arXiv:2601.07677v1 [math.DG] 12 Jan 2026

常标量曲率凯勒度量的耦合连续性方程

XI SISI SHEN* 和 KEVIN SMITH

Abstract. 受 Li-Yuan-Zhang 的一个抛物型系统和 La Nave-Tian 的连续性方程启发，我们研究一个关于凯勒度量 ω 和闭 (1,1)-形式 α的椭圆方程组。假设 ω满足一致估计，我们证明了高阶估计，并证明该方程组光滑收敛至一个与调和 (1,1)-形式耦合的常标量曲率凯勒度量。当 $c_1(X) < 0$ 时，我们利用该方程组的一个简化形式，重新得到凯勒-爱因斯坦度量的存在性结果。对于亏格至少为 2 的黎曼曲面，我们证明从一大类初始数据出发，光滑收敛至唯一的凯勒-爱因斯坦度量。

1 Introduction

设 X 是一个复维数为 n的紧凯勒流形。在给定的凯勒类中寻找典范度量的研究由 Calabi 在其开创性论文 [4]中开启。他引入了泛函

$$\mathrm{Cal}(\omega) = \int_X R^2\, \omega^n,$$

其中 R 是 ω的标量曲率，其临界点称为极值度量，而其极小化子是常标量曲率 K¨ahler（cscK）度量。此前，K¨ahler-Einstein 度量这一特殊情形由 Aubin [1] 在$c_1(X) < 0$ 以及 Yau [40] 在 $c_1(X) < 0$ 或 $c_1(X) = 0$时著名地解决。K¨ahler-Einstein 度量的存在性问题可归结为一个称为复 Monge-Amp`ere 方程的二阶全非线性椭圆偏微分方程。相比之下，一般的常标量曲率凯勒问题等价于一个四阶偏微分方程，因此情况要复杂得多。近期，Chen-Cheng [10, 9, 8] 在常标量曲率凯勒问题上取得了重大突破，他们将四阶方程改写为一个二阶方程组

$$F = \log \frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n}$$
$$\Delta_\varphi F = -\underline{R} + \mathrm{tr}_\varphi \,\mathrm{Ric}(\omega).$$

Calabi 为 K¨ahler 度量引入了 Calabi 流，该流于 [4, 5] 作为一种抛物型方法，用于研究常标量曲率凯勒度量的存在性。该流由下式给出

$$\partial_t \omega(t) = i\partial\bar\partial R(\omega(t))$$

其驻点为常标量曲率凯勒度量。Crusciel 研究了黎曼曲面上的 Calabi 流，并证明了其长期存在性以及收敛到常标量曲率凯勒度量的性质 [15] 。Chen 使用集中紧性论证，对黎曼曲面上的这一结果给出了另一种证明 [7]。Chen-He [11]证明，只要里奇曲率

*部分经费由美国国家科学基金会（NSF）资助，资助编号为 DMS-2601275。

保持有界，该流便会存在。Sz´ekelyhidi [35] 证明，若曲率张量始终一致有界且 Mabuchi 能量是 proper 的，则该流会收敛到常标量曲率凯勒度量。Chen-Sun 在 [13], 证明了该流的稳定性：也就是说，若初始度量与常标量曲率凯勒度量非常接近，则该流存在并一致收敛到常标量曲率凯勒度量。有关 Calabi 流的更多结果可见 [2, 3, 6, 12, 17, 20, 21, 22, 23, 25, 32, 33, 34, 36]。

在 [27], Li-Yuan-Zhang 引入了抛物型系统

$$\partial_t \omega = -\operatorname{Ric}(\omega) + \lambda\omega + \alpha \tag{1.1}$$

$$\partial_t \alpha = \Delta\alpha. \tag{1.2}$$

它是针对凯勒度量 ω 的修正 K¨ahler-Ricci 流，并与闭 (1，1)-形式 α 的热流耦合，其驻点是由常标量曲率凯勒度量与调和 (1，1)-形式组成的对。因此，和 Chen-Cheng 系统一样，该系统旨在发挥 Calabi 流的作用，同时避免四阶特性。第一条方程中加入涉及 α 的项，其好处在于使流能够收敛到并非 K¨ahler-Einstein 的常标量曲率凯勒度量。关于这类早期想法，参见 [14] 及其中的参考文献。

Li-Yuan-Zhang [27] 证明了 Shi型估计，这表明如果流只存在有限时间，那么黎曼曲率张量必定会爆破。他们还证明，只要 Ric(ω) 和 α 一致有界，流就能对所有时间存在。在随后的一篇论文中，Li-Yuan [26] 证明了黎曼曲率张量的一个局部估计，并据此改进了 [27] 的结果。Fei-Guo- Phong [16] 研究了该系统的一种推广，其中 α 按照 $\partial_t\alpha = \kappa\Delta\alpha$ 演化，他们将其称为 κ-LYZ 流。他们证明，对于 $\kappa \neq 1$，所有阶导数的估计都可由 ω 和 α 上的一致估计推出。实情形下的耦合里奇流由 List [29] 和 Guo-Huang-Phong [19] 进行了研究。

在本文中，我们研究一组带有时间参数的椭圆方程组，该方程组类似于 κ-LYZ流，即

$$\frac{\omega - \hat{\omega}}{t} = -\operatorname{Ric}(\omega) + \lambda\omega + \alpha \tag{1.3}$$

$$\frac{\alpha - \hat{\alpha}}{t} = \kappa\Delta\alpha \tag{1.4}$$

从一个 K¨ähler 度量 $\hat{}\omega$ 和一个闭的 (1，1)-形式 $\hat{}\alpha$出发。其中，$\kappa > 0$ 是任意的，而 λ 是由 $c_1(X)$以及$\hat{}\omega$、$\hat{}\alpha$的上同调类所确定的常数。

通过将时间导数 $\partial_t\omega$, $\partial_t\alpha$ 替换为割线 $(\omega - \hat{}\omega)/t$、$(\alpha - \hat{}\alpha)/t$，该方程组便与抛物型方程组 (1.1)、(1.2) 相关联。这一思想由 La Nave-Tian [24] 在 K¨ahler-Ricci 流的背景下提出。在他们的情形中，一个主要优势是，连续性方程的解立即具有里奇曲率下界。Zhang-Zhang [41], 的工作研究了极小椭圆 K¨ahler 曲面上的连续性方程解，而里奇曲率下界使直径界的证明更加直接。在 [42], 中，他们研究了 Fano 纤维化情形下的解。关于 K¨ahler 度量连续性方程的更多文献见 [39, 38]，关于厄米度量的相关文献见 [31, 30, 28]。

与 κ-LYZ 流相比，我们的方程组有一个优点：所有结果都不对 κ 作任何限制。此外，高阶估计只需要 ω 的一致估计，而不需要 α。由于这些方程具有椭圆性质，C^0 的势函数估计可由极大值原理轻易得到。在 $c_1(X) < 0$ 的情形下，这足以证明高阶估计所需的 ω 一致估计。当 $c_1(X) = 0$ 时，势函数估计仅具有 $\|\varphi\|_{C^0} \leq Ct$ 的形式；尽管这不足以证明 ω 的一致估计，但仍颇有意义，因为在这种情形下，通常的复 Monge-Amp`ère 方程的极大值原理无法提供任何信息。

我们的第一个结果表明，只要度量族存在一致界，且初始度量的 K¨ahler 类中常标量曲率凯勒度量唯一，方程组的解就会光滑收敛：

定理 *1*（光滑收敛）。设 $\hat{\omega}$、$\hat{\alpha}$ 为一个 *K¨ahler* 度量和一个闭 *(1, 1)*-形式，满足 $-c_1(X) + \lambda[\hat{\omega}] + [\hat{\alpha}] = 0$，其中 $\lambda \leq 0$；并假设 $[\hat{\omega}]$ 至多包含一个常标量曲率凯勒度量。若方程组 *(1.3)*、*(1.4)* 满足如下形式的先验估计 $C^{-1}\hat{\omega} \leq \omega(t) \leq C\hat{\omega}$，则它在 $[0, \infty)$ 上存在唯一解，该解光滑收敛到 $[\hat{\omega}]$ 中唯一的常标量曲率凯勒度量 ω_∞，以及 $[\hat{\alpha}]$ 中唯一的 ω_∞-调和 *(1, 1)*-形式 α_∞。

注 1. 若 $c_1(X) < 0$ 且 $\hat{\omega} \in -rc_1(X)$ 对某个 $r > 0$ 或 $c_1(X) = 0$ 成立，那么假设 $[\hat{\omega}]$ 至多包含一个常标量曲率凯勒度量便成立，因为在这些情况下，常标量曲率凯勒度量都是 *K¨ahler*-爱因斯坦度量，且在各自的类中唯一。

结合上述注释与度量族的一致估计，我们使用该方程组的一个特殊情形，证明其光滑收敛到 $\frac{1}{\lambda}c_1(X)$ 中唯一的 K¨ahler-爱因斯坦度量，从而给出一种存在性证明的替代方法：

定理 2 (光滑收敛到 KE 度量). 假设 $c_1(X) < 0$。设 $\hat{\omega}$ 是一个满足 $-c_1(X) + \lambda[\hat{\omega}] = 0$ 且 $\lambda < 0$的凯勒度量。该方程

$$\frac{\omega - \hat{\omega}}{t} = -\operatorname{Ric}(\omega) + \lambda\omega$$

在 $[0, \infty)$ 上有唯一解，并且该解光滑收敛到 $[\hat{\omega}]$ 中唯一的 *K¨ahler*-爱因斯坦度量 ω_∞。

对于亏格至少为 2 的黎曼曲面（这恰好是第一陈类为负的曲面），我们证明，从更一般的初始数据出发，方程组的解将光滑收敛到唯一的 K¨ahler–Einstein 度量：

定理 3（黎曼曲面上的光滑收敛）。设 X 为一黎曼曲面，具有 $c_1(X) < 0$，$A \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$，且 $\hat{\omega}$ 为满足 *A1* 的凯勒度量。则在一致范数拓扑下，存在 $\hat{\alpha} \in A$ 的一个开集，使得方程组（1.3）、（1.4）在 $[0, \infty)$ 上存在唯一解，并且该解光滑收敛到 $[\hat{\omega}]$ 中的唯一常标量曲率凯勒度量 ω_∞，以及 A中的唯一 ω_∞-调和（1，1）-形式 α_∞。

对于 ω 和 α 的 C^0 估计需要技术假设 A1（7）。该定理类似于 Fei-Guo-Phong [16], 的一个结果，其中不需要假设（A1），但假设了 $\kappa \neq 1$。

本文的组织如下。第2节介绍贯穿全文所使用的记号和基本事实。第3节介绍椭圆方程组，证明其短时间存在性，确定其驻点，并证明标量曲率下界。第4节说明该方程组可化为涉及复 Monge-Amp`ère 方程的标量方程组，并利用这一点获得关于势函数的估计。第5节在 ω的一致估计的基础上，证明高阶估计，并证明当初始度量的 K¨ahler 类中存在唯一的常标量曲率凯勒度量时，解光滑收敛于一个常标量曲率凯勒度量和调和的（1，1）-形式，从而证明定理 1。第6节通过证明势函数的 C^2 估计，在特殊情形下建立 ω 所需的一致估计；由此展示前述收敛定理的一个应用，并给出定理 2 的证明。第7节分析黎曼曲面的情形，通过估计共形因子建立 ω 的一致估计，并展示收敛定理的另一个应用，从而给出定理 3 的证明。

致谢：我们感谢 Teng Fei 和 Ben Weinkove 的有益讨论。

2 Preliminaries

本节将介绍后文要用到的记号和基本结果。设X 是一个复维数为 n的紧致复流形。

本文中涉及的所有张量均为光滑的。记 $z^1, \dots, z^n$ 为一个局部全纯坐标系。涉及指标的表达式均指在此类坐标系下书写的表达式，重复指标均表示求和。

考虑一个 K¨ahler 度量 $\omega = g_{\bar{k}j}\, i dz^j \wedge d\bar{z}^k$。该度量诱导出一个同构 $TX \simeq T^*X$，从而可以升降指标。 ω的体积形式在局部由下式给出

$$\frac{\omega^n}{n!} = \det \omega \, i dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge i dz^n \wedge d\bar{z}^n.$$

由于 ω 是 K¨ahler 流形，其 Levi-Civita 联络与 Chern 联络重合；因此存在唯一一个与复结构相容的无挠度量联络 $\nabla = \partial + \Gamma$ 。其曲率为 $R_{\bar{k}j}{}^{p}{}_{q} = -\partial_{\bar{k}} \Gamma^{p}_{jq}$，并满足 Bianchi 恒等式

$$R_{\bar{k}j\bar{q}p} = R_{\bar{k}p\bar{q}j} = R_{\bar{q}j\bar{k}p} = R_{\bar{q}p\bar{k}j}.$$

记作 Ric(ω) $= R_{\bar{k}j}\, i dz^j \wedge d\bar{z}^k$ 其中 $R_{\bar{k}j} = R_{\bar{k}j}{}^{p}{}_{q}$。上述恒等式意味着

$$R_{\bar{k}j} = R^{p}{}_{p\bar{k}j}. \tag{2.1}$$

局部地

$$\mathrm{Ric}(\omega) = -i\partial\bar{\partial} \log \omega^n$$

因此 Ric(ω) 是闭的。如果 χ 是另一个 K¨ahler 度量，则

$$\mathrm{Ric}(\omega) - \mathrm{Ric}(\chi) = -i\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega^n}{\chi^n}$$

因此，所有 K¨ahler 度量的 Ricci 形式都属于同一个类 $c_1(X)$。

对于任意闭的 (1,1)-形式 β

$$\int_X \mathrm{tr}_\omega \beta \frac{\omega^n}{n!} = \int_X [\beta] \wedge \frac{[\omega]^{n-1}}{(n-1)!} \tag{2.2}$$

其中，记号表示这仅取决于上同调类 $[\omega],[\beta]$。

关于 ω，外微分 $d = \partial + \bar\partial$ 有一个伴随算子 $d^\dagger = \partial^\dagger + \bar\partial^\dagger$。若 K 是一个多重指标，则对于 $\beta = \beta_{\bar K p}\, dz^p \wedge d\bar z^K$

$$\partial^\dagger \beta_{\bar K} = -\nabla^p \beta_{\bar K p} \tag{2.3}$$

并且对于 $\beta = \beta_{\bar K j p}\, dz^p \wedge dz^j \wedge d\bar z^K$

$$\partial^\dagger \beta_{\bar K j} = -\nabla^p \beta_{\bar K j p} - g^{r\bar s} \partial^p g_{\bar s j} \beta_{\bar K r p}. \tag{2.4}$$

定义拉普拉斯算子 $\Delta = -\frac{1}{2}(d^\dagger d + d d^\dagger)$。由此可得 $d\Delta = \Delta d$，且拉普拉斯算子 $-(\partial^\dagger \partial + \partial \partial^\dagger)$ 和 $-(\bar\partial^\dagger \bar\partial + \bar\partial \bar\partial^\dagger)$ 均等于 Δ。特别地，$\Delta h = \partial^p \partial_p h$ 作用于函数时。

计算可得

$$\int_X \nabla_j u^j \, \omega^n = 0$$

对任意向量场 u，由此可知

$$\int_X \Delta h \, \omega^n = 0$$

对任意函数 h。

若 $\lambda > 0$，则方程 $\Delta \beta = \lambda \beta$ 蕴含

$$\|d\beta\|^2 + \|d^\dagger \beta\|^2 + \lambda \|\beta\|^2 = 0$$

从而 $\beta = 0$；因此 Δ 没有正特征值。

我们将用到以下结果，这里回顾自 [27]:

引理 1 (Li-Yuan-Zhang [27] 命题 2.3)。若 ω 是一个 *Kähler* 度量，且 β 是一个闭的 (1,1)-形式，则 $\Delta \beta = i\partial\bar\partial \, \mathrm{迹}_\omega \, \beta$。

下文将使用与本节一致的记号，也就是说，所有未标记的几何对象都对应于 ω。常数 C 的值会随行变化，但始终与时间和所有未知函数无关。

3 The coupled continuity equations

设 $\hat\omega$ 为 Kähler 度量，$\hat\alpha$ 为闭 (1,1)-形式，$\lambda \in \mathbb{R}$，且 $\kappa > 0$。我们考虑方程组

$$\begin{aligned} \frac{\omega - \hat\omega}{t} &= -\mathrm{Ric}(\omega) + \lambda\omega + \alpha \\ \frac{\alpha - \hat\alpha}{t} &= \kappa \Delta \alpha. \end{aligned}$$

该方程组对每个 $t > 0$ 都是椭圆的。这里的未知量为 K¨ahler 度量 $\omega(t) = g_{\bar{k}j}(t)\, idz^j \wedge d\bar{z}^k$，以及闭 $(1,1)$-形式 $\alpha(t) = \alpha_{\bar{k}j}(t)\, idz^j \wedge d\bar{z}^k$。这一族方程组在缩放变换下保持不变

$$\omega \mapsto \omega/M, \quad \alpha \mapsto \alpha, \quad t \mapsto t/M, \quad \lambda \mapsto M\lambda, \quad \kappa \mapsto \kappa.$$

定义 $\tau = \text{迹}_\omega\, \alpha$。考虑以下方程组将会很有用：

$$\frac{n - \mathrm{tr}_\omega\, \hat{\omega}}{t} = -R + \lambda n + \tau \tag{3.1}$$

$$\frac{\tau - \mathrm{tr}_\omega\, \hat{\alpha}}{t} = \kappa \Delta \tau \tag{3.2}$$

该方程组由对 (1.3)、(1.4) 取迹并应用引理 1 得到。

由于 $\hat{}\omega$、$\hat{}\alpha$ 和 Ric(ω) 都是闭的，(1.3)、(1.4) 的解满足

$$\frac{d\omega}{t} = \lambda d\omega + d\alpha$$

$$\frac{d\alpha}{t} = \kappa \Delta d\alpha.$$

由于 Δ 没有正特征值，第二个方程表明 $d\alpha = 0$。现在第一个方程表明 $d\omega = 0$。

$\hat{}$ 令 $\Omega(t)$、$A(t)$ 分别为 $\omega(t)$、$\alpha(t)$ 的上同调类，并记 $\Omega = \Omega(0)$、$\hat{}A = A(0)$。对 (1.3)、(1.4) 取上同调类，得到

$$\frac{\Omega - \hat{\Omega}}{t} = -c_1(X) + \lambda\Omega + A \tag{3.3}$$

$$\frac{A - \hat{A}}{t} = 0 \tag{3.4}$$

$\hat{}$ 因为 $\Delta\alpha$ 由引理 1 可知是恰当的。因此 $A = A$。由 (3.3) 解出 $(1 - \lambda t)\Omega$，并利用 $\hat{}A = A$，得到

$$\begin{aligned}(1 - \lambda t)(-c_1(X) + \lambda\Omega + A) \\ &= (1 - \lambda t)(-c_1(X) + A) + \lambda(\hat{\Omega} - tc_1(X) + tA) \\ &= -c_1(X) + \lambda\hat{\Omega} + \hat{A}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 现在我们假设 $-c_1(X) + \lambda\Omega + A = 0$。由 (3.5) 可知，这意味着 $-c_1(X) + \lambda\Omega + A =\hat{} 0$。由 (3.3) 可见，$\Omega = \Omega$。因此，在此假设下，这些类都不随时间变化。

将 (2.2) 分别应用于 ω、Ric(ω) 和 α，我们看到这些量

$$V = \int_X \Omega^n$$

$$\underline{R} = \frac{n}{V} \int_X c_1(X) \wedge \Omega^{n-1}$$

$$\underline{\tau} = \frac{n}{V} \int_X A \wedge \Omega^{n-1}$$

只取决于所标示的上同调类，其中后两个量分别是 R 和 τ 的平均值。按照前面所示的方式进行缩放后，我们可以在方便时假设 $V = 1$。

稍微滥用记号，我们有时会写作 R 或 τ，以表示上文所示的值，即使我们目前仅给出了必要的上同调类，尚未选择代表元。

条件 $-c_1(X) + \lambda\Omega + A = 0$ 使我们可以写成

$$-\mathrm{Ric}(\omega) + \lambda\omega + \alpha = i\partial\bar{\partial}F \tag{3.6}$$

对于函数 $F(t)$，记 $F = F(0)$。特别地

$$-R + \lambda n + \tau = \Delta F \tag{3.7}$$

and

$$-\underline{R} + \lambda n + \underline{\tau} = 0. \tag{3.8}$$

这表明

$$\lambda = \frac{1}{n}(\underline{R} - \underline{\tau}) = \frac{1}{V}\int_X (c_1(X) - A) \wedge \Omega^{n-1} \tag{3.9}$$

现在我们证明解的短时间存在性：

引理 2（短时间存在性）。设 $\hat{\omega}$ 是一个 **Kähler** 度量，$\hat{\alpha}$ 是一个满足 $-c_1(X) + \lambda[\hat{\omega}] + [\hat{\alpha}] = 0$ 的闭 **(1, 1)**-形式。假设 $\omega(t)$、$\alpha(t)$ 在 $[0, T)$ 上对某个 $T \in (0, \infty)$ 求解方程 **(1.3)**、**(1.4)**。那么，$\omega(t)$、$\alpha(t)$ 可延拓为在 $[0, T + \varepsilon)$ 上的解，其中某个 $\varepsilon > 0$。

证明。展开 (2.1) 可知，$-R_{\bar{k}j}$ 的最高阶项为 $\partial^p\partial_p g_{\bar{k}j}$；利用 (2.3)、(2.4) 进行计算可知，$\frac{1}{2}\Delta\alpha_{\bar{k}j}$ 的最高阶项为 $\partial^p\partial_p\alpha_{\bar{k}j}$。因此，由 $\mathcal{H}_+ \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}_+^- \times \mathcal{H}$（其中 $\mathcal{H}$ 是闭 (1，1)-形式空间，$\mathcal{H}_+$ 是 Kähler 度量空间）定义的映射

$$\begin{pmatrix}\omega\\ \alpha\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-\mathrm{Ric}(\omega) + \lambda\omega + \alpha - (\omega - \hat{\omega})/t\\ \kappa\Delta\alpha - (\alpha - \hat{\alpha})/t\end{pmatrix}$$

是严格椭圆的。因此，椭圆理论推出所需结果。 □

引理 3 (驻点)。一对 (ω, α) 是方程组(1.3)、(1.4) 的驻点（即使右端项为零）当且仅当 ω是常标量曲率凯勒度量，且 α 是 ω-调和的。

证明。将引理 1 应用于 (3.7) 得到

$$-i\partial\bar{\partial}R + \Delta\alpha = i\partial\bar{\partial}\Delta F. \tag{3.10}$$

(1) 假设 $-\mathrm{Ric}(\omega) + \lambda\omega + \alpha = 0$ 且 $\Delta\alpha = 0$。前者结合 (3.6) 意味着 F 为常数，因此后者结合 (3.10) 意味着 R 为常数。(2) 假设 ω 具有常标量曲率凯勒性质，且 α 是 ω-调和的。由 (3.10) 可得 $i\partial\bar{\partial}\Delta F = 0$，因此 ΔF 为常数。由于 $\int_X \Delta F\,\omega^n = 0$ 实际上 $\Delta F = 0$，所以 F 为常数。由 (3.6) 可得 $-\mathrm{Ric}(\omega) + \lambda\omega + \alpha = 0$。□

现在我们给出迹和标量曲率下界的证明：

命题 *1*（标量曲率下界）。设 $\hat{\omega}$、$\hat{\alpha}$ 分别为一个 *K¨ähler* 度量和一个闭 *(1, 1)*-形式，并满足 $-c_1(X)+\lambda[\hat{\omega}]+[\hat{\alpha}]=0$。假设 $\omega(t)$、$\alpha(t)$ 在 $[0,T)$ 上满足 *(1.3)*、*(1.4)*，其中 $T\in(0,\infty]$。若 $\hat{\alpha}\geq 0$，则 $tr^{\omega(t)}\alpha(t)\geq 0$ 且

$$R(t)\geq -C\left(1+\frac{1}{t}\right).$$

证明。在 τ 的极小点处，由 (3.2) 得到 $\tau\geq$ 迹$_\omega\hat{\alpha}\geq 0$。现在由 (3.1)

$$R=\lambda n+\tau-\frac{n-\mathrm{tr}_\omega\,\hat{\omega}}{t}\geq n\left(\lambda-\frac{1}{t}\right). \qquad \square$$

4 Reduction to a scalar system

Sin ˆˆ ce Ω =Ω，$A=A$存在函数 $\varphi(t)$、$f(t)$，满足 $\varphi(0)=0$、$f(0)=0$，使得 t

$$\omega=\hat{\omega}+i\partial\bar{\partial}\varphi \tag{4.1}$$

$$\alpha=\hat{\alpha}+i\partial\bar{\partial}f. \tag{4.2}$$

引理 1 表明，(1.3)、(1.4) 可写为

$$\frac{i\partial\bar{\partial}\varphi}{t}=i\partial\bar{\partial}\left(\log\frac{\omega^n}{\hat{\omega}^n}+\lambda\varphi+f+\hat{F}\right)$$

$$\frac{i\partial\bar{\partial}f}{t}=\kappa\, i\partial\bar{\partial}\tau$$

因此（通过给 φ、f 加上随时间变化的常数进行归一化），我们得到标量方程组

$$\frac{\varphi}{t}=\log\frac{(\hat{\omega}+i\partial\bar{\partial}\varphi)^n}{\hat{\omega}^n}+\lambda\varphi+f+\hat{F} \tag{4.3}$$

$$\frac{f}{t}=\kappa(\Delta f+\mathrm{tr}_\omega\,\hat{\alpha}). \tag{4.4}$$

引理 *4*（势函数的先验估计）。设 $\hat{\omega}$、$\hat{\alpha}$ 是一个 *K¨ähler* 度量和一个闭 *(1, 1)*-形式，满足 $-c_1(X)+\lambda[\hat{\omega}]+[\hat{\alpha}]=0$，其中 $\lambda\leq 0$。设 $\varphi(t)$、$f(t)$ 为函数，并由 *(4.1)*、*(4.2)* 定义 $\omega(t)$、$\alpha(t)$。若 $\varphi(t)$、$f(t)$ 在 $[0,T)$ 上满足 *(4.3)*、*(4.4)*，且初值为$\varphi(0)=0$、$f(0)=0$，其中 $T\in(0,\infty]$，则

$$\|(1/t-\lambda)\varphi(t)\|_{C^0}\leq\|f(t)\|_{C^0}+\|\hat{F}\|_{C^0} \tag{4.5}$$

and

$$\|f(t)/t\|_{C^0}\leq\kappa\|\mathrm{tr}_{\omega(t)}\,\hat{\alpha}\|_{C^0}. \tag{4.6}$$

证明。这些结论可通过对（4.3）、（4.4）应用极大值原理得到。注意，假设 $\lambda\leq 0$ 用于第一个估计。□

5 Higher order estimates and convergence

引理 5 (高阶估计)。设$\hat{\omega}$、$\hat{\alpha}$ 分别为 *K¨ähler* 度量和闭$(1,1)$-形式，满足 $-c_1(X)+\lambda[\hat{\omega}]+[\hat{\alpha}]=0$，其中 $\lambda\leq 0$。若方程组(1.3)、(1.4)满足如下形式的先验估计

$$C^{-1}\hat{\omega}\leq\omega(t)\leq C\hat{\omega} \tag{5.1}$$

则对每个 $k=0,\ 1,\ \ldots\ldots$，我们都有以下先验势估计

$$\|\varphi(t)\|_{C^k}\leq C_k,\quad \|f(t)\|_{C^k}\leq C_k.$$

证明。回忆式 (4.3)

$$\frac{\varphi}{t}=\log\frac{(\hat{\omega}+i\partial\bar{\partial}\varphi)^n}{\hat{\omega}^n}+\lambda\varphi+f+\hat{F}. \tag{5.2}$$

应用 $\partial/\partial z^\ell$ 并重述式 (4.4)，得到线性方程组

$$\frac{\varphi_\ell}{t}=\Delta\varphi_\ell+\lambda\varphi_\ell+f_\ell+g^{j\bar{k}}\partial_\ell\hat{g}_{\bar{k}j}-\hat{g}^{j\bar{k}}\partial_\ell\hat{g}_{\bar{k}j}+\hat{F}_\ell \tag{5.3}$$

$$\frac{f}{t}=\kappa(\Delta f+\mathrm{tr}_\omega\,\hat{\alpha}). \tag{5.4}$$

由式 (4.6)、(5.1)，我们得到关于 f/t 的 C^0 估计，因此可得式 (5.4) 系数的 C^0 估计。德乔治-纳什-莫泽理论 [18]给出关于 f 的 C^β 估计，其中某个 $0<\beta<1$。

现在，式 (4.5) 给出关于 $(1/t-\lambda)\varphi$ 的 C^0 估计，因此可得式 (5.2) 系数的 C^0 估计。正则性结果 [37]对任意$0<\alpha<\beta$给出关于 φ 的 $C^{2,\alpha}$ 估计。

因此，我们得到式 (5.4) 系数的 C^α 估计，故 Schauder估计给出 $\|f\|_{C^{2,\alpha}}\leq C$，进而得到 $\|f_\ell\|_{C^{1,\alpha}}\leq C$。于是，我们得到式 (5.3) 系数的 C^α 估计，故 Schauder估计给出 $\|\varphi_\ell\|_{C^{2,\alpha}}\leq C$，进而得到 $\|\varphi\|_{C^{3,\alpha}}\leq C$。以此类推，可得到关于 φ 和 f 的任意阶 $C^{k,\alpha}$ 估计。□

定理 *1* 的证明。由引理 5，我们得到关于 φ, f 的各阶 C^k 估计。结合引理 2，利用连续性方法可知，使方程组可解的 t 集合在 $[0,\infty)$ 中既开又闭，因此它就是整个区间。经过两次阿尔泽拉-阿斯科利定理的应用，我们得到一个序列 $t_j\to\infty$，使得 $\varphi(t_j)$, $f(t_j)$ 光滑收敛到函数 φ_∞, f_∞。令 $\omega_\infty=\hat{}\omega+i\partial\bar{\partial}\varphi_\infty$ 且 $\alpha_\infty=\hat{}\alpha+i\partial\bar{\partial}f_\infty$。注意到 $\omega_\infty>0$，因为 $\omega\geq C^{-1}\hat{}\omega$；因此 $\omega_\infty\in\Omega$ 是一个凯勒度量，且 $\alpha_\infty\in A$ 是一个闭的 (1,1)-形式。由于 (1.3)、(1.4) 的左端趋于零，引理 3 蕴含 ω_∞ 是常标量曲率凯勒，且 α_∞ 是 ω_∞-调和的。根据我们的假设，在 $[\hat{}\omega]$ 中存在唯一的常标量曲率凯勒度量；根据霍奇定理，在 $[\hat{}\alpha]$ 中存在唯一的 ω_∞-调和 $(1,1)$- 形式。因此 ω_∞, α_∞ 与子序列的选取无关，故实际上 ω, α 光滑收敛到 ω_∞, α_∞。□

6 Kähler-Einstein metrics

本节将展示如何应用定理 1 的一个特殊情形，在 K¨ahler-Einstein 度量存在时证明收敛性。具体而言，现假设 $-c_1(X)+\lambda\Omega=0$，且 $\hat{}\alpha=0$。由于 Δ 不具有正特征值，(1.4) 表明 $\alpha=0$。因此，该方程组化简为一个方程

$$\frac{\omega-\hat{\omega}}{t}=-\mathrm{Ric}(\omega)+\lambda\omega \tag{6.1}$$

同样，势方程组可化为

$$\frac{\varphi}{t}=\log\frac{(\hat{\omega}+i\partial\bar{\partial}\varphi)^n}{\hat{\omega}^n}+\lambda\varphi+\hat{F}. \tag{6.2}$$

为满足定理 1 的假设，出于完整性考虑，我们给出如下标准C^2 估计（例如参见 [40]）。

引理 *6*（C^2 估计）。假设 $c_1(X) < 0$。令 $\hat{\omega}$ 为满足 $-c_1(X) + \lambda[\hat{\omega}] = 0$ 且 $\lambda < 0$ 的 ***Kähler*** 度量。令 $\varphi(t)$ 为光滑函数，并按 ***(4.1)*** 定义 $\omega(t)$。若 $\varphi(t)$ 在 $[0, T)$ 上满足初值 $\varphi(0) = 0$ 的条件，并且是方程 ***(6.2)*** 的解，其中某个 $T \in (0, \infty]$，则

$$C^{-1}\hat{\omega} \leq \omega(t) \leq C\hat{\omega}.$$

证明。 首先注意，由于 $\hat{\alpha} = 0$，我们可以假设势函数f 在任意时刻恒为零，因此利用引理 4 可立即得到 φ 上的 C^0 界。该界等价于体积形式界

$$C^{-1} \leq \frac{\omega^n}{\hat{\omega}^n} \leq C.$$

利用 Aubin-Yau 不等式进行标准计算，可得

$$\Delta \log \operatorname{tr}_{\hat{\omega}} \omega \geq -\frac{\hat{g}^{p\bar{q}} R_{\bar{q}p}}{\operatorname{tr}_{\hat{\omega}} \omega} - C \operatorname{tr}_{\omega} \hat{\omega}.$$

由 (6.1) 得

$$\Delta \log \operatorname{tr}_{\hat{\omega}} \omega \geq -C \operatorname{tr}_{\omega} \hat{\omega} - C.$$

现在 $\Delta\varphi = n - \text{迹}_{\omega} \hat{\omega}$，因此

$$\begin{aligned} \Delta(\log \operatorname{tr}_{\hat{\omega}} \omega - A\varphi) &\geq (A - C) \operatorname{tr}_{\omega} \hat{\omega} - An - C \\ &\geq \operatorname{tr}_{\omega} \hat{\omega} - C. \end{aligned}$$

当 A 足够大时成立。因此，在 $\log \operatorname{tr}_{\hat{\omega}} \omega - A\varphi$ 的最大值点处，我们有 $\operatorname{tr}_{\omega} \hat{\omega} \leq C$；再由行列式估计可得 $\operatorname{tr}_{\hat{\omega}} \omega \leq C$。这便在任意点推出

$$\log \operatorname{tr}_{\hat{\omega}} \omega \leq 2A\|\varphi\|_{C^0} + C$$

因此，由引理 4 可得迹$_{\hat{\omega}} \omega \leq C$。再应用一次行列式估计，得到迹$_{\omega} \hat{\omega} \leq C$。这两个估计等价于所需的估计。□

注 2。 当 $c_1(X) = 0$时，极大值原理立即给出一个形式为 $\|\varphi\|_{C^0} \leq Ct$的 C^0 估计。这不足以证明所需的 C^2 估计，但仍然很有意思，因为对于通常的复 ***Monge-Ampère*** 方程，极大值原理在这种情况下无法提供任何信息。

结合注 1 和引理 6，即可证明定理 2。

7 Riemann surfaces

假设 $n = 1$。对于满足 $\phi(0) = 0$ 的函数 $\phi(t)$，我们可以将 $\omega = e^{\phi}\hat{\omega}$ 写作，并且有 $\alpha = \tau\omega$。在此情形下，耦合方程 (3.1)、(3.2) 可写为

$$\frac{1 - e^{-\phi}}{t} = -R + \lambda + \tau \tag{7.1}$$

$$\frac{\tau - \hat{\tau}e^{-\phi}}{t} = \kappa\Delta\tau. \tag{7.2}$$

利用 $R = \hat{R}e^{-\phi} - \Delta\phi$，我们也可以将 (7.1) 写为

$$\frac{1-e^{-\phi}}{t} = \Delta\phi - \hat{R}e^{-\phi} + \lambda + \tau. \tag{7.3}$$

记 $\tau_{\max} = \max_X \tau$ 和 $\tau_{\min} = \min_X \tau$。此外，约定 $h^+ = \max\{h, 0\}$ 和 $h^- = \min\{h, 0\}$。

引理 7（共形因子的先验估计）。设 X 为黎曼曲面，$\hat{\omega}$为 *Kähler* 度量，$\hat{\alpha}$ 为闭 *(1, 1)*-形式，$\lambda = \int_X (c_1(X) - A)/\int_X [\hat{\omega}]$，并假设 $\hat{\tau}^+_{max} - \hat{\tau}^-_{min} < -\hat{R}_{max}$。令 $\phi(t)$、$\tau(t)$ 为函数，设 $\omega(t) = e^{\phi(t)}\hat{\omega}$，$\alpha(t) = \tau(t)\omega(t)$，并假设 $\phi(t)$、$\tau(t)$ 在 $[0, T)$ 上满足 *(7.3)*、*(7.2)*，其中 $\phi(0) = 0$，且对某个 $T \in (0, \infty]$。那么 $\lambda < 0$ 和

$$\|\phi(t)\|_{C^0} \le C, \quad \|\tau(t)\|_{C^0} \le C \tag{7.4}$$

so

$$C^{-1}\hat{\omega} \le \omega(t) \le C\hat{\omega}, \quad -C\omega(t) \le \alpha(t) \le C\omega(t) \tag{7.5}$$

以及

$$\|R(t)\|_{C^0} \le C\left(1 + \frac{1}{t}\right). \tag{7.6}$$

证明。首先，我们证明下面将要出现的一些常数满足若干不等式。假设蕴含 $R_{\max} - \hat{\tau}^-_{\text{最小}} < 0$，这等价于

$$\hat{R}_{\max} < 0$$
$$\hat{R}_{\max} - \hat{\tau}_{\min} < 0.$$

由 (3.9)

$$\lambda = \underline{R} - \underline{\tau} \le \hat{R}_{\max} - \hat{\tau}_{\min} \le \hat{R}_{\max} - \hat{\tau}^-_{\min} < 0.$$

由此可得

$$0 < \frac{\hat{R}_{\max} - \hat{\tau}^-_{\min}}{\lambda} \le 1.$$

方程 (7.2) 蕴含关于 τ 的以下初步估计

$$\tau \ge \hat{\tau}^-_{\min} e^{-\phi_{\min}} \tag{7.7}$$
$$\tau \le \hat{\tau}^+_{\max} e^{-\phi_{\min}}. \tag{7.8}$$

由 (7.3)，在 ϕ 的一个极小点处

$$\frac{1-e^{-\phi}}{t} \ge -\hat{R}_{\max}e^{-\phi} + \lambda + \tau.$$

代入 (7.7) 得到

$$\frac{1-e^{-\phi}}{t} \ge -(\hat{R}_{\max} - \hat{\tau}^-_{\min})e^{-\phi} + \lambda.$$

由于 $\lambda \le R_{\max} - \hat{\tau}^-_{\text{最小值}} < 0$，我们得到 ϕ 的以下下界

$$e^{-\phi} \le \frac{\lambda}{\hat{R}_{\max} - \hat{\tau}^-_{\min}}. \tag{7.9}$$

将其代入 (7.7)、(7.8) 即可证明

$$\frac{\lambda\hat{\tau}^{-}_{\min}}{\hat{R}_{\max}-\hat{\tau}^{-}_{\min}} \le \tau \le \frac{\lambda\hat{\tau}^{+}_{\max}}{\hat{R}_{\max}-\hat{\tau}^{-}_{\min}}. \tag{7.10}$$

由 (7.3)，在 ϕ 的最大值点处

$$\frac{1-e^{-\phi}}{t} \le -\hat{R}_{\min}e^{-\phi}+\lambda+\tau.$$

代入 (7.10) 得

$$\frac{1-e^{-\phi}}{t} \le -\hat{R}_{\min}e^{-\phi}+\lambda+\frac{\lambda\hat{\tau}^{+}_{\max}}{\hat{R}_{\max}-\hat{\tau}^{-}_{\min}}.$$

由于 $\hat{} R_{\min}<0$，且（根据我们的假设） $1+\hat{}\tau^{+}{}_{\max}/(\hat{} R_{\max}-\hat{}\tau^{-}{}_{\min})>0$，我们得到 ϕ 的以下上界

$$\begin{aligned} e^{-\phi} &\ge \frac{\lambda+\lambda\hat{\tau}^{+}_{\max}/(\hat{R}_{\max}-\hat{\tau}^{-}_{\min})-1/t}{\hat{R}_{\min}-1/t} \\ &\ge \min\left\{\frac{\lambda+\lambda\hat{\tau}^{+}_{\max}/(\hat{R}_{\max}-\hat{\tau}^{-}_{\min})}{\hat{R}_{\min}},1\right\}. \end{aligned}$$

标量曲率估计由 (7.1) 得出。 □

注 3. 只有估计 $\phi \le C$, $\omega \le C\hat{}\omega$, $R \ge -C(1+1/t)$ 需要这一假设的全部$\hat{}$强度；其他估计只需要 $R_{max}-\hat{}\tau^{-}_{min}<0$。

定理 4（光滑收敛）。设 X 是一条具有 $c_1(X)<0$ 的黎曼曲面，$\hat{}\omega$ 是一个凯勒度量，$\hat{}\alpha$ 是一个闭 *(1, 1)*-形式，$\lambda=\int_X(c_1(X)-[\hat{}\alpha])/\int_X[\hat{}\omega]$，并假设 $\hat{}\tau^{+}_{max}-\hat{}\tau^{-}_{min}<-\hat{}R_{max}$。方程组 *(1.3)*、*(1.4)* 在 $[0,\infty)$ 上有唯一解，该解光滑收敛到 $[\hat{}\omega]$ 中唯一的常标量曲率凯勒度量 ω_∞，以及 $[\hat{}\alpha]$ 中唯一的 ω_∞- 调和 *(1,1)* 形式 α_∞。

证明。由于 $c_1(X)<0$ 和 $n=1$，可得 $\hat{}\omega \in -rc_1(X)$，其中 $r=-\int_X[\hat{}\omega]/\int_X c_1(X)$。引理 7 给出 $C^{-1}\hat{}\omega \le \omega \le C\hat{}\omega$ 以及 $\lambda<0$，因此结论由备注 1 得出。□

在最后一个定理中，我们将证明，定理 4 所要求的假设 $\hat{}\tau^{+}_{\max}-\hat{}\tau^{-}{}_{\text{最小值}}<-\hat{}R_{\max}$ 并不具有限制性。我们需要作如下技术性假设：

$$\hat{R}_{\max}<\underline{\tau}<-\hat{R}_{\max}, \tag{A1}$$

其中，$\tau=\frac{\int_X\alpha}{\int_X\omega}$，而 $\hat{} R_{\max}$ 是初始度量 $\hat{}\omega$.的最大标量曲率。由于技术原因，在第 7.5 节证明 ω和 α 的估计时需要这一假设。

$\hat{}\hat{}$定理 *3* 的证明。任取 $\hat{}\alpha \in A$。由于 $R_{\max}<\tau<-R_{\max}$，我们可以将 $\hat{}\tau$ 朝其平均值压缩，直至处处得到 $\hat{}R_{\max}<\hat{}\tau<=\frac{1}{2}\hat{}R_{\max}$，且这一操作保持条件 $\hat{}\alpha \in A$ 不变。这些不等式推出 $\hat{}\tau^{+}_{\max}-\hat{}\tau^{-}{}_{\text{最小值}}<\hat{}-R_{\max}$，故由定理 4 可得结论。□

References

1. T. Aubin, 《紧致 K ¨ahler 流形上的 Monge-Amp `ère 型方程》, Bull. Sci. Math. (2) 102 (1978), 第 1 期, 63–95。2. L. Bedulli 和 L. Vezzoni, 《Hermitian 几何中的标量 Calabi 型流: 短期存在性与稳定性》, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze (5) XX (2020), 第 2 期, 657–676。3. R. J. Berman、T. Darvas 和 C. H. Lu, 《扩展 K 能量的凸性与弱 Calabi 流的大时间行为》, Geom. Top. 21 (2017), 2945–2988。4. E. Calabi, 《极值 K ¨ahler 度量》。载于《微分几何研讨会》, Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. 102 (1982), 259–290。5. , 《极值 K ¨ahler 度量 II》。载于《微分几何与复分析》, 第 95–114 页, Springer-Verlag, 纽约, 1985。6. S.-C. Chang, 《二维 Calabi 流》, Nagoya Math. J. 181 (2006), 63–73。7. X.X. Chen, 《黎曼曲面上的 Calabi 流再探: 一种新视角》, IMRN (2001), 第 6 期, 275–297。8. X.X. Chen 和 J. Cheng, 《关于常标量曲率 K ¨ahler 度量、一般自同构群》, 2018, arXiv:1801.05907。9. , 《关于常标量曲率 K ¨ahler 度量 (II) ——存在性结果》, J. Amer. Math. Soc. 34 (2021), 第 4 期, 937–1009。10. , 《关于常标量曲率 K ¨ahler 度量 (I) ——先验估计》, J. Amer. Math. Soc. 34 (2021), 第 4 期, 909–936。11. X.X. Chen 和 W. He, 《关于 Calabi 流》, American journal of mathematics 130 (2008), 第 2 期, 539–570。12. , 《具有有界 Sobolev 常数的 K ¨ahler 曲面上的 Calabi 流 (I) 》, Math. Annal. 354 (2012), 第 1 期, 227–261。13. X.X. Chen 和 S. Sun, 《Calabi 流、测地线射线与常标量曲率 K ¨ahler 度量的唯一性》, Ann. Math. 180 (2014), 407–454。14. Chen, X.X. 和 Zheng, K., 《伪 Calabi 流》, J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal) 2013 (2013), 第 674 卷, 195–251。15. P. T. Chru´sciel, 《Robinson-Trautman (二维 Calabi) 方程解的半整体存在性与收敛性》, Comm. Math. Phys. 137 (1991), 289–313。16. T. Fei、B. Guo 和 D.H. Phong, 《关于 Li–Yuan–Zhang 耦合流的收敛判据》, Math. Z. 292 (2019), 第 1 期, 473–497。17. J. Fine, 《Calabi 流与射影嵌入》, J. Diff. Geom. 84 (2010), 第 3 期, 489–523。18. D. Gilbarg 和 N.S. Trudinger, 《二阶椭圆型偏微分方程》, 第 224 卷, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 第 2 期, Springer, 1977。19. B. Guo、Z. Huang 和 D.H. Phong, 《耦合 Ricci 流的伪局部性》, Comm. Geom. Anal. 26 (2018), 第 3 期, 585–626。20. W. He, 《关于 Calabi 流的收敛性》, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 1273–1281。21. H. Huang, 《环面曲面、K 稳定性与 Calabi 流》。22. , 《环面簇上的 Calabi 流收敛性及相关 K ¨ahler 流形》, J. Geom. Anal. 25 (2015), 1080–1097。23. H. Huang 和 K. Zheng, 《极值度量附近 Calabi 流的稳定性》, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 11 (2012), 167–175。24. G. La Nave 和 G. Tian, 《构造典范度量的连续性方法》, Math. Ann. 365 (2016), 911–921。25. H. Li、B. Wang 和 K. Zheng, 《Calabi 流的正则性尺度与收敛性》, J. Geom. Anal. 28 (2018), 2050–2101。26. Y. Li 和 Y. Yuan, 《沿 κ-LYZ 流的局部曲率估计》, J. Geom. Phys. 164 (2021), 104162。27. Y. Li、Y. Yuan 和 Y. Zhang, 《K ¨ahler 流形上的一种新几何流》, Comm. Anal. Geom. 28 (2020), 第 6 期, 1251–1288。

28. S. Liang, X.S. Shen, 和 K. Smith, 《厄米度量的连续性方程：Calabi 估计、陈标量曲率与 Oeljeklaus–Toma 流形》, Bull. Lond. Math. Soc. 56 (2024), 第 3 期, 959–980。29. B. List, 《扩展的里奇流系统的演化》, Comm. Anal. Geom. 16 (2008), 第 5 期, 1007—1048。30. X.S. Shen 和 K. Smith, 《Hopf 曲面与 Inoue 曲面上的连续性方程》, IMRN 2024 (2024), 第 5 期, 3625–3648。31. M. Sherman 和 B. Weinkove, 《连续性方程、厄米度量与椭圆丛》, J. Geom. Anal. 30 (2020), 第 1 期, 762–776。32. J. Streets, 《Calabi 流极小化运动解的长时间存在性》, Adv. in Math. 259 (2014), 688–729。33. , 《K 能量极小化运动的一致性与收敛性》, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 5075–5091。34. M. Struwe, 《曲面上的曲率流》, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 5 (2002), 第 2 期, 247–274。35. G. Sz´ekelyhidi, 《关于有界曲率下 Calabi 流的评注》, Univ. Iagel. Acta Math. 50 (2013), 107–115。36. V. Tosatti 和 B. Weinkove, 《小初始能量下的 Calabi 流》, Math. Res. Lett. 40 (2007), 1033–1039。37. Y. Wang, 《关于复 Monge-Amp`ere 方程 $C^{2,\alpha}$-正则性的一则评注》, 2011, arXiv:1111.0902。38. Hosea Wondo, 《Calabi 对称性与连续性方法》, International Journal of Mathematics 34 (2023), 第 12 期, 2350076。39. , 《连续性方法的曲率估计》, Comm. Contemp. Math. 25 (2023), 第 09 期, 2250042。40. S.-T. Yau, 《关于紧致 K¨ahler 流形的里奇曲率与复 Monge-Amp`ere 方程, I》, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339–411。41. Y. Zhang 和 Z. Zhang, 《极小椭圆 K¨ahler 曲面上的连续性方法》, IMRN 10 (2019), 3186–3213。42. , 《Fano 纤维化上的连续性方法》, IMRN 2020 (2020), 第 22 期, 3186–3213。Department of Mathematics, CUNY City Tech, New York, NY 11201, USA电子邮件地址, X. S. Shen：xi.shen15@citytech.cuny.edu
Department of Mathematics, Imperial College London, 180 Queen's Gate, London SW7 2AZ, UK

电子邮件地址, K. Smith：kevin.smith1@imperial.ac.uk