有缺失项的矩阵（部分矩阵）补全为非负秩至多为 r 的矩阵，其中 $r \in \mathbb{N}$ 固定。

矩阵补全问题出现在涉及不完整数据的应用中。这类应用包括推荐系统，其中一个著名的例子是Netflix问题[KBV09]；用户数据存储在一个矩阵中，行对应每位用户，列对应各个标题。观测条目对应用户对标题的评分。于是，问题就是根据矩阵中的观测数据向用户推荐标题。其他涉及不完整数据的应用还包括计算机视觉 [TK92], 图像压缩和恢复 [LZL+15]、无线通信 [LFLW18], 以及许多其他领域；有关更多示例，请参见 [NKS19]及其中的参考文献。在许多示例中，低秩假设是自然的 [UT19]。此外，在许多应用中，数据天然是非负的，而非负秩可以对数据的结构作出有用的解释，因此，要求矩阵存在低非负秩补全更加自然。例如，Netflix问题中的用户评分以及图像重建中的数据（像素）都是非负的。

关于低非负秩矩阵补全，可以提出一些问题：给定一个部r 分矩阵，它是否存在非负秩-r 补全？如果存在，这种非负秩-r 补全是否唯一？如果一个部分矩阵有秩-r 补全，它是否总有非负秩-r 补全？一个部分矩阵的每个非负秩-r补全，是否也都是该部分矩阵的非负秩-r矩阵补全？最后，如何将一个部分矩阵补全为非负秩-1矩阵？我们在表1中总结了这些问题以及对这些问题的研究结果。

类似的问题已在秩-r 部分矩阵补全中得到广泛研究。秩-1可补全性已在 [CJRW89、HHW06、KT13] 中得到探讨，并已得到全面理解。对于秩-2可补全性，Bernstein 对与秩-2 矩阵相关的代数拟阵中的独立集给出了组合刻画 [Ber17]。独立集对应于观测条目的位置模式，使得任何具有这些观测条目的部分矩阵都存在秩-2 补全。Singer 和 Cucuringu 运用刚性理论的思想，研究哪些观测条目模式会产生有限且唯一的秩-r 补全 [SC10]。迄今提及的结果运用了代数、组合和几何工具，并适用于特定的观测条目模式。文献 [SC10] 中的结果仅适用于一般矩阵，并非对所有矩阵都成立。在另一条研究脉络中 [CR12,

KMO08、KMO10], 给出了随机观测条目数量的界限，以保证重构出原始矩阵，并提出了相应的重构算法。矩阵补全算法的开发是另一个活跃的研究领域 [Faz02、SJ03、CCS10]。低秩矩阵补全综述见 [NKS19]。

关于低非负秩补全，我们所知甚少。文献 [SN20] 研究了非负矩阵的低秩矩阵补全，但未考虑非负秩。此前关于低非负秩补全的研究主要集中于将部分矩阵补全为低非负秩矩阵的算法及其效率 [XYWZ12, GS20, TG24]。这些算法的一种常见方法是结合非负分解和低秩矩阵补全的技术，用两个非负矩阵的乘积来逼近部分矩阵。具体而言，通过数值方法求解约束优化问题来实现近似，例如约束最小二乘法 [XYWZ12], 约束梯度系统 [GS20]或 MinVol [TG24]。尽管取得了这些进展，对低非负秩补全的研究仍相对有限。

我们研究低非负秩矩阵补全的几何。我们的多数结果针对非负秩-r 补全，其中 $r \in \{1, 2, 3\}$。结果汇总于表 1。我们的第一个主要结果是，具有非负元素的部分矩阵存在非负秩-1 补全，当且仅当它存在秩一补全（定理 3.1）。当 $r \geq 2$ 时，这一结论通常不成立。作为第二个主要结果，对于 3×3 矩阵，我们刻画了所有这样的观测条目模式：在这些模式下，存在秩至多为二的补全等价于存在非负秩至多为二的补全（定理 3.6）。这一刻画与低秩矩阵补全文献中的若干结果有些相似 [SC10, Ber17] ，这些结果刻画了何时每个具有固定观测条目模式的泛型部分矩阵都可补全为秩-r ，或只有有限个秩-r 补全。

如果一个含有非负元素的部分矩阵具有秩r 非负补全，其中$r \in \{1, 2\}$，那么它具有非负秩r 补全（定理 3.1 和 3.5）。对于$r \geq 3$，这一结论并不成立。在 $r = 3$ 且只有一个缺失项的情况下，我们通过研究遗忘矩阵簇中秩至多为 r 的一个元素的投影映射来构造一个例子（定理 4.7）。对于 $r = 3$ 且有两个缺失项的情况，我们利用非负秩r 补全的几何刻画，并借助嵌套多胞体族构造例子，使得含有非负元素的部分矩阵具有秩三的非负补全，但没有非负秩3 补全（定理 5.7和 5.9）。非负秩r 补全的几何刻画推广了 [CR93、Vav10]中提出的非负秩几何刻画。这一几何刻画是该论文的第三项主要贡献（定理 5.2）。

如表1所示，我们不研究非负秩r 补全的唯一性与有限性，以及相应的补全算法，其中 $r \geq 2$。在 $r = 1$ 的情况下，结论可直接由秩1 补全的结果推出。研究非负秩r 补全的唯一性与有限性将十分有趣，但比研究秩r 补全更具挑战性，因为有限性不再是一种一般性质。非负秩r 补全算法不属于本文的研究重点，相关研究见 [TG24]。我们希望本文能推动这一主题的进一步研究。

#	问题	秩$_+ = 1$	秩$_+ = 2$	秩$_+ \geq 3$
1	非负秩-r 可补全性	命题 3.1 & 推论 3.4	命题 3.5 & 定理 3.6 (3×3)	定理 5.2
2	如果存在一个秩为-r 的补全，是否也存在非负秩-r 补全?	Yes: 命题 3.1	No: 例. 3.7	No: 例 4.7, 5.7, 5.9
3	每个非负的秩-r 补全是否也是一个非负秩-r 补全?	Yes: 命题 3.1	Yes: 命题 3.5	No: 例 4.7, 5.7, 5.9
4	唯一性或有限性非负秩-r 补全	推论 3.4		
5	补全算法	节 3.1		

表1：我们的主要研究问题和结果概要。

本文的结构如下。在第 2 节中，我们回顾非负秩的几何描述（第 2.1节），并介绍有关秩 r 矩阵补全的一些基本结果（第 2.2节）。

在第 3 节中，我们研究非负秩 1（第 3.1节）和非负秩 2（第 3.2节）的矩阵补全。在第 4节中，我们考虑一个缺失项的情况。最后，在第 5 节中，我们探讨非负秩 3矩阵补全：在第 5.1 节中，我们介绍非负秩 r 矩阵补全的几何刻画。在第 5.2节和 5.3 节中，我们研究具有两个缺失项的 非负秩 3 矩阵补全 4×4 。相关计算代码可在 https://github.com/kaiekubjas/geometry-of-low-nonnegative-rank-matrix-completion 获取。

记号与约定。除非另有说明，我们考虑实数元素的 $p \times q$ 矩阵。令 $E \subseteq [p] \times [q]$ 表示观测条目的集合。我们考虑部分矩阵 $M_E \in \mathbb{R}^E$，其中集合 E 中的条目已被观测。非负矩阵是指具有非负元素的矩阵，部分非负矩阵是指具有非负元素的部分矩阵。令$M \in \mathbb{R}^{p \times q}$。对于指标集 $I \subseteq [p]$、$J \subseteq [q]$，我们使用以下子矩阵记号：$M_{I,J}$ 表示 M 中行由 I 索引、列由 J索引的子矩阵；$M_{I,:}$ 表示 M中行由 I 索引且包含所有列的子矩阵；$M_{:,J}$ 表示 M 中包含所有行且列由 J索引的子矩阵。对于 $i \in [p]$、$j \in [q]$，$\hat{}i$ 表示集合 $[p]\backslash\{i\}$，$\hat{}j$ 表示集合 $[q]\backslash\{j\}$。我们用 cone(M)表示矩阵 M各列的锥包。我们用记号 $\subset$ 表示真子集，用 $\subseteq$ 表示任意子集。

2 背景

本节将回顾非负秩的几何描述（第 2.1 节），并陈述一些关于秩为r 的矩阵补全的基本结果（第 2.2 节）。

2.1 非负秩的几何描述

设 $M \in \mathbb{R}^{p \times q}_{\geq 0}$ 是一个秩为 r 的非负矩阵。寻找 M 的大小为 r 的非负分解这一问题，可以通过嵌套多面体锥以几种等价的方式进行几何表述。这种几何解释往往是研究非负分解及其存在性的关键工具。Cohen和Rothblum[CR93] 首次提出了这种几何解释；Vavasis [Vav10] 则给出了一种广泛使用的替代方案。本文采用 Vavasis 的描述。设 $M = AB$ 是 M 的一个大小为 r 的分解。这里的 A、B 不一定是非负矩阵。$\hat{}\hat{}$ 定义 $P = \text{cone}(B)$，它是 B 各列的锥包，并定义 $Q = \{x \in \mathbb{R}^r \mid Ax \geq 0\}$。我们$\hat{}\hat{}$ 有 $P \subseteq Q$，因为对于 A 的各行 a_i 和 B 的各列 b_j，有 $a_i b_j = m_{ij} \geq 0$。矩阵 M 存在大小为 r 的非负分解，当且仅当存在一个单纯形锥 Δ 使得 $P \subseteq \Delta \subseteq Q$。事实上，$\hat{}$令 c_1、……、$c_r \in \mathbb{R}^r$ 生成 Δ 的射线，并令 $C \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 为列向量是 c_1、……、$c_r \in \mathbb{R}^r$ 的矩阵。由于 $\hat{}\Delta$ 是一个单纯形锥，因此 C 可逆。C^{-1} 的各行定义了 $\hat{}\Delta$ 的面。由于 $\hat{}\Delta$ 嵌套于 $\hat{}P$ 和 $\hat{}Q$ 之间，因此有 $AC \geq 0$ 和 $C^{-1}B \geq 0$。

对与非负矩阵 M 对应的嵌套锥取一个仿射截面后，就可以通过嵌套多胞体而非嵌套锥来诠释非负分解和非负秩。这使我们能够将维数降低 1：我们不再考虑 r 维锥，而是考虑 $r-1$ 维多胞体 P 和 Q，这在低维情形中特别有用。非负秩可刻画如下：秩为 r 的非负矩阵的非负秩为 r，当且仅当存在一个 r-单纯形 Δ 使得 $P \subseteq \Delta \subseteq Q$。在本文余下部分，我们用 P 和 Q 表示锥，用 P 和 Q 表示多胞体。

非负秩的这一几何刻画可用于证明以下来自 [CR93] 的定理。

定理 2.1 ([CR93，定理 4。1])。 *对于秩为 1 和 2 的非负矩阵，非负秩等于秩。*

用 $\mathcal{V}_r^{p \times q}$表示秩为 $p \times q$ 的矩阵簇 $\leq r$，用 $\mathcal{M}_r^{p \times q}$表示非负秩为 $\leq r$的矩阵集合。定理 2.1 表明 $\mathcal{M}_1^{p \times q} = \mathcal{V}_1^{p \times q} \cap \mathbb{R}^{p \times q}_{\geq 0}$ 且 $\mathcal{M}_2^{p \times q} = \mathcal{V}_2^{p \times q} \cap \mathbb{R}^{p \times q}_{\geq 0}$。如果一个非负矩阵的秩至少为三，那么它的非负秩至少等于其秩，但一般来说，两者不再相等。

在 [KRS15] 中，作者给出了一种几何算法，用于检验一个非负矩阵的非负秩是否至多为 3。该算法利用了通过嵌套多胞体刻画非负分解的方法 $P \subseteq Q$ 见 $\mathbb{R}^2$。

定理 2.2 （[KRS15，推论 4。5]）。矩阵 $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{p\times q}$ 的非负秩至多为 *3*，当且仅当

1. 秩$(M) < 3$，或者 *2.* 秩$(M) = 3$，并且存在一个三角形 Δ，其满足 $P \subseteq \Delta \subseteq Q$，使得 Δ 的一个顶点与 Q的一个顶点重合；或者 *3.* 秩$(M) = 3$，并且存在一个三角形 Δ，其满足 $P \subseteq \Delta \subseteq Q$，使得 Δ 的一条边包含 P的一条边。

对于该算法，只需针对 Q 的每个顶点以及 P的每条边各考虑一个条件。当我们在第 5 节讨论部分非负矩阵的非负秩-3补全是否存在时，会广泛使用该算法。

2.2 秩-r补全

本小节先介绍两个关于矩阵秩性质的引理，我们将在论文中多次用到它们。然后在定理 2.5 中，我们引入 $r \times r$ 子式零一致性。结合关于消去理想的附加条件，$r \times r$ 子式零一致性将构成秩-r 矩阵补全的必要条件，如定理 2.6所示。

引理 2.3. 设 $M \in \mathbb{R}^{p\times q}$ 和 $i \in [p], j \in [q]$。以下条件等价：

1. 秩$(M_{\hat{i},\hat{j}}) \leq r-1$ 且 秩$(M) \leq r$；*2.* 秩$(M_{\hat{i},\hat{j}}) \leq r-1$，且至少 秩$(M_{\hat{i},:})$ $\leq r-1$ 或 秩$(M_{:,\hat{j}}) \leq r-1$。

证明。我们先证明第一个条件蕴含第二个条件。假设秩$(M_{\hat{i},\hat{j}}) \leq r-1$ 且秩$(M) \leq r$。此外，我们假设 $p > r$和 $q > r$，否则该蕴含显然成立，因为要么 $M_{\hat{i},:}$ 至多有 $r-1$ 行，要么 $M_{:,\hat{j}}$ 至多有 $r-1$ 列。如果行 $M_{i,:}$ 为零，则秩$(M_{:,\hat{j}})$ = 秩$(M_{\hat{i},\hat{j}}) \leq r-1$。现在假设行 $M_{i,:}$ 非零。如果行 $M_{i,:}$ 可以表示为 M 其他行的线性组合，那么 $M_{i,\hat{j}}$ 也可以表示为 $M_{\hat{i},\hat{j}}$各行的同一线性组合。由于 $M_{\hat{i},\hat{j}}$ 的秩至多为 $r-1$，因此 $M_{:,\hat{j}}$ 的秩也至多为 $r-1$。最后，如果行 $M_{i,:}$ 不能表示为 M其他行的线性组合，那么秩$(M) >$ 秩$(M_{\hat{i},:})$，这意味着秩$(M_{\hat{i},:}) \leq r-1$。

第二个条件蕴含第一个条件，因为向矩阵添加一行或一列，秩最多增加一。 □

引理 2.4。设 $M \in \mathbb{R}^{p\times q}$和 $I \subset [p], K \subset [q]$。那么 秩$(M) \leq r$ 且 秩$(M_{I,K}) \leq r-1$ 意味着 秩$(M_{I,:})$ $\leq r-1$ 或 秩$(M_{:,K}) \leq r-1$。

证明。假设秩$(M) \leq r$ 且秩$(M_{I,K}) \leq r-1$。反设 $M_{I,:}$和 $M_{:,K}$ 的秩均为 r。这意味着存在 $i \in [p]\backslash I$ 和 $k \in [q]\backslash K$，使得 $M_{I\cup\{i\},:}$ 和$M_{:,K\cup\{k\}}$ 的秩均为 r。于是根据定理2.3，矩阵 $M_{I\cup\{i\},K\cup\{k\}}$ 的秩大于 r，这与 M 的秩为 r矛盾。 □

定理 2.4 为以下定义提供了动机。

定义 2.5。若部分矩阵 $M_E \in \mathbb{C}^E$ 满足以下条件，则称其为 $r \times r$ 子式零相容：若一个 $r \times r$ 子矩阵 $M_{I,K}$ 的秩至多为 $r-1$，则子矩阵 $M_{I,:}$或子矩阵 $M_{:,K}$ 的秩至多为 $r-1$。

考虑多项式环 $\mathbb{C}[x_{ij} : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q]$。令 I_r 为矩阵 $(x_{ij})_{1\leq i\leq p,1\leq j\leq q}$的 $(r+1) \times (r+1)$ 子式所生成的理想。对于 $E \subseteq [p] \times [q]$，令 I_E 为消去理想 $I_r \cap \mathbb{C}[x_{ij} : (i, j) \in E]$。

命题 2.6. 若部分矩阵 $M_E \in \mathbb{C}^E$ 存在一个秩至多为 r 的补全 $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$，则 *en*

1. $M_E \in \mathbb{V}(I_E)$ 和

2. 部分矩阵 M_E 是 $r \times r$ 子式零相容的。

定理 2.6 的证明。假设部分矩阵 M_E 有一个秩至多为 r 的补全 M。那么$M \in \mathbb{V}(I_r)$，因此 $M_E \in \mathbb{V}(I_E)$根据 [CLO97，第 3 章，第 2 节，引理 1]。第二个条件由定理 2.4得出。 □

对于秩-1 矩阵补全的情形，定理 2.6 可以表述得更为明确（[CJRW89] 和[HHW06，定理 5]）。我们将在定理 3.2中回顾该结果。如果 $r \geq 2$，对于一般的 I_E，目前尚不知道消去理想 E的生成元的简洁描述，尽管在某些特殊情形下，它由 $(r+1) \times (r+1)$ 子式生成。秩-1 张量补全中与定理 2.6 类似的结果见 [KKKR17，命题 2。2]。

观测条目的独立性通常用代数拟阵的语言进行研究，介绍可参见 [RST20]。如果 E 是行列式理想 I_r的代数拟阵中的独立集，那么 I_E 就是零理想，并且定理 2.6 中的条件 1 自动满足。在秩-1 补全的情形下，集合 E 是独立集，当且仅当相应的二分图不含环（更多细节见第 3.1 节）。在秩 2 补全的情形下，独立性由 [Ber17中的定理 4 刻画。4]。

问题 1. 定理 2.6的逆向结论是否成立？也就是说，如果条件 *1* 和 *2* 成立，那么 M_E是否存在一个秩-r 复数元素补全？

3 非负秩-1 和非负秩 2 补全

本节研究非负秩-1 （第 3.1 节）和非负秩-2 （第 3.2 节）矩阵补全。

3.1 非负秩-1 补全

本小节的主要结果是：一个含有非负元素的部分矩阵存在非负秩-1 补全，当且仅当它存在秩一补全（定理 3.1）。接着，我们用图论的语言回顾一些关于秩一补全的结果（定理 3.2 和 3.3），最后陈述非负秩-1 补全的类似结果（定理 3.4）。

命题 3.1. 一个含有非负元素的部分矩阵存在非负秩-1 补全，当且仅当它存在秩-1 补全。

证明。正向显然。反过来，假设 $M_E \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$ 有一个秩一补全 $M \in \mathbb{R}^{p \times q}$，该补全不一定是非负的。那么 $M = ab^T$，其中 $a \in \mathbb{R}^p$ 且 $b \in \mathbb{R}^q$。对 $|a|$ 和 $|b|$ 取逐项绝对值，得到 M_E的一个非负秩一补全 $\tilde{M} = |a||b|^T$。 □

部分矩阵的秩-1 可补全性已得到充分研究，参见例如 [CJRW89、HHW06、KT13] 关于一般部分矩阵的可补全性，以及 [KR17]关于将部分非负矩阵补全为独立性模型。这里我们介绍非负秩-1 情形所需的主要结果。

部分矩阵 M_E 有一个关联的二分图 $G(E) = (V_1, V_2, E)$，其中 V_1 是对应于矩阵 M_E各行的顶点，V_2 是对应于矩阵 M_E各列的顶点；若 M_E 的条目 m_{ij} 为观测条目，则有 $(i, j) \in E$。若部分矩阵 M_E 中某个观测条目为 0，且同一行（列）中的所有其他观测条目也均为零，则称其具有零行（列）性质 [HHW06，第2节。1]最后，设 $C = \{(r_1, c_1), (r_1, c_2), (r_2, c_2) \ldots, (r_k, c_k), (r_k, c_1)\}$是与 M_E相关联的二分图 G 中的一个环。那么，如果 M_E 相对于该环 C 满足以下条件，则称其为奇异的

$$m_{r_1c_1} m_{r_2c_2} \cdots m_{r_kc_k} = m_{r_1c_2} m_{r_2c_3} \cdots m_{r_kc_1}. \tag{3.1}$$

在 [HHW06] 中，方程（3.1）称为环性质；如果（ M_E 对二分图3.1中的所有环 G 都成立，则称其具有环性质 M_E。

接下来的两个引理改述自 [HHW06]。

引理 3.2 （[CJRW89，引理6。2], [HHW06，定理 5]）。 一个非零部分矩阵具有秩-1补全，当且仅当它具有零行或零列性质以及环性质。

定理 3.2 是秩一情形下定理 2.6的特殊情形：环性质中的多项式（3.1）生成理想 I_E [KKKR17, 备注 2。5] 并且 1×1 子式的零一致性与零行或零列性质的组合相同。

引理 *3.3 ([HHW06，推论 6])*。设 M_E 是一个非零部分矩阵，其观测条目为$E \subseteq [p] \times [q]$，且 M_E具有秩一补全 M。记 $G(E)^{\#} = (V_1, V_2, E^{\#})$ 为 $G(E)$ 的子图，其中当且仅当 $(i, j) \in E$ 且 $m_{ij} \neq 0$时，$(i, j) \in E^{\#}$。那么，当且仅当 $G(E)^{\#}$ 连通时，M 是 M_E 的唯一补全。

如果补全是唯一的，则存在一种利用环性质对缺失项进行唯一补全的算法 [CJRW89，引理 6。2], [HHW06，公式 6], [KTT15，定理 34]以及 [KT13，定理 2。6]。如果部分矩阵 M_E 满足零行或零列性质以及环性质，但图 $G(E)^{\#}$ 不连通，则对于 M_E [HHW06，小节 2，有无穷多个秩1 补全。3]。

结合前面的结果，我们得到以下推论，讨论部分非负矩阵的非负秩一补全以及可能的补全数量。

推论 3.4. 设 $M_E \in \mathbb{R}^E$ 是一个非负且非零的部分矩阵。那么，M_E 存在非负秩-1 补全，当且仅当 M_E 具有零行或零列性质以及环性质。此外，若 M_E 满足零行或零列性质以及环性质，则 M_E 的一个非负秩-1 补全是唯一的非负秩-1 补全，当且仅当图 $G(E)^{\#}$ 是连通的。

证明。第一个结论由定理 3.1 和定理 3.2 得出。为证明第二个结论，设部分非负矩阵 M_E 具有零行或零列性质以及环性质，并考虑图 $G(E)^{\#}$。如果图 $G(E)^{\#}$ 是连通的，那么根据定理 3.3 M_E 有唯一的秩一补全，这意味着非负秩一补全也是唯一的。另一方面，如果图 $G(E)^{\#}$ 不连通，那么 M_E 有无穷多个秩一补全。由于通过取绝对值可得到同一个非负秩一补全的秩一补全只有有限多个，因此可知 M_E 有无穷多个非负秩一补全。第二个结论得证。

□

3.2 非负秩二补全

我们以定理 3.5开始本小节，该定理是定理 2.1 的推论，也是本小节的主要工具。在本小节的其余部分，我们考虑部分 3×3 矩阵的非负秩至多为二的补全。我们的主要结果是定理 3.6，它刻画了部分非负 3×3 矩阵的模式：无论观测条目取何值，这些模式都可以补全为非负秩至多为二的矩阵。本小节的其余部分包括证明该定理所需的定理 3.7和定理 3.8 。

命题 3.5。 具有非负元素的部分矩阵存在非负秩-2 补全，当且仅当它存在一个非负的秩-2 补全。

定理 3.6。 设 $E \subseteq [3] \times [3]$。那么，对于观测条目属于 E 的每个部分非负矩阵，都可以在 $\mathbb{R}^{3\times3}$ 中补全为非负秩至多为二的矩阵，当且仅当它可以在 $\mathbb{R}^{3\times3}$ 中补全为秩至多为二的矩阵，除非所有缺失项分别位于不同的行和列中。

例 3.7。 考虑部分矩阵

$$\begin{pmatrix} ? & 0 & 1 \\ 1 & ? & 0 \\ 0 & 1 & ? \end{pmatrix}.$$

其行列式为 $1 + m_{11}m_{22}m_{33}$。因此，任何秩至多为二的补全都至少有一个负元素。将一个或两个缺失项设为 1，我们还可以得到这样的例子：分别有一个和两个对角线上缺失条目，且存在秩-2 补全，但不存在元素非负的秩-2 补全。对于有三个对角线上缺失条目的情形，通过分析行列式可以证明，部分矩阵至少需要有两个零元素，才不存在元素非负的秩-2 补全。

引理 3.8。 设 $E \subseteq [p] \times [q]$ 是一个观测条目模式，其中存在一行 $i \in [p]$ 至多有一个观测条目(i, j)。设 $M_E \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$ 是一个观测条目非负的部分矩阵。进一步假设，每当 $m_{ij} \neq 0$ 时，列 j 至少包含一个额外的非零条目。如果从 M_E 中删除行 i后得到的部分矩阵存在非负秩至多为 r 的补全，那么 M_E 也存在非负秩至多为 r 的补全。当存在一列至多有一个观测条目时，也有类似的结论。

证明。 首先，假设去掉第 i 行后的矩阵已补全为非负秩至多为 r 的矩阵。如果第 i 行没有观测条目，或者唯一的观测条目为零，则将第 i 行的条目设为零。这样补全后的矩阵非负秩至多为 r。

现在考虑第 i 行恰好有一个非零观测条目 m_{ij} 的情形。根据假设，存在 $k \in [p]\backslash\{i\}$ ，使得 $m_{kj} \neq 0$。我们将第 i 行设为矩阵 M_E 的第 k 行的 m_{ij}/m_{kj} 倍。此操作不会增加非负秩。 □

定理的证明*3.6*。 如果所有缺失项都位于不同的行和列中，那么根据定理 3.7，存在秩为2 但不存在非负秩为2 补全的部分矩阵。现在假设并非所有缺失项都位于不同的行和列中。这意味着同一行或同一列中至少有两个缺失项。设 M_E 为一个部分非负 3×3 矩阵，且M_E 存在秩至多为二的补全。如果有一行 i 至多包含一个观测条目 m_{ij}，并且满足：每当 $m_{ij} \neq 0$时，列 j 中都至少还包含一个非零条目，那么根据定理 3.8 ，该矩阵存在非负秩至多为二的补全，因为去掉第 i行后的矩阵是一个 2×3 矩阵，因此存在非负秩至多为二的补全。

若 $m_{ij} \neq 0$， $m_{kj} = 0$对于 $k \in [3]\backslash\{i\}$和 M_E 可补全为秩至多为 2 的矩阵，则子矩阵 $M_{\hat{i},\ :}$ 必须能够补全为秩至多为 1 的矩阵。否则，对缺失项的任何补全都会得到一个秩为3 的矩阵。我们将 $M_{\hat{i},\ :}$ 补全为一个1 秩矩阵，且其元素非负；根据定理 3.1 ，这是可行的。然后将第 i行中的缺失项任意赋为非负值。由此得到一个秩至多为 2 且元素非负的矩阵，因此其非负秩也至多为 2。如果存在一列至多只有一个观测条目，类似的论证同样成立。

该命题的反方向显然成立。 □

注 3.9。 定理 3.6的类似结论对更大的矩阵并不成立。部分非负矩阵

$$\begin{pmatrix} ? & ? & 0 & 1 \\ m_{21} & 1 & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

对于任意 m_{21}， $m_{31} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，都无法补全为非负秩至多为 2 的矩阵。这由定理 3.7可知，该定理证明了子矩阵 $M_{123,\ 234}$ 无法补全为非负秩至多为 2 的矩阵。更一般地，只要一个部分矩阵含有一个无法补全为非负秩至多为 r 的矩阵的子矩阵，就可知该部分矩阵无法补全为非负秩至多为 r 的矩阵。

4 单个缺失项

本节研究仅有一个缺失项的部分矩阵的可补全性。在上一节中，我们证明了，对于 $r \in \{1, 2\}$，部分非负矩阵存在非负秩-r补全，当且仅当它存在一个非负的秩-r 补全。本节的第一个主要结果是定理 4.7，该定理表明，对于 $r = 3$，这一等价关系不成立。到目前为止，我们关注的是遗忘秩至多为 r 的矩阵簇中一个项的坐标投影，并将利用这一投影构造定理 4.7。我们的第二个主要结果是定理 4.9，该定理刻画了具有一个缺失项的部分矩阵的秩-r 可补全性，并确定此类补全何时唯一。

定义 4.1。 映射 $f\colon\ X \to Y$ 簇的奇异轨迹由点 $p \in X$组成，在这些点处，微分 $df : T_pX \to T_pY$ 不具有可能的最大秩。

引理 4.2。设 $(i,j) \in [p] \times [q]$ 和 $E := ([p] \times [q]) \setminus \{(i,j)\}$。投影 π_E： $\mathcal{V}_r^{p\times q} \to \mathbb{R}^E$ 的奇异轨迹是由矩阵 $M \in \mathcal{V}_r^{p\times q}$ 组成的子簇，其中 $M_{\hat{i},:}$ 或 $M_{:,\hat{j}}$ 的秩至多为 $r-1$。

证明。我们首先刻画微分 $d\pi_E$。考虑矩阵乘法映射

$$\mu\colon \mathbb{R}_r^{p\times r} \times \mathbb{R}_r^{r\times q} \to \mathbb{R}_r^{p\times q}, (A,B) \mapsto AB.$$

其雅可比矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1r} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{p1} \\ a_{p2} \\ \vdots \\ a_{pr} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1q} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{2q} \\ \vdots \\ b_{r1} \\ b_{r2} \\ \vdots \\ b_{rq} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1q} & m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2q} & \cdots & m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pq} \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rq} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rq} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rq} \\ a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{p1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & 0 & 0 & a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{p1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{11} & 0 & 0 & \cdots & a_{21} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & 0 & \cdots & 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{p2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & 0 & 0 & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{p2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & a_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{1r} & 0 & \cdots & 0 & a_{2r} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{pr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1r} & \cdots & 0 & 0 & a_{2r} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{pr} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{1r} & 0 & 0 & \cdots & a_{2r} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{pr} \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵 $M = AB$ 处的切空间 $T_M\mathcal{V}_r^{p\times q}$ 由上述雅可比矩阵的各行张成。微分 $d\pi_E$ 将其映射到上述雅可比矩阵去掉对应于项 m_{ij} 的列后各行所张成的空间。因此， π_E 的奇异轨迹由满足以下条件的 $M \in \mathcal{V}_r^{p\times q}$ 构成：去掉对应于 m_{ij} 的列后，雅可比矩阵的秩未达到最大可能值。

不失一般性，我们假设缺失项为 (1,1)，并且从现在起考虑去掉第一列后的上述雅可比矩阵。它的大小为 $(pr+qr) \times (pq-1)$，且在一般点处的秩为 $pr+qr-r^2$。如果对应雅可比矩阵的秩小于 $pr+qr-r^2$，则矩阵 M 属于 π_E 的奇异轨迹。

首先假设 $M_{\hat{1},:}$ 的秩至多为 $r-1$。在这种情况下，雅可比矩阵中由子矩阵 $M_{\hat{1},:}$ 各项所索引的列组成的子矩阵，其秩至多为 $(p-1)(r-1)+q(r-1) - (r-1)^2$。雅可比矩阵中有 $q-1$ 列对应于 $M_{\hat{1},:}$ 第一行中除 (1,1) 项之外的各项。相应的列至多使雅可比矩阵的秩增加 $q-1$。因此，雅可比矩阵的秩至多为

$$(p-1)(r-1)+q(r-1)-(r-1)^2+(q-1) = pr+qr-r^2-1+(r-p) \le pr+qr-r^2-1$$

因为 $p \ge r$。因此， M 是 π_E 的奇异轨迹上的点。若 $M_{:,\hat{1}}$ 的秩至多为 $r-1$，类似的论证同样成立。

反过来，要证明奇异轨迹中的矩阵意味着$M_{\hat{1},:}$或$M_{:,\hat{1}}$的秩至多为 $r-1$，我们考虑两种不同的情形。首先，假设 M 的第一行不是 M 其他行的线性组合，或者 M 的第一列不是 M其他列的线性组合。那么，在第一种情形下，$M_{\hat{1},:}$ 的秩至多为 $r-1$；在第二种情形下，$M_{:,\hat{1}}$的秩至多为 $r-1$。

对于第二种情形，假设 M 的第一行是 M 其他行的线性组合，并且 M 的第一列是 M其他列的线性组合。考虑 M 中去掉第一行后的子矩阵。由于其秩至多为 r，因此至多有 r 个线性无关的行。不失一般性，我们可以假设行 $r+2,\ldots,p$中的每一行都可以表示为行 $2,\ldots,r+1$的线性组合。类似地，不失一般性，我们可以假设列 $r+2,\ldots,q$中的每一列都可以表示为列 $2,\ldots,r+1$的线性组合。令$S:=\{1,r+2,\ldots,p\}$且 $T:=\{1,r+2,\ldots,q\}$。根据我们的假设，以 $(S\times T)\backslash\{(1,1)\}$中的元素为索引的各项，都可以用部分矩阵 M 中的其他项表示。雅可比矩阵中对应的列也同样如此。因此，接下来我们考虑雅可比矩阵中删去这些列后得到的子矩阵J'，它恰有 $pr+qr-r^2$ 列。当且仅当雅可比矩阵 J' 在该点处的秩小于 $pr+qr-r^2$ 时，该点才属于投影 π_E 的奇异轨迹；这意味着雅可比矩阵 J' 中存在一列可以表示为其余各列的非平凡线性组合。

假设存在一些系数 $\lambda_{ij}\in\mathbb{R}$，它们不全为零，并且雅可比矩阵 J' 的各列以这些系数作线性组合后得到零列。若存在 $i\in S$，使得 $\lambda_{i,2},\ldots,\lambda_{i,r+1}$ 中至少有一个非零，那么考察雅可比矩阵中由 $a_{i,1},\ldots,a_{i,r}$索引的行，可知该矩阵的第 2 至 $r+1$ 列线性相关，即该矩阵的秩至多为 $r-1$。根据先前的假设，从 B 中删去第一列得到的矩阵的秩也至多为 $r-1$，因此，从 M 中删去第一列得到的矩阵的秩至多为 $r-1$。

若存在 $j\in T$，使得 $\lambda_{2,j},\ldots,\lambda_{r+1,j}$ 中至少有一个非零，那么考察雅可比矩阵中由 $b_{1,j},\ldots,b_{r,j}$ 索引的行，可知 A 的第 2 至 $r+1$ 行线性相关，即该矩阵的秩至多为 $r-1$。根据先前的假设，从 A 中删去第一行得到的矩阵的秩也至多为 $r-1$，因此，从 M 中删去第一行得到的矩阵的秩至多为 $r-1$。

现在假设我们不属于前面讨论的任何一种情形。令 $k,l\in\{2,\ldots,r+1\}$ 满足$\lambda_{k,l}\neq 0$。由于已排除前面讨论的情形，因此有 $\lambda_{k,1}=\lambda_{k,r+2}=\ldots=\lambda_{k,q}=0$。接着考察雅可比矩阵中由 $a_{k,1},\ldots,a_{k,r}$ 索引的各行，可知 B 的第二至$r+1$列线性相关，也就是说，该矩阵的秩至多为 $r-1$。根据此前的假设，从 B中删除第一列后得到的矩阵的秩也至多为 $r-1$，因此从 M 中删除第一列后得到的矩阵的秩至多为$r-1$。

□

注 4.3. 定理4.2 证明中出现的雅可比矩阵是 [SC10]中补全矩阵的转置。

命题 4.4。 设 $(i,j)\in[p]\times[q]$ 以及 $E:=([p]\times[q])\backslash\{(i,j)\}$。那么， $\pi_E:\ \mathcal{V}_r^{p\times q}\to\mathbb{R}^E$ 在 $\mathcal{M}_r^{p\times q}$ 上、除去 π_E的奇异轨迹外，是一个同胚。除去 π_E的奇异轨迹外， $\mathcal{M}_r^{p\times q}$的边界上的点映射到 $\pi_E(\mathcal{M}_r^{p\times q})$ 的边界，而$\mathcal{M}_r^{p\times q}$的内部中的点映射到 $\pi_E(\mathcal{M}_r^{p\times q})$的内部。奇异轨迹上的点映射到$\pi_E(\mathcal{M}_r^{p\times q})$的边界。

证明。根据定理 4.2， π_E 的奇异轨迹由满足以下条件的点组成：$M_{\hat{i},:}$ 或 $M_{:,\hat{j}}$ 的秩至多为 $r-1$。根据定理 2.3， π_E 像中的部分矩阵不可能满足 $\mathrm{rank}(M_{\hat{i},\hat{j}})\leq r-1$，而是满足 $\mathrm{rank}(M_{\hat{i},:})=\mathrm{rank}(M_{:,\hat{j}})=r$。因此，$\mathcal{V}_r^{p\times q}$中位于 π_E 奇异轨迹之外的点，都有一个非零的 $M_{\hat{i},\hat{j}}$ 的 $r\times r$ 子式。设满足 $|K|=|L|=r$ 的 $K\subseteq[p]\backslash\{i\}$ 和 $L\subseteq[q]\backslash\{j\}$ 使得 $\det(M_{K,L})\neq 0$。考虑子式 $\det(M_{K\cup\{i\},L\cup\{j\}})$。利用拉普拉斯展开，我们可以将行列式 $\det(M)$ 写为 $=m_{ij}\det(M_{K,L})-f$，其中 f不依赖于项 m_{ij}。在由 $\det(M_{K,L})\neq 0$ 定义的开集上，投影 π_E 的逆映射由缺失项 m_{ij}的 $m_{ij}=\quad{}^{f}\det(M_{K,L})$ 给出。集合 $\pi_E(\mathcal{V}_r^{p\times q})$ 可由若干开集覆盖，使得在开集上，对某些满足 $|K|=|L|=r$的 $K\subseteq[p]\backslash\{i\}$ 和 $L\subseteq[q]\backslash\{j\}$， $\det(M_{K,L})\neq 0$ 成立。此外，不同集合 K,L 对应的逆映射在这些开集的交集上相一致。映射 π_E 是一个双射

$\mathcal{V}_r^{p\times q}$中位于 π_E 的奇异轨迹之外的部分，其逆映射在上述每个开集上均有定义，且两个函数都是连续的。因此， π_E 在 $\mathcal{V}_r^{p\times q}$上以及在 π_E的奇异轨迹之外的 $\mathcal{M}_r^{p\times q}$上都是一个同胚。

关于奇异轨迹之外的内部和边界的陈述，源于同胚的一般性质。奇异轨迹中矩阵的像 M_E 在其每个邻域内都包含无法补全为秩-r 矩阵的部分矩阵。将 M_E 作任意小的改动即可看出这一点，使得 $M_{\hat{i},:}$和 $M_{:,\hat{j}}$的秩恰好为 r，而 $M_{\hat{i},\hat{j}}$的秩为 $r-1$。 □

我们通过定理 4.6来说明这一结果。为此，我们需要以下引理。

引理 4.5。 设 $M\in\mathbb{R}^{p\times q}$ 是一个秩为 r 且非负秩为 r的矩阵。设 (A,B) 是一个在缩放和置换意义下唯一的~尺寸为-r 的非负矩阵分解 M 。设 A 是将 A 的一个零元素改为负数 ε后得到的矩阵。那么存在 $\varepsilon_0<0$ 使得~ ~对于 $\varepsilon\in(\varepsilon_0,0)$，矩阵 $M:=AB$ 不具有尺寸为-r 的非负分解。

证明。 </style>所有大小为的分解都具有形式 $(,C^{-1}B)$ ，其中 $C\in$属于$\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$。由于 (A,B) 是 M唯一的大小为r 的非负矩阵分解，因此除非 C 是正缩放和置换矩阵的复合，否则 AC 或 $C^{-1}B$ 必含负元素。

假设 A和 $\tilde{A}$仅在元素 (i,j) 上不同。我们将证明，如果 $(AC,C^{-1}B)$ 的任一因子含有负元素，那么 $(\tilde{A}C,C^{-1}B)$ 的某个因子也含有负元素。分解 $(\tilde{A}C,C^{-1}B)$ 与 $(AC,C^{-1}B)$ 仅在 $\tilde{A}C$的第 i行上不同。因此，如果 $C^{-1}B$ 含有负元素，或者 AC 在第 i行以外含有负元素，那么 $(\tilde{A}C,C^{-1}B)$ 也含有负元素~ ~。 AC 的第 i行中的元素满足 $(AC)_{ik}=(AC)_{ik}+\varepsilon C_{jk}$。因此，如果 $(AC)_{ik}<0$,~，那么存在 $\varepsilon_0<0$ ，使得对于 $\varepsilon\in(\varepsilon_0,0)$ ，有 $(AC)_{ik}<0$。 □

例 4.6。 在本例中，我们将展示，对于秩三且非负秩为三的 4×4 矩阵，如果将其投影到缺少一个条目的部分矩阵上，那么该集合的边界包含来自 $\mathcal{M}_3^{4\times4}$非平凡边界投影的矩阵。换句话说，集合 $\pi_E(\mathcal{M}_3^{4\times4})$ 具有非平凡边界，而非负秩为 1 和 2 时并非如此。

考虑矩阵

$$M=\begin{pmatrix}12&2&1&9\\8&6&3&10\\4&16&13&9\\12&4&6&5\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\4&1&0\\1&3&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&4&3&2\\4&0&1&1\\4&1&0&4\end{pmatrix}.$$

那么 (A,B) 是 the uni满足条件的i 3 ti阵 trix factorization of M up t的置换 tati和 d scali 项[KRS15]，第 6]。L 非负矩

et $E=([4]\times[4])\setminus\{(1,1)\}$。部分矩阵 M_E有唯一的秩 3 补全，即 M . 它也是唯一的 M_E的非负秩-3补全。

我们声称， M_E 的每个邻域内都存在一些部分矩阵，它们有非负秩-3补全；也存在一些点，它们有秩-3补全，但没有非负秩-3补全。前者很容易证明：将 A 和 B 中的一个零元素替换为一个很小的正数 ε ，并考虑由它们相乘得到的矩阵即可。

为证明后者，令 $A(\varepsilon)$为将 A 中的 A的(1,1)元素替换为负数 ε后得到的矩阵，并令 $M(\varepsilon):=A(\varepsilon)B$。根据定理 4.5，存在 $\varepsilon_0<0$，使得矩阵 $M(\varepsilon)$在 $\varepsilon\in(\varepsilon_0,0)$时不具有三阶非负分解。通过令 ε 充分接近零，我们可以构造出 $M(\varepsilon)_E$，使其任意接近 M_E。由于 $M(\varepsilon)_E$具有唯一的秩 3 补全，因此它必定等于 $M(\varepsilon)$，而后者的非负秩不为三。因此， $M(\varepsilon)_E$有秩-3补全，但没有非负秩-3补全。

通过向 A 添加 $p-4$ 个非负行，并向 B 添加 $q-4$ 个非负列，可以将此例推广到大小为 $p\times q$、秩为三且非负秩为三的矩阵。

例 4.7。 在定理 4.6 中，我们证明了在部分非负矩阵M_E 的任意邻域内，都存在一个部分矩阵 $M(\varepsilon)_E$ ，它没有非负秩-3 补全。这样的部分矩阵的一个例子是

$$M(\varepsilon)_E=\begin{pmatrix}?&2&1&9\\8&6&3&10\\4&16&13&9\\8&3&6&1\end{pmatrix}.$$

这个矩阵有唯一的秩 3 补全

$$M(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & 9 \\ 8 & 6 & 3 & 10 \\ 4 & 16 & 13 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/5 & -4/5 & 3/5 \\ 4/5 & -11/5 & -28/5 \\ 1/5 & 11/5 & -12/5 \end{pmatrix}}_{\hat{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 44 & 27 & 19 & 42 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\hat{B}}.$$

多胞体 $P \subseteq Q$ 与 $M(\varepsilon)$ 如图1所示。这些多胞体由锥 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \hat{A}x \geq 0\}$ 以及锥($\hat{B}$) 通过取截面 $x = 1$构造而成。我们利用定理2.2 进行了计算验证，证明不存在一个三角形 Δ 嵌套于 P 与Q之间。这项计算的代码可在该项目的 Git 仓库中找到。

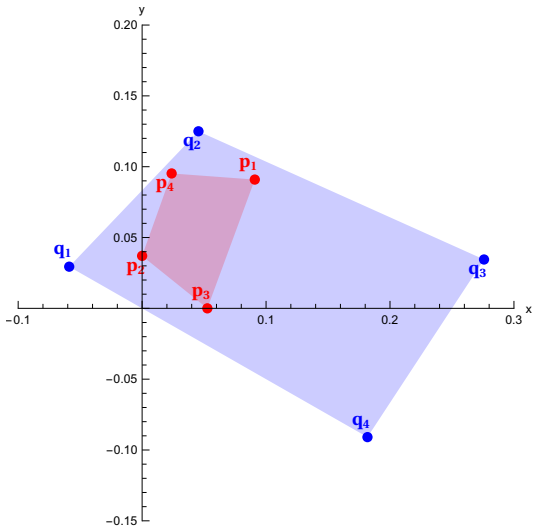


图 1：定理 $M(\varepsilon)$ 4.7 中与相关的嵌套多胞体。

例 4.8。文献 [KRS15的例 6.2] 已证明， $\mathcal{M}_3^{4\times4}$的代数边界包含 16 个不可约分支 $\{m_{ij} = 0\}$ ，它们对应于零元素；此外，还包含 288 个不可约分支，它们对应于分解中不同的零模式，例如

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

后者的代数边界分支由以下矩阵的极大子式生成： 4×5 矩阵。 $\mathcal{M}_3^{4\times4}$的代数边界分支可以给出半代数集 $\pi_E(\mathcal{M}_3^{4\times4})$的代数边界分支。例如，当 $E = ([4] \times [4]) \setminus \{(1,1)\}$时，零模式（4.1）给出一个

$\pi_E(\mathcal{M}_3^{4\times4})$ 的代数边界分支，由以下多项式生成：

$$
\begin{aligned}
&m_{14}m_{23}m_{32}m_{33}m_{41}m_{42} - m_{14}m_{22}m_{33}^2m_{41}m_{42} + m_{12}m_{24}m_{33}^2m_{41}m_{42} -\\
&m_{13}m_{23}m_{32}m_{34}m_{41}m_{42} + m_{13}m_{22}m_{33}m_{34}m_{41}m_{42} - m_{12}m_{23}m_{33}m_{34}m_{41}m_{42} -\\
&m_{14}m_{23}m_{31}m_{33}m_{42}^2 + m_{13}m_{23}m_{31}m_{34}m_{42}^2 - m_{14}m_{23}m_{32}^2m_{41}m_{43} +\\
&m_{14}m_{22}m_{32}m_{33}m_{41}m_{43} - m_{12}m_{24}m_{32}m_{33}m_{41}m_{43} + m_{12}m_{23}m_{32}m_{34}m_{41}m_{43} +\\
&m_{14}m_{23}m_{31}m_{32}m_{42}m_{43} + m_{14}m_{22}m_{31}m_{33}m_{42}m_{43} - m_{12}m_{24}m_{31}m_{33}m_{42}m_{43} -\\
&m_{13}m_{22}m_{31}m_{34}m_{42}m_{43} - m_{14}m_{22}m_{31}m_{32}m_{43}^2 + m_{12}m_{24}m_{31}m_{32}m_{43}^2 +\\
&m_{13}m_{23}m_{32}^2m_{41}m_{44} - m_{13}m_{22}m_{32}m_{33}m_{41}m_{44} - m_{13}m_{23}m_{31}m_{32}m_{42}m_{44} +\\
&m_{12}m_{23}m_{31}m_{33}m_{42}m_{44} + m_{13}m_{22}m_{31}m_{32}m_{43}m_{44} - m_{12}m_{23}m_{31}m_{32}m_{43}m_{44}.
\end{aligned}
$$

这个多项式的次数为六，且包含24 项。它在定理4.6中的矩阵上取值为零。

其他零模式以及遗忘一个元素的投影，可能会产生次数和项数各不相同的边界分支。使用 Macaulay2 中的消元法即可轻松计算。相比之下，目前还不清楚如何求出 $\pi_E(\mathcal{M}_3^{4\times4})$ 的半代数描述。

定理 4.9。设 $(i,j) \in [p]\times[q]$ 且 $E := ([p]\times[q])\setminus\{(i,j)\}$。

1. 部分矩阵 $M_E \in \mathbb{R}^E$ 能够补全为秩至多为 r 的 $\mathbb{R}^{p\times q}$ 中的矩阵，当且仅当以下条件之一成立：

> ***(a)*** $M_{\hat{i},:}$ 或 $M_{:,\hat{j}}$ 的秩至多为 $r-1$；***(b)*** $M_{\hat{i},:}$、$M_{:,\hat{j}}$ 和 $M_{\hat{i},\hat{j}}$ 的秩恰为 r。
>
> 条件 ***(a)*** 对应于投影映射的奇异轨迹像中的矩阵。

2. 部分矩阵 $M_E \in \mathbb{R}^E$ 在 $\mathbb{R}^{p\times q}$ 中有无穷多个秩不超过 r 的补全，当且仅当 $M_{\hat{i},:}$ 或 $M_{:,\hat{j}}$ 的秩不超过 $r-1$（这与条件 ***1(a)*** 相同，也等价于 M_E 属于奇异轨迹的像）。此外，如果存在无穷多个补全，那么缺失项可以补全为任意实数。

3. 部分矩阵 $M_E \in \mathbb{R}^E$ 在 $\mathbb{R}^{p\times q}$ 中有唯一的秩不超过 r 的补全，当且仅当 $M_{\hat{i},:}$、$M_{:,\hat{j}}$ 和 $M_{\hat{i},\hat{j}}$ 的秩恰好为 r（这与条件 ***1(b)*** 相同）。这等价于 $M_{\hat{i},\hat{j}}$ 存在一个非零的 $r\times r$ 子式。

4. 如果 $r \geq 3$，则无法通过检查部分矩阵 $M_E \in \mathbb{R}^E$ 是否存在秩不超过 r 且元素非负的补全，来判断它是否存在非负秩不超过 r 的补全。

证明。 1. 首先假设 $M_E \in \mathbb{R}^E$ 可以补全为一个秩至多为 r 的矩阵。如果 $M_{\hat{i},:}$和 $M_{:,\hat{j}}$的秩都不至多为 $r-1$，那么 $M_{\hat{i},:}$和 $M_{:,\hat{j}}$的秩恰好为 r。如果 $M_{\hat{i},\hat{j}}$的秩至多为 $r-1$，那么根据定理 2.3，$M_{\hat{i},:}$和 $M_{:,\hat{j}}$ 中至少有一个的秩也必须至多为 $r-1$。由于这不可能，因此 $M_{\hat{i},\hat{j}}$ 的秩恰好为 r。

> 反过来，如果 $M_{\hat{i},:}$或 $M_{:,\hat{j}}$的秩至多为 $r-1$，那么添加任意一行或一列，秩最多增加一，因此 M_E 可以补全为一个秩至多为 r 的矩阵。如果 $M_{\hat{i},:}$、$M_{:,\hat{j}}$和 $M_{\hat{i},\hat{j}}$ 的秩恰好为 r，那么我们可以将 $M_{i,\hat{j}}$ 写成 $M_{\hat{i},\hat{j}}$各行的线性组合。如果令 $M_{i,j}$ 等于 $M_{\hat{i},:}$中元素的相同线性组合，那么 $M_{i,:}$ 就是 $M_{\hat{i},:}$ 各行的线性组合，因此 M 的秩为 r。

2. 如果 $M_{\hat{i},:}$ 的秩至多为 $r-1$，那么无论第 ij 个条目补全为何值，补全后的矩阵的秩都可以至多为 r。因此，在这种情况下，存在无穷多个实数补全和无穷多个非负补全。

> 另一方面，如果 $M_{\hat{i},:}$, $M_{:,\hat{j}}$ 和 $M_{\hat{i},\hat{j}}$ 的秩恰好为 r，那么 $M_{\hat{i},\hat{j}}$ 中存在一个非零的 $r\times r$ 子式。令 $K \subseteq [p]\setminus\{i\}$ 和 $L \subseteq [q]\setminus\{j\}$ 满足 $|K| = |L| = r$，使得 $\det M_{K,L} \neq 0$。考虑子式 $\det(M_{K\cup\{i\},L\cup\{j\}})$。利用拉普拉斯展开，我们可以将行列式 $\det(M)$ 写成 $= m_{ij}\det(M_{K,L}) - f$，其中 f 不依赖于缺失项 m_{ij}。那么缺失项必须等于 $m_{ij} = f/\det M_{K,L}$，因此存在唯一补全。

3. 这由前一项得出。4. 这由定理 4.6 得出。

□

条目 (3) 中的唯一补全非负，当且仅当条目 (2) 中的表达式 $m_{ij} = {}^{f}\det M_{K,L}$ 非负。由于存在非负秩 2 补全等价于存在一个非负的秩-2 补全，因此在这种情况下，可以轻松判断只有一个缺失项的部分矩阵是否存在非负秩 2 补全。

5 非负秩-3补全

本节中，我们给出非负秩-r 矩阵补全的几何刻画（第 5.1 节）。我们还研究非负秩-3 矩阵补全，其中同一列或行中有两个缺失项（第 5.2 节），或缺失项位于不同的列和行中（第 5.3 节）。

5.1 非负秩补全的几何描述

在本小节中，我们将第2节中非负秩的几何刻画扩展为非负秩-r 补全的几何刻画。主要结果陈述于定理 5.2。

在第 2 节中，我们将一对嵌套多胞体与一个非负矩阵相关联。如果存在一个嵌套于这两个多胞体之间的 r-单纯形，则该矩阵的非负秩为 $(r-1)$。对于一个元素为非负数的部分矩阵，我们可以关联到一族嵌套多胞体。如果对于这族多胞体中的一对，存在一个可以嵌套于其间的 $(r-1)$-单纯形，则该矩阵存在一个非负秩-r 补全。

设 $M_E \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$ 为一个部分非负矩阵。我们将构造矩阵 $A \in \mathbb{R}^{p\times r}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{r\times q}$，使得 $M = AB$ 是 M_E的秩为 r 的补全。我们将利用部分矩阵M_E 中的信息来确定 A、B的元素。我们不要求 A 和 B 具有非负元素。设 M_I、$_J$ 是 M_E 的一个最大观测子矩阵，其中某个 $I \subseteq [p]$ 和 $J \subseteq [q]$ 满足条件。若 rank(M_I,$_J$) $= r$，则可取 A_I 和 B_J，使它们给出 M_I、$_J$的秩为 r 的分解。特别地，这确定了与 I 中的行对应的 Q 的面，以及与 J中的列对应的 P 的顶点。A 和 B 的其余元素尚未完全确定，但受到 M_E 中不属于 M_I、$_J$的观测条目的限制。因此，P 的顶点和 Q 的面也可以移动，但它们的移动受到 M_E 中不属于 M_I、$_J$的观测条目的限制。多胞体 P和 Q 的构形满足 $P \subseteq Q$ 对应于 M_E的非负补全。这是因为每当 $P \subseteq Q$ 时，M_E 的补全就是一对 (P, Q) 的松弛矩阵 S_P、$_Q$，而该矩阵是非负的。

在某些情况下，使用嵌套多胞体更容易；而在另一些情况下，则更适合使用通过对多胞体取锥包得到的嵌套锥。我们将根据具体情况采用这两种描述。下面的例子将同时使用嵌套锥和多胞体来演示这一几何构造。

例 5.1。令 $E = [4]\times[4]\setminus\{(1,\ 1),\ (2,\ 1)\}$，并考虑部分非负矩阵的秩-3补全

$$M_E = \begin{pmatrix} ? & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ ? & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}.$$

首先假设最大观测子矩阵 $M_{:,\ 234}$ 的秩为三。这意味着 M_E 的第二列至第四列，从而相应的列和均非零。我们还假设第一列中观测条目的和非零，因为否则可以将缺失项补全为零。最后，我们假设 $M_{34,\ 234}$ 的秩为二。在定理 5.4中，我们考虑 $M_{34,\ 234}$ 的秩至多为一，或 $M_{:,\ 234}$ 的秩至多为二的情形。

我们构造 ct 因子 A 和 B，使得 AB 是 M_E的秩-3补全。定义 $A = M_{:,\ 234}$ 和

$$B_t = \begin{pmatrix} | & \\ b_1 & \mathrm{Id}_3 \\ | & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4},$$

其中 $b_1 = (b_{11},\ b_{21},\ b_{31})^T \in \mathbb{R}^3$ 待确定。列 $b_1 \in \mathbb{R}^3$ 的限制由方程组中的两个观测条目 m_{31} 和 m_{41} 确定

$$\begin{cases} a_3 b_1 = m_{31}, \\ a_4 b_1 = m_{41}, \end{cases}$$

其中，a_3 和 a_4 分别是 A的第三行和第四行。

如果 2×2 子式 $\det(M_{34,34})$ 非零，那么

$$\begin{aligned} b_{11} &= t, \\ b_{21} &= \frac{t \cdot \det(M_{34,24}) - \det(M_{34,14})}{-\det(M_{34,34})}, \\ b_{31} &= \frac{t \cdot \det(M_{34,23}) - \det(M_{34,13})}{\det(M_{34,34})}, \end{aligned}$$

其中 $t \in \mathbb{R}$。因此，在这种情况下，B_t 的第一列具有如下形式：$(t, b_{21}(t)\ b_{31}(t))^T$，其中 t 是 $\mathbb{R}$中的一个参数。如果 $\det(M_{34,34}) = 0$，我们可以将 b_1 中与$M_{34,234}$ 的另一个非零 2×2 子式相关联的分量作为参数，并用它表示另外两个分量。

我们将修改这一分解，使其更便于构造相应的嵌套多胞体。用 s_i 表示 M_E的秩-3补全 AB_t 的第 i列之和。我们定义

$$\hat{A} = A \begin{pmatrix} s_2 & s_3 & s_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m_{12}}{s_2} & m_{13} - \frac{m_{12}s_3}{s_2} & m_{14} - \frac{m_{12}s_4}{s_2} \\ \frac{m_{22}}{s_2} & m_{23} - \frac{m_{22}s_3}{s_2} & m_{24} - \frac{m_{22}s_4}{s_2} \\ \frac{m_{32}}{s_2} & m_{33} - \frac{m_{32}s_3}{s_2} & m_{34} - \frac{m_{32}s_4}{s_2} \\ \frac{m_{42}}{s_2} & m_{43} - \frac{m_{42}s_3}{s_2} & m_{44} - \frac{m_{42}s_4}{s_2} \end{pmatrix} \quad \text{and}$$

$$\hat{B}_t = \begin{pmatrix} s_2 & s_3 & s_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B_t = \begin{pmatrix} ts_2 + b_{21}(t)s_3 + b_{31}(t)s_4 & s_2 & s_3 & s_4 \\ b_{21}(t) & 0 & 1 & 0 \\ b_{31}(t) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\hat{}\ \hat{}$ M_E 的秩-3补全的几何可通过嵌套锥 $P_t \subseteq Q$来表述，其中$\hat{}P_t = \text{cone}(\hat{}B_t)$且$\hat{}\ Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \hat{}Ax \geq 0\}$。$\hat{}\ Q$ 的四个面均已固定，但$\hat{}\ P_t$ 只有三条射线已固定。由$(ts_2 + b_{21}(t)s_3 + b_{31}(t)s_4, b_{21}(t)\ b_{31}(t))^T$张成的第四条射线取决于参数 t。

通过取锥 $x = 1$ 的仿射截面，我们将多胞体 P_t 和 Q 与 M_E 联系起来 $\hat{P}_t$ 和 $\hat{}$ Q。于是 $P_t = \text{conv}(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)$，其中

$$p_1 = \left(\frac{b_{21}(t)}{ts_2 + b_{21}(t)s_3 + b_{31}(t)s_4}, \frac{b_{31}(t)}{ts_2 + b_{21}(t)s_3 + b_{31}(t)s_4} \right),\ p_2 = (0,0),\ p_3 = \left(\frac{1}{s_3}, 0 \right),\ p_4 = \left(0, \frac{1}{s_4} \right),$$

以及 $Q = \{(1,\ x,\ y) \mid \hat{}A(1,\ x,\ y) \geq 0\}$。根据以下假设，$p_i$ 的分母非零：M_E 的任意一列中的观测条目之和非零；并且注意到 $ts_2 + b_{21}(t)s_3 + b_{31}(t)s_4 = 1 \det(M_{34,\ 34})\, s_1(t)$，其中 $s_1(t)$ 是矩阵 AB_t 第一列中各项之和。对于使补全为非负的 t 值，我们有 $s_1(t) > 0$。

定理 5.2。设 $M_E \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$ 是一个部分非负矩阵。当且仅当存在与 $M_E\ \hat{}\ \hat{}\ \hat{}\ \hat{}$ 相关联的嵌套锥族中的一个元素 (P, Q)，使得存在一个满足 $P \subseteq \Delta \subseteq Q$ 的 r-单纯形锥 Δ 时，M_E 存在非负秩为 $r\hat{}\ \hat{}$ 的补全。

证明。与 M_E 相关联的锥族中的每个成员（$\hat{}P,\ \hat{}Q$）都对应于一个彼此不同的秩-r 补全，且该补全是非负的。当且仅当相应的补全具有非负秩 r时，在嵌套锥的族中存在一个成员（$P,\ Q$），使得存在一个 r-单纯形锥 Δ，满足 $P \subseteq \Delta \subseteq Q$。 □

最后，我们考虑定理 5.1 中一个尚未解决的特殊情形。为此，我们使用下面的引理，而不是几何刻画。

引理 5 3 $M \in \mathbb{R}^{p \times q}_{\geq 0}$ $I \subset [p]$ $M_{I:}$ k $p - |I| \leq$ **..** 设 **.** 若使得 **.**的非 $r-k$ M r $J \subset [q]$ $M_{:J}$ 负秩至多为，且，则的非负秩至多为. 类似地，若使得 **.**的非负秩至多为 k 且 $q - |J| \leq r - k$，则 M 的非负秩至多为 r.

证明。我们证明引理中 $I \subset [p]$ 使得 $M_{I,:}$ 的非负秩至多为k 且 $p - |I| \leq r - k$的情形。第二个结论的证明类似。不失一般性，假设 $I = \{1, 2, \ldots, |I|\}$。由于 $M_{I,:}$的非负秩至多为 k，我们可以写成 $M_{I,:} = AB$，其中 $A \in \mathbb{R}^{|I|\times k}_{\geq 0}$ 且 $B \in \mathbb{R}^{k\times q}_{\geq 0}$。我们定义

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_{p-|I|} \end{array}\right) \quad \text{and} \quad \tilde{B} = \left(\begin{array}{c} B \\ \hline M_{[p]\setminus I,:} \end{array}\right),$$

其中 $\mathrm{Id}_{p-|I|}$ 是 $(p-|I|) \times (p-|I|)$ 单位矩阵。于是 (A, B) 给出了一个大小至多为 r 的 M非负矩阵分解。 □

例5.4。令 $E = ([4] \times [4]) \setminus \{(1, 1), (2, 1)\}$，并考虑以下部分非负矩阵

$$M_E = \begin{pmatrix} ? & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ ? & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}.$$

这里我们考虑 $\mathrm{rank}(M_{:,\,234}) \leq 2$ 或 $\mathrm{rank}(M_{34,\,234}) \leq 1$ 的情形，并刻画这类矩阵何时存在非负秩至多为三的补全。如果最大观测子矩阵 $M_{:,\,234}$的秩至多为二，那么 M_E 根据定理 5.3，存在非负秩至多为三的补全。

接下来，假设子矩阵 $M_{34,\,234}$ 的秩至多为一。若$M_{34,\,:}$ 的秩为二，且 $M_{:,\,234}$的秩为三，则 M_E 无法补全为秩为3 的矩阵。参照定理 2.3证明中的类似论证即可证明这一点。因此，我们只需考虑以下情形：$\mathrm{rank}(M_{34,\,:}) \leq 1$ 或 $\mathrm{rank}(M_{:,\,234}) \leq 2$。在这两种情形下，根据定理 5.3，矩阵 M_E 都可以补全为非负秩至多为三的矩阵。

5.2 缺失元素$(1,1)$和$(2,1)$

在本小节中，我们研究缺失元素为 (1, 1) 和 (2,1) 的部分非负4×4 矩阵的非负秩-3补全的几何性质。根据定理5.5， M_E的秩-3补全对应于 $\mathbb{R}^2$中的一族嵌套多胞体 $P_t \subseteq Q$，其中外多边形 Q和内多边形 P_t 的三个顶点固定，而 P_t 的最后一个顶点位于一条经过 Q一个顶点的直线上。在定理5.6中，我们给出确保此类部分矩阵存在非负秩-3补全的充分条件；在定理 5.7中，我们给出一个部分非负矩阵的例子，它有一个非负的秩-3补全，但不存在非负秩-3补全。

引理*5.5.* 设 $E = [4] \times [4] \setminus \{(1, 1), (2, 1)\}$ 和 $M_E \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$为一个没有零行或零列的部分矩阵，并假设 2×2 子式 $\det(M_{34,34})$ 不为零。按定理*5.1*定义 P_t 和 Q。那么， P_t 的顶点 p_1 总位于一条直线上，该直线经过由 Q的第三个和第四个定义面所确定的 Q 的顶点。 M_E 的非负秩-*3*补全对应于直线上的那些点 p_1，使得存在一个三角形 Δ，满足 $P_t \subseteq \Delta \subseteq Q$。

证明。 P_t 的顶点 p_1 具有如下形式：$\left(\frac{b_{21}(t)\,()s_3+b_{31}(t)s_4}{ts_2+b_{21}\,t}, \frac{b_{31}(t)\;ts_2+b_{21}(t)s_3+b_{31}(t)s_4}{}\right)$。通过消元法可以验证，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，顶点 p_1 都位于直线

$$l_{p_1} = -\det(M_{34,12}) + c_x x + c_y y, \tag{5.1}$$

其中

$$c_x = m_{41}(\det(M_{13},23) + \det(M_{23},23) - \det(M_{34},23)) - m_{31}(\det(M_{14},23) + \det(M_{24},23) + \det(M_{34},23)),$$
$$c_y = m_{41}(\det(M_{13},24) + \det(M_{23},24) - \det(M_{34},24)) - m_{31}(\det(M_{14},24) + \det(M_{24},24) + \det(M_{34},24)).$$

特别地，这条直线取决于条目 m_{31} 和 m_{41}。

设 q_1 为定义 Q的第三个面与第四个面的交点，即 $\hat{a}_3^T(1, q_1) = \hat{a}_4^T(1, q_1) = 0$。直线 l_{p_1} 始终经过点 q_1，因为 $l_{p_1}(q_1) = 0$。然而，只有当 $m_{31} = m_{41} = 0$时， $p_1 = q_1$ 才成立。

内部的 l_{p_1} 上的点 Q对应于不同的秩-3 补全 M_E，这些补全均为非负。当存在一个三角形 Δ 使得 $P_t \subseteq \Delta \subset Q$ 对应的 M_E 补全根据定理5.2具有非负秩三时。

□

在下一个引理中，我们给出部分矩阵 M_E 具有非负秩-3补全的充分条件。

引理5.6。设 M_E，P_t和 Q 如上定义。设 l_{p_1} 为由 (5.1) 定义的直线，P_t 的最后一个顶点位于该直线上。若 l_{p_1} 与 凸包(p_2，p_3，p_4) 或包含 凸包(p_2，p_3，p_4)各边的直线相交，且交点位于 Q内，那么 M_E 存在一个非负秩-3补全。

证明。首先，假设直线 l_{p_1} 与凸包(p_2,p_3,p_4)相交。根据定理5.5，Q 内的每个点都对应于 M_E 的一个非负秩-3补全。令 $p_1 \in l_{p_1} \cap$ 为凸包(p_2,p_3,p_4)。于是，P_t =凸包(p_1,p_2,p_3,p_4) =凸包(p_2,p_3,p_4)，其中凸包(p_2,p_3,p_4)是一个三角形。因此，与这个 p_1 对应的 M_E 的补全具有非负秩三。

现在假设 l_{p_1} 与一条直线相交，该直线包含凸包 conv(p_2,p_3,p_4) 的一条边，且交点 p_1位于凸包 conv(p_2,p_3,p_4)之外。不妨设该直线包含凸包 conv(p_2,p_3,p_4) 的边 p_2p_3。于是，要么 $p_2p_3 \subset p_1p_2$，要么 $p_2p_3 \subset p_1p_3$。在第一种情况下，conv(p_2,p_3,p_4) $\subset$conv(p_1,p_2,p_4)；在第二种情况下，conv$(p_2,p_3,p_4) \subset$ conv(p_1,p_3,p_4)。在这两种情况下，多胞体 conv(p_1,p_2,p_3,p_4) 都是一个三角形。因此，与该 p_1 相对应的 M_E 的补全具有非负秩三。 □

例5.7。在本例中，我们构造一个部分非负矩阵，它具有一个非负的秩-3补全，但不存在非负秩-3补全。考虑如下形式的部分矩阵

$$M_E = \begin{pmatrix} ? & 5 & 1 & 9 \\ ? & 1 & 7 & 7 \\ m_{31} & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

其中 $m_{31} \geq 0$。M_E 的秩-3补全具有以下形式

$$M_t = \begin{pmatrix} t - m_{31} & 5 & 1 & 9 \\ t & 1 & 7 & 7 \\ m_{31} & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

当 $t \geq m_{31}$ 时，补全 M_t 是非负的。

与 M_t 相对应的多胞体为 Q 和 P_t，其构造方式如定理5.1所示。外多胞体 Q 由以下不等式定义

$$x - y + \frac{1}{16} \geq 0,\ -x + y + \frac{1}{16} \geq 0,\ x + y + \frac{1}{120} \geq 0,\ \text{and}\ \ x + y - \frac{3}{40} \leq 0.$$

等价地，Q = conv$(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)$，其中

$$q_1 = \left(\frac{1}{160}, \frac{11}{160}\right),\ q_2 = \left(\frac{11}{160}, \frac{1}{160}\right),\ q_3 = \left(\frac{13}{480}, -\frac{17}{480}\right),\ \text{and}\ \ q_4 = \left(-\frac{17}{480}, \frac{13}{480}\right).$$

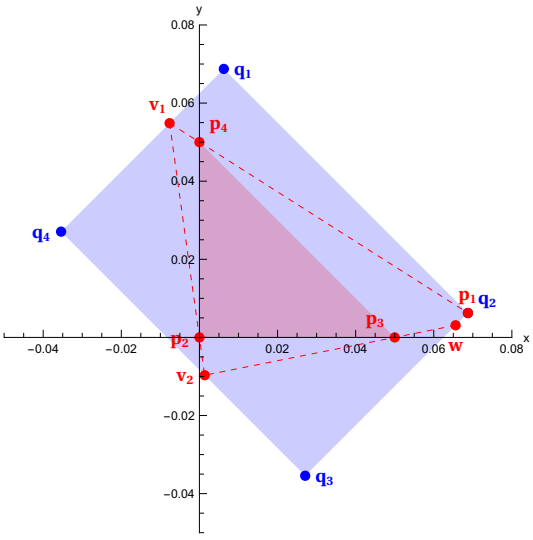
内多胞体 P_t 定义为 P_t = conv$(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)$，其中

$$p_1 = \left(\frac{10m_{31}+t}{160t}, \frac{11}{160} - \frac{m_{31}}{16t}\right),\ p_2 = (0,0),\ p_3 = \left(\frac{1}{20}, 0\right),\ \text{and}\ \ p_4 = \left(0, \frac{1}{20}\right).$$

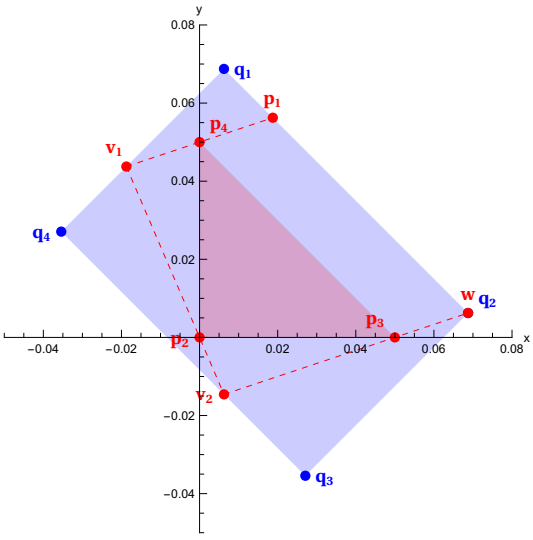
我们注意到，内顶点 p_1 始终位于由方程$x + y - \frac{3}{40} = 0$定义的Q的边 q_1q_2 上。此外，只有当 $m_{31} = 0$ 时，$p_1 = q_1$。否则，$p_1 \to q_1$，因为 $t \to \infty$，但 $p_1 \neq q_1$。

我们证明不存在满足 $P_t \subseteq \Delta \subseteq Q$ 的三角形 Δ。由于 p_1 总是在边 q_1q_2 上，嵌套在 P_t 和 Q 之间的任何三角形都必须有一个顶点，即 p_1，或者有两个顶点位于这条边上。

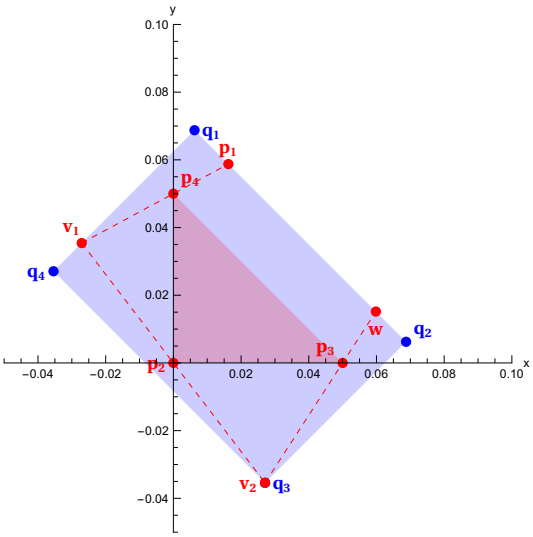
首先考虑这样的三角形：p_1 是三角形中唯一位于边 q_1q_2 上的点。令 v_1, v_2, w 分别为 Q 的边界与直线 p_1p_4、v_1p_2 和 v_2p_3 的交点。存在一个嵌套在 P_t 和 Q 之间的三角形 Δ，当且仅当直线 p_1v_1 和 v_2p_3 在 Q 内相交。为了证明不存在这样的三角形，我们研究点 w 随着 p_1 沿边 q_1q_2 移动时的移动情况。



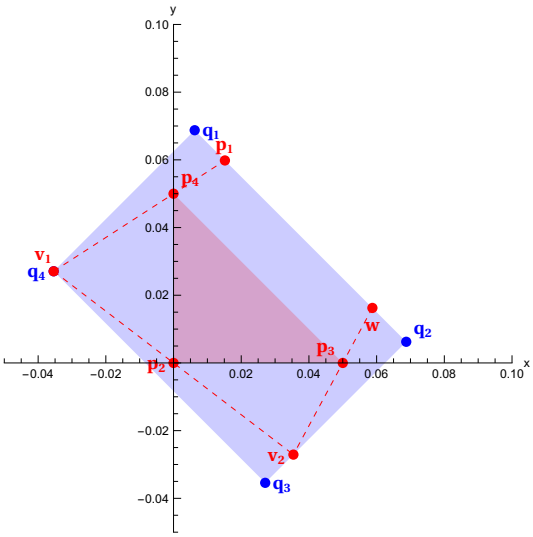
(a) 配置 1



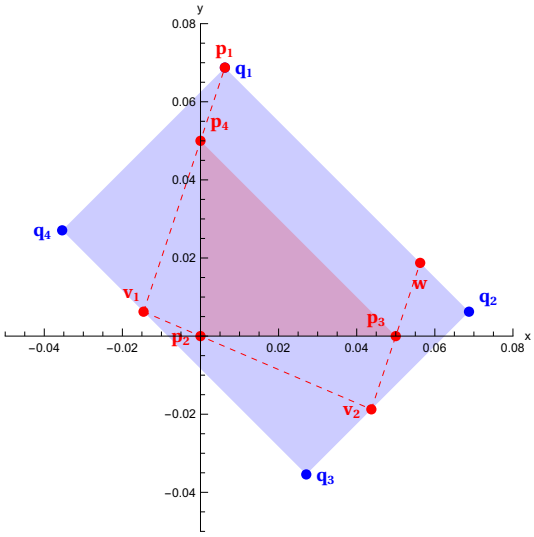
(b) 配置 2



(c) 配置 3



(d) 配置 4



(e) 配置 5

图 2：定理5.7中的临界构型。

只要 v_1、 v_2 和 w 各自沿着一条固定的边移动，当 p_1 从 q_2 移动到 q_1 时，就会使 v_1、 v_2 和 w 分别沿着各自的边单调移动。因此，只需考虑以下情形： p_1 位于 q_1q_2 的一个端点，或者 v_1、 v_2、 w 中的一个改变边。我们将这类情形称为临界构型。如果在任何一个临界构型中， w 位于 p_1的顺时针方向，那么当 p_1 处于 q_1q_2上的任意位置时，情况也都如此，因为随着 p_1 从 q_2 移动到 q_1， w 会单调移动。在这种情况下，无论 p_1沿着边 q_1q_2处于什么位置， P_t 和 Q 之间都不存在嵌套的三角形 Δ 。

首先，假设 $p_1 = q_2$。在这种情况下， w 位于边 q_2q_3 上，如图 2a 所示。当顶点 p_1 沿着边 q_1q_2 移动时，下一个临界构型出现在顶点 w 从面 q_2q_3移动到 Q的 q_1q_2时。这发生在 $p_1 = \left(\frac{3}{160}, \frac{9}{160}\right)$ 时，如图2b所示。第二个临界构型出现在 $p_1 = \left(\frac{13}{800}, \frac{47}{800}\right)$时；此时， Δ 的顶点 v_2从 Q 的边 q_3q_4 移动到边 q_2q_3。如图2c所示。图2d展示了下一个构型；当到达点 $p_1 = \left(\frac{17}{1120}, \frac{67}{1120}\right)$ 时，顶点 v_1 从边 q_1q_4 移动到 q_3q_4。最后，图2e展示了 p_1 到达 Q的顶点 q_1时的构型。在这些情形中，直线 p_1v_1 和 v_2p_3 在 Q 之外相交，因此 P_t 和 Q之间不存在嵌套的三角形。

接下来，我们考虑这样的三角形： Δ Δ 中有多于一个点位于边 q_1q_2上。特别地，边 q_1q_2 的一条线段是 Δ的一条边。如果在 P_t与 Q 之间嵌套着一个三角形，且其一条线段位于边 q_1q_2上，那么在 P_t 与 Q 之间嵌套着一个三角形，其中 Q的整条边 q_1q_2 是 Δ的一条边。如果在 P_t 与 Q 之间嵌套着一个三角形，且 Q 的整条边 q_1q_2 是 Δ的一条边，那么存在一个三角形，其边包含 q_1p_4 和 q_2p_3。对应于此情形的最小三角形如图3所示，它不包含于 Q中。

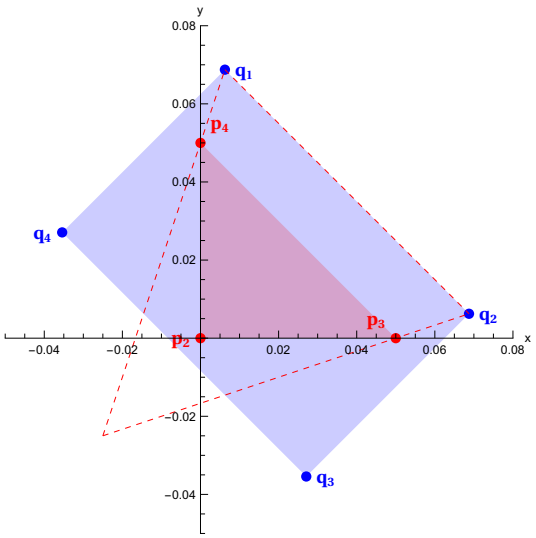


图3：以 q_1q_2 为一条边的三角形。

因此，我们得出结论：无论顶点 p_1的位置如何，都不存在一个嵌套于 P_t 与 Q 之间的三角形 Δ 。因此，将 M_E 补全为非负矩阵的秩-3补全，其非负秩都不可能为非负秩-3。

5.3 缺失的条目 $(1,\ 1)$ 和 $(2,\ 2)$

在本小节中，我们研究非负秩3 补全的几何，其中部分非负4×4矩阵的条目 $(1,1)$ 和 $(2,2)$ 缺失。我们证明，3 秩补全 M_E对应于 $P_t \subseteq Q_t$ 中的一族嵌套多胞体 $\mathbb{R}^2$，其中外多边形的三个面 Q_t和内多边形的三个顶点 P_t 固定，而 Q_t剩余面的移动取决于 P_t剩余顶点的移动。在定理 5.8中，我们给出此类部分矩阵存在非负秩3 补全的充分条件。在定理 5.9中，我们举例说明，一个部分非负矩阵存在一个秩3 补全，该补全是非负的，但不存在非负秩3 补全。

考虑一个部分非负矩阵

$$M_E = \begin{pmatrix} ? & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & ? & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^E_{\geq 0},$$

其中，最大观测子矩阵$M_{134,\ 234}$ 和 $M_{234,\ 134}$ 的秩均为三。我们将构造一个秩-3补全的秩三分解 AB 。定义

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} m_{21} & b & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

其中 a_{11}， a_{12}， a_{13}， $b \in \mathbb{R}$ 为待定量。我们假设 rank($M_{234,\ 34}$) $= 2$ 且 rank($M_{34,\ 234}$) =2。

A的第一行 $a_1 =$(a_{11}， a_{12}， a_{13}) 和 B的第二列 $b_2 =$(b， m_{32}， m_{42}) 满足方程组

$$\begin{cases} a_1 b_2 = m_{12}, \\ a_1 b_3 = m_{13}, \\ a_1 b_4 = m_{14}. \end{cases}$$

我们可以用参数 $t \in \mathbb{R}$来表示该方程组的解：

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= \frac{\det(M_{134,234})}{m_{23}\det(M_{34,24}) - t\det(M_{34,34}) - m_{24}\det(M_{34,23})}, \\ a_{12}(t) &= \frac{t\det(M_{14,34}) - m_{42}\det(M_{12,34}) - m_{12}\det(M_{24,34})}{-(m_{23}\det(M_{34,24}) - t\det(M_{34,34}) - m_{24}\det(M_{34,23}))}, \\ a_{13}(t) &= \frac{t\det(M_{13,34}) - m_{32}\det(M_{12,34}) - m_{12}\det(M_{24,34})}{m_{23}\det(M_{34,24}) - t\det(M_{34,34}) - m_{24}\det(M_{34,23})}, \\ b(t) &= t, \end{aligned} \tag{5.3}$$

对于满足 m_{23} det(M_{34},24) $- t$det(M_{34},34) $- m_{24}$ det(M_{34},23) $\neq 0$的 t。M_E 的秩三补全为 $M_t := A_t B_t$，其中 A_t 和 B_t 由 (5.2) 中的 A 和 B 通过将 a_{11}、 a_{12}、 a_{13}、 b替换为 (5.3) 中的 $a_{11}(t)$、 $a_{12}(t)$、 $a_{13}(t)$、 $b(t)$ 得到。

每当 $M_t = A_t B_t \geq 0$ 时，分解 $A_t B_t$ 给出一对嵌套锥 $Q_t = \{x \in \mathbb{R}^3 : A_t x \geq 0\}$ 和 $P_t = \text{cone}(B_t)$。考虑所有满足 $A_t B_t \geq 0$ 的 $t \in \mathbb{R}$ 所对应的这些嵌套锥对，我们得到一个嵌套锥对的族。该族中的所有锥对都共享 Q_t 的三个面和 P_t 的三条射线。 Q_t 的剩余面的移动取决于 P_t 的剩余射线的移动。

在上述构造中，我们假设 $M_{234,\ 34}$ 和 $M_{34,\ 234}$ 的秩为二。如果 rank($M_{:,\ 34}$) =rank($M_{34,\ :}$) $= 2$, 那么可以采用与上述类似的构造，并用参数 $t \in \mathbb{R}$ 表示 a_{11}， a_{12}， a_{13}， b 。

另一方面，在 башқа k 至多为三个 c

另一方面，如果 rank($M_{:,\ 34}$) ≤ 1 或 rank($M_{34,\ :}$) ≤ 1, 则矩阵 M_E 具有非负秩由定理 2.1 和定理 5.3完成。

命题 5.8。 令 $E = [4] \times [4] \setminus \{(1,\ 1),\ (2,\ 2)\}$。设 $M_E \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$ 为一个没有零行或零列的部分非负矩阵，并设 $M_t = A_t B_t$ 为 M_E 的一个秩为3 的非负补全，其中A_t 和 B_t 如上所述。那么，如果存在 $t \geq 0$ 使得M_t 为非负， M_E 就有一个非负秩为3 的补全，并且

1. $a_{1j}(t) \geq 0$ *for all* $j = 1, 2, 3$, *or*
2. 在这三个值 $a_{11}(t)$ $a_{12}(t)$ $a_{13}(t)$中，两个为负，一个为正；或者
3. 在.....中这三个值 $a_{11}(t)$ $a_{12}(t)$ $a_{13}(t)$中，一个为负数，一个为零，一个为正数 .

证明。由于 $A_{234,:}$ 是 3×3 单位矩阵，$\hat{}\, Q_t = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ A_t x \geq 0\}$ 是由不等式 $a_1(t)x \geq 0$定义的 $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$ 子集。我们将刻画锥 $\hat{}\, Q_t$ 为单纯形锥的情形。于是，$\hat{}\, Q_t$ $\hat{}$ 本身可作为 P_t 与 Q_t 之间的单纯形锥，因此根据定理 5.2，M_t 的非负秩为 $\hat{}$ 三。由于根据假设 M_t 的秩为三，Q_t 是三维的。

第二种可能是这对应于第一种情况：对于所有 t，$a_1(t)x \geq 0$ 是冗余的，即 $a_{1j}(t) \geq \hat{0}$。

如果 $a_1(t)x \geq 0$ 是非冗余的，那么 $\hat{}\, Q_t$ 的两条射线位于超平面 $a_1(t)x = 0$ 上（其中至少一条不是 $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$ 的射线），并且还有另一条射线也是 $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$ 的射线。如果 $\hat{}\, Q_t$ 中位于超平面 $a_1(t)x = 0$ 上的两条射线不是 $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$ 的射线，那么在三个值 $a_{11}(t)$ $a_{12}(t)$ $a_{13}(t)$ 中，$\hat{}$ 两个为负，一个为正。否则，Q_t 中位于超平面 $a_1(t)x = 0$ 上的一条射线也是 $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$ 的射线，此时在三个值 $a_{11}(t)$ $a_{12}(t)$ $a_{13}(t)$ 中，一个为负，一个为零，一个为正。 □

例 5.9。本例表明，存在一个部分非负矩阵 $M_E \in \mathbb{R}^E$，其缺失项为（1，1）和（2，2），该矩阵没有非负秩-3补全，尽管它具有一个元素为非负的秩-3补全。

考虑部分矩阵

$$M_E = \begin{pmatrix} ? & 1 & 112/425 & 1 \\ 1/10 & ? & 1/100 & 7/20 \\ 1/10 & 10 & 9/10 & 3/5 \\ 4/5 & 9 & 9/100 & 1/20 \end{pmatrix}$$

一个元素为非负的 M_E 秩-3补全为 $A_t B_t$，其中

$$A_t = \begin{pmatrix} \frac{100601}{42007+153t} & \frac{12055+1306t}{42007+153t} & -\frac{3(2909+4204t)}{17(2471+9t)} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_t = \begin{pmatrix} 1/10 & t & 1/100 & 7/20 \\ 1/10 & 10 & 9/10 & 3/5 \\ 4/5 & 9 & 9/100 & 1/20 \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq t \leq \frac{4284}{9959}$。族（$A_t$，$B_t$）通过取锥 $\mathrm{cone}(B_t) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid A_t x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$，并考虑由平面 $x + y + z = 1$定义的锥的仿射截面，在 $\mathbb{R}^2$ 中定义了嵌套多胞体 $P_t \subseteq Q_t$。外多胞体 Q_t 为

$$Q_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A_t(x, y, -x - y + 1) \geq 0\}$$

其边由下式给出

$$\frac{-8727 - 12612t + (109328 + 12612t)x + (20782 + 13918t)y}{17(2471 + 9t)} \geq 0,$$
$$x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0.$$

类似地，内多胞体 P_t 为 $P_t = \text{凸包}(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)$，其中

$$p_1 = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right),\ p_2 = \left(\frac{t}{19+t}, \frac{10}{19+t}\right),$$
$$p_3 = \left(\frac{1}{100}, \frac{9}{10}\right),\ p_4 = \left(\frac{7}{20}, \frac{3}{5}\right).$$

多胞体 P_0、P_c、Q_0 和 Q_c 其中 $c = \frac{4284}{9959}$ 如图 4所示。

我们证明，对于所有 $0 \leq t \leq c$，都不存在满足 $P_t \subseteq \Delta \subseteq Q_t$ 的三角形 Δ。反设存在某个 $0 \leq \tilde{t} \leq c$，使得存在一个夹在 $P_{\tilde{t}}$ 和 $Q_{\tilde{t}}$ 之间的三角形 Δ，即 $P_{\tilde{t}} \subseteq \Delta \subseteq Q_{\tilde{t}}$。由于对所有 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq c$，都有 $P_{t_2} \subseteq P_{t_1}$ 和 $Q_{t_2} \subseteq Q_{t_1}$，因此特别有 $P_c \subseteq P_{\tilde{t}}$ 和 $Q_{\tilde{t}} \subseteq Q_0$。于是，三角形 Δ 满足 $P_c \subseteq \Delta \subseteq Q_0$。然而，利用定理 2.2 中的几何算法，我们可以通过计算证明，不存在夹在 P_c 和 Q_0 之间的三角形。相关计算可在该项目的 Git 仓库中找到。因此，不存在满足以下条件的 $t \in [0, c]$：存在一个三角形 Δ，使得 $P_t \subseteq \Delta \subseteq Q_t$。

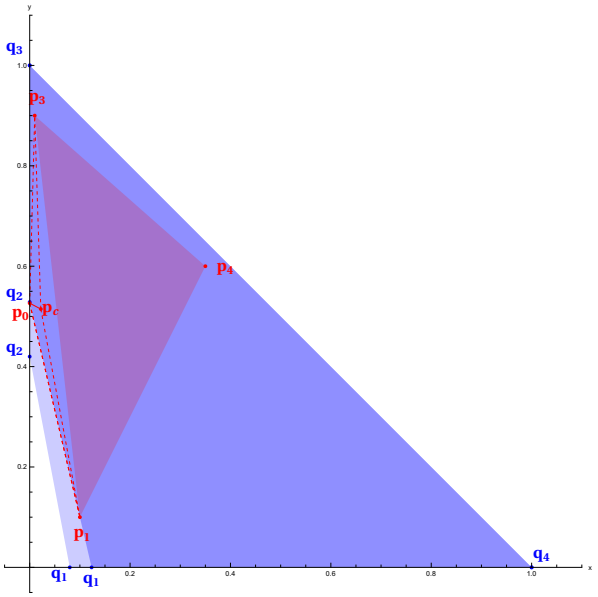


图 4：定理 P_t（红色）和 Q_t（蓝色）中的多胞体，用于 5.9 所示的取值 $t = 0$ 和 $t = c$。移动 Q_t 的边是 q_1q_2，移动 P_t 的顶点是 p_2，它沿着线段 p_0p_c移动。多胞体 Q_0（较浅蓝色）始终包含多胞体 Q_c（较深蓝色）。同样，多胞体 P_0 始终包含多胞体 P_c。

参考文献

[Ber17] Daniel Irving Bernstein。树度量与秩2矩阵的补全。线性代数及其应用，533:1–13，2017年。[CCS10] Jian-Feng Cai、Emmanuel J Candès 和 Zuowei Shen。用于矩阵补全的奇异值阈值算法。*SIAM*优化杂志，20(4):1956–1982，2010年。[CJRW89] Nir Cohen、Charles R Johnson、Leiba Rodman 和 Hugo J Woerdeman。部分矩阵补全的秩。载于戈赫伯格纪念文集：第一卷：卡尔加里会议与矩阵理论论文，第 165–185 页。施普林格，1989年。[CLO97] David Cox、John Little 和 Donal O'Shea。理想、簇与算法。施普林格，1997年。[CR93] Joel E Cohen 和 Uriel G Rothblum。非负矩阵的非负秩、分解与因子分解。线性代数及其应用，190:149–168，1993年。[CR12] Emmanuel Candes 和 Benjamin Recht。通过凸优化实现精确矩阵补全。*ACM*通讯，55(6):111–119，2012年。[Faz02] Maryam Fazel。矩阵秩最小化及其应用。斯坦福大学博士论文，2002年。[GS20] Nicola Guglielmi 和 Carmela Scalone。一种高效的非负低秩补全方法。计算数学进展，46(2):31，2020年。[HHW06] Don Hadwin、K Harrison 和 Jo Ward。部分矩阵的秩一补全与完全秩不增线性泛函。美国数学会会刊，134(8):2169–2178，2006年。[KBV09] Yehuda Koren、Robert Bell 和 Chris Volinsky。推荐系统中的矩阵分解技术。《计算机》，42(8):30–37，2009年。[KKKR17] Thomas Kahle、Kaie Kubjas、Mario Kummer 和 Zvi Rosen。秩一张量补全的几何。*SIAM*应用代数与几何杂志，1(1):200–221，2017年。

[KMO08] Raghunandan H Keshavan、Andrea Montanari 和 Sewoong Oh。从 $O(n)$个观测条目中学习低秩矩阵。载于《2008年第46届Allerton通信、控制与计算会议论文集》，第1365–1372页。IEEE，2008年。[KMO10] Raghunandan H Keshavan、Andrea Montanari 和 Sewoong Oh。基于少量条目的矩阵补全。IEEE信息论汇刊，56(6):2980–2998，2010年。[KR17] Kaie Kubjas 和 Zvi Rosen。独立性模型的矩阵补全。代数统计学杂志，8(1):1–21，2017年。[KRS15] Kaie Kubjas、Elina Robeva 和 Bernd Sturmfels。EM算法的不动点与非负秩边界。统计年鉴，第422–461页，2015年。[KT13] Franz Kiraly 和 Louis Theran。低秩矩阵补全的误差最小化估计与通用逐项误差界。神经信息处理系统进展，26，2013年。[KTT15] Franz J Király、Louis Theran 和 Ryota Tomioka。低秩矩阵补全的代数组合方法。机器学习研究杂志，16(1):1391–1436，2015年。[LFLW18] Xingjian Li、Jun Fang、Hongbin Li 和 Pu Wang。利用联合稀疏与低秩结构进行毫米波信道估计。IEEE无线通信汇刊，17(2):1123–1133，2018年。[LZL+15] Wei Li、Lei Zhao、Zhijie Lin、Duanqing Xu 和 Dongming Lu。利用低秩矩阵补全进行非局部图像修复。计算机图形学论坛，34(6):111–122，2015年。[NKS19] Luong Trung Nguyen、Junhan Kim 和 Byonghyo Shim。低秩矩阵补全：当代综述。IEEE Access，7:94215–94237，2019年。[RST20] Zvi Rosen、Jessica Sidman 和 Louis Theran。代数拟阵的应用。美国数学月刊，127(3):199–216，2020年。[SC10] Amit Singer 和 Mihai Cucuringu。通过刚性理论实现低秩矩阵补全的唯一性。SIAM矩阵分析与应用杂志，31(4):1621–1641，2010年。[SJ03] Nathan Srebro 和 Tommi Jaakkola。加权低秩近似。载于《第20届国际机器学习会议论文集（ICML-03）》，第720–727页，2003年。[SN20] Guang-Jing Song 和 Michael K Ng。非负矩阵的非负低秩矩阵近似。应用数学快报，105:106300，2020年。[TG24] Olivier Vu Thanh 和 Nicolas Gillis。最小体积非负矩阵补全。载于《2024年第32届欧洲信号处理会议（EUSIPCO）论文集》，第2452–2456页。IEEE，2024年。[TK92] Carlo Tomasi 和 Takeo Kanade。正交投影条件下从图像序列恢复形状与运动：一种因子分解方法。国际计算机视觉杂志，9:137–154，1992年。[UT19] Madeleine Udell 和 Alex Townsend。为什么大数据矩阵近似低秩？SIAM数据科学数学杂志，1(1):144–160，2019年。[Vav10] Stephen A Vavasis。非负矩阵分解的复杂性。SIAM优化杂志，20(3):1364–1377，2010年。[XYWZ12] Yangyang Xu、Wotao Yin、Zaiwen Wen 和 Yin Zhang。用于非负因子矩阵补全的交替方向算法。中国数学前沿，7(2):365–384，2012年。