arXiv:2601.07669v1 [cs.LO] 12 Jan 2026

单纯形信念*

Christian Cachin David Lehnherr Thomas Studer
2026年1月13日

摘要

近年来，人们开展了大量工作，研究模态逻辑的单纯形解释。尽管在这一背景下，（分布式）知识的概念已得到充分研究，但如何在单纯模型中对信念建模仍未有定论。我们引入多色单纯复形，它们自然地为状态赋予可信度关系。基于此，我们可以定义各种信念概念。

1 引言

由于将组合拓扑方法应用于分布式计算取得了成功， [19], 目前，模态逻辑的单纯形解释研究正蓬勃发展 [16, 17, 21, 11]。其核心是对各种单纯复形进行认知解释。设 $\mathcal{V}$ 为一个顶点集合。每个顶点对应一个智能体的局部状态，我们称该顶点具有该智能体的颜色。单纯复形（S， $\mathcal{V}$）是一对，其中 S 是 $\mathcal{V}$ 的非空子集构成的集合，并且对集合包含运算封闭。同一集合中的顶点必须具有不同的颜色；在最简单的情况下， S 的极大元素表示全局状态。如果某个智能体 a 的局部状态同时包含于两个全局状态中，那么它就无法区分这两个全局状态。因此，单纯复形为认知解释提供了充分的结构。

图1中所示的单纯复形 $\mathcal{C}_1$ 由两个世界X 和 Y 组成（分别由两个实心三角形表示），每个世界都包含全部三个智能体的局部状态。智能体 a 和 b 在 X 和Y中的局部状态相同，而 c的局部状态在两个全局状态中不同。因此， a 和b 无法区分 X 和 Y，但 c 可以。也就是说， a 和 b 始终认为这两个状态都有可能，而 c只考虑实际状态。这一概念可以推广到智能体群体。在 $\mathcal{C}_1$中， a 和 b 一起仍无法区分

*本研究由瑞士国家科学基金会（SNSF）资助。Christian Cachin 和 David Lehnherr 获得 SNSF 第 219403 号资助协议（Emerging Consensus）的支持，Thomas Studer 获得 SNSF 第 10000440 号资助协议（认知群体态度）的支持。

X 和 Y，因为它们单独也无法区分这两者；但 a和 c 可以，因为 c 能够区分 X 和 Y。最后，我们说智能体 a、b和 c 在 X 和 Y 中是存活的，因为这两个世界都包含带有它们各自颜色的顶点。

智能体 a 在状态 X 中知道公式 ϕ，当且仅当 ϕ 在其处于 X时认为可能的所有状态中都为真。因而，如果一个智能体处于存活状态，并且在状态 X中知道 ϕ，那么 ϕ 必定在 X中为真。经典分布式知识 [18]也可以类似地解释。群体 G 在状态 X 中知道 ϕ，当且仅当 ϕ 在该群体无法与 X区分的所有状态中都为真。

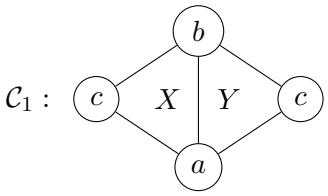

图1：一个单纯复形 $\mathcal{C}_1$，其中智能体 a 和 b无法区分世界 X 和 Y。

尽管（分布式）知识已经在这一背景下得到广泛研究，但如何在单纯复形结构上对信念进行建模仍是一个开放问题，参见 [10, 第4节。3], 不同于知识，智能体相信 ϕ 并不意味着 ϕ在实际全局状态中为真。乍看之下，与其他模型中的做法一样，可以通过放弃智能体必须将实际状态视为可能状态这一要求来实现这种行为。然而，在单纯复形情形下，一个存活的智能体总会将实际全局状态视为可能状态，因为该状态包含其局部状态。因此，不能放弃这一性质。

克服这一问题的一种方法是引入信念函数 [11]。智能体的信念函数 f_a 将一个状态 X映射到另一个状态 Y，前者中 a存活，后者中 a 也存在。当且仅当智能体 a 在X 中知道公式 ϕ ϕ 时，它才在 f_a中相信该公式（X）。因此，如果$f_a(X) = X$，信念就会转变为知识。在图 2 所示的模型 $\mathcal{C}_2$ 中，X 被映射到 Y，而 a 相信 c 在当前全局状态中并未存活，也就是说，它错误地相信 c已不复存在。这种方法的缺点是：*i*) 信念没有考虑模型的拓扑；*ii*) 知蕴含信原则，即知道 ϕ意味着相信 ϕ，没有有意义的解释。

本文提出并阐释多色单纯复形，即相邻顶点可以具有相同颜色的复形，并将其视为单纯模型。这类模型具有一种信念概念，满足上述两个条件。本研究所探讨的信念基于状态的可信度，而非仅仅基于其可能性。也就是说，当且仅当公式 ϕ 在智能体认为足够可信的所有状态中都为真时，智能体才相信该公式

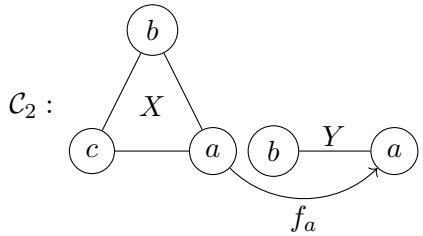

图 2：尽管处于 X 中，智能体 a 认为实际世界是 Y。因此， a错误地相信 c 已经死亡。

。由于实际全局状态未必包含在这些状态之中，智能体的信念可能是错误的。

我们首先根据状态中颜色的重数定义状态之间的可信度关系。如果智能体 a 的颜色在状态 X 中的重数小于或等于其在状态 Y 中的重数，那么 a 认为 X 至少与 Y 同样可信。如果将顶点解释为信念状态，那么对我们所定义关系的一种可能解读是：智能体 a 认为具有较少信念替代项的世界更为可信。由于该关系是良基预序，我们可以使用可信度模型 [3, 4] 的相关理论来定义各种信念概念，例如 安全信念 和 最可信信念。

最可信信念是一种有用的信念概念。当且仅当命题 ϕ 在智能体认为最可信的那些世界中为真时，智能体 a 最可信地相信 ϕ。这种信念适用于分布式计算中的推理 [7], ：智能体根据以极高概率成立的保证采取行动，也就是说，它们所处的状态是最可信的状态。例如，在通过经过身份验证的链路进行通信时，最可信的情况是：如果 Alice 通过此类链路从 Bob 收到一条消息 m，那么该消息实际上是由 Bob 发送的，而不是由冒名者发送的。我们的单纯模型能够对这种信念进行建模，同时将模型的拓扑纳入考虑。图 3 中的复形 $\mathcal{C}_3$ 描述了与 $\mathcal{C}_2$ 相同的情况，但不包含信念函数。当处于 X 中时， a 认为 Y 比 X 更可信，因为它在 X 中的重数为 2，而在 Y 中仅为 1。在这种情况下， a 认为 Y 是最可信的世界。此外，由于 c 不存在于 Y 中， a 相信 c 已经死亡。因此，智能体的最可信信念可能是错误的。还可以直接验证，这一信念概念满足知蕴含信原则。

我们在本引言的最后，简要地将我们的方法与另一种尚未探索的、用于在单纯复形结构上建模信念的方法进行比较；该方法在 [10, 第4.3节3]中有所提及。其思路是允许同色顶点之间存在边，从而引入距离度量。然而，重要的是，这些边不作认知解释。 a-距离指的是

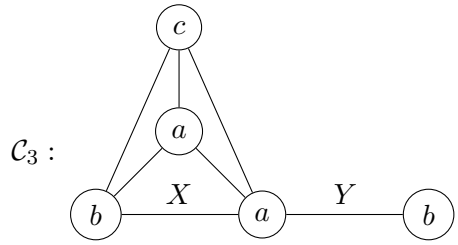

图 3：一个多色单纯复形，它在没有信念函数的情况下，对与 $\mathcal{C}_2$ 相同的情形进行建模。

两个全局状态 X 和 Y 之间最短 a-路径的长度。通往某个全局状态的路径越短，该状态就越可信。例如，考虑图4中的 $\mathcal{C}_4$ 。当处于 X时， a 认为 Y 比 Z更可信。虽然这种解释考虑了拓扑信息，但它无法建模错误信念，因为智能体总是将实际世界视为最可信的世界。

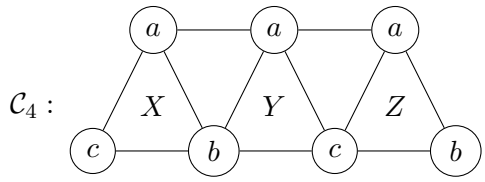

图4：使用单色边来表示世界之间的距离 。例如，当处于 X 时， a 认为 Y 比 Z 更可信，因为从 X 到 Y 的 a- 路径比从 X 到 Z 的 a- 路径更短。

我们在第2节概述单纯模型理论。在第3节中，我们介绍多色模型，并阐述其中不同的信念概念。接下来，我们在第4节分析模型中的知识与信念增益。在第5节中，我们讨论模型的其他可能语义，最后在第6节总结本文。

2 单纯知识

我们简要回顾单纯复形 [16, 17, 11] 上分布式知识的标准定义。在下一节中，我们将对其进行扩展，以纳入信念概念。

设 Ag 为由有限多个智能体组成的集合，Prop 为可数的原子命题集合。我们通过以下归纳文法定义关于 Ag

和 Prop 的知识语言：

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid [\sim]_G\phi$$

其余布尔联结词按通常方式定义。特别地，对于某个固定的 $p \in$ 命题集，我们定义 $\phi \vee \psi := \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ 和 $\bot := p \wedge \neg p$。我们用 alive(G) 表示 $\neg[\sim]_G\bot$，用 dead(G) 表示 $[\sim]_G\bot$。

定义 1. 设 $\mathcal{V}$ 是一个顶点集合。若 $C = (S, \mathcal{V})$ 满足 $S \subseteq$ 幂集$(\mathcal{V}) \setminus \{\emptyset\}$，则称其为一个单纯复形，如果

$$for\ each\ X \in S\ and\ each\ \emptyset \neq Y \subseteq X,\ we\ have\ Y \in S.$$

备注 1. 单纯复形的标准定义（参见 *[19]*）要求每个顶点的单元素集合都是 S的元素。不作此要求纯粹只是形式上的区别。

我们将 S 的元素称为面。在包含关系下极大的面称为极大面。我们用 $\mathcal{F}(C)$ 表示 C 的极大面集合。着色 是一个映射 $\chi\colon \mathcal{V} \to$ 智能体集。若着色为每个面中的每个顶点都赋予不同的值，则称其为适当的 。我们用 $\chi(U)$ 表示集合 $\{\chi(u) \mid u \in U\}$。

定义 2. 设 $C = (S, \mathcal{V})$ 是一个单纯复形。一个单纯模型是一个四元组 $\mathcal{C} = (C, \chi, W, \ell)$，其中

1. C 是一个单纯复形；*2.* $\chi : \mathcal{V} \to$ 智能体集 是一个适当的着色；*3.* $\mathcal{F}(C) \subseteq W \subseteq S$ 是一个世界集合；*4.* $\ell : W \to$ 幂集(命题集) 是一个赋值。

备注 2. 定义 *2* 并非完全遵循标准，并由 *Goubault* 等人 *[15]* 进行了研究。此外，值得一提的是，定义 *2* 中的赋值 ℓ 将命题赋给任意面，而不仅仅是顶点。

给定一个单纯模型，智能体群 $G \subseteq$ Ag 无法区分两个世界 $X, Y \in W$，记作 $X \sim_G Y$，当且仅当 $G \subseteq \chi(X \cap Y)$。我们称 $\sim_G$ 为认知不可区分关系。若要指出我们所考虑的关系 $X \sim_G Y$所属的单纯复形 $\mathcal{C}$，则使用记号 $X \sim_G^{\mathcal{C}} Y$。如果 G 只包含单个智能体 a，则分别用 $X \sim_a Y$ 和 $[\sim]_a$ 代替 $X \sim_{\{a\}} Y$ 和 $[\sim]_{\{a\}}$。

值得注意的是，$[\sim]_G$ 是智能体群体 G 的分布式知识这一通常概念，其语义由群体成员的个体不可区分关系的交集给出（参见 [18]）。

定义 3. 对于单纯模型 $\mathcal{C} = (C, W, \chi, \ell)$、世界 $X \in W$和公式 $\phi \in \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$，我们通过归纳定义关系 $\mathcal{C}, X \Vdash \phi$：

$$\begin{array}{lll} \mathcal{C}, X \Vdash p & \textit{iff} & p \in \ell(X) \\ \mathcal{C}, X \Vdash \neg\phi & \textit{iff} & \mathcal{C}, X \nVdash \phi \\ \mathcal{C}, X \Vdash \phi \wedge \psi & \textit{iff} & \mathcal{C}, X \Vdash \phi \textit{ and } \mathcal{C}, X \Vdash \psi \\ \mathcal{C}, X \Vdash [\sim]_G \phi & \textit{iff} & X \sim_G Y \textit{ implies } \mathcal{C}, Y \Vdash \phi \textit{ for all } Y \in W. \end{array}$$

我们称智能体 a 在世界 X 中存活，当且仅当 $a \in \chi(X)$。群体 $G \subseteq$Ag 存活的世界集合定义为

$$\mathsf{Alive}_{\mathcal{C}}(G) = \{X \in W \mid G \subseteq \chi(X)\}.$$

容易证明，$\sim_G$ 是一个部分等价关系。我们有如下引理。

引理 1。设 $\mathcal{C} = (C, \chi, W, \ell)$ 是一个单纯模型。对于每个 $G \subseteq$ 智能体集，关系 $\sim_G$ 在存活$_{\mathcal{C}}(G)$上是一个等价关系，在其他情况下为空。

3 单纯形信念

现在，我们取消单纯模型的着色必须是正规的这一要求。由此得到的模型称为多色模型。我们将为多色模型的状态定义一个良基预序，作为可信度关系 [3, 4]。这样便可以在单纯模型上解释各种信念概念。

很容易验证，引理 1 对多色模型并不成立，因为 $\sim_G$ 不一定是传递的。事实上，考虑顶点集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 以及一个由以下世界构成的模型

$$X := \{0, 1\}, \quad Y := \{1, 2\}, \quad \text{and} \quad Z = \{2, 3\}$$

采用一种着色 χ，将相同的智能体 a 分配给所有顶点。我们发现$X \sim_a Y$ 和 $Y \sim_a Z$，但不包括 $X \sim_a Z$。为了重新确立 $\sim_G$的传递性，我们必须要求，对于任意三个世界 X、Y、$Z \in W$ 以及任意智能体群 $G \subseteq$命题集：

$$G \subseteq \chi(X \cap Y) \text{ and } G \subseteq \chi(Y \cap Z) \text{ implies } G \subseteq \chi(X \cap Z). \qquad (\star)$$

定义 4。多色模型 是满足以下条件的单纯模型：

1. 着色不要求是正常的；
2. 条件 $(\star)$成立。

要求条件（$\star$）类似于在某些克里普克模型中要求传递可达关系。

参见定义 5，面内某种颜色的重数会为每个智能体 a 在世界上导出一个良基关系 $\leq_a$。我们称之为（先验）可信度关系。

定义 5。 设 (C, χ, W, ℓ) 是一个多色模型。我们将世界 X 中 $a \in$智能体集 的重数 定义为

$$m_a(X) = |\{v \in X \mid \chi(v) = a\}|$$

其中 $|\cdot|$ 表示集合的基数。注意，如果智能体 a 在世界 X中存活，那么 $m_a(X) \geq 1$。对于 X、$Y \in W$ 和 $a \in$ 智能体集，我们记作

$$X \leq_a Y \quad \textit{iff} \quad m_a(X) \leq m_a(Y).$$

接下来，我们引入局部可信度关系

$$\trianglelefteq_a \ := \leq_a \cap \sim_a,$$

它刻画给定状态下智能体的可信度关系。此外，我们记作

$$X \geq_a Y \quad \text{iff} \quad m_a(X) \geq m_a(Y)$$

并以显而易见的方式使用 $\trianglerighteq_a$ 和 $\triangleleft_a$。下面的引理表明，不可区分关系可以用局部可信度关系来表示。

引理 2。 $\sim_a = \trianglelefteq_a \cup \trianglerighteq_a$。

证明。 注意到 $\leq_a$ 是强连通的，展开定义可得

$$\sim_a = (\leq_a \cup \geq_a) \cap \sim_a = (\leq_a \cap \sim_a) \cup (\geq_a \cap \sim_a) = \trianglelefteq_a \cup \trianglerighteq_a. \qquad \square$$

由关系 $\trianglerighteq_a$，我们得到相应的模态算子 $[\trianglerighteq]_a$，文献中称其为安全信念 [4]（有时也称为可撤销知识 [2]）。我们的知识与信念语言 $\mathcal{L}_{\mathcal{KB}}$ 通过为每个智能体 $a \in \mathsf{Ag}$ 添加模态算子 $[\trianglerighteq]_a$ 来扩展 $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$。其归纳定义如下：

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid [\sim]_G \phi \mid [\trianglerighteq]_a \phi$$

其中 $p \in$命题集和 $G \subseteq$ 智能体集。通常，安全信念的对偶定义为 $\langle\trianglerighteq\rangle_a \varphi \equiv \neg[\trianglerighteq]_a \neg\varphi$。

定义 6. 对于多色模型 $\mathcal{C} = (C, \chi, W, \ell)$、世界 $X \in W$ 和公式 $\phi \in \mathcal{L}_{\mathcal{KB}}$，我们通过归纳定义关系 $\mathcal{C}, X \Vdash \phi$：

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{C}, X \Vdash p & \textit{iff} & p \in \ell(X) \\
\mathcal{C}, X \Vdash \neg\phi & \textit{iff} & \mathcal{C}, X \nVdash \phi \\
\mathcal{C}, X \Vdash \phi \wedge \psi & \textit{iff} & \mathcal{C}, X \Vdash \phi \ \textit{and}\ \mathcal{C}, X \Vdash \psi \\
\mathcal{C}, X \Vdash [\sim]_G \phi & \textit{iff} & X \sim_G Y \quad \textit{implies} \quad \mathcal{C}, Y \Vdash \phi, \textit{ for all } Y \in W \\
\mathcal{C}, X \Vdash [\trianglerighteq]_a \phi & \textit{iff} & X \trianglerighteq_a Y \quad \textit{implies} \quad \mathcal{C}, Y \Vdash \phi, \textit{ for all } Y \in W.
\end{array}
$$

存活智能体的 $[\trianglerighteq]_a$-模态满足 S4.2 原理。

引理 3. 以下公式均有效：

1. $[\trianglerighteq]_a(\phi \to \psi) \to ([\trianglerighteq]_a\phi \to [\trianglerighteq]_a\psi)$;
2. $\mathsf{alive}(a) \to ([\trianglerighteq]_a\phi \to \phi)$;
3. $[\trianglerighteq]_a\phi \to [\trianglerighteq]_a[\trianglerighteq]_a\phi$;
4. $\langle\trianglerighteq\rangle_a[\trianglerighteq]_a\phi \to [\trianglerighteq]_a\langle\trianglerighteq\rangle_a\phi$.

证明。 我们只证明最后一个结论。假设

$$\mathcal{C}, X \Vdash \langle\trianglerighteq\rangle_a[\trianglerighteq]_a\phi.$$

存在 Z，使得 $X \trianglerighteq_a Z$ 且

$$\mathcal{C}, Z \Vdash [\trianglerighteq]_a\phi. \tag{1}$$

由 $X \trianglerighteq_a Z$ 可知， a 在 Z 中存活，因此 $Z \trianglerighteq_a Z$。于是，根据 (1)

$$\mathcal{C}, Z \Vdash \phi. \tag{2}$$

任取 Y，使得 $X \trianglerighteq_a Y$。由 $(\star)$，可得 $Y \sim_a Z$。因此，根据引理 2，得到 $Z \trianglerighteq_a Y$ 或 $Y \trianglerighteq_a Z$。在第一种情况下，我们用 (1) 得到$\mathcal{C}, Y \Vdash \phi$。此外，由 $X \trianglerighteq_a Y$可得 $Y \trianglerighteq_a Y$，因此

$$\mathcal{C}, Y \Vdash \langle\trianglerighteq\rangle_a\phi. \tag{3}$$

在第二种情况下，（3）可由（2）立即推出。由于 Y 对于 $X \trianglerighteq_a Y$ 是任意的，（3）意味着 $\mathcal{C}$， $X \Vdash [\trianglerighteq]_a\langle\trianglerighteq\rangle_a\phi$。 □

与可信度模型中的通常情况一样，我们不仅可以定义安全信念，也可以定义其他信念概念。我们首先定义最可信世界的集合。

定义 7。 令 $\mathcal{C} =$（C、 χ、 W、 ℓ）为一个多色模型。对于 $X \in W$，我们定义

$$\mathsf{Min}_{\trianglelefteq_a}(X) = \{Y \in W \mid Y \sim_a X \ \textit{and}\ \nexists Z \in W. Z \triangleleft_a Y\}.$$

注意，一般而言，由于 $\leq_a$ 是良基的，当智能体a 在世界 X中存活时，$\mathsf{Min}_{\lhd_a}(X) \neq \emptyset$ 。

图5中的模型 $\mathcal{C}_5$ 展示了一个有两个极小世界的情形。也就是说，我们有 Y，$Z \in \mathsf{Min}_{\lhd_a}(X)$。此外，以下关系成立： $Y \lhd_a X$、 $Z \lhd_a X$、 $Z \trianglelefteq_a Y$ 和 $Y \trianglelefteq_a Z$。

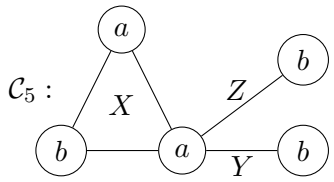

图5：一个有两个极小世界的多色模型。

下面关于极小世界的引理将会派上用场。

引理 4. 设 $\mathcal{C} = (C, \chi, W, \ell)$ 是一个多色模型， $X \in W$，且$Y \trianglelefteq_a X$。对于每个 $Z \in \mathsf{Min}_{\lhd_a}(X)$，都有 $Z \trianglelefteq_a Y$。

证明。 由 $Y \trianglelefteq_a X$ 可得 $X \sim_a Y$。令 $Z \in \mathsf{Min}_{\lhd_a}(X)$。根据定义，这意味着

$$\nexists V \in W. V \lhd_a Z \tag{4}$$

且 $X \sim_a Z$。由于 $\sim_a$ 是一个部分等价关系，我们得到 $Z \sim_a Y$。反设 $Z \trianglelefteq_a Y$ 不成立。由于 $Z \sim_a Y$ 成立，我们必有 $Z \not\leq_a Y$ ，因而 $Y <_a Z$。因此， $Y \lhd_a Z$。这与 (4) 矛盾，于是得出 $Z \trianglelefteq_a Y$。 □

在上述引理中，我们可以令 Y 为 X。于是得到以下实例：

$$Z \in \mathsf{Min}_{\trianglelefteq_a}(X) \quad \text{implies} \quad Z \trianglelefteq_a X. \tag{5}$$

现在，我们为语言 $\mathcal{L}_{\mathcal{KB}}$中的每个智能体 a 引入一个新的模态 $\mathcal{B}_a$ 。我们将 $\mathcal{L}_{\mathcal{KB}}$ 的真值定义扩展如下。

定义 8. 对于一个多色模型 $\mathcal{C} = (C, \chi, W, \ell)$、一个世界 $X \in W$和一个公式 $\phi \in \mathcal{L}_{\mathcal{KB}}$，我们定义

$$\mathcal{C}, X \Vdash \mathcal{B}_a\varphi \textit{ iff } \quad Y \in \mathsf{Min}_{\trianglelefteq_a}(X) \textit{ implies } \mathcal{C}, Y \Vdash \varphi \quad \textit{for all } Y \in W.$$

模态 $\mathcal{B}_a$ 刻画了智能体 a的（最可信的）信念。众所周知， $\mathcal{B}_a$ 可以用 $[\trianglerighteq]_a$模态 [4, 22]来表示。在我们的设定中，有如下定理。

定理1. 设 $\mathcal{C} = (C, \chi, W, \ell)$ 是一个多色模型， a 是一个智能体，且$X \in W$ 满足 a 在 X中存活。我们发现

$\mathcal{C}, X \Vdash \mathcal{B}_a\varphi$ 当且仅当 $\mathcal{C}, X \Vdash \langle\trianglerighteq\rangle_a[\trianglerighteq]_a\varphi$。

证明. 对于从右到左的方向，我们假设 $\mathcal{C}, X \Vdash \langle\trianglerighteq\rangle_a[\trianglerighteq]_a\varphi$。因此，存在 Y，使得 $X \trianglerighteq_a Y$ 且 $\mathcal{C}, Y \Vdash [\trianglerighteq]_a\varphi$。现在考虑任意一个 $Z \in \mathrm{Min}_{\trianglelefteq_a}(X)$。根据引理 4，我们发现 $Y \trianglerighteq_a Z$，因此$\mathcal{C}, Z \Vdash \varphi$。由此可得 $\mathcal{C}, X \Vdash \mathcal{B}_a\varphi$。

对于从左到右的方向，由于智能体 a 存活，我们有 $X \sim_a X$。因此，$\mathrm{Min}_{\trianglelefteq_a}(X)$ 非空，令 $Y \in \mathrm{Min}_{\trianglelefteq_a}(X)$。由 (5)，可得 $Y \trianglelefteq_a X$。接下来只需证明 $\mathcal{C}, Y \Vdash [\trianglerighteq]_a\varphi$。设 $Z \in W$ 满足$Z \trianglelefteq_a Y$。那么，由 $\sim_a$的传递性可得 $Z \sim_a X$。现在我们发现 $Z \in \mathrm{Min}_{\trianglelefteq_a}(X)$；否则，就会有 $V \in W$ 满足 $V \triangleleft_a Z$，由此推出 $V \triangleleft_a Y$，进而与 $Y \in \mathrm{Min}_{\trianglelefteq_a}(X)$ 矛盾。根据 $Z \in \mathrm{Min}_{\trianglelefteq_a}(X)$ 以及假设$\mathcal{C}, X \Vdash \mathcal{B}_a\varphi$，可得 $\mathcal{C}, Z \Vdash \varphi$，从而完成证明。 □

注 3. 该定理的一个推论是，$\mathcal{B}_a$-模态的性质可由 $[\trianglerighteq]_a$ 的性质推出，例如引理 *3* 中给出的性质。因此，我们得到

$$\mathcal{B}_a\phi \wedge \mathcal{B}_a\psi \to \mathcal{B}_a(\phi \wedge \psi).$$

是有效的。

我们的模型满足知识蕴含信念原则。特别地，我们有以下引理。

引理 5. 设 $\mathcal{C} = (C, \chi, W, \ell)$ 是一个多色模型，且 $X \in W$。对于任意智能体 a 和任意公式 φ，我们有

$$\mathcal{C}, X \Vdash [\sim]_a\varphi \to [\trianglerighteq]_a\varphi \quad and \quad \mathcal{C}, X \Vdash [\trianglerighteq]_a\varphi \to \mathcal{B}_a\varphi.$$

证明。 对于第一个断言，假设

$$\mathcal{C}, X \Vdash [\sim]_a\varphi. \tag{6}$$

设 $X \trianglerighteq_a Y$，即 $X \sim_a Y$和 $X \geq_a Y$。由 (6) 立即得到 $\mathcal{C}, Y \Vdash \varphi$，从而 $\mathcal{C}, X \Vdash [\trianglerighteq]_a\varphi$。

对于第二个论断，假设

$$\mathcal{C}, X \Vdash [\trianglerighteq]_a\varphi. \tag{7}$$

任取 $Y \in \mathrm{Min}_{\trianglelefteq_a}(X)$。利用 (5)，我们得到 $Y \trianglelefteq_a X$。现在 $\mathcal{C}, Y \Vdash \varphi$可由 (7) 立即推出，从而得到 $\mathcal{C}, X \Vdash \mathcal{B}_a\varphi$。 □

与基于偏好的语义一样，我们的模型是非单调的。也就是说，智能体在获取新信息时可能会放弃原有信念。

例1. 考虑集合 $\mathcal{V} = \{1,2,3,4\}$，并设 $C = (S, \mathcal{V})$ 和$C^{\psi} = (S^{\psi}, \mathcal{V})$ 为如下给出的单纯复形

$$S = (\mathsf{Pow}(\{1,2,3\}) \cup \mathsf{Pow}(\{3,4\})) \setminus \{\emptyset\} \ \textit{and}\ S^{\psi} = \mathsf{Pow}(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\}.$$

此外，令 $X = \{1,2,3\}$ 和 $Y = \{3,4\}$。我们定义模型

$$\mathcal{C} = (C, \chi, \{X, Y\}, \ell\}) \ \textit{and}\ \mathcal{C}^{\psi} = (C^{\psi}, \chi, \{X\}, \ell^{\psi}).$$

着色 χ 定义如下

1. $\chi(1) = \chi(3) = a$;
2. $\chi(2) = \chi(4) = b$.

图 6 展示了这些着色复形。我们选择赋值 ℓ，使得对于某些命题公式 ψ、$\phi \in \mathcal{L}_{\mathcal{KB}}$:

$$\mathcal{C}, X \Vdash \neg\phi \wedge \psi \quad \textit{and} \quad \mathcal{C}, Y \Vdash \phi \wedge \neg\psi$$

并定义 $\ell^{\psi}(X) = \ell(X)$。模型 $\mathcal{C}^{\psi}$ 表示智能体集 $\mathcal{C}$ 中的智能体得知 ψ 为真之后的情形。也就是说，它与 $\mathcal{C}$ 相同，只是去掉了 ψ 为假的那些世界。我们观察到

$$\mathcal{C}, X \Vdash \mathcal{B}_a\phi \quad \textit{and} \quad \mathcal{C}^{\psi}, X \nVdash \mathcal{B}_a\phi.$$

因此，在得知 ψ之前， a 只相信 ϕ 。这是因为从 $\mathcal{C}$ 中移除世界，可能会使一个新的世界成为最可能的世界。

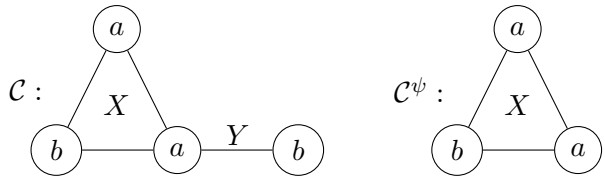

图 6：多色复形 $\mathcal{C}^{\psi}$ 表示智能体集 $\mathcal{C}$ 中的智能体得知 ψ 为真之后的事态。

如果不同世界至少能被一个智能体区分，那么该模型就称为适当。适当着色的单纯模型是适当的（参见 [15]）。形式上，这可表示为

$$\mathsf{alive}(G) \wedge \mathsf{dead}(G^c) \wedge \varphi \to [\sim]_G(\mathsf{dead}(G^c) \to \varphi) \tag{8}$$

是有效的，其中 G^c 表示 G的补集。引理 6 表明，对于多色模型而言，这一结论不再成立。

引理 6. 多色模型并不恰当，即(8)无效。

证明。 考虑以下反例。令 $C = (S, \mathcal{V})$ 为如下单纯复形:

$$\mathcal{V} = \{1, 2, 3\} \quad \text{and} \quad S = \mathsf{Pow}(\mathcal{V}) \setminus \{\emptyset\}.$$

令 a, b 为智能体。我们设

$$\chi(1) := \chi(2) := a \quad \text{and} \quad \chi(3) := b.$$

可能世界集合 W 仅包含两个世界 $X := \{1, 2, 3\}$ 和 $Y := \{1, 3\}$。赋值满足 $\ell(X) := \{p\}$，且 $\ell(Y) := \emptyset$。

令 $\mathcal{C} := (C, \chi, W, \ell)$。对于 $G = \{a, b\}$，我们发现

$$\mathcal{C}, X \Vdash \mathsf{alive}(G) \wedge \mathsf{dead}(G^c) \wedge p.$$

然而，我们有 $X \sim_G Y$ 和 $\mathcal{C}, Y \Vdash \mathsf{dead}(G^c) \wedge \neg p$。因此

$$\mathcal{C}, X \nVdash [\sim]_G(\mathsf{dead}(G^c) \to p).$$

因此，（8）在多色模型上并非有效。 □

4 知识获取

认知单纯模型的一个重要结果是，智能体无法沿着单纯模型的态射获得新知识。在分布式计算中，这一性质对于证明某些态射不存在至关重要，而这意味着某些计算任务无法求解。

我们将 [16] 中的态射概念调整到模型包含世界集合的情形。我们的模型是多色模型这一事实并不影响态射的定义。通常，给定一个函数 f: $U \to V$ 和一个集合 $W \subseteq U$，我们令

$$f(W) := \{f(x) \mid x \in W\}.$$

定义 9。 设 $C = (S, \mathcal{V})$ 和 $C' = (S', \mathcal{V}')$ 是两个单纯复形。从 C 到 C' 的一个单纯映射 是一个函数 f: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$，满足: 若 $X \in S$，则 $f(X) \in S'$。

定义 10。 设 $C = (S, \mathcal{V})$ 和 $C' = (S', \mathcal{V}')$ 是两个单纯复形，并设 $\mathcal{C} = (C, \chi, W, \ell)$ 和 $\mathcal{C}' = (C', \chi', W', \ell')$ 是两个多色模型。从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}'$ 的态射 是一个函数 f，满足

1. f 是从 C 到 C'的单纯映射;
2. $\chi'(f(v)) = \chi(v)$ *for all* $v \in \mathcal{V}$;

3. $f(X) \in W'$ 对所有 $X \in W$;

4. $\ell'(f(X)) = \ell(X)$ 对所有 $X \in W$ 均成立。

态射保持不可区分关系。我们有如下引理。

引理 7. 设 $C = (S, \mathcal{V})$ 和 $C' = (S', \mathcal{V}')$ 是两个单纯复形，且 $\mathcal{C} = (C, \chi, W, \ell)$ 和 $\mathcal{C}' = (C', \chi', W', \ell')$ 是两个多色模型，f 是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}'$ 的一个态射。对于 X, $Y \in W$，我们有

$$X \sim_G^{\mathcal{C}} Y \quad implies \quad f(X) \sim_G^{\mathcal{C}'} f(Y).$$

证明。假设 $G \subseteq \chi(X \cap Y)$，并令 a 为 G 的一个元素。存在 $v \in \mathcal{V}$，使得 $v \in X$, $v \in Y$，且 $\chi(v) = a$。我们发现 $f(v) \in f(X), f(v) \in f(Y)$，并且 $\chi'(f(v)) = a$。因此，$a \in \chi'(f(X) \cap f(Y))$。 □

正公式是指 $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ 中算子 $[\sim]_G$ 仅出现在正位置的公式。形式化地说，我们使用如下定义。

定义 11。 我们考虑以下文法：

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi$$
$$\psi ::= \phi \mid \psi \wedge \psi \mid \psi \vee \psi \mid [\sim]_G \psi$$

其中 $p \in$ 命题集 和 $G \subseteq$ 智能体集。由 ψ 给出的公式称为正公式。

关于无知识增益的结果是标准的 [16]。注意，我们处于智能体可能崩溃的环境中。然而，由于我们将原子变量赋予世界（而不是智能体的局部状态），因此可以在以下定理中采用正公式的通常表述。此外，我们使用多色模型这一事实并不影响结果。

定理 2。 设 $\mathcal{C} = (C, \chi, W, \ell)$ 和 $\mathcal{C}' = (C', \chi', W', \ell')$ 是两个多色模型，且 f 是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}'$ 的态射。此外，设 ψ 是一个正公式。我们得到

$$\mathcal{C}', f(X) \Vdash \psi \quad implies \quad \mathcal{C}, X \Vdash \psi$$

对所有 $X \in W$。

证明。首先我们证明，对于根据定义 11 由 ϕ 给出的公式，我们有

$$\mathcal{C}', f(X) \Vdash \phi \quad \text{iff} \quad \mathcal{C}, X \Vdash \phi \tag{9}$$

对所有 $X \in W$。我们按照 ϕ 的结构进行归纳，并区分：

1. ϕ 是一个原子命题 p。由于 f 是一个态射，我们有 $\ell'(f(X)) = \ell(X)$。因此 $\mathcal{C}, f(X) \Vdash p$ 当且仅当 $\mathcal{C}, X \Vdash p$。2. ϕ 是一个否定命题或合取命题。由归纳假设，结论立即成立。

现在我们根据 ψ （根据定义 11）的结构进行归纳，并假设 $\mathcal{C}', f(X) \Vdash \psi$。我们区分以下几种情况：

1. ψ 是一个公式（根据定义 11）。结论由 (9) 得出。2. ψ 是一个合取或析取。结论可由归纳假设立即得出。3. ψ 的形式为 $[\sim]_G\psi'$。由 $\mathcal{C}', f(X) \Vdash [\sim]_G\psi'$，我们得到 $f(X) \sim_G^{\mathcal{C}'} Y$ 蕴含 $\mathcal{C}', Y \Vdash \psi'$，对所有 $Y \in W'$ 均成立。

令 $Z \in W$ 满足 $X \sim_G^{\mathcal{C}} Z$。由于 f 是一个态射，根据引理 7，我们得到

$$f(X) \sim_G^{\mathcal{C}'} f(Z) \quad \text{and} \quad f(Z) \in W'.$$

因此，$\mathcal{C}', f(Z) \Vdash \psi'$。根据归纳假设，我们得到 $\mathcal{C}, Z \Vdash \psi'$。由于 $Z \in W$ 是满足 $X \sim_G^{\mathcal{C}} Z$ 的任意对象，我们得出 $\mathcal{C}, X \Vdash [\sim]_G\psi'$。□

前一个定理只适用于知识，不适用于信念。也就是说，算子 $[\trianglerighteq]_a$ 不能纳入正公式类。我们有以下引理。

引理 8。存在两个多色模型 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$，一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}'$ 的态射 f，以及 $\mathcal{C}$ 中的一个世界 X，使得对于某个智能体 a 和 $p \in$命题集，

$$\mathcal{C}', f(X) \Vdash [\trianglerighteq]_a p \quad but \quad \mathcal{C}, X \nVdash [\trianglerighteq]_a p.$$

证明。考虑集合 $\mathcal{V} = \{1, 2, 3\}$。令 a 为一个智能体，并定义

$$\chi(1) := \chi(2) := \chi(3) := a.$$

令 $S := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 且 $S' := \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$。因此，$C = (S, \mathcal{V})$ 和 $C' = (S', \mathcal{V})$ 是单纯复形。令 $X := \{1, 2\}$、$Y := \{2, 3\}$，以及 $Z := \{2\}$。此外，定义

$$W := \{X, Y\}, \qquad \ell(X) := \emptyset \quad \text{and} \quad \ell(Y) := \{p\}$$

and

$$W' := \{X, Z\}, \quad \ell'(X) := \emptyset \quad \text{and} \quad \ell'(Z) := \{p\}.$$

我们定义多色模型

$$\mathcal{C} := (C, \chi, W, \ell) \quad \text{and} \quad \mathcal{C}' := (C', \chi, W', \ell')$$

并令 f 满足 $f(1) = 1$、$f(2) = 2$，以及 $f(3) = 2$。显然，f 是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}'$ 的态射，并且我们有 $f(Y) = Z$。最后，我们注意到

$$\mathcal{C}', f(Y) \Vdash [\trianglerighteq]_a p \quad \text{but} \quad \mathcal{C}, Y \nVdash [\trianglerighteq]_a p. \qquad \square$$

除了信念增益是可能的这一论述之外，这条引理也可以这样解读：条件 $(\star)$ 不够强，或者我们需要采用另一种态射概念；另请参阅下一节关于单纯集的讨论。

5 替代形式化

我们采用单纯模型对信念进行建模时，一个重要特点是，在一个世界内，智能体被赋予一个重数。多色模型通过允许多个顶点表示同一个智能体来实现这一点。我们选择这种方法，是因为它既非常接近单纯复形原有的认知解释，又具有简单的几何解释。与 [15], 相比，我们只放宽了世界内颜色唯一这一约束。然而，为了保证不可区分关系是部分等价关系，我们必须对多色模型施加条件 $(\star)$。

本节介绍两种关于单纯模型中信念的替代方法，其依据是用重复顶点取代多个顶点具有相同颜色的做法。在这些设定中，一个世界的所有顶点颜色各不相同，因此不需要条件 $(\star)$。

我们将只概述基本思想，并将详尽的论述留待今后研究。第一种方法是使用一种基于多重集而非集合的单纯复形变体。可以采用以下定义。

设 $\mathcal{V}$ 为一个顶点集合。$\mathcal{V}$ 上的多重集是一个函数 $M : \mathcal{V} \to \mathbb{N}$。空多重集 $\emptyset$表示恒为 0 的函数。若对于所有 $v \in \mathcal{V}$，都有 $N(v) \leq M(v)$，则多重集 N 是多重集 M的子集，通常记作 $N \subseteq M$。多重集 M 的支撑集由其元素构成的集合给出，即 $\mathrm{supp}(M) := \{v \mid M(v) > 0\}$。

定义 12。 $C = (S, \mathcal{V})$ 其中 S 为 $\mathcal{V}$ 上的多重集构成的集合，称为一个多重单纯复形，如果

1. S 不包含空集合;
2. *for each* $X \in S$ *and each* $\emptyset \neq Y \subseteq X$, *we have* $Y \in S$.

多重单纯模型多重单纯模型的定义方式与单纯模型相同，只是使用多重单纯复形代替单纯复形。由于

多重单纯模型中的世界是一个多重集，因此我们可以将世界 X 中智能体 a 的重数定义为

$$m_a(X) := \begin{cases} X(v) & \text{if there exists } v \text{ with } \chi(v) = a \text{ and } X(v) > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，根据多重单纯模型的定义，着色必须是适当的，

$$\text{there is at most one } v \in \mathcal{V} \text{ with } \chi(v) = a \text{ and } X(v) > 0. \tag{10}$$

因此， $m_a(X)$ 定义良好。

如果使用世界的支集，也就是说，将世界视为集合而非多重集合，我们就可以采用通常的不可区分关系。对于智能体群 G，我们定义

$$X \sim_G Y \quad \text{iff} \quad G \subseteq \chi(\mathsf{supp}(X) \cap \mathsf{supp}(Y))$$

利用 (10)，我们立即可以发现，如此定义的关系 $\sim_G$ 是传递的。因此，我们无需额外施加类似 $(\star)$ 的条件。多重单纯模型的缺点是它们没有拓扑解释。

第二种替代方法具有自然的拓扑解释，即使用单纯集合，相关介绍参见 [12] 。在这里，我们只做非常粗略的讨论，只需将单纯集合理解为可能包含重复顶点的单纯形。因此，单纯集合模型的世界集合可能包含单纯形以及含有重复顶点的单纯形，后者称为退化的 单纯形。

这是一个标准结果 [12, 命题集 4.8] ： 如果 Y 是退化单纯形，那么存在唯一的非退化单纯形 X，使得 $Y = s_{i_1} \cdots s_{i_k} X$对于某组退化映射 $s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}$ 成立。这里，退化映射会创建一个顶点的副本。对于退化单纯形 Y，我们用 $\mathsf{nds}(Y)$ 表示上述结果中的唯一非退化单纯形 X 。如果 Y 是非退化单纯形，我们令 $\mathsf{nds}(Y) := Y$。

利用这一设定，我们可以如下定义单纯形集合模型的不可区分关系：

$$X \sim_G Y \quad \text{iff} \quad G \subseteq \chi(\mathsf{nds}(X) \cap \mathsf{nds}(Y)).$$

和之前一样， $\sim_G$ 是传递的，而且不需要条件（$\star$）。此外，我们可以将世界 Y 中顶点 v 的重数定义为 1 加上退化映射在从 $\mathsf{nds}(Y)$ 构造 Y时引入的 v 的副本数。

请注意，从多色模型转向单纯集合模型时必须谨慎。其中一个原因是，我们对这两种模型中的态射有不同的定义

。多色模型中的态射定义（定义 10）基于保留颜色的单纯映射。然而，在多色模型的态射下，智能体的重数不一定会保持不变。单纯集合模型的情况则不同。如果我们采用单纯集合中的态射定义，并要求颜色保持不变，那么智能体的重数也会保持不变。

到目前为止，单纯集合尚未被视为认知逻辑的模型。不过，我们想指出，介于单纯复形与单纯集合之间的半单纯集合已被用于刻画群体知识的新概念 [9, 14]。

6 结论

我们给出了信念在单纯模型上的首个解释，该解释仅依赖于拓扑结构，而无需信念函数之类的额外机制。我们的方法在于放弃着色必须适当这一要求，并将一个面内的颜色重数用作倒置的似然度量。

对多色模型的研究仍处于起步阶段。本文给出了初步定义、初始结果，以及与单纯模型的关键差异，例如关于非适当模型和信念增益的观察。

尽管我们在逻辑中纳入了群体知识这一概念，但我们只考虑了个体信念。显然，群体信念的各种概念为未来研究提供了一个有趣的课题。一个初步定义可以是

$$X \leq_G Y \text{ if and only if } \min\{m_a(X) \mid a \in G\} \leq \min\{m_a(Y) \mid a \in G\}$$

然后按照个体情形定义模态 $[\trianglerighteq]_G$ 和 $\mathcal{B}_G$ 的解释。关于群体信念这一概念，有些原则是显而易见的，例如，群体信念并不意味着子群信念（或个体信念）。然而，还应对这一方法进行详细分析，并研究其与现有方法（例如 [13, 20], ）之间的关系。

多色模型的另一个可能研究方向是将其解释为单纯邻域语义 [10]。一种方法是考虑这样的模型：其中的单纯形要么是适当着色的，要么是单色的。例如，在图 7 中，单纯形 X_0、X_1、Y_0、Y_1 是适当着色的（每个顶点具有不同的颜色），而 Z 是单色的（每个顶点具有相同的颜色）。

单色单纯形可用于定义邻域结构。单纯形 X_0 有两个 a-邻域：$\{X_0, X_1\}$ 和 $\{Y_0, Y_1\}$，因为智能体 a可以通过单色边 Z到达 Y_0。显然，这样的邻域永远不会相交于 a。知识的解释遵循标准定义：如果存在一个 a-邻域，使得 φ 在其中所有世界中都为真，那么智能体 a 就知道 φ。

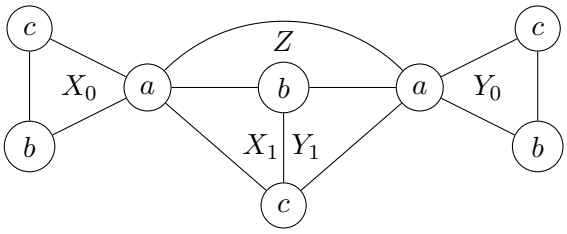

图 7：单纯形为正确着色或单色的多色复形，可用于构建单纯邻域语义。

最后但同样重要的是，值得一提的是，最近有人为多面体 [1, 5, 6]引入了一种拓扑语义的变体。研究模态逻辑的单纯语义与多面体语义之间的相似之处和差异，将会很有意思。

致谢

我们感谢匿名审稿人提供的宝贵建议和反馈。特别感谢分布式系统中的认知与拓扑推理 [10], 会议的组织者和参与者，尤其是研究如何通过单纯复形表示认知态度的工作组。我们也要感谢 AiML 短文 [8]的匿名审稿人提出的许多宝贵意见。

参考文献

[1] Adam-Day, S., Bezhanishvili, N., Gabelaia, D., Marra, V.：中间逻辑的多面体完备性：神经准则。《符号逻辑杂志》89(1), 342–382 (2024年)。[2] Baltag, A., Renne, B.：动态认知逻辑。载于：Zalta, E.N.（编）《斯坦福哲学百科全书》。形而上学研究实验室，斯坦福大学，2016年冬季版。（2016年）[3] Baltag, A., Smets, S.：多智能体可能性模型上的动态信念修正。第七届逻辑与博弈及决策基础会议（LOFT）论文集，第11–24页（2006年）[4] Baltag, A., Smets, S.：动态交互式信念修正的定性理论。载于：Bonanno, G., van der Hoek, W., Wooldridge, M.（编）《逻辑与博弈及决策理论基础》（LOFT7），第13–60页（2008年）

[5]Bezhanishvili, N., Bussi, L., Ciancia, V., Fernández-Duque, D., Gabelaia, D.：多面体可达性逻辑。载于：《模态逻辑进展 2024》（2024年）

[6] Bezhanishvili, N.、Marra, V.、McNeill, D.、Pedrini, A.：关于多面体的直觉主义逻辑塔斯基定理。《纯粹与应用逻辑年刊》**169**(5)，373–391（2018）。

[7] Cachin, C.、Guerraoui, R.、Rodrigues, L.E.T.：《可靠且安全的分布式编程导论》（第 2 版）。施普林格（2011）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-15260-3

[8] Cachin, C.、Lehnherr, D.、Studer, T.：单纯形信念。载于：《模态逻辑进展 2024年——短篇论文》，第 9–14 页（2024年）。

[9]Cachin, C., Lehnherr, D., Studer, T.：《协同知识》。《理论计算机科学》**1023**，114902（2025）。https://doi.org/10.1016/j.tcs.2024.114902[10] Castañeda, A., van Ditmarsch, H., Kuznets, R., Moses, Y., Schmid, U.：《分布式系统中的认知与拓扑推理》（达格施图尔研讨会 23272）。《达格施图尔报告》**13**(7)，34–65（2024）。https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/DagRep.13.7.34[11] van Ditmarsch, H., Goubault, É., Ledent, J., Rajsbaum, S.：《知识与单纯复形》。载于：Lundgren, B., Nuñez Hernández, N.A.（编），《计算哲学》，第1–50页。施普林格国际出版，Cham（2022）[12] Friedman, G.：综述文章：单纯集的基础图解导论。《落基山数学杂志》**42**(2)，353–423（2012）。[13] Gaudou, B., Herzig, A., Longin, D., Lorini, E.：《论群体信念模态逻辑》。载于：Herzig, A., Lorini, E.（编），《群体态度与社会互动的认知基础》，第75–106页。施普林格（2015）。[14]Goubault, É., Kniazev, R., Ledent, J., Rajsbaum, S.：《分布式知识的半单纯集模型》（2023）。https://doi.org/10.1109/LICS56636.2023.10175737[15]Goubault, É., Kniazev, R., Ledent, J., Rajsbaum, S.：《故障智能体认知逻辑的单纯模型》。《墨西哥数学会通报》**30**(3)，90（2024年9月）。https://doi.org/10.1007/s40590-024-00656-x

[16]Goubault, É., Ledent, J., Rajsbaum, S.：《用于研究分布式任务可计算性的动态认知逻辑单纯复形模型》。《信息与计算》**278**，104597（2021）。https://doi.org/10.1016/j.ic.2020.104597

[17]Goubault, É., Ledent, J., Rajsbaum, S.：KB4_n的单纯模型：具有可能死亡的智能体的认知逻辑。载于：Berenbrink, P., Monmege, B.（编）《第39届理论计算机科学前沿国际研讨会》。LIPIcs，第219卷，第33:1–33:20页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik（2022）。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.STACS.2022.33[18]Halpern, J.Y., Moses, Y.：分布式环境中的知识与共同知识。载于：Kameda, T., Misra, J., Peters, J.G., Santoro, N.（编）《第三届ACM分布式计算原理年会论文集》。第50–61页。ACM（1984）。https://doi.org/10.1145/800222.806735[19] Herlihy, M., Kozlov, D.N., Rajsbaum, S.：《通过组合拓扑进行分布式计算》。摩根·考夫曼（2013），https://store.elsevier.com/product.jsp?isbn=9780124045781[20] Lindqvist, J., Velázquez-Quesada, F.R., Ågotnes, T.：分布式信念的若干变体。CoRR**abs/2408.10637**（2024）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.10637[21]Randrianomentsoa, R., van Ditmarsch, H., Kuznets, R.：《非纯单纯复形：完备公理化》。《计算机科学中的逻辑方法》**19**（4）（2023）。https://doi.org/10.46298/lmcs-19(4:3)2023[22] Stalnaker, R.：论知识与信念逻辑。《哲学研究》**128**，169–199（2006）