arXiv:2601.07673v1 [cs.DM] 12 Jan 2026

关于 Maker-Breaker 快乐顶点博弈的复杂性

MathieuHilaire 波尔多大学、Bordeaux INP、LaBRI UMR CNRS 5800，F-33400，法国塔朗斯。

Perig Montfort 里昂高等师范学院，法国里昂。

Nacim Oijid 于默奥大学，瑞典于默奥。

摘要

给定一个 c 着色图 G，若顶点 v 属于 G 且其颜色与所有邻居的颜色相同，则称其为快乐的 。快乐顶点这一概念由 Zhang 和 Li [27]提出，用于计算图的同质性。Eto、Fujimoto、Kiya、Matsushita、Miyano、Murao 和 Saitoh [11] 提出了快乐顶点游戏的 Maker-Maker版本，两位玩家竞相占有比对手更多的快乐顶点。本文介绍 Maker-Breaker 快乐顶点博弈：两位玩家 Maker 和 Breaker 轮流用各自的颜色为图的顶点着色。Maker 的目标是在游戏结束时使快乐顶点的数量最大化，而 Breaker 则试图阻止她。这一博弈也是 Maker-Breaker支配博弈的计分版本，该博弈由 Duchene、Gledel、Parreau 和 Renault [8], 提出，因为快乐顶点恰好对应于支配博弈中未被支配的顶点。因此，这是一种非常自然的图上博弈，可以在计分位置博弈 [3]的框架下研究。本文首次研究这一博弈的复杂性，并证明：在树上计算其得分是 PSPACE 完全的，在毛毛虫树上是 NP 困难的，而在细分星图上可在多项式时间内求解。最后，我们给出最大度为 2 的图上的精确得分，并提供一种 FPT算法，用于计算有界邻域多样性图上的得分。本文的一项重要贡献是，为了得到这些困难性结果，我们引入了一种用于 2-SAT公式的新型关联图，称为文字-子句关联图 。我们证明，即使该图无环，QMAX 2-SAT 仍然是 PSPACE 完全的；即使该图无环且最大度为 2（也就是说，它是路径并），MAX 2-SAT 仍然是 NP 完全的。我们还通过证明在森林上进行的计分位置博弈 Incidence 也是 PSPACE 完全的，展示了这一贡献的重要性。

2012年ACM学科分类 计算理论 → 算法博弈论

关键词与短语 Maker-Breaker 博弈、支配博弈、快乐顶点游戏、计分博弈、复杂性

资助 本研究得到 ANR项目P-GASE（ANR-21-CE48-0001-01）的资助*Nacim Oijid*：Kempe基金会资助编号JCSMK24-515（瑞典）

1 引言

1.1 研究框架

图中引入了快乐顶点来衡量其同质性：若一个顶点与其所有邻居颜色相同，则该顶点是快乐的。这一概念由 Zhang 和 Li [27], 提出，此后也成为多项研究的主题；例如参见 [1, 2, 20, 28]。在此背景下，Eto、Fujimoto、Kiya、Matsushita、Miyano、Murao 和 Saitoh 将快乐顶点游戏 [11] 引入为一种双人博弈：两名玩家 Black 和 White 轮流为图 G 中的顶点着色，使用各自的颜色，并力求使自己颜色的快乐顶点数多于对手。本文关注 Maker-Breaker 版本的

该博弈中，Maker 和 Breaker 再次轮流为图中的顶点着色，Maker 使用红色，Breaker 使用蓝色。Maker 力求使快乐红色顶点的数量最大化，而 Breaker 则力求使其最小化。因此，当所有顶点都着色后，快乐红色顶点的数量恰好等于未被 Breaker 支配的顶点数量，这使得该博弈成为著名的*Maker-Breaker*支配博弈的计分版本。

Duchêne、Gledel、Parreau 和 Renault 于 [8] 2020年提出的 Maker-Breaker支配博弈，是在图的顶点上进行的研究最多的位置游戏之一。在该博弈中，两名玩家——支配者和 Staller——轮流认领给定图 G 中尚未被认领的顶点，直到所有顶点都被认领。若支配者所认领的顶点集合是一个支配集，则支配者获胜；否则，也就是说，如果 Staller 通过认领一个顶点及其所有邻居使该顶点孤立，则 Staller 获胜。对这一博弈的算法研究表明，它在有界度二分图或分裂图 [8, 23],上是 PSPACE 完全的，而在若干类图上存在多项式算法，包括路径、网格图、单位区间图和正则图 [4, 7]。这一博弈属于更广泛的 Maker-Breaker 位置博弈领域。这类博弈在一个超图上进行，两名玩家 Maker 和 Breaker 轮流认领超图的顶点。若 Maker 成功认领某条超边上的所有顶点，则 Maker 获胜；否则 Breaker 获胜。Hales 和 Jewett 于 1963 [15], 提出了位置博弈；Schaefer 于 1978 [25] 证明，对于秩为 11 的超图（即最大超边大小为 11），此类博弈是 PSPACE 完全的。近年来，人们对其复杂性的研究兴趣显著增加，连续三次将使博弈仍为 PSPACE 完全时的最小秩下界降低：Rahman 和 Watson 将其降至 6 [24], ，Koepke 将其降至 5 [17], ，Galliot 则将其降至 4 [12]。另一方面，Galliot、Gravier 和 Sivignon 证明，该博弈在秩为 3 [13]的超图上可在多项式时间内求解。

在 Maker-Breaker 快乐顶点博弈中，规则集与 Maker-Breaker 支配博弈中的相同，不同之处在于：一旦所有顶点都被占据，我们统计由 Staller 隔离的顶点数量，而不是判断是否存在这样的顶点。这一考量使该博弈属于由 Bagan、Deschamps、Duchêne、Durain、Effantin、Gledel、Oijid 和 Parreau [3] 引入的计分位置博弈范畴。他们证明，计分位置博弈属于米尔诺宇宙，这是计分组合博弈的一个广阔框架，并为博弈赋予了某种群结构 [21]。他们还证明，计算计分 Maker-Breaker 位置博弈的得分是 PSPACE 完全的，即使将范围限制为秩为 2 的超图，也就是图；此外，他们还提供了若干处理这类博弈的工具。

1.2 论文概述

在本文中，我们首先在第 2 节回顾关于米尔诺宇宙和支配博弈的一些有用结果。特别地，我们利用米尔诺群结构处理非连通图；借助他关于游戏和的结果，可以处理这类图；同时，我们利用关于支配博弈的结果，将研究聚焦于特定的图类。

在第 3 节中，我们介绍 MAX 2-SAT 的若干变体，以及一种新的表示方法：文字-子句关联图。我们证明，即使将量化版本的 MAX 2-SAT 限制在关联图为无环的实例上，它仍是 PSPACE 完全；而即使将 MAX 2-SAT 限制在关联图无环且最大度为 2 的实例上，它仍是 NP 完全。作为推论，我们证明，在图上进行的计分位置游戏 Incidence，即使限制在森林上，仍是 PSPACE 完全，从而回答了 [3] 提出的一个未解决问题。随后，我们回到快乐顶点游戏，并证明，尽管 Maker-Breaker 支配博弈在森林上可以在多项式时间内求解，但我们在此研究的计分版本在树上就已经是 PSPACE 完全。

这一现象促使我们研究树的特定子类。因此，我们证明，该博弈在毛毛虫树上就已经是 NP 困难（第 3 节），但在细分星图和路径并上可以在多项式时间内求解（第 4 节）。关于后一个结果，我们可以将其推广到最大度为 2 的图，因为孤立圈不会改变该博弈的得分。

最后，为了拓展已知的计分位置博弈结果，我们将所谓的超引理应用于这一博弈，并在第 4.3 节中给出了一个以邻域多样性为参数的 FPT算法。邻域多样性是 Lampis [18]引入的图参数，用于衡量图中顶点邻域的多样程度。

2 预备知识

2.1 定义与记号

设 $G=(V,E)$ 是一个图，且 v 是 G 的一个顶点。我们用 $N(v)$ 表示 v 的开邻域，即有 $N(v)=\{u\in V(G)\mid (u,v)\in E(G)\}$。我们用 $N[v]$ 表示 v 的闭邻域，即 $N[v]=\{v\}\cup N(v)$。

我们将 SHVG 称为计分快乐顶点博弈，并将其视为一个判定问题：输入一个图 G 和一个整数 s，当且仅当 Maker 有策略保证在 G 上获得至少 s 的得分时，返回 `true`。形式化地，该问题定义如下：

▶**问题 1** (计分快乐顶点博弈)。输入：一个图 G、一个整数 s，以及先手 M 或 B。问题：是否有 $s(G)\geq s$?

与位置游戏中的通常做法一样，如果没有指定先手，我们就假设先手是 Maker。

当前的游戏状态 由三元组 $(G,\ M,\ B)$ 表示，其中 $M,\ B\subset V$分别是由 Maker（Maker）和 Breaker（Breaker）着色的顶点集合。我们还用$V_F(G)=V(G)\setminus(M\cup B)$ 表示 G中空闲顶点 的集合。

我们用 $Ms(G,\ M,\ B)$ 表示 Maker 接下来行动时，在 $(G,\ M,\ B)$ 局面下获得的得分；用$Bs(G,\ M,\ B)$ 表示 Breaker 接下来行动时的得分。注意，我们始终假设双方都采取最优策略，即该得分被唯一确定为 Maker 对抗 Breaker 所有可能策略时能够确保的最高得分。特别地，$Ms(G,\ \emptyset,\ \emptyset)$ 表示 Maker 在 G 上先手时能获得的最高得分，而 $Bs(G,\ \emptyset,\ \emptyset)$ 表示 Breaker 先手时的最高得分。若不会引起混淆，分别记为 $Ms(G)$ 和 $Bs(G)$。

当先手玩家的身份无关紧要时，我们将得分记为 $s(G)$，省略前缀 M 或 B。这样我们就能陈述同时适用于 Ms 和Bs的结果。不过需要注意的是，这种记法**并不**意味着 $Ms=Bs$；它仅表示该陈述分别适用于这两种情况。

2.2 计分博弈

本节首先介绍与该博弈相关的得分函数的一些基本结果。我们先回顾计分博弈中得分的归纳定义，并采用 Larsson [19] 的标准记号。

▶ **定义 2.** 设(G, M, B)是一个游戏状态。设 $V_F = V \setminus (M \cup B)$为此局面中的未着色顶点集合。则得分 Ms 和 Bs 按如下方式归纳定义：

$$\begin{cases} Ms(G,M,B) = \max\limits_{x \in V_F} Bs(G, M \cup \{x\}, B), \\ Bs(G,M,B) = \min\limits_{x \in V_F} Ms(G, M, B \cup \{x\}). \end{cases}$$

如果所有顶点都已着色，即 $M \cup B = V$，则得分通过以下方式计算：

$$s(G,M,B) = |\{v \in V(G) \mid N[v] \subseteq M\}|$$

我们还回顾一下，米尔诺宇宙是由双选游戏 和非 *zugzwang*游戏组成的集合，即在这类游戏中，如果一名玩家可以行动，则其对手也可以行动，并且双方都无意跳过自己的回合。作为一种计分位置游戏，快乐顶点游戏属于米尔诺宇宙 [3], ，这意味着以下不等式：

▶ **引理 3.** 对于任意游戏状态(G, M, B)，有：

$$Bs(G,M,B) \leq Ms(G,M,B).$$

在米尔诺宇宙中，我们定义两个游戏 G 和 H的并$G \cup H$，并记作$G \cup H$；在该游戏中，每个回合玩家都可以选择在 G 或 H中行动。考虑在图上进行的位置游戏，这相当于认为，在一个非连通图上进行游戏，就是在其各个连通分量的和上进行游戏。

我们还定义了如下等价概念：

▶ 定义 *4. </style}*两个计分博弈 G_1 和 G_2 等价，记作 $G_1 = G_2$，若对于每个博弈 G，得分满足

$$Ms(G \cup G_1) = Ms(G \cup G_2) \quad and \quad Bs(G \cup G_1) = Bs(G \cup G_2).$$

此外，米尔诺宇宙中的群结构使我们能够在已知各项得分的情况下，界定博弈并的得分。也就是说，我们有：

▶ **定理 5 (**米尔诺 [21]**).** 设 (G_1, M_1, B_1) 和 (G_2, M_2, B_2) 是快乐顶点游戏中的两个局面。我们有：

$$Bs(G_1,M_1,B_1) + Bs(G_2,M_2,B_2) \leq Bs(G_1 \cup G_2, M_1 \cup M_2, B_1 \cup B_2)$$
$$\leq \min\left(Ms(G_1,M_1,B_1) + Bs(G_2,M_2,B_2), Bs(G_1,M_1,B_1) + Ms(G_2,M_2,B_2)\right)$$

$$\max\left(Ms(G_1,M_1,B_1) + Bs(G_2,M_2,B_2), Bs(G_1,M_1,B_1) + Ms(G_2,M_2,B_2)\right) \leq$$
$$Ms(G_1 \cup G_2, M_1 \cup M_2, B_1 \cup B_2) \leq Ms(G_1,M_1,B_1) + Ms(G_2,M_2,B_2)$$

特别地，若 $Ms(G_1) = Bs(G_1)$，由于 $Ms \geq Bs$，不等式两边相等，因此有如下结果：

▶ **定理 6 (**米尔诺 1953 [21]**).** 设 (G, M, B) 是一个博弈局面，使得 $Ms(G, M, B) = Bs(G, M, B) = s$。那么，对于任意局面 (G', M', B')，我们有：

$$s(G' \cup G, M' \cup M, B' \cup B) = s(G', M', B') + s$$

这一结果建立在更一般的温度理论框架中，指出如果一个博弈 G 满足 $Ms(G) = Bs(G)$，那么其温度为 0。不过，本文并不需要始终采用温度理论框架。关于这一框架的概述，请参阅 Hanner 的结果 [16] 以及 Duchêne、Oijid 和 Parreau 的文章 [10]，该文总结了这些结果。

2.3 从 Maker-Breaker支配博弈继承的结果

Maker-Breaker支配博弈可能有三种不同的结果：$\mathcal{D}$、$\mathcal{S}$和$\mathcal{N}$。结果$\mathcal{D}$ 表示支配者后手获胜。结果$\mathcal{S}$ 表示 Staller 后手获胜。最后，结果$\mathcal{N}$ 表示下一位行动者拥有获胜策略。请注意，由于在 Maker-Breaker位置博弈中，先手总是优于后手，因此只有这三种可能的结果。得分结果之间存在直接联系：

▶注7。设 G 为一个图。当且仅当 $s(G) = 0$ 时，在 G 上进行的支配博弈的结果为 D。当且仅当 $Bs(G) = 0$ 且 $Ms(G) \geq 1$ 时，在 G 上进行的支配博弈的结果为 N。当且仅当 $Bs(G) \geq 1$ 且 $Ms(G) \geq 1$ 时，在 G 上进行的支配博弈的结果为 S。

请注意，这只能区分得分为 0 和得分为正的情况。例如，如果 G 是一张至少有两个叶节点的星图，那么在 G 上进行的 Maker-Breaker支配博弈结果为 $\mathcal{N}$，但在 SHVG 中 Maker 先手时的得分取决于叶节点的数量。

特别是，如果一场博弈的结果为 $\mathcal{D}$，这意味着无论先手还是后手，Breaker 都能确保得分为 0。因此，利用定理 6，我们得到以下推论：

▶**推论8.** 设 G 为一个图。那么，当且仅当 $SHVG(G) = 0$时， G 上的支配博弈的结果为 $\mathcal{D}$。

证明支配博弈结果为$\mathcal{D}$的一种经典工具是配对策略。这一普遍概念存在于所有 Maker-Breaker 位置博弈中，在 Maker-Breaker支配博弈中可表述如下：若 $G = (V, E)$ 是一个图，则一组互不相交的顶点对 $(x_1, y_1) \ldots, (x_k, y_k) \subset V^2$ 称为配对支配集，如果 $V \subset \bigcup_{1 \leq i \leq k} N[x_i] \cap N[y_i]$。Duchêne 等人 [8] 证明了，若 G有一个配对支配集，则其结果为$\mathcal{D}$。在我们的基于分数的框架中，这引出了以下结论：

▶ 注9. 设 G 为一个图。若 G 有一个配对支配集，则 $G = 0$。

具体而言，这意味着在考虑非连通图时，移除一个包含配对支配集的连通分量，不会改变该博弈的得分。

2.4 简化实例

本节旨在找出图中能够化简为其他更易处理结构的结构。具体而言，当某些顶点已经着色时，我们要寻找能够将图转化为更简单图、同时不改变当前局面得分的图操作。

▶ **定义 10**。 设 (G, M, B) 定义了图 G 上博弈的一个局面。我们将该局面下的分解图 记作 $[G]_B$，它是由顶点 $M \cup V_F$ 在 G 中诱导出的子图，并按如下方式扩充：对于由 $M \cup V_F$ 诱导的子图中与 G 中至少一个顶点 $v \in B$ 相邻的每个顶点 u，我们添加一个新顶点 u_B 和一条边 $\{u, u_B\}$。我们将以此方式添加的所有顶点 u_B 构成的集合记作 $[B]_B$，并记为 $[M]_B = M$。图 *1* 展示了这一分解。

此变换是指：将被 Breaker 控制的顶点（即不可能再变为快乐顶点的顶点）变为仅受一个叶子控制，方法是移除所有其余被 Breaker 占据的顶点。



（a）一个局面（G，M，B）。 （b）约化后的局面（$[G]_B$、$[M]_B$、$[B]_B$）。

图 1 定义 10 中的归约

.

▶ **引理 11**。设（G、M、B）定义了图 G 上博弈的一个局面。那么，s（G、M、B）$= s$（$[G]_B$、$[M]_B$、$[B]_B$）。

证明。假设 Maker 有一种策略，能够确保得分 s_0 在 G。她可以在（$[G]_B$、$[M]_B$、$[B]_B$）中应用该策略，这是可行的，因为 V_F（$[G]_B$）的顶点在 G中也未被占用。博弈结束时，若且唯若顶点 u 有一个被 Breaker 染色的邻居 v，它才会在 G 中被支配。如果该邻居 v 位于 B中，那么 u 在 $[G]_B$中也有一个被 Breaker 染色的邻居。否则，v 属于 $[G]_B$，而由于 $G[B]$ 中的策略仿照了 G中的策略，v 在 $[G]_B$中仍被 Breaker 染色。因此，G 中的任何快乐顶点在 $[G]_B$中也同样是快乐顶点，从而确保 s（$[G]_B$）$\geq s$（G）。类似地，Breaker 将其在 G 中的策略应用于 $[G]_B$，即可确保 s（$[G]_B$）$\leq s$（G），证明完毕。◀

现在我们着眼于一些有助于计算得分的性质，通过限制需要考虑的步数：在考虑计分博弈时，有些步对得分的影响总是比其他步更大。因此，自然会认为这些步会先被执行。请注意，[3],中也使用了类似的引理，但由于 Maker-Breaker 快乐顶点博弈中的获胜集结构更复杂，其表述有所不同。我们首先引入一个函数 h，它接受一个局面 $P =$（G，M，B）和一个空闲顶点 $v \in V \setminus$（$M \cup B$），并输出通过执行 v 立即获得的分数。形式化地说，我们有：

$$h(P, v) = |\{w \in G \mid N[w] \subseteq M \cup \{v\}\}|$$

如果 P 没有歧义，我们就简单地将其记作 h（v）。下一个引理指出，如果执行 v 所得的分数比占有 u 更多，即使 u 的所有邻居都变成快乐顶点也是如此，那么就存在一种最优策略，使得 v 先于 u 执行。

▶ **引理 12.** 设(G, M, B) 是一个游戏局面。设 u, v 是两个顶点，满足：

$$h(v) \geq |N[u] \setminus B|$$

那么，存在一种最优策略，使得先于 u 操作 v 。

证明。 下面证明 Maker 先于 u 操作 v的情形；若由 Breaker 操作，类似的证明也可得出结论。

为了考虑策略中之后到达的游戏局面，设 $P =(G, M, B)$ 为一个局面，并假设 Maker 有一个得分为 s_0 的策略$\mathcal{S}$，其中 Maker 的下一步是给 u 染色。设 $P' =(G, M \cup \{u\}\ B)$。我们提出 Maker 的如下策略：

- Maker 落子于 v。

- 如果 Breaker 将顶点 $w \neq u$ 染色，Maker 就认为自己已在 P' 中落下了这个顶点。如果 Maker 在 P' 中的应对是顶点 $w' \neq v$，Maker 就在 P中落下 w'。如果 Maker 在 P' 中的应对是将 v染色，那么 Maker 会改为将 u 染色。
- 如果 Breaker 将 u 染色，Maker 就认为自己已在 P' 中走了 v，并继续按照 $\mathcal{S}$ 执行策略，走出她本应走的一步（将 u 和 v 上的着色互换）。

按照这一策略，当所有顶点都被染色后，要么 Maker 已将 u 和 v 都染色。在这种情况下，博弈结束时由 Maker 和 Breaker 染色的顶点集合完全相同，因此 Maker 先将 v 染色可得 s_0 分。否则，染色顶点的集合相同，但 Maker 染色的是 v 而非 u，Breaker 染色的是 u 而非 v。将由此得到的局面记为 $P_u = (G, M_u, B_u)$ 和 $P_v = (G, M_v, B_v)$。于是 P_v 中的得分为：

$$\begin{aligned} s(P_v) &= s_0 + |\{w \in N[v] | N[w] \subset M_v\} - |\{w \in N(u) | N[w] \subset M_u\}| \\ &\geq s_0 + |\{w \in N[v] | N[w] \subset M \cup \{v\}\} - |\{w \in N(u) | N[u] \cap B = \emptyset\}| \\ &\geq s_0 \end{aligned}$$

其中，第二个不等式是因为我们有 $M \cup \{v\} \subset M_v$ 且 $M_u \subset V \setminus B$。这证明，Maker 可以通过先走 v 再走 u，确保得分至少为 s_0。◀

所谓的 超引理 是 Nacim Oijid 的博士论文 [22] 和对 Incidence 博弈的研究 [3]中同时提出的结果。在本节中，我们将其改编应用于计分快乐顶点博弈，从而拓展了它的适用范围，并为分析该博弈的策略结构提供了关键工具。在我们的博弈中，这个引理指出：如果两个顶点在未着色顶点中具有相同的邻域，且在已着色顶点中得分相同，那么存在一种最优策略，使得两位玩家 Maker 和 Breaker 都会将这两个顶点中的一个着色。

▶ **定理 13.** 设(G, M, B) 是图 G上的一个游戏局面，且 $u, v \in V_F$是两个不同的顶点，使得对于任意 $X \subset V_F$，都有

$$|\{w \in V | N[w] \subset X \cup \{u\} \cup M\}| = |\{w | w \in V, N[w] \subset X \cup \{v\} \cup M\}|$$

then

$$s(G, M, B) = s(G, M \cup \{u\}, B \cup \{v\}).$$

证明。 证明通过对 $|V_F|$进行归纳法得出

若 ($|V_F| = 2$)，则有 $V_F = \{u, v\}$。对于 $X = \emptyset$，假设意味着：

$$|\{w \in V | N[w] \subset \{u\} \cup M\}| = |\{w | w \in V, N[w] \subset \{v\} \cup M\}|$$

因此，在 Maker 和 Breaker 各自行动之后，无论下一位玩家选择给哪个顶点着色，得分都相同。因此，

$$s(G, M, B) = s(G, M \cup \{u\}, B \cup \{v\}).$$

现在假设 $|V_F| \geq 3$。首先假设 Maker 有一种策略 $\mathcal{S}$，能够确保得分为 s_0，且该得分属于 $(G, M \cup \{u\}\ B \cup \{v\})$，并考虑在 (G, M, B) 中采用以下策略：

- 轮到 Maker 时，她按照 S，在 $(G, M \cup \{u\}\ B \cup \{v\})$ 中给自己原本会着色的顶点着色。
- 如果 Breaker 给 $\{u, v\}$ 中的一个顶点着色，Maker 就给 $\{u, v\}$ 中的第二个顶点着色；根
- 据关于 $\{u, v\}$ 的假设，这会得到与 G' 中相同的得分。否则，如果 Breaker 给 $w \notin \{u,$
- $v\}$ 着色，Maker 就按照 S 给她应当着色的顶点 w' 着色，并将 Breaker 在 $(G, M \cup \{u\}$ $B \cup \{v\})$ 中的最后一步视为 w。注意，这一步总是可行的，而且不可能是一个顶点 {u,v}，除非 $|V_F| = 3$；在这种情况下，Breaker 也会在 $(G, M \cup \{u\}\ B \cup \{v\})$ 中给 w 着色。

按照这一策略，如果不能直接得到所需结果，那么得到的局面为 $(G, M \cup \{w'\}\ B \cup \{w\})$，其中空闲顶点少了两个。因此，根据归纳法，它的得分与 $(G, M \cup \{u, w'\}\ B \cup \{v, w\})$ 相同；又因为步 w' 原本应是对局面 $(G, M \cup \{u\}\ B \cup \{v\})$ 中 w 的最优应对，所以它的得分不低于 $(G, M \cup \{u\}\ B \cup \{v\})$，这证明 Maker 可以确保在 (G, M, B) 中取得 s_0。

对 Breaker 应用类似的论证可知，如果 Breaker 能确保在 $(G,\ M \cup \{u\}\ B \cup \{v\})$ 中得分至多为 s_0，那么他就能确保在 $(G,\ M,\ B)$ 中得分至多为 s_0，由此证明得证。◀

与 [3], 中给出的结果类似，此引理使我们能够直接计算完全二叉树上的得分，即由 T_0 一个顶点（该顶点为根）构成，且T_i 通过复制两个 T_{i-1}并添加一个新根得到的树；这个新根与两个副本中原有的根相连。整数 i称为 T_i的深度 。

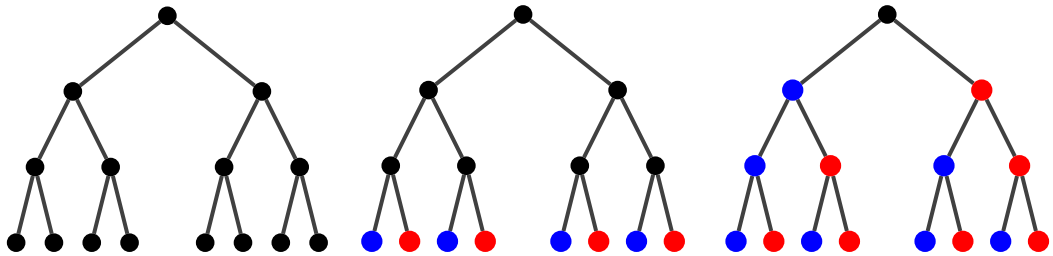
▶ **定理14.** 设 T_d 为深度为 d的完全二叉树。若 $d \leq 1$，则有 $Ms(T_d) = 1$ 且$Bs(T_d) = 0$；否则，$Ms(T_d) = Bs(T_d) = 2^{d-2}$。

证明。 若 $d = 0$，T_d 是一个孤立顶点，Maker 给它着色即可得 1 分；否则得分为 0。若 $d = 1$，图为 P_3，即由 3 个顶点构成的路径。我们可以对它的两个叶子应用引理 13；若 Maker 先给中间顶点着色，则得分为 1；否则 Breaker 给它着色，并确保没有顶点是快乐的。若 $d \geq 2$，连接到同一顶点的每对叶子互为孪生顶点，因此我们可以对它们应用引理 13。于是，Maker 给其中一半着色，即 2^{d-1} 个。现在，它们的父顶点满足引理 13 的假设，因为它们属于由 Maker 着色的相连叶子的获胜集，也属于它们共同父顶点的获胜集（该父顶点存在，因为 $d \geq 2$）。因此，Maker 会给其中一半着色，从而确保她所着色的叶子中有一半是快乐的，得分为 2^{d-2}。随后我们可以重复这一过程，直到到达深度为 1的顶点；但此时，Maker 着色的所有顶点都已经有一个邻居被 Breaker 着色，因此不会快乐。最后，无论根由 Maker 还是 Breaker 着色，它都有一个邻居被 Breaker 着色，因此不会快乐。最终得分为 2^{d-2}。这一过程如图2所示。◀

3 困难性结果

在本节中，我们关注SHVG问题的困难性。请注意，由于Maker-Breaker支配博弈在有界度二分图或分裂图 [8, 23], 上已经是PSPACE 完全的，我们可以将这一结果继承到 $s = 1$。具体而言，我们有如下定理：

▶ **定理15。** 即使限制在 $s = 1$以及有界度二分图或分裂图上，*SHVG* 仍是PSPACE 完全的。



(a) 一棵完全二叉树 (b) 引理 13 的首次应用 (c) 引理 13 的最后一次应用

图2 计算 T_3 上的得分，即深度为 3 的完全二叉树 .

然而，在 Maker-Breaker支配博弈中加入得分，会使问题在较小的图类上变得困难；我们证明，即使限制在树上，SHVG 也已经是 PSPACE 完全的，而限制在毛毛虫树上时，该问题是 NP 困难的。

这两个困难性结果都将依赖于从两个特定量化 MAX-SAT 问题出发的归约；我们将在下一小节介绍这两个问题，并证明它们分别是 PSPACE 完全和至少 NP 困难。关于 S HVG 的困难性结果将留待第 3.2 节和第 3.3 节讨论。

3.1 量化 MAXSAT 限制

在本小节中，我们将介绍（量化）MAX-2-SAT 问题的两个限制，这些限制将用于获得我们的困难性结果。这些问题非常一般，是本文的一项重要贡献，因为它们可以用于给出其他归约，尤其是提供一个关于森林的自然 PSPACE 完全问题。首先回顾量化 MAX 2-SAT 的定义，它是 Max 2-SAT 的量化版本。

▶**问题 16** （量化 Max 2-SAT）。
输入：（ψ、k），其中 ψ 是形如 $\psi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ φ 的 *QBF* 公式；对于$1 \le i \le n$，$Q_i \in \{\exists, \forall\}$，$\varphi$ 是一个无量词 2-*CNF* 公式，k 是一个整数。问题：是否可以同时满足 φ的 k 个子句？

与位置游戏的通常处理方式一样，我们将考虑该问题的等价博弈变体 [26, 3]：两名玩家满足者和反驳者为 x_i赋值。满足者选择存在量化变量的值，反驳者选择全称量化变量的值。若满足者能够满足 k 子句，则她获胜；否则反驳者获胜。

量化 MAX 2-SAT 是 PSPACE 完全问题 [3]。我们将证明，即使对公式 ψ施加结构性质，这一结论仍然成立。

现在我们定义归约中将用到的主要工具。设 φ 是一个无量词 2-CNF 公式，其变量为$\{x_1, \dots, x_n\}$。设 G_φ 是这样一张图：每个变量 x_i由两个顶点表示，分别记为 x_i^+ 和 x_i^-，对应其正文字和负文字；对于 φ中的每个子句 $l_i \vee l_j$，在分别对应文字 l_i 和 l_j的顶点之间连一条边。我们称 G_φ 为 φ的**文字–子句关联图** 。图 3 展示了该图的构造示例。对于习惯于用图表示布尔公式的读者，请注意，这张图**并非**公式通常意义上的关联图。

现在让我们介绍第一个具体的量化 MAX-2-SAT 问题。

10 关于 Maker-Breaker 快乐顶点博弈的复杂性

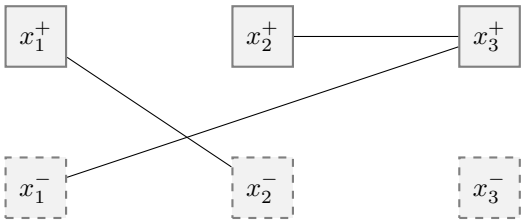


图 3 文字-子句关联图 G_φ，其中有 $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$

▶**问题 17** (无环 Q-MAX 2-SAT).
输入：形式为 $\psi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ φ、包含 φ 个无量词2-*CNF* 公式的 *QBF* 公式，其文字–子句关联图是无环的；给定一个整数 k。问题：能否同时满足 ψ 中的 k 个子句？

▶**引理 18**。 无环 *Q-MAX 2-SAT* 是 PSPACE 完全问题。

证明。该问题属于 PSPACE，这是由量化 MAX 2-SAT 的 PSPACE 完全性 [3] 得出的。为证明其困难性，我们从不受无环限制的量化 MAX 2-SAT 归约。设 (ψ, k) 是量化 MAX 2-SAT 的一个实例，其中 $\psi = Qx_1 Qx_2 \dots Qx_n\ \varphi$ 是一个无量词公式。设 $(l_1 \vee l_2) \wedge (l_2 \vee l_3) \wedge \cdots \wedge (l_m \vee l_1)$ 是 φ 中的一个环。不失一般性，假设 $l_1 = x$，另一种情况 $l_1 = \neg x$ 类似。接着，我们引入三个新的存在量词 $\exists a \exists b \exists x'$ 以及以下构造子句：

$$(x \vee a), \quad (\neg x \vee b), \quad (\neg a \vee \neg x'), \quad (\neg b \vee x').$$

我们考虑公式 $\psi' = Qx_1 Qx_2 \dots Qx_n\ \exists x' \exists a \exists b\ \varphi'$，其中 φ' 是通过将 $x' \vee l_2$ 替换为 $x \vee l_2$，并添加子句 $(x \vee a)$、$(\neg x \vee b)$、$(\neg a \vee \neg x')$、$(\neg b \vee x')$，由 φ 得到的。令 $k' = k + 4$。

这一构造的直观含义是：如果存在一个变量赋值，使得 ψ 中有 k 个子句得到满足，那么采用相同的赋值并令 $x' = x$，再选择 a 和 b 的值使得 $a = b = \neg x$，即可使 ψ' 中有 $k + 4$ 个子句得到满足。

首先，假设满足者在 $(\psi,\ k)$ 中有获胜策略；在 $(\psi',\ k')$ 中采用相同的策略，并令 $x' = x$，她便能确保在 x' 被赋值时，至少有 $k + 2$ 个子句得到满足，因为 $(x \vee a)$、$(\neg a \vee \neg x')$ 中恰有一个成立，且 $(\neg x \vee b)$、$(\neg b \vee x')$ 中也恰有一个成立。然后，令 $a = b = \neg x$，她便能确保剩余的两个子句得到满足，并使得到满足的子句至少有 $k + 4$ 个。

反过来，假设反驳者在 (ψ, k) 中有获胜策略。在 (ψ', k') 中采用同一策略后，当 x_n 被赋值时，他能确保至多有 $k - 1$ 个子句得到满足。接着，如果满足者令 $x = x'$，那么在 ψ' 中能够满足、但不属于 ψ 的子句只有新增的 4 个，因此，他能确保总共至多有 $k + 3 < k'$ 个子句得到满足。如果满足者令 $x' = \neg x$，那么通过这一步能够满足、且原本属于 ψ 的唯一子句是子句 $x' \vee l_2$，因为其他子句都不含 x'。因此，在 $\{(x \vee a)\}, \{(\neg x \vee b)\}, \{(\neg a \vee \neg x')\}, \{(\neg b \vee x')\}$ 之外，至多有 k 个子句得到满足。不过，要么 x 和 $\neg x'$ 为真，此时 $\{(\neg x \vee b)\}$ 和 $\{(\neg b \vee x')\}$ 中至多一个得到满足；要么 x 和 $\neg x'$ 为假，此时 $\{(x \vee a)\}$ 和 $\{(\neg a \vee \neg x')\}$ 中至多一个得到满足。在这两种情况下，这些子句中至多有三个得到满足，因此总共至多有 $k + 3 < k'$ 个子句得到满足，从而确保反驳者在 (ψ', k') 中获胜。因此，当且仅当满足者在 (ψ', k') 中获胜时，她才会在 (ψ, k) 中获胜

最后，在构造出的公式 ψ' 中，文字–子句关联图的环至少比 ψ 的少一个，因为变量 x 和 x' 被变量 a、$\neg a$ 以及 b、$\neg b$ 分隔开。

通过反复应用这一构造，我们可以消除所有环。注意，每次应用这一归约时，可能处于环中的子句数量都会减少一个，因为所添加的子句都不可能处于环中。因此，这一论证需要应用的次数以 ψ 的子句数量为界，从而确保该归约是多项式时间的。因此，Acyclic Q-MAX 2-SAT 是 PSPACE 完全问题。◀

然后，我们可以定义第二个更具体的问题，其中限制变量在一个子句中出现的次数。

▶**问题 19**（无环 MAX 2-SAT-2-2）。
输入：一个2-*CNF* 公式 φ，满足
文字–子句关联图 G_φ 是无环的，且每个变量作为正文字最多出现两次、作为负文字最多出现两次；一个整数 k。

问题：能否同时满足 φ 的 k 个子句？

该问题是有界出现次数 MAX 2-SAT 的一个量化版本，但我们还对文字-子句关联图施加了无环性限制。首先回顾一下，MAX 2-SAT-3（即每个变量的出现次数至多为 3 的 MAX 2-SAT 版本）是 NP 完全的 [5]。更正式地说，这意味着以下问题是 NP 完全的：

▶**问题 20**（MAX 2-SAT-3）。
输入：一个2-*CNF* 公式 φ，其中每个变量至多出现三次；一个整数 k。问题：能否同时满足 φ 中的 k 个子句？

现在，我们通过从 MAX 2-SAT-3 进行归约，证明无环 MAX 2-SAT-2-2 的 NP 完全性。

▶**引理 21.** 无环 *MAX 2-SAT-2-2* 是NP 完全的。

证明。 首先，注意到无环 MAX 2-SAT-2-2 属于 NP，因为它是MAX 2-SAT的一个实例。

我们从 NP 完全问题 MAX 2-SAT-3 [5] 归约。设 φ 是一个 2-CNF 公式，其中每个变量至多出现三次，且 k 是一个整数。如果 φ 中某个变量以正文字形式（分别以负文字形式）出现超过两次，那么它必定恰好以正文字形式（分别以负文字形式）出现三次。此时，只要将该变量赋值为 `True`（分别为 `False`），就能满足所有三个子句；而将该变量的真值从 `True` 改为 `False`（分别从 False 改为 `True`），不会满足任何子句。也就是说，我们总能满足这三个子句，且不影响其他子句。因此，我们可以直接从 φ 中移除这三个子句，并将 k 减去 3。重复这一过程后，我们可以构造出一个新公式，其中变量不仅至多出现三次，而且以正文字形式和负文字形式出现的次数都至多为两次。

此外，如果某个变量出现在蕴含图的一个环中，我们可以应用前述归约中的构件来有效地消除环。不过，对于每个 x_i，该构件都会引入一个新变量 x_i'；如果 x_i 在环中以否定形式出现，则还需要多使用一次 x_i；如果它以肯定形式出现，则还需要多使用一次 $\neg x_i$。然而，这种变换无法使某个变量第三次以肯定或否定形式出现，因为如果 x_i（分别为 $\neg x_i$）出现在环中，就意味着它恰好两次以肯定（分别为否定）形式出现，因此至多一次以否定（分别为肯定）形式出现。还需注意，这种变换确保 x_i 和 $\neg x_i$ 的所有出现位置要么度为 1，要么是度为 1 的顶点的邻居，从而确保它们不会出现在环中，并且

因此，每个变量至多需要应用一次这种归约。由此，这种变换不会使任何变量以肯定或否定形式出现超过两次。整个变换可以在多项式时间内完成，因此我们得出结论：该问题是 NP 完全的。◀

这一结果的一个直接推论是：通过用 $\exists$ 对所有顶点进行量化，其量化版本是 NP 困难的，并且属于 PSPACE。

▶**问题 22**（无环 QMAX 2-SAT-2-2）。
输入：一个量化的 2-*CNF* 公式 $\psi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \varphi$，满足变量—子句关联图 G_φ 是无环的，每个变量至多正向出现两次、负向出现两次，且给定一个整数 k。问题：满足者能否同时满足 k 个 ψ子句？

▶**推论 23**。 无环 *QMAX 2-SAT-2-2* 是NP 困难的，并且属于PSPACE。

证明。 其 NP 困难性直接由 无环 MAX 2-SAT-2-2 继承而来，方法是用 $\exists$ 对所有变量进行量化。该问题属于 PSPACE ，因为它是 $\mathrm{QMAX\ 2\text{-}SAT}$ 的一个子问题。◀

这些 Q-MAX 2-SAT 的新变体相当通用，可用于若干归约。特别是， [3], 中给出的从 Q-MAX 2-SAT 归约的结果证明了图上的计分位置游戏 Incidence 是 PSPACE 完全的；该归约以公式的文字-子句关联图为起点，只向其中添加孤立顶点和叶节点。因此，我们通过以下推论，几乎回答了论文中关于树上的该博弈复杂性的开放问题:

▶**推论 24.** 即使将范围限制为森林，*Maker-Breaker* 关联博弈仍是PSPACE完全的；即使将范围限制为毛毛虫树的并，它仍是NP难的。

证明。 我们采用与 [3], 相同的归约，只是将输入问题改为无环 QMAX 2-SAT(或无环 QMAX 2-SAT-2-2）。由于该构造是在公式的文字-子句关联图上添加叶节点，因此根据归约所针对的问题不同，得到的图要么是森林，要么是毛毛虫树。◀

3.2 树

现在，我们已具备所有必要工具，可以证明将 SHVG 限制在树上时是 PSPACE 完全的。证明依赖于从无环 Q-MAX 2-SAT 出发的归约，而我们已证明该问题是 PSPACE-hard。由于 SHVG 属于 PSPACE，因为它是一种计分位置游戏 [3], ，结论即得。

▶**定理 25.** 树上的 *SHVG* 是 PSPACE 完全的。

证明。我们给出一个从无环 Q-MAX 2-SAT 到该问题的归约。设（ψ， k）是一个无环 Q-MAX 2-SAT 实例，其中 $\psi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ φ 含有 φ 一个无环且无量词的 2-CNF 公式。通过添加不出现在任何子句中的变量（因此不会破坏文字-子句关联图的无环性），不妨设 $Q_i = \exists$ 为奇数，且 $Q_i = \forall$ 为偶数。归约的第一步是复制我们的公式：将其转换为 $\psi' = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n Q_{n+1} x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} \dots Q_{2n} x_{2n}$ $\varphi \wedge \varphi'$，其中 φ' 由 φ 得到，方法是将每个 x_i 改为 x_{n+i}。注意，任何满足 p 个子句的策略，都可以应用两次，以满足 ψ' 中的 $2p$ 个子句。设 m 为 $\varphi \wedge \varphi'$中的子句数。

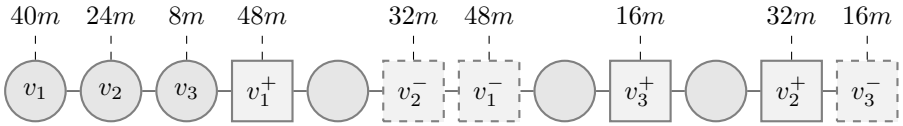


图4 由公式 $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_2)$ 得到的树

我们将通过对 $\varphi \wedge \varphi'$的文字-子句关联图 $G_{\varphi \wedge \varphi'}$ 进行修改，逐步构造一棵树。

根据假设，该图是无环的，因此必为树 T_1、T_2、$\ldots T_\ell$ 的不交并。现在我们基于该图构造一棵树 T。我们从 $T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_\ell$ 开始。对于每棵树 T_i，固定其两个叶节点 v_i 和 u_i，然后通过在 u_i 和 v_{i+1} 之间添加边（对于 $1 \leq i < \ell$），将所有树连接成一棵树。我们将 $\sim$ 记为 $+$ 或 $-$。对于每条边 $\{v_i^{\sim}, v_j^{\sim}\}$，引入一个新顶点 $v_{ij}^{\sim\sim}$，并将该边替换为两条边：$\{v_i^{\sim}, v_{ij}^{\sim\sim}\}$ 和 $\{v_{ij}^{\sim\sim}, v_j^{\sim}\}$。

接下来，对每个顶点 $v_i^{\sim}$，我们连接 $16(n+1-i)m$ 个叶节点。最后，我们引入 n 个新顶点 v_i，为每个顶点连接 $16(n+1-i)m - 4m$ 个叶节点，在它们之间添加边，并在 v_n 和 v_1之间添加边。

图4给出了一个归约示例。
定义 s_0 如下：

$$s_0 = \left(\sum_{1 \leq i \leq 2n} 8(n+1-i)m \right) + \left(\sum_{1 \leq i \leq n} 8\big(n+1-(2i-1)\big)m - 4m \right)$$

设 $s = s_0 + m - k + 1$。T和 s 都可以在多项式时间内构造出来。我们证明，反驳者在 $(\psi,\ k)$ 中获胜，当且仅当 Maker 在 $(T,\ s)$ 中获胜。
首先，可以使用引理 13 对每个叶节点着色。将此步骤中着色的顶点记为 M 和 B。然后，若 $1 \leq i \leq j \leq 2n$，则有 $h(v_i^{\sim}) \geq |N(v_i) \setminus B|$ 和$h(v_i) \geq |N(v_j^{\sim}) \setminus B|$。因此，根据引理 12，存在一种最优策略，使 Maker 和 Breaker 按照以下顺序为顶点着色，其中 $1 \leq i \leq n$ 按递增顺序排列：

- Maker 给$\{v_{2i-1}^+, v_{2i-1}^-\}$中的一个顶点染色。
- Breaker 给$\{v_{2i-1}^+, v_{2i-1}^-\}$中的另一个顶点染色。
- Maker 给 v_{2i-1} 染色。Breaker 给$\{v_{2i}^+, v_{2i}^-\}$中
- 的一个顶点染色。Maker 给$\{v_{2i}^+, v_{2i}^-\}$中的另一
- 个顶点染色。Breaker 给 v_{2i} 染色。

考虑这一最优顺序，可以注意到，所有步都是被迫的，或者必须从两个与相同数量叶节点相连的顶点（v_i^+, v_i^-）中选择。此外，由于与顶点 $v_i^{\sim}$和 v_i 相连的叶节点已被 Breaker 染色，因此这两个顶点都不可能快乐。因此，我们知道这一步之后，Maker 恰好染色了 s_0 个快乐顶点。

最后，在前面描述的所有顶点都染色后，只剩下顶点$v_{ij}^{\sim\sim}$。这些顶点最后染色；当且仅当它们相邻的两个顶点都由 Maker 染色时，它们才可能快乐。

首先，假设反驳者在 (ψ, k) 中有一个获胜策略$\mathcal{S}$。我们为 Maker 定义如下策略：

- 对于 $0 \le i \le n-1$，如果反驳者必须将 x_{2i+1} 设为 True，Maker 就给 v_i^- 着色，从而确保 Breaker 会给 v_i^+ 着色；否则，她给 v_i^+ 着色，从而确保 Breaker 给 v_i^- 着色。对于
- $1 \le i \le n$，如果 Breaker 给 v_{2i}^+ 着色，Maker 就认为满足者在$\mathcal{S}$中已将 x_{2i} 设为 True。否则，她认为满足者已将 x_{2i} 设为 False。当 x_n 被下出时，Maker 从头开始再次应用$\mathcal{S}$。
-

当所有顶点 v_i，v_i^+ 和 v_i^- 都已被选取后，如果 C_j 是 $\varphi \wedge \varphi'$ 中一个尚未满足的子句，那么它的两个文字都已被置为 False。因此，由于 $\mathcal{S}$ 是满足者在 $(\psi,\ k)$ 中的获胜策略，我们知道 φ 中至多有 $k-1$ 个子句得到满足，且 φ' 中至多有 $k-1$ 个子句得到满足。因此，至少有 $2\big(m-(k-1)\big)$ 个顶点 $v_{ij}^{\sim\sim}$ 的两个邻居都被 Maker 染色。于是，Maker 只需在这些顶点上行棋，就能确保至少将其中一半染色，即 $m-k+1$ 个，并且总共染色 $s_0+m-k+1=s$ 个快乐顶点。

反过来，假设满足者在 $(\psi,\ k)$ 中有获胜策略 $\mathcal{S}$。我们为 Breaker 定义如下策略：

- 对于 $0 \le i \le n-1$，如果满足者必须将 x_{2i+1} 设为 True，Breaker 就给 v_i^+ 着色；否则，他给 v_i^- 着色。对于 $1 \le i \le n$，如果 Maker 给 v_{2i}^+ 着色，Breaker 就给 v^-2i
- 着色，并认为满足者在 $\mathcal{S}$ 中已将 x_{2i} 设为 False。否则，她认为满足者已将 x_{2i} 设为 True。当 x_n 被操作时，Breaker 从头开始再次应用 $\mathcal{S}$。
-

现在，当所有顶点（v_i、v_i^+ 和 v_i^-）都已被操作后，同上面的论证可知，任何被 $\mathcal{S}$ 满足的子句，都有一个文字被 Breaker 操作。因此，由于 $\mathcal{S}$ 是 ψ中的获胜策略，至少有 $2k$ 个顶点 $v_{ij}^{\sim\sim}$已经被 Breaker 控制，所以至多有 $2(m-k)$ 个顶点尚未被其控制。通过配对策略，Breaker 可以确保至少控制其中的 $m-k$ 个，从而保证 Maker 的得分至多为 $s_0+m-k<s$。因此，Breaker 获胜。◀

3.3 毛毛虫树

现在我们考虑限制在毛毛虫树上的 SHVG。若移除图中的所有叶节点后得到一条路径，则称该图为毛毛虫树。换言之，毛毛虫树由一条中心路径构成，其部分或全部节点上连接着悬挂顶点。

▶**定理 26.** 毛毛虫树上的 *SHVG* 是NP-困难的。

证明。 证明与树上的情形完全相同，唯一的区别是我们不再使用 无环 Q-MAX 2-SAT，而是采用 无环 Q-MAX 2-SAT-2-2，该问题已被证明是NP-困难的。在这种情况下，构造出的图 G_φ 不仅是若干棵树的不交并，而且特别地是若干条路径的不交并，因为图中的每个顶点的度最多为 2。同样的归约仍然成立，并生成一棵毛毛虫树。这表明SHVG 在毛毛虫树上仍然是 NP-困难的。◀

4 高效算法

由于该博弈在森林上已经是 PSPACE 完全的，在毛毛虫树上也属于 NP 困难，我们旨在为树的其他子类寻找高效算法。具体而言，本文聚焦于路径并和细分星图。

4.1 路径并

我们首先考虑路径并。

4.1.1 单条路径

我们从研究路径开始。路径 P_n 由其顶点集合 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 以及其边集合 $\{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \le i \le n-1\}$定义。

▶**定理27**。 设 P_n 是一个含有 n 个顶点的路径。则：若 n 为偶数，则 $Ms(P_n) = Bs(P_n) = 0$。若 n 为奇数，则 $Ms(P_n) = 1$ 且 $Bs(P_n) = 0$。

证明。 首先假设 n 为偶数。
于是，支配者在 P_n 上赢得 Maker-Breaker支配博弈。因此，根据推论8，我们有 SHVG(P_n) $= 0$，因此，$Ms(P_n) = Bs(P_n) = 0$。
现在假设 n 为奇数，则在 P_n 上的支配博弈结果为 $\mathcal{N}$。因此，根据注7，$Bs(P_n) = 0$，且 $Ms(P_n) \ge 1$。为证明 $Ms(P_n) \le 1$，令 $n = 2k+1$，并将 P_n 的顶点记为 $(v_1, \dots, v_{2k+1})$。考虑 Breaker 的以下配对策略：若 Maker 将 $\{v_{2i-1}, v_{2i}\}$ 中的某个顶点染色，则对任意 $1 \le i \le k$，Breaker 将另一个顶点染色。该策略确保 $v_1, \dots, v_{2k}$ 中没有顶点会成为快乐顶点，因此，Maker 唯一能使之成为快乐顶点的顶点是 v_{2k+1}，从而可得 $Ms(P_n) \le 1$。◀

4.1.2 路径并

一旦可以计算单条路径上的得分，就可以利用米尔诺宇宙所提供的群结构来处理路径并。特别地，若 n 为偶数，由于，$Ms(P_n) = Bs(P_n) = 0$，$P_n = 0$，因此对于任意图 G，都有 $Ms(G + P_n) = Ms(G)$，且 $Bs(G + P_n) = Bs(G)$。

▶ **引理28.** 设 n、m 为两个奇整数，则有 $Ms(P_n + P_m) = Bs(P_n + P_m) = 1$。因此 $P_n + P_m = 1$。

P证明。 由于 $Ms \ge Bs$，只需证明 $Bs(P_n + P_m) \ge 1$ 以及 $Ms(P_n + P_m) \le 1$。
假设 Breaker 先行。交换 n 和 m后，不妨设他的第一步是在 P_n中的一个顶点 v_0。现在轮到 Maker 行动，因此 Maker 可以确保得分为 1，因为$Ms(P_n + P_m, \emptyset, \{v_0\}) \ge Ms(P_m, \emptyset, \emptyset) + Bs(P_n, \emptyset, \{v_0\}) \ge Ms(P_m, \emptyset, \emptyset) = 1$，由定理 5 可知。

现在假设 Maker 先行。令 $n = 2k+1$和 $m = 2l+1$。记 P_n的顶点为 $u_1, \dots, u_{2k+1}$，记 P_m的顶点为 $v_1, \dots, v_{2l+1}$。考虑 Breaker 使用如下配对策略：$\{(u_1, v_1)\} \cup \{(u_{2i}, u_{2i+1})\}_{1 \le i \le k} \cup \{(v_{2i}, v_{2i+1})\}_{1 \le i \le l}$。该策略保证所有顶点 u_i 和 v_i（对 $i \ge 2$ 而言）都不会是快乐的，并且 Maker 至多给u_1, v_1中的一个顶点着色，从而保证其中至多有一个是快乐的。因此，$Ms(P_n + P_m) \le 1$。◀

▶ **推论 29.** 设 $k_1, \dots, k_p$ 为整数，其中有 l 个是奇数。我们有 $Ms(P_{k_1} + \cdots + P_{k_p}) = \lceil \frac{l}{2} \rceil$ 以及 $Bs(P_{k_1} + \cdots + P_{k_p}) = \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$

▶ 注 30. 由于环在 Maker-Breaker支配博弈中的结果为$\mathcal{D}$，因此可以将它们加入任意博弈而不改变得分。由此，推论 29 可以推广到最大度为 2 的图。

4.2 细分星图

现在，我们聚焦于细分星图。这类图由有限条路径连接到一个中心顶点构成。细分星图的复杂性介于路径和更一般的树结构之间，因为它们是只有一个度大于 3 的顶点的树。

16 关于 Maker-Breaker 快乐顶点博弈的复杂性

▶ **引理 31**。 设(G, M, B) 为一个游戏局面。对于任意 $v \in M$, $s(G, M, B) \geq s(G \setminus \{v\}\ M \setminus \{v\}\ B)$，均有此结论。

证明。设 S 是 Maker 在 $s(G \setminus \{v\}\ M \setminus \{v\}\ B)$ 中的一种策略。在具有相同未着色顶点集的 (G, M, B) 中应用 S，则在 (G, M, B) 中变为快乐的任何顶点，在 $s(G \setminus \{v\}\ M \setminus \{v\}\ B)$ 中也同样是快乐的，这就证明了结论。◀

▶ **定理 32**。 设 S 是通过将 k 条路径 $P_1, \ldots, P_k$ 连接到一个中心顶点 C 而得到的细分星图。如果 $k \leq 2$, S 是一条路径，则 S 上的得分由定理27给出。否则，记 l 为连接到 C的奇路径数。我们有 $Ms(S) = \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ 和 $Bs(S) = 0$，除非 $l = 0$，此时 $Ms(S) = 1$。

证明。 设 S 是一个细分星。首先，由于在 S上的 Maker-Breaker支配博弈的结果为 $\mathcal{N}$ [8], ，我们有 $Bs(S) = 0$。

设 C为其中心顶点， P_1、……、 P_k 为连接到它的路径。注意，若 $k \leq 2$,S 是一条路径，且其得分由定理27给出，即当顶点数为奇数且由 Maker 先手时得分为 1，否则得分为 0。

现在假设由 Maker 先手且 $k > 2$。令 l 为 S中的奇路径数量，并令 $P_1, \ldots, P_l$ 为这些 l 奇长度路径。假设 $l \geq 1$。若 Maker 在开始时给中心顶点着色，通过给 C着色，她可以保证得分至少为 $Bs(S, \{C\}\ \emptyset)$。根据引理 31， $Bs(S, \{C\}\ \emptyset) \geq Bs(S \setminus C, \emptyset, \emptyset)$；又由于 $S \setminus C$是路径并，根据推论 29， $Bs(S \setminus C, \emptyset, \emptyset) = \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$。因此 $Ms(S) \geq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$。

令 $n_i = 2k_i + 1$ 为 P_i的长度，并将 P_i中$1 \leq i \leq l$ 的顶点记为 $u_1^i, \ldots, u_{2k_i+1}^i$， 使得 $u_{2k_i+1}^i$ 与 C相连。Breaker 可以采用配对策略，从叶节点开始配对相邻顶点，从而阻止 Maker 在偶长度路径中得分。此外，配对$\{(u_{2j-1}^1, u_{2j}^1)\}_{1 \leq j \leq k_1} \cup \{(u_{2k_1+1}^1, C)\}$使 Breaker 能够阻止 Maker 在 $P_1 \cup \{C\}$中得分。因此，唯一可能变得快乐的顶点位于$(P_2 + \cdots + P_l)$中。于是，当 Maker 在$(P_2 + \cdots + P_l)$中落子时，应用推论 29 中给出的策略；并在 $S \setminus (P_2 + \cdots + P_l)$中应用他的配对策略。由于 $Ms(P_2 + \cdots + P_l) = \lceil \frac{l-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$，我们得出 $Ms(S) \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$。综上，我们有 $Ms(S) = \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$。

然而，如果 $l = 0$，Maker 仍然可以保证得分为 1。我们通过归纳法证明这一结果。由于 $k > 2$，至少存在两条偶数长度路径 P_1 和 P_2。设 S_n 为将长度恰为 2 的 n 条路径 P_1、P_2、……、P_n 分别连接到中心顶点 C所形成的细分星。通过依次为所有叶节点的邻居着色，Maker 迫使 Breaker 为每个叶节点着色；否则，Maker 只需为某个叶节点及其邻居着色，就能得到 1 分，从而证明完毕。当 Maker 为所有叶节点的邻居着色且 Breaker 为所有叶节点着色后，又轮到 Maker 行动。所有与中心顶点相邻的顶点都已由 Maker 着色，因此 Maker 为中心顶点着色即可得到 1 分。因此， Ms（S_n）至少为 1。对于 $n = 3$，这一过程如图 5 所示。

如果 S是通过将 n条路径 P_1、P_2、……、P_n连接到中心顶点 C而形成的，其中每条路径的长度为 $2k_i$，且假设 P_1 的长度为 $2k_1 > 2$。那么，Maker 为 P_1的叶节点的邻居着色，迫使 Breaker 必须在该叶节点上落子，否则 Maker 下一步就能得到 1 分。根据引理 31 和引理 11，Maker 在这一局面上可以确保的得分至少等于将 n条路径 P_1、P_2、……、P_n连接到 C所形成的 S'的得分，其中 P_1'是长度为 $2k_1 - 2$的路径；进一步通过归纳法，该得分至少等于 S_n的得分。

反过来，Breaker 可以采用配对策略，阻止除中心顶点以外的任何顶点变得快乐：将每条路径上的顶点两两配对即可，而这可以通过从叶节点开始，将相邻顶点依次配对来实现。唯一未被配对、

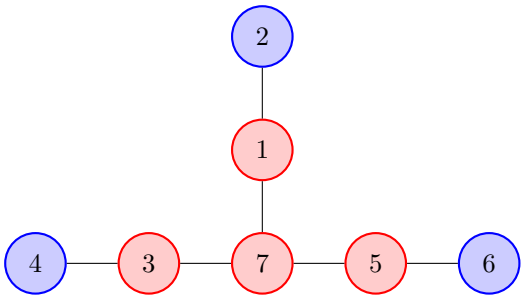


图 5 所有分支长度均为 2 的星图上的策略。顶点上的数字表示它们被选取的顺序。

因此可能变得快乐的顶点，以及游戏结束时的顶点是 C，这证明了 $Ms(S) \leq 1$。综上，$Ms(S) = 1$。◀

4.3 针对邻域多样性的FPT 算法

近年来，人们对位置博弈的参数化复杂性产生了浓厚兴趣；它是为通常难以求解的博弈设计高效算法的一条有前景的途径。Bonnet、Gaspers、Lambilliotte、Rümmele 和 Saffidine 已证明，以步数为参数的 Maker-Breaker 位置博弈是 W[1] 困难的，但在若干图类中，对于同一参数，可以在固定参数可 tractable 时间内求解 [6]。然而，这些一般性结果无法用于考虑得分的情况，因此不能直接应用于我们的框架。在计分位置博弈领域， [3] 中首次考虑的参数是邻域多样性；该参数由 Lampis 引入 [18], ，用于衡量图中顶点邻域的多样程度。我们针对这一参数提出了一种 FPT算法，其中 w 是输入图的邻域多样性。请注意，由于该博弈在毛毛虫树上已经是 NP 困难的，因此在经典复杂性假设下，对于路径宽度、树宽、孪生宽度或反馈边数等大多数一般参数，人们无法期待存在 FPT算法。

我们首先回顾，若两个顶点 u和 v具有相同的类型，则 $N(u) \setminus \{v\} = N(v) \setminus \{u\}$。若 G 是一个图，则 G的邻域多样性（记作 $nd(G)$）定义为满足下述条件的最小整数 w： G 的顶点可以划分为 k 个集合 V_1、.....、 V_w，且每个集合中的所有顶点类型相同。这样的划分称为G的邻域划分。注意，这意味着每个集合 V_i 要么是团，要么是独立集。

归约的主要思路是使用引理 13，将所有同类型的顶点都染色，但至多留下 1 个。然而，与为博弈 Incidence [3],提供的核化不同，我们在这里无法轻易移除已认领顶点，因为其中一些顶点可能需要 Maker 走好几步才能为得分做出贡献。因此，我们的固定参数可 tractable 算法无法提供多项式核，而其是否存在仍是一个开放问题。

▶ **定理33**。 设 $G = (V, E)$ 是一个邻域多样性为 w 的图。*SHVG* 中的得分可以在以邻域多样性为参数的 FPT 时间内计算。特别地， $s(G)$ 可以在 $O(3^w(|E| + |V|))$ 时间内计算。

证明。 我们首先计算 V 的邻域划分，这可以在 $O(|E|+|V|)$时间 [18] 内完成

设 u， v为两个类型相同的顶点。根据定义，我们有 $N(u) \setminus \{v\}$ $=N(v) \setminus \{u\}$。因此，对于任意一个博弈局面 $(G,\ M,\ B)$ 以及任意子集 $X \subseteq V \setminus \{u,\ v\}$，

我们有：

$$|\{w \in V \mid N[w] \subseteq X \cup M \cup \{u\}\}| = |\{w \in V \mid N[w] \subseteq X \cup M \cup \{v\}\}|.$$

因此，引理 13 可应用于每一对类型相同的顶点。

将此引理应用于所有同类型的未着色顶点对后，所得局面中每种类型至多有一个顶点仍未着色，且其得分与原实例相同。随后，我们可以使用动态规划探索这些顶点上的所有可能博弈。由于未着色顶点的数量至多为 w，且每个顶点都可能处于三种状态之一（未着色、由 Maker 着色或由 Breaker 着色），因此可以在 $O(3^w)$ 时间内完成这一探索。

最后，对于所有顶点都已着色的局面，可以在$\mathcal{O}(m+n)$时间内计算得分。综上，整体复杂性为$\mathcal{O}(3^w(|E|+|V|))$。◀

5 结论

本文开启了对 Maker-Breaker 计分快乐顶点游戏的研究。该游戏是支配博弈的计分版本，我们重点考察了若干简单的图类。在我们的研究中，关于毛毛虫树的 NP 难性证明与 [4], 提出的一个问题有关：他证明了支配博弈在区间图上属于 NP，并询问该问题是否为 NP 完全。在快乐顶点游戏的情形下，毛毛虫树上的 NP 难性结果使我们不禁思考：对于这一类图，该游戏属于 NP，还是 PSPACE 完全?

在其他值得考察的自然图类中，对邻域多样性相关结果的自然推广，是研究模宽度有界的图。一个自然的起点是余图，其模宽度为 0，且已知 Maker-Breaker 支配博弈在这类图上可在多项式时间内求解。不过，这里的研究并不那么简单，因为隔离单个顶点并不会结束博弈：在由多个余图取并构成的图上进行博弈，且每个余图都恰有一个全邻顶点时，Maker 的一步棋会将其中一个余图替换为其各连通分量的并，而 Breaker 的一步棋则会移除图的一个连通分量。这种特殊的行为使得提出策略变得困难。

统计 Maker 声称拥有的获胜集数量，似乎是 [3] 中首次引入的一种 Maker-Breaker 博弈的自然推广。对于 Maker 获胜的实例，一个自然的问题是考察图上的其他经典位置游戏，并统计她能够填满多少个获胜集。近年来，已有研究探讨图上其他经典位置游戏的复杂性 [9], ，从计分的角度观察这些博弈，似乎是对其研究自然的新进展。特别是，对 H-博弈的研究促使人们进一步研究 Maker 能够构造的三角形数量 [14],；对这一博弈进行算法研究，也是我们结果的自然延伸。

参考文献

1 Akanksha Agrawal. 快乐顶点着色的参数化复杂性研究。载于国际组合算法研讨会，第103–115页。Springer，2017。2 NR Aravind、Subrahmanyam Kalyanasundaram 和 Anjeneya Swami Kare。树上快乐顶点着色问题的线性时间算法。载于国际组合算法研讨会，第281–292页。Springer，2016。

3 Guillaume Bagan、Quentin Deschamps、Eric Duchêne、Bastien Durain、Brice Effantin、Valentin Gledel、Nacim Oijid 和 Aline Parreau。Incidence：一种图上的计分位置游戏。《离散数学》，347(8):113570，2024年。4 Guillaume Bagan、Éric Duchêne、Valentin Gledel、Tuomo Lehtilä 和 Aline Parreau。Maker–Breaker 支配游戏的划分策略。《算法学》，87(2):191–222，2025年。 doi:10.1007/s00453-024-01280-x。5 Piotr Berman 和 Marek Karpinski。关于一些更紧的不可近似性结果。载于《自动机、语言与编程：第26届国际研讨会》，ICALP'99，捷克共和国布拉格，1999年7月11–15日，论文集，第200–209页。Springer，2002。6 Édouard Bonnet、Serge Gaspers、Antonin Lambilliotte、Stefan Rümmele 和 Abdallah Saffidine。位置游戏的参数化复杂性。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Piotr Indyk、Fabian Kuhn 和 Anca Muscholl（编），《第44届自动机、语言与编程国际研讨会》（ICALP 2017），第80卷《莱布尼茨国际信息学会议录》（LIPIcs），第90:1–90:14页，德国达格施图尔，2017。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心。URL: https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.ICALP.2017.90, doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2017.90。7 Pakanun Dokyeesun。图的笛卡尔积上的 Maker–Breaker 支配游戏。《组合学与优化通讯》，第–页，2025年。URL: https://comb-opt.azaruniv.ac.ir/article_14917.html, arXiv:https://comb-opt.azaruniv.ac.ir/article_14917_7912edad7574bc7abc41f3b736b7f1c9.pdf, doi:10.22049/cco.2025.29866.2198。8 Eric Duchene、Valentin Gledel、Aline Parreau 和 Gabriel Renault。Maker–Breaker 支配游戏。《离散数学》，343(9):111955，2020年。9 Eric Duchêne、Valentin Gledel、Fionn Mc Inerney、Nicolas Nisse、Nacim Oijid、Aline Parreau 和 Miloš Stojaković。图的边集上的 Maker–Breaker 游戏的复杂性。《离散应用数学》，361:502–522，2025年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X24004785, doi:10.1016/j.dam.2024.11.012。10 Eric Duchêne、Nacim Oijid 和 Aline Parreau。影响力问题的二部实例。《理论计算机科学》，982:114274，2024年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030439752300587X, doi:10.1016/j.tcs.2023.114274。11 Hiroshi Eto、Akiko Fujimoto、Hironori Kiya、Ruka Matsushita、Eiji Miyano、Yuto Murao 和 Toshiki Saitoh。快乐顶点游戏。载于《计算与网络国际研讨会》（CANDAR 2025）论文集，2025年。12 Florian Galliot。4-均匀的 Maker–Breaker 和 Maker–Maker 游戏是 PSPACE 完全的，2025年。URL: https://arxiv.org/abs/2509.13819, arXiv:2509.13819。13 Florian Galliot、Sylvain Gravier 和 Isabelle Sivignon。秩为3的超图上的 Maker–Breaker 游戏可在多项式时间内求解，2025年。URL: https://arxiv.org/abs/2209.12819, arXiv:2209.12819。14 Christian Glazik 和 Anand Srivastav。Maker–Breaker 三角形游戏的新界。《欧洲组合学杂志》，104:103536，2022年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669822000324, doi:10.1016/j.ejc.2022.103536。15 Alfred W Hales 和 Robert I Jewett。正则性与位置游戏。载于《组合学经典论文》，第320–327页。Springer，2009。16 Olof Hanner。位置游戏之和的平均对局。《太平洋数学杂志》，9:81–99，1959年。URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120425420。17 Finn Orson Koepke。5-均匀超图上的 Maker–Breaker 游戏是 PSPACE 完全的。arXiv 预印本 arXiv:2502.20271，2025年。18 Michael Lampis。关于树宽限制情形的算法元定理。《算法学》，64(1):19–37，2012年。doi:10.1007/s00453-011-9554-x。19 Urban Larsson。《无胜算游戏5》，第5卷。剑桥大学出版社，2019年。20 Rhyd Lewis、Dhananjay Thiruvady 和 Kerri Morgan。寻找快乐：最大快乐顶点问题分析。《计算机与运筹学》，103:265–276，2019年。

20 关于 Maker-Breaker 快乐顶点博弈的复杂性

21 John Milnor. 位置游戏的和。《数学年刊研究》（《博弈论贡献》，*HW Kuhn* 和 *AW Tucker* 编），普林斯顿，2(28):291–301，1953年。22 Nacim Oijid. 图上的位置游戏复杂度。博士论文，克洛德·贝尔纳-里昂第一大学，2024年。23 Nacim Oijid. 有界度量词布尔公式与位置游戏。载于 Irene Finocchi 和 Loukas Georgiadis 编，算法与复杂性，第121–135页，尚，2025年。施普林格·自然瑞士。24 Md Lutfar Rahman 和 Thomas Watson. 6-均匀 Maker-Breaker 游戏是 PSPACE 完全的。《组合数学》，43(3):595–612，2023年。25 Thomas J Schaefer. 关于某些双人完全信息游戏的复杂性。《计算机与系统科学杂志》，16(2):185–225，1978年。26 Larry J. Stockmeyer 和 Albert R. Meyer. 需要指数时间的字问题（初步报告）。载于第五届年度 *ACM* 计算理论研讨会论文集，第1–9页，1973年。27 Peng Zhang 和 Angsheng Li. 网络同质性的算法方面。《理论计算机科学》，593:117–131，2015年。网址：`https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397515005058`，`doi:10.1016/j.tcs.2015.06.003`。28 Peng Zhang、Yao Xu、Tao Jiang、Angsheng Li、Guohui Lin 和 Eiji Miyano. 最大快乐顶点与边问题的改进近似算法。《算法学》，80(5):1412–1438，2018年。