arXiv:2601.07702v1 [math.MG] 12 Jan 2026

# ¨渐近莫比乌斯映射

¨GEORG GRUTZNER

Abstract. 我们引入渐近莫比乌斯（AM）映射，这是专为几何群论设计的拟莫比乌斯映射的大尺度类比。AM 映射刻画相距甚远的点构型的粗交比行为，提供了一种“无穷远处共形性”的概念；这种概念在拟等距变换下保持稳定，与缩放极限相容，并且具有足够的刚性，能够导出 Pansu 的大尺度共形性概念所无法得到的结构性结论。我们建立了 AM 映射的基本性质，列举了若干类实例来源，包括拟等距变换、次线性双利普希茨等价、雪花化和 Assouad 嵌入，并将这一理论应用于大尺度维数和度量余型。作为应用，我们获得了关于幂零群和 CAT(0) 空间的维数单调性结果，以及由度量余型导出的、关于 AM 映射存在性的新障碍。

## 1. 引言

经典共形几何尚无公认的“粗略”类比：虽然拟共形、拟对称和拟 M¨obius 映射在无穷小或小尺度情形下已得到充分理解，但在几何群论中，“大尺度共形性”尚无连贯或普遍接受的概念。

本文旨在推动这一框架的发展，方法是确定一类在拟等距作用下表现良好的映射，其缩放极限在渐近锥上体现经典的拟对称（QS）和拟 M¨obius（QM）行为。

在 [Pan21] Pierre Pansu 提出了一种大尺度共形映射的概念，用以模仿共形映射的无穷小行为。简而言之，大尺度共形映射将不相交球的族映射到弱重叠拟球的族上。这是一个非常灵活的概念，例如包括粗嵌入。然而，这种灵活性也使此类映射的渐近行为变得难以预测。

2020 数学学科分类。 主要分类号 30L10；次要分类号 20F65、51F30。关键词和短语。 渐近 M¨obius 映射、大尺度共形性、大尺度维数、渐近锥、粗交比、粗几何。

这促成了本文的核心构造：引入渐近-*M¨obius*（*AM*）映射。从概念上讲，AM 映射旨在模仿拟-M¨obius 映射的定义性特征——保持交比——但仅针对彼此相距很远的点的构型。这给出了拟-M¨obius 行为的大尺度类比，它具有以下性质：在拟等距和拓扑学的小幅变化下保持稳定；对所涉及空间的渐近几何敏感；并且具有足够的刚性，能够推导出 Pansu 框架中所没有的结构性结论。

渐近 M¨obius 映射（$AM$）的精确定义将留待后文给出。 $AM$-映射的例子来源包括:

– 拟等距嵌入，– 次线性双 Lipschitz 等价（即在渐近锥上诱导出 Lipschitz 等价的映射） [dC19],– 雪花化（即将度量替换为其某个幂次），– 从倍增度量空间到 $\mathbb{R}^N$ 的 Assouad 映射。

根据 Assouad 定理 [Ass83], ，每个倍增度量空间——包括每个幂零 Lie 群以及每个多项式增长的有限生成群——都可 AM-嵌入到足够高维的欧几里得空间中。此外，我们还将遇到无限维的例子。

我们将 AM 框架应用于大尺度障碍理论。这类问题与经典拟共形障碍理论相似，但研究的是大尺度层面的交比几何。

本文旨在建立渐近 M¨obius 映射的基础理论，分析其在缩放极限下的行为，并在几何群论中开创一种系统研究大尺度拟 M¨obius 几何的方法。

关于大尺度映射的更多相关研究由Cornulier [dC11], [dC19] 和Pallier [Pal20] 开展。

**1.1. 结果。** 在第2节和第3节介绍并发展AM框架后，我们将AM框架应用于维数理论和度量余型。

在第4节中，我们证明，在AM映射下，大尺度项的维数会增加。相关项取决于所考虑群的类别。

定理 *1.1.* 设 $(\Gamma, |\cdot|)$ 和 $(\Gamma', |\cdot|)$ 是配备某种字范数的有限生成幂零群，且 $f: \Gamma \to \Gamma'$ 是一个正则 *AM* 映射，则 $asdim(\Gamma) \leq asdim(\Gamma')$。若 $f$ 是配备左不变黎曼度量的单连通幂零 *Lie* 群 $(G, d_g)$ 与 $(G', d_{g'})$ 之间的 *AM* 映射，则 $dim(G) \leq dim(G')$。此外，若 $asdim(\Gamma) = asdim(\Gamma')$，则 $\Gamma$和 $\Gamma'$ 的渐近锥是同构的分次 *Lie* 群。

反过来，给定渐近锥同构的幂零群，则存在一个渐近 *Möbius* 映射将它们联系起来。

在 CAT(0)空间中，类似的定理具有如下形式。

**定理 1.2**。 设 $X$ 和 $Y$ 是具有无穷远点的扩展度量空间 $*_X$ 和 $*_Y$ 分别如此。设 $X$ 是渐近链式的，并假设 $X$ 和 $Y$ 的所有渐近锥都是$\mathrm{CAT}(0)$空间。若存在正则 *AM* 映射 $f\colon (X, o, *_X) \to (Y, o', *_Y)$，则望远镜维数会增加，例如。

$$\text{tele-dim}(X) \leq \text{tele-dim}(Y).$$

在第 5 节中，我们应用 Mendel–Naor 的度量余型理论，推导出 AM映射存在的其他障碍。

**定理1.3**。 假设 $p, q \in [2, \infty]$ 满足 $p > q$。那么不存在从 $\ell_p$ 到具有尖锐度量余型$q$的度量空间的正则 *AM* 映射。

本文结构如下。第2节介绍并发展一般的 AM框架。第3节阐释该理论：首先证明每个次线性利普希茨等价都是 AM 映射（命题3.3）；随后构造无限维空间之间的一个 Assouad型映射，作为 AM 映射的又一例子（命题3.13）。第4节将 AM框架应用于维数理论，并证明定理 1.1 和定理 1.2。第5节将 Mendel–Naor 的度量余型应用于 AM框架，并证明定理 1.3。

我谨向 Pierre Pansu 致谢，感谢他将我引入这一主题，并为我指出了它的若干应用。

## 2. AM-maps

**2.1. 扩展度量**。 共形映射的度量畸变可能相当显著。例如，立体投影在极点 $o$ 附近会呈现迅速增大的度量畸变（利普希茨常数）。尽管如此，其保角性质直到 $o$ 仍保持良好。

为了在我们的拓扑模型中纳入极点 $o$，同时仍允许无限的度量畸变，我们扩展了度量的概念。

**定义 2.1**。 给定一个集合 $X$， $X$ 上的扩展度量 是一个函数$d$：$X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，满足以下性质：

1. *There exists at most one point* $*_X \in X$ *such that:*
   - *For all* $x \in X \backslash \{*_X\}$, $d_{*_X}(x, *_X) = \infty$
   - $d(*_X, *_X) = 0$

2. $d$ 在（$X\backslash\{*_X\}$） $\times$ （$X\backslash\{*_X\}$）上的限制是一个度量。

点 $*_X$ 称为$X,d$中的无穷远点，或简称为$d$ 中的无穷远点；而 $X_*$ 中的点称为有限点。

为便于阅读，我们用 $X_{*_X}$表示 $X\backslash\{*_X\}$。有时我们也用 $d_{*_X}$ 表示 $d$，这与有限点 $p$处的 $d$ 的度量凯莱变换类似。

**注 2.2.** 扩展度量的取值属于射影扩展实数轴，其中允许除以零。特别地，$1/0 = \infty$ 和$1/\infty = 0$。不过， $+\infty$ 与 $-\infty$并无区别。

**注 2.3 (**扩展度量拓扑**)**。 扩展度量空间 $X$ 上的扩展度量拓扑 是由以下基所生成的拓扑：

– 所有开球 $B(x,r) \subset X_{*_X}$，以及– 以下形式的集合

$$U(x,r) \;=\; \{*_X\} \;\cup\; \Big(X \setminus \overline{B(x,r)}\Big)$$

对于任意 $x \in X_{*_X}$ 和任意 $r > 0$，若 $X$ 有无穷远点。

**注 2.4**。 扩展度量拓扑与 ***Buyalo*** 的半度量拓扑 $\mathcal{T}_\rho$ [Buy16], 一致，其中 $\rho$ 是扩展度量。

**注 2.5**。 如果 $(X_*, d)$ 是正常度量空间，那么赋予扩展度量拓扑的 $X$ 恰好是 $X_*$ 的 ***Alexandroff*** 扩张。特别地，在这种情况下，$(X, d)$ 是紧的。

**注 2.6**。 即使 $(X_*, d)$ 不是局部紧的，扩展度量拓扑仍有可度量化这一优点。如果 $(X_*, d)$ 无界（不一定局部紧），那么 $X$ 上的扩展度量拓扑由 $d$ 的逆度量凯莱变换诱导（见定义 *2.16* 和 [BK02, 引理 2。2]）。

**注 2.7**。 根据注 *2.6*，若扩展度量空间$(X, d)$ 包含无穷远点 $*_X$，则我们总是假定$(X_{*_X}, d)$ 是无界的。

2.1.1. 拟度量。 在一点处“反演度量”是一种典型操作，它是共形的，但会产生无界畸变。事实证明，三角不等式对于在这种度量反演下保持不变而言，要求略显过强。

**定义 2.8**。 *A* $K$-拟度量 是一个对称函数 $d\colon X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，满足存在 $K > 0$，且在 $X$ 上存在一个扩展度量 $\rho$，使得

$$\frac{1}{K}\rho(x,y) \le d(x,y) \le K\rho(x,y).$$

拟度量空间是一个集合 $X$，并配有一个拟度量 $d$。

**注 2.9.** 拟度量 $d$ 满足三角不等式的程度恰到好处，使得由 $d$ 定义的开球构成一个拓扑的基。由 $d$ 得到的 $X$ 上的扩展度量拓扑，与由 $\rho$ [得到的 $X$ 上的扩展度量拓扑相同Mun00，引理 13。3]。

**定义 2.10**。设$(X,d)$是一个拟度量空间。设 $x,y,z,w$ 是 $X$ 中的点，满足 $x \neq w$ 和 $y \neq z$。若所有点都是有限点，则它们的交比$[x,y,z,w]_d$定义为

$$[x,y,z,w]_d = \frac{d(x,z)d(y,w)}{d(x,w)d(y,z)}.$$

若 $x = z$ 或 $y = w$，则我们令 $[x,y,z,w]_d = 0$，即使其中某些点是无穷远点 $*_X$ 也如此。在其他情况下，我们省略包含 $*_X$ 的因子。例如，

$$[x,y,z,*_X]_d = \frac{d(x,z)}{d(y,z)}.$$

交比的概念起源于19世纪的射影几何，并见于莫比乌斯、拉盖尔的著作，后来也出现在共形几何中。交比向一般度量空间的推广，在 V¨ais¨ al¨a [V¨84] 的论文中，随着拟共形映射和拟正则映射理论的发展而得到系统研究。

**定义 2.11.** 设 $X, Y$ 是拟度量空间。假设 $A \subset X$ 且 $f : A \to Y$ 是一个嵌入。若满足以下条件，我们称 $f$ 是 M¨obius 映射:

$$[f(x), f(y), f(z), f(w)] = [x,y,z,w]$$

对于 $A$ 中各点的任意交比 $[x,y,z,w]$，上述条件均成立。若存在一个 ***M¨obius*** 同胚 $f : X \to Y$，则称两个拟度量空间是 ***M¨obius*** 等价的，而 $f$ 称为一个 M¨obius 等价。若 $X$ 上的两个拟度量 $d$ 和 $d'$ 满足恒等映射 $id : (X,d) \to (X,d')$ 是一个 ***M¨obius*** 等价，则称它们是 ***M¨obius*** 等价的。

**注记 2.12.** 两个 ***M¨obius*** 等价的拟度量会诱导相同的扩展度量拓扑，参见 [Buy16,命题 4.4] 以及注记 *2.4*。

**定义 2.13.** 设 $(X,d)$ 为一个拟度量空间。在有限点 $p \in X$ 处，空间 $(X,d)$ 的凯莱变换是空间 $(X,d_p)$，其中 $d_p$ 定义如下:

$$d_p(x,y) = \frac{d(x,y)}{d(x,p)\,d(p,y)} \quad if\, x,y \in X \setminus \{p\},$$

$d_p(x,p) = \infty$ 对所有 $x \in X \setminus \{p\}$ 以及 $d_p(p,p) = 0$均成立。如果 $(X,d)$ 已经有一个无穷远点 $*_X$，那么约定 $d_p(x,*_X) = \frac{1}{d\,x\,(,\ p)}$。

形式上，$(X,d)$ 在有限点 $p \in X$ 处的凯莱变换是恒等映射 $\mathcal{C}_p : (X,d) \to (X, d_p)$。

**注 2.14**。 凯莱变换保持度量交比，因此根据注 *2.12*，它是一个同胚。换句话说，凯莱变换是一个 *M¨obius* 等价映射。

**例 2.15.** 在 $\mathbb{R}^n$ 配备欧几里得度量时，在$p = 0$ 处的凯莱变换会得到

$$d_0(x, y) = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \, \|y\|},$$

在 $S^n$ 上去掉一点后熟知的弦度量，差一个莫比乌斯等价变换。

**定义 2.16.** 设$(X, d)$ 是一个带有无穷远点的拟度量空间 $*_X$。在有限点 $q \in X$ 处对$(X, d)$ 作逆凯莱变换，得到空间$(X, d^q)$，其中 $d^q$ 定义为

$$d^q(x, y) = \frac{d(x, y)}{(1 + d(x, q))(1 + d(y, q))} \quad if\, x, y \in X \setminus \{*_X\},$$

$d^q(x, *_X) = d^q(*_X, x) = \frac{1}{1+d(x,q)}$对所有 $x \in X \setminus \{*_X\}$成立，并且 $d^q(*_X, *_X) = 0$。

形式上，在有限点 $q \in X$ 处，**(**$X$， $d$**)** 的逆凯莱变换是恒等映射 $\mathcal{C}^p$： **(**$X$， $d$**)** $\to$ **(**$X$， $d^q$**)**。

**注 2.17**。度量凯莱变换和逆度量凯莱变换将拟度量映射为拟度量 [BK02]。对于扩展度量，这通常并不成立；这也是最初引入拟度量类的主要原因。

然而，下面的注释表明，可以不引入拟度量，而代之以系统地应用平滑处理。本文选择不采用这种方法。

**注 2.18**。有一种标准方法，可将拟度量 $\widehat{d}$ 转化为与之双利普希茨等价的扩展度量 $d$，其定义如下：

$$\widehat{d}(x, y) := \inf \sum_{i=0}^{k-1} d\left(x_i, x_{i+1}\right),$$

其中，下确界取遍所有满足 $x_0 = x$ 和 $x_k = y$ [ 的有限点序列 $x_0, \ldots,$ $x_k \in X$BK02，引理 2。2]。

2.2. **拟莫比乌斯映射¨**。 拟莫比乌斯映射由 Jussi V¨ais¨al¨a 等人提出，作为研究拟对称映射和拟共形映射的一种方法。与拟对称映射不同，拟莫比乌斯映射没有固定在无穷远处的点。

**定义 2.19**。 设 $X, Y$ 是拟度量空间。假设 $A \subset X$ 且 $f\colon\ A \to Y$ 是一个嵌入。若存在一个同胚 $\eta\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 使得，我们称 $f$ 为拟莫比乌斯映射¨， 或QM ，当且仅当

$$[f(x), f(y), f(z), f(w)] \leq \eta([x, y, z, w])$$

每当 $[x, y, z, w]$ 是 $A$中点的交比时。

拟莫比乌斯映射的例子有：

– 立体投影 $S^n \setminus \{o\} \to \mathbb{R}^n$，– 凯莱变换（立体投影在复数、四元数和八元数中的类比） [ACDB04],¨– 巴拿赫空间 [V84]中的反演 $x \mapsto \frac{x}{|x|^2} \circ$ —

**注记 2.20**。 拟莫比乌斯映射是拟对称映射与拟共形映射之间的中间类别。每个拟对称映射都是拟莫比乌斯映射，每个拟莫比乌斯映射都是拟共形映射。反向结论在某些特殊情况下成立。有界空间之间的拟莫比乌斯映射是拟对称的。无界空间之间的拟莫比乌斯映射是拟对称的，当且仅当它是适当的。详情参见 [V84]。

2.3. **渐近莫比乌斯映射¨**。 下文中，我们将在双基点拟度量空间范畴中工作。

**定义 2.21**。 双点空间 是一个集合 $X$，其中包含两个不同的点$\{q, p\} \subset X$。我们将双点空间记作 $(X, q, p)$。态射$(X, q, p) \to (Y, q', p')$ 是函数 $f\colon\ X \to Y$，使得 $f(q) = q'$ 且 $f(p) = p'$。

我们称 $q$ 为 $X$ 的原点 ，称 $p$为相对于原点 $q$而言 $X$ 的对跖点 。

按照惯例，$(X, q, p)$ 要么是有界拟度量空间，要么是配备了无穷远点的无界拟度量空间。在无界情形下，我们要求 $q$ 或 $p$是无穷远点；通常，我们选择 $p$ 来充当这一角色。

我们进一步假设，对跖点 $p$ 始终是 $X$ 的聚点。当 $p$ 是无穷远点时，该条件自动成立，因为在这种情况下，底层度量空间（$X_*$， $d$）被假设为无界。

我们需要一个判据来判断空间中的两个点何时相距很远。一种方法是用次线性增长函数将它们分离开来。Y. Cornulier 运用这一思想定义了次线性双 Lipschitz 等价[dC19]。

设 $(X,\ d,\ q,\ p)$ 是一个双基点拟度量空间。给定一个函数$u\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，如果两个点 $x,\ y \in X_p$ 在 $u$ 处 $p$ 被分离，则称它们为

$$d_p(x, y) > u\big(d_p(x, q) + d_p(q, y)\big).$$

按照约定，对于任意函数$u$，任意点 $x \in X_p$ 都与 $p$ 在 $p$ 处分离。这里，如果 $p$是有限点，则 $d_p$ 表示 $d$ 的度量凯莱变换；否则，它表示 $d$本身。

为简洁起见，我们常用 $|x|_p = d_p(o, x)$ 表示到原点的距离，并用 $x, y >_p u$ 表示 $x$ 和 $y$ 在 $p$ 处相距 $u$。当点 $p$ 可由上下文明确时，我们也可以用 $|x|$ 表示到原点的距离，用 $x, y > u$ 表示相距 $u$。

我们可以称 $u$ 为一种规范，也就是说，它是一个根据“位置”设定“视野”尺度的函数。固定一个规范，意味着确定什么是“近”和“远”。

**定义 2.22.** 函数 $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是可容许规范，当且仅当

– 它是单调不减的，且– $u$ 是次线性增长的，

即 $\operatorname{limsup}_{r\to\infty} {}^{u(r)}{}_{r} = 0$。 —

**例 2.23.** 取 $u$ 为 $u(r) = \log(n + r)$，其中 $n \in \mathbb{N}$。

**例 2.24.** 设$(X, d, q, *_X)$ 是一个无界双点拟度量空间，$u$ 是一个可容许规范。任意序列 $\{x_n\}$，若满足$\lim_{n\to\infty} d(q, x_n) = \infty$，则它与常值序列 $\{q\}$被 $u$ 分离。

**定义 2.25.** 设 $f\colon (X, q, p) \to (Y, q', p')$ 是双点拟度量空间之间的一个映射。若满足以下条件，则称 $f$ 为渐近-M¨obius 映射，在$p$ 处成立（或称为在 处成立的 AM 映射）：

– 存在一个可容许规范 $u$ 和一个同胚 $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，使得对于在 $p$ 处被 $u$ 两两分离的任意四元组 $x, y, z, w \in X$，以下不等式成立：

$$[f(x), f(y), f(z), f(w)] < \eta([x, y, z, w]).$$

若要强调规范 $u$，则称 $f$ 为在 $p$ 处、尺度为 $u$ 的渐近-*M¨obius* 映射，并记作 $f_u$。在 $p$为无穷远点这一特殊情形下，称 $f$ 为渐近-M¨obius 无穷远映射。

从本质上说，在相距很远的点处的渐近-M¨obius 映射是拟-M¨obius 的。

**定义 2.26**。 双基点拟度量空间之间的渐近-*M¨obius* 映射 $f\colon (X, q, p) \to (Y, q', p')$ 在 $p$ 处称为正则的，如果

1. $f$ 在 $p$处是连续的。2. 对于 $p$的每个邻域 $V$，存在 $p'$的一个邻域 $U$，使得

$$f^{-1}(U) \subset V.$$

**例 2.27**。 凯莱变换和逆度量凯莱变换是 *M¨obius* 等价映射，尤其是，它们在所有点和所有尺度上都是正则 *AM*映射。

之后我们会需要路径连通性的粗略版本。

**定义 2.28**。 双基点拟度量空间 $(X, q, p)$ 在 $p$处是渐近链式的，如果存在一个可容许规范 $v_q$ ，使得对于所有$x, y \in X_p$，都存在一个链 $x_1 = x, \ldots, x_{k+1} = y$，满足

$$\max_{i\in 1\ldots k}\{d_p(x_i, x_{i+1})\} < v_q(|x|_p + |y|_p).$$

这里， $d_p$ 表示 $p$为有限点时 $d$ 的凯莱变换，否则就表示拟度量 $d$ 本身。

我们称 $(X, q, p)$ 关于 $v_q$在 $p$处渐近链式。如果 $p$是无穷远点 $*_X$，我们就简称 $(X, q, *_X)$ 渐近链式。

**注记 2.29**。 如果$(X, q, *_X)$ 渐近链式，那么 $X$ 在 $q$ 处的任意渐近锥都与一个渐近锥锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X, q)$等距，其中，对于某个序列 $z_n \in X$，有 $\lambda_n = d(q, z_n)$ ；参见引理 *6.3*。

我们最重要的技术步骤将是以下定理；其证明将在介绍一些定义之后，于第 2.5 节展开。

**定理 2.30** (AM). 设 $(X, q, p)$ 是一个在 $p$处渐近链式的双基点拟度量空间，且 $Y$ 是一个拟度量空间。设 $f : (X, q, p) \to (Y, q', p')$ 是在 $p \in X$处正则的 ***AM*** 映射。

*1.* 若 $p$ 是一个有限点，且 $f$ 将 $p$ 映射为 $Y$中的一个有限点，则 $f$在 $X$ 和 $Y$的某些切锥之间诱导出一个连续、单射的拟莫比乌斯映射 $g$ 。
*2.* 若 $p$ 是一个有限点，且 $f$ 将 $p$映射为 $Y$ 的无穷远点（若存在），则 $f$ 在 $X$ 的某个切锥与 $Y$的某个渐近锥之间诱导出一个连续、单射的拟莫比乌斯映射 $g$。*3.* 若 $p$ 是 $X$ 的无穷远点（若存在），且 $f$ 将 $p$ 映射为 $Y$ 中的一个有限点，则 $f$ 在 $X$ 的某个渐近锥与 $Y$的某个切锥之间诱导出一个连续、单射的拟莫比乌斯映射$g$ 。*4.* 若 $p$ 是 $X$ 的无穷远点（若存在），且 $f$ 将 $p$ 映射为 $Y$ 的无穷远点（若存在），则 $f$ 在 $X$ 和 $Y$的某些渐近锥之间诱导出一个连续、单射的拟莫比乌斯映射 $g$ 。

**2.4. 渐近锥与切锥**。 度量空间 $(X$的渐近锥 捕捉了 $X$在大尺度下的几何性质。粗略地说，它将这样一种想法形式化：一位观察者逐渐远离 $X$时，对空间 $X$ 拍摄的一系列快照。这一系列快照可能趋于稳定，使观察者产生仿佛看到一个单一对象的印象。我们称这个对象为 $X$的渐近锥。

如果带度量 $R^{-1}d$ 的 $R$-球 $B(o, R)$ 一致预紧，那么渐近锥可以通过带基点的 Gromov–Hausdorff 收敛 [Gro81], [Gro99] 具体构造。不过，一般而言，我们必须借助超滤子来进行构造。

2.4.1. 非主超滤子与超幂。

**定义 2.31**（超滤子）。 一个（非主）超滤子 $\omega$ 是 $\mathbb{N}$ 的子集族，满足以下条件:

– 如果 $A$, $B \in \omega$，那么 $A \cap B \in \omega$。– 如果 $A \in \omega$, $A \subset B \subset \mathbb{N}$，那么 $B \in \omega$。– 对于每个 $A \subset \mathbb{N}$，要么 $A \in \omega$，要么 $\mathbb{N} \setminus A \in \omega$。– $\mathbb{N}$ 的任何有限子集都不属于 $\omega$。

等价地， $\omega$ 是 $\mathbb{N}$ 上的有限可加概率测度，使得每个子集的测度不是 0 就是1 ，并且每个有限子集的测度都是0。

如果命题 $P(n)$ 对所有 $n \in A$ 都成立，其中 $A$ 属于超滤子 $\omega$，那么称 $P(n)$ 对 $\omega$-几乎处处成立。

**定义 2.32** ($\omega$-极限)。 设 $\omega$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个（非主）超滤子。在拓扑空间 $X$ 中，点序列 $\{x_n\}$ 的一个 $\omega$-极限是指 $X$ 中的一个点 $x$ ，使得对于 $x$ 的任意邻域 $U$ ，关系 $x_n \in U$ 对 $\omega$- 几乎处处成立。

如果 $X$ 是豪斯多夫空间，那么序列的 $\omega$-极限是唯一的。我们用 $\lim_\omega x_n$ 表示这一点。

**注 2.33.** 紧豪斯多夫第一可数拓扑空间中的任意序列都有一个 $\omega$-极限。

如果 $X$ 是一个非局部紧的完备度量空间，那么即使是有界序列也可能没有 $\omega$-极限。例如，取 $X = \ell^2$ ，并令 $e_n$ 为标准正交归一基。考虑序列 $\{e_n\}$。对于任意固定的$x \in \ell^2$ ， $x$ 的坐标 $x_n$ 都趋于0，因此

$$\|e_n - x\|^2 = 1 + \|x\|^2 - 2\langle e_n, x\rangle \longrightarrow 1 + \|x\|^2,$$

因此 $\|e_n - x\|$ 始终与0保持正距离。于是存在 $x$ 的一个邻域$U$ ，使得集合 $\{n : \ e_n \in U\}$ 是有限的（因此不属于 $\omega$）。所以$\{e_n\}$ 在 $\ell^2$中没有 $\omega$-极限。

**定义 2.34** (超幂)。 集合 $X$ 关于超滤子 $\omega$的超幂，记作 $X^\omega$，由序列$\{x_n\}$、$x_n \in X$的等价类组成；两个序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 相同，当且仅当 $x_n = y_n$ $\omega$-几乎处处成立。

我们采用记号 $\{x_n\}_\omega$ 表示序列的等价类。

**例 2.35**。 $\ell_p$ 的超幂线性等距于某个 $L^p(\mu)$[DCK72]。

**注 2.36。 </style}若 是一个度量空间，那么对于中的任意序列，要么$\lim_\omega d(o,x_n)$ $=L<\infty$，要么$\lim_\omega d(o,x_n)=\infty$，也就是说，对于任意 $C\geq 0$,$d(o,x_n)>C$， $\omega$-几乎处处成立。事实上，对于任意 $C>0$，以及**

$$A_C=\{n:d(o,x_n)\leq C\}$$

**或者 $A_C\in\omega$ 或者 $\mathbb{N}\setminus A_C\in\omega$。如果对于某个 $C$， $A_C\in\omega$，那么$d(o,x_n)$的 $\omega$-极限存在且为有限值。**

**2.4.2. 渐近锥。** 设 $(X,d)$ 是一个拟度量空间， $\omega$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个超滤子。此外，给定一个数列 $\{\lambda_n\}$，且 $\lim_\omega \lambda_n=\infty$。那么，在超幂 $X^\omega$ 上定义如下距离，即可得到一个伪拟度量： $x=\{x_n\}_\omega$ 与 $y=\{y_n\}_\omega$ 之间的距离为

$$D_{d/\lambda_n}(x,y)=\lim_\omega \frac{d(x_n,y_n)}{\lambda_n}.$$

固定一个有限点 $q\in X$ 作为原点，并令 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,q)$ 为 $X^\omega$ 中元素 $x=\{x_n\}_\omega$ 关于 $D_{d/\lambda_n}$ 的等价类集合；也就是说， $X^\omega$ 中的两个元素 $x=\{x_n\}_\omega$ 和 $y=\{y_n\}_\omega$ 满足 $\lim_\omega {}^{d(q,x_n)}{}_{\lambda_n}<\infty$，当且仅当它们相同，其中 $D_{d/\lambda_n}(x,y)=0$。无穷远点 $*$ 由所有满足 $\lim_\omega {}^{d}{}_{(q,x_n)\ \lambda_n}=\infty$ 的序列 $\{x_n\}_\omega$ 表示。

---

拟度量空间 $(\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,\ q)\ D_{d/\lambda_n})$ 称为 $(X,\ d)$ 的渐近锥。渐近锥 $(\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,\ q)\ D_{d/\lambda_n})$ 中的点记作 $x_\omega$ 或 $[x_n]_\omega$。固定原点 $q\in X$ 在渐近锥 $(\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,\ q)\ D_{d/\lambda_n})$ 中对应一个原点 $q_\omega$ 。

**注 2.37** ([BH99，引理 5。53])。 给定度量空间 $X$ 的任意渐近锥都是完备的。

**注 2.38。** 如果 $X$ 是巴拿赫空间，那么 $X$ 的所有渐近锥 $锥^\omega_{\lambda_n}(X,\ 0)$都与 $X^\omega$ 的超幂 $X$ 线性等距，见引理 *6.2*。

**注 2.39** ([BH99，推论 3.10(4)])。 *CAT(0)* 空间的任意渐近锥都是 *CAT(0)* 空间。

**例 2.40.** 由注 *2.38* 和例 *2.35* 可知， $\ell_p$ 的所有渐近锥都与某个 $L_p(\mu)$线性等距。

**注 2.41.** 可以将超幂 $X^\omega$ 中的任意点 $x=\{x_n\}_\omega$ 取作原点。容易验证，对于任意两个点 $x,y\in X^\omega$，若满足 $D(x,y)<\infty$,

$$\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,x)=\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,y).$$

**注记 2.42。** 对于渐近锥 $锥^\omega_{\lambda_n}(X,d,q)$中的任意有限点 $x_\omega$ 的表示序列 $\{x_n\}$，存在一个 $M\geq 0$ 使得。

$$d(q,x_n)\leq M\lambda_n$$

对于 $\omega$-几乎处处的 $n$。这是因为根据假设，序列 $^{d}{}_{(q,\ x_n)}\ \lambda_n$ 是 $\omega$-几乎处处有界的。——

回想一下，本文中我们始终讨论有界拟度量空间，或带有无穷远点 $*$ 的拟度量空间 $(X,d)$，且其底层空间 $(X_*,d)$ 无界。由于有界拟度量空间的每个渐近锥都退化为单点，因此我们只关注后一类空间的渐近锥。

**注 2.43.** 注意，任意不同于原点 $o_\omega$ 的点 $x_\omega \in$ 渐近锥$^{\omega}(X;o,\lambda_n)$ 都与序列 $\{x_n\}$ 相关联，该序列在 $\omega$- 几乎处处收敛到点 $*$，即 $\lim_\omega x_n = *$。

若 $X_*$ 是适当的，这一点显然成立，因为此时 $X$ 是紧的（注 *2.5*），且$\omega$-极限总是存在。由于 $\lim_\omega d_*(o,x_n) = \infty$，该序列必然收敛到 $*$。若 $X_*$ 不是适当的，则由以下事实可知收敛性成立：对 $d$ 的逆度量凯莱变换 $d^q$，有 $\lim_\omega d^q(x_n,*) = 0$，因为$d^q(x_n,*) \sim \frac{1}{1+d\,q\,(,x_n)}$（见注 *2.6*）。

2.4.3. 切锥。设 $(X,d)$ 是一个拟度量空间，$\omega$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个超滤子。此外，给定一个数列 $\{\lambda_n\}$，满足 $\lim_\omega \lambda_n = \infty$。那么，在超幂 $X^\omega$ 上定义 $x = \{x_n\}_\omega$ 与 $y = \{y_n\}_\omega$ 之间的距离为此，可得到一个伪拟度量：

$$D_{\lambda_n d}(x,y) = \lim_\omega \lambda_n\, d(x_n,y_n).$$

固定一个有限点 $p \in X$ 作为原点，并令 $\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X,p)$ 表示 $X^\omega$ 中关于 $D_{\lambda_n d}$ 的元素 $x = \{x_n\}_\omega$ 的等价类集合；也就是说，对于 $X^\omega$ 中满足 $\lim_\omega \lambda_n\, d(x_n, p) < \infty$ 的两个元素 $x = \{x_n\}_\omega$ 和 $y = \{y_n\}_\omega$，它们相同当且仅当 $D_{\lambda_n d}(x, y) = 0$。无穷远点 $*$ 由所有满足 $\lim_\omega \lambda_n\, d(p,x_n) = \infty$ 的序列 $\{x_n\}_\omega$ 表示。

拟度量空间 $(\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X,\ p)\ D_{\lambda_n d})$ 称为 $(X,\ d)$ 在 $p$ 处的切锥。我们用$x_\omega$表示切锥 $(\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X,\ p)\ D_{\lambda_n d})$ 中的点。固定的原点 $p \in X$ 在切锥 $(\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X,\ p)\ D_{\lambda_n d})$ 中诱导出一个原点 $p_\omega$。

**注 2.44.** 对于表示切锥 $\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X,p)$ 中一个有限点$x_\omega$ 的任意序列 $\{x_n\} \subset (X,d)$，存在一个 $M \geq 0$ 使得。

$$d(p,x_n) \leq \frac{M}{\lambda_n}$$

对几乎所有 $\omega$- $n$ 均成立。这是因为根据假设，序列 $\lambda_n\, d(p,x_n)$ 几乎处处有界（$\omega$-*a.s.*）。

**注 2.45**。 任意一点 $x_\omega \in$ 切锥$^\omega_{\lambda_n}(X,p)$，满足 $x_\omega \neq p_\omega$，都与一个序列 $\{x_n\} \subset X_p$, $\omega$ 几乎处处相关，使得

$$\lim_\omega x_n = p.$$

此外，存在 $m > 0$ 使得

$$\frac{m}{\lambda_n} \leq d(p, x_n).$$

这是因为根据假设，序列 $\lambda_n\, d\,(p, x_n)$ 几乎处处远离$0\omega$。若 $x_\omega$ 也有限，则对任意 $\epsilon > 0$,

$$\frac{(1-\epsilon)\lambda_n}{M} \leq d(p, x_n) \leq \frac{(1+\epsilon)\lambda_n}{m}. \quad \omega - a.s.$$

2.4.4. $M^¨$渐近锥与切锥的莫比乌斯等价。可以将无界拟度量空间的渐近锥视为无穷远点处的切锥。以下命题将这一想法精确化。

**命题 2.46**。对于任意序列 $\{\lambda_n\}$，若$\lim_\omega \lambda_n = \infty$，则有限点 $p \in X$处的度量凯莱变换

$$\mathcal{C}_p : (X, d, q, p) \to (X, d_p, q, *_X),$$

诱导度量凯莱变换

$$\mathcal{C}_{p_\omega} : (\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X,d), *, p_\omega) \to (\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X, d_p), q_\omega, *).$$

特别地，切锥$^\omega_{\lambda_n}(X, d)$与 锥$^\omega_{\lambda_n}(X, d_p)$ 是莫比乌斯等价的。

证明。 渐近锥（$\mathsf{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X, d_p)$ $D_{d_p/\lambda_n}$）和切锥（$\mathsf{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X, d)$ $D_{\lambda_n d}$）都是超幂 $X^\omega$ 的商。我们需要证明，伪拟度量 $D_{d_p/\lambda_n}$ 和 $D_{\lambda_n d}$ 在 $X^\omega$上诱导出相同的等价类。

1. 我们首先证明，对于任意 $\{x_n\}_\omega \in X^\omega$，$D_{d_p/\lambda_n}(\{q\}_\omega, \{x_n\}_\omega) = \frac{1}{D_{\lambda_n d}\ \{p\}_\omega(,\{x_n\}_\omega)_\circ}$如果 $q$是（$X, d$）的无穷远点，那么 $d_p(q, x_n) = d_{(p,x_n)}$，因此

$$\begin{aligned} D_{d_p/\lambda_n}(\{q\}_\omega, \{x_n\}_\omega) &= \lim_\omega \frac{d_p(x_n, q)}{\lambda_n} \\ &= \lim_\omega \frac{1}{\lambda_n d(p, x_n)} = \frac{1}{D_{\lambda_n d}(\{p\}_\omega, \{x_n\}_\omega)}. \end{aligned}$$

如果 $q$ 是有限点，那么

$$\left| \frac{1}{\lambda_n d(p, x_n)} - \frac{1}{\lambda_n d(q, p)} \right| \leq \frac{d_p(q, x_n)}{\lambda_n} \leq \frac{1}{\lambda_n d(q, p)} + \frac{1}{\lambda_n d(p, x_n)},$$

因此再次得到，$D_{d_p/\lambda_n}(\{q\}_\omega, \{x_n\}_\omega) = \frac{1}{D_{\lambda_n d}\ \{p\}_\omega(,\ \{x_n\}_\omega)_\circ}$

2. 设 $\{x_n\}_\omega$, $\{y_n\}_\omega \in X^\omega$，使得 $D_{\lambda_n d}(\{p\}_\omega, \{x_n\}_\omega)$ $D_{\lambda_n d}(\{p\}_\omega, \{y_n\}_\omega) \not\in \{0, \infty\}$，则

$$\begin{aligned} D_{d_p/\lambda_n}(\{x_n\}_\omega, \{y_n\}_\omega) &= \lim_\omega \frac{\lambda_n d(x_n, y_n)}{\lambda_n d(x_n, p)\, \lambda_n d(p, y_n)} \\ &= \frac{D_{\lambda_n d}(\{x_n\}_\omega, \{y_n\}_\omega)}{D_{\lambda_n d}(\{x_n\}_\omega, \{p\}_\omega) D_{\lambda_n d}(\{p\}_\omega, \{y_n\}_\omega)}. \end{aligned}$$

由 1 和 2 可知， $\mathcal{C}_{p_\omega}$ 是一个定义良好的双射，它将 $\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X, d)$ 中的无穷远点映到 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X, d_p)$ 中的原点 $q_\omega$，并将 $\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X, d)$ 中的原点 $p_\omega$ 映到 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X, d_p)$ 中的无穷远点。

显然，任何关于拟度量 $D_{\lambda_n d}$ 收敛到点 $x_\omega$ （当 $j \to \infty$ 时）的序列 $\{x^j_\omega\}$，也关于拟度量 $D_{d_p/\lambda_n}$ 收敛到 $x_\omega$，反之亦然。因此， $\mathcal{C}_{p_\omega}$ 是一个同胚。此外

$$[x_\omega, y_\omega, z_\omega, w_\omega]_{D_{\lambda_n d}} = [x_\omega, y_\omega, z_\omega, w_\omega]_{D_{d_p/\lambda_n}},$$

$\mathcal{C}_{p_\omega}$ 是一个 M¨obius 等价。

□

**命题 2.47.** 对于任意序列 $\{\lambda_n\}$，若 $\lim_\omega \lambda_n = \infty$，则在有限点 $q \in X$ 处的逆度量凯莱变换

$$\mathcal{C}^q : (X, d, q, *_X) \to (X, d^q, q, p),$$

诱导出度量凯莱变换

$$\mathcal{C}_{q_\omega} : (\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X, d), q_\omega, *) \to (\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X, d^q), *, p_\omega).$$

特别地，锥$^\omega_{\lambda_n}(X, d)$ 和 切锥$^\omega_{\lambda_n}(X, d^q)$ 在莫比乌斯意义下等价。

证明。 渐近锥（$\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X, d)$ $D_{d/\lambda_n}$）和切锥（$\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X, d^q)$ $D_{\lambda_n d^q}$）都是超幂 $X^\omega$ 的商。我们需要证明，伪拟度量 $D_{d/\lambda_n}$ 和 $D_{\lambda_n d^q}$ 在 $X^\omega$上诱导出相同的等价类。

1. 我们首先证明，对于任意 $\{x_n\}_\omega \in X^\omega$,

$$D_{\lambda_n d^q}(\{p\}_\omega, \{x_n\}_\omega) = \frac{1}{D_{d/\lambda_n}(\{q\}_\omega, \{x_n\}_\omega)}.$$

$p$是 $*_X$中的无穷远点$X$， $d$，因此 $d^q(p,\ x_n) = 1 + d^{-1}_q(,\ x_n)$ ，从而

$$\begin{aligned} D_{\lambda_n d^q}(\{p\}_\omega, \{x_n\}_\omega) &= \lim_\omega \lambda_n\, d^q(p, x_n) \\ &= \lim_\omega \frac{\lambda_n}{1 + d(q, x_n)} = \frac{1}{D_{d/\lambda_n}(\{q\}_\omega, \{x_n\}_\omega)}. \end{aligned}$$

2. Let $\{x_n\}_\omega, \{y_n\}_\omega \in X^\omega$ s.t. $D_{d/\lambda_n}(\{q\}_\omega, \{x_n\}_\omega), D_{d/\lambda_n}(\{q\}_\omega, \{y_n\}_\omega) \notin \{0, \infty\}$, then

$$\begin{aligned} D_{\lambda_n d^q}(\{x_n\}_\omega, \{y_n\}_\omega) &= \lim_\omega \frac{\frac{d(x_n,y_n)}{\lambda_n}}{\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{d(q,x_n)}{\lambda_n}\right)\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{d(p,y_n)}{\lambda_n}\right)} \\ &= \frac{D_{d/\lambda_n}(\{x_n\}_\omega, \{y_n\}_\omega)}{D_{d/\lambda_n}(\{x_n\}_\omega, \{q\}_\omega) D_{d/\lambda_n}(\{q\}_\omega, \{y_n\}_\omega)}. \end{aligned}$$

由 1 和 2 可知， $\mathcal{C}_{q_\omega}$ 是一个定义良好的一一映射，它将 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X, d)$ 中的无穷远点映射到 $\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X, d^q)$ 中的原点 $p_\omega$ ，并将 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X, d)$ 中的原点 $q_\omega$ 映射到 $\mathrm{Tan}^\omega_{\lambda_n}(X, d^q)$ 中的无穷远点。

显然，任何序列 $\{x^j_\omega\}$ 若在拟度量 $D_{d/\lambda_n}$ 下于 $j \to \infty$ 时收敛到点 $x_\omega$ ，则相对于拟度量$D_{\lambda_n d^q}$ 也收敛到 $x_\omega$ ，反之亦然。因此， $\mathcal{C}_{q_\omega}$ 是一个同胚。又由于

$$[x_\omega, y_\omega, z_\omega, w_\omega]_{D_{d/\lambda_n}} = [x_\omega, y_\omega, z_\omega, w_\omega]_{D_{\lambda_n d^q}},$$

$\mathcal{C}_{q_\omega}$ 是一个 M¨obius 等价映射。

□

现在我们将证明一些有用的引理，这些引理将渐近锥和切锥与 $u$-分离联系起来。由于它们具有 M¨obius 等价性，我们只对渐近锥的情形证明这些引理。

**引理 2.48**。 设 $(X, d, q, *_X)$ 是一个无界的双指定点拟度量空间。给定两个不同的点 $x_\omega, y_\omega \in$ 锥$^\omega_{\lambda_n}(X, q)$，则对于每个可容许规范 $u$ 以及分别表示 $x_\omega$ 和 $y_\omega$的任意序列 $\{x_n\}$、 $\{y_n\}$ ， 点 $x_n$ 和 $y_n$ 在无穷远处被 $u$分离，对于 $\omega$-几乎每个 $n$均成立，即

$$d(x_n, y_n) > u(|x_n| + |y_n|), \quad \omega - a.s.$$

证明。 首先假设 $y_\omega$ 是锥$^\omega_{\lambda_n}(X, q)$ 的无穷远点 $*_\omega$。那么 $x_\omega$ 必然是一个有限点。这意味着存在一个 $M > 0$使得

$$d(q, x_n) \le M\lambda_n,$$

并且对任意 $m > M$,

$$d(q, y_n) \le m\lambda.$$

为了证明 $d(x_n, y_n) > u(|x_n| + |y_n|)$， $\omega$-几乎必然成立，我们先证明两个更简单的不等式，即

$$|x_n| \le \frac{|y_n|}{2} \tag{1}$$

and

$$|x_n| \leq 2d(x_n, y_n) \tag{2}$$

第一个不等式由此得出

$$|x_n| \leq M\lambda_n \leq \frac{M}{m}|y_n|. \quad \omega - \text{a.s.}$$

由于 $\frac{M}{m}$ 可以任意小，因此第一个不等式成立。对于第二个不等式，以下结论对 $\omega$-几乎处处成立，

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\geq |y_n| \left| 1 - \frac{|x_n|}{|y_n|} \right| \\ &\geq |y_n| \left( 1 - \frac{M}{m} \right). \end{aligned}$$

同样，由于 $\frac{M}{m}$ 可以任意小， $|y_n| \leq 2\, d(x_n, y_n)$。

现在我们利用方程 1 和方程 2 来证明 $d(x_n, y_n) > u(|x_n| + |y_n|)$， $\omega$-几乎处处成立。事实上，对于几乎所有的 $n$,

$$\begin{aligned} u(|x_n| + |y_n|) &\leq u(2|y_n|) \\ &< \frac{1}{2}|y_n| \\ &\leq d(x_n, y_n). \end{aligned}$$

现在假设 $x_\omega$ 和 $y_\omega$ 都是有限点，则 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X_{*_X}$， $\omega$-几乎处处成立。假设存在一个可容许规范 $u$ 使得

$$d(x_n, y_n) \leq u(|x_n| + |y_n|), \quad \omega - a.s.$$

那么对于某些 $M \geq 0$、 $\omega - a.s.$,

$$\frac{d(x_n, y_n)}{\lambda_n} \leq \frac{u(|x_n| + |y_n|)}{\lambda_n} \leq \frac{u(2M\lambda_n)}{\lambda_n},$$

根据注记 2.42。因此

$$\lim_\omega \frac{d(x_n, y_n)}{\lambda_n} = 0,$$

这与 $x_\omega$ 和 $y_\omega$ 不同这一假设矛盾。

□

**引理 2.49**。 设$(X, d, q, *_X)$ 是一个渐近链式拟度量空间。设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 $X_{*_X}$ 中表示同一个有限点 $x_\omega \in$ 锥 $^\omega_{\lambda_n}(X, q)$ 的两个序列，使得极限 $_\omega\, d(q, x_n) = \infty$ 且极限$_\omega\, d(q, y_n) = \infty$。那么，对于任意可容许规范 $u$，要么点 $x_n$ 和 $y_n$ 在无穷远处以 $u$ $\omega$- 几乎处处意义下分离，即

$$x_n, y_n >_\infty u, \quad \omega - a.s.$$

或者存在一个序列 $\{w_n\} \subset X_{*_X}$，表示同一个点 $x_\omega$，使得

$$x_n, w_n >_\infty u \quad \omega - a.s.$$

*and*

$$y_n, w_n >_\infty u \quad \omega - a.s.$$

证明。根据假设，对于任意 $C > 0$， $|x_n| \geq C$ 和 $|y_n| \geq C$， $\omega$-几乎必然成立。换言之，我们可以假设 $|x_n|$和 $|y_n|$都任意大。

假设存在一个可容许规范 $u$，使得对于 $\omega$ -几乎所有 $n$，都有 $d(x_n, y_n) \leq u(|x_n| + |y_n|)$。对于 $\omega$-几乎所有 $n$，我们将构造两个环带，一个围绕 $y_n$，另一个围绕 $x_n$；它们相对于 $\lambda_n$ 次线性增长，且交集非空。

根据假设，存在一个可容许规范 $v_q$，使得 $X$ 相对于 $v_q$ 渐近链式相连。

定义两个环带

$$A_n = \{x \in X \mid 2u(4|y_n|) < d(x, y_n) \leq 2u(4|y_n|) + v_q(|y_n|)\}$$

and

$$A'_n = \{x \in X \mid u(4|y_n|) < d(x_n, x) \leq 3\, u(4|y_n|) + v_q(|y_n|)\}.$$

显然，两个环带都相对于 $\lambda_n$ 次线性增长。我们声称，对于 $\omega$-几乎所有的 $n$

$$A_n \cap A'_n \neq \emptyset.$$

通过在 $A_n \cap A'_n$ 中对 $\omega$-几乎每个$n$选取一个点而构造的任意序列，都表示渐近锥中的同一个点 $x_\omega$，与 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$相同。这利用了 $x_\omega$ 是一个有限点这一事实以及注记 2.42。

我们首先证明 $A_n \subset A'_n$ 对 $\omega$-几乎每个 $n$都成立。假设 $A_n$ 非空。由于我们假设 $d(x_n, y_n) \leq u(|x_n| + |y_n|)$， $\omega - a.s.$，因此对于 $\omega$-几乎每个 $n$,

$$\begin{aligned} 2d(x_n, y_n) &\leq 2u(|x_n| + |y_n|) \\ &\leq |x_n| + |y_n| \\ &\leq 2|y_n| + d(x_n, y_n). \end{aligned}$$

Thus

$$d(x_n, y_n) \leq 2|y_n| \qquad \omega\text{-a.s..}$$

由 $d(x_n, y_n) \leq u(|x_n| + |y_n|)$， $\omega - a.s.$，可得,

$$d(x_n, y_n) \leq u(4|y_n|) \qquad \omega\text{-a.s..} \tag{3}$$

对于任意 $x \in A_n$

$$2u(4|y_n|)) - d(x_n, y_n) < d(x_n, x) \leq 2u(4|y_n|) + d(x_n, y_n) + v_q(|y_n|).$$

因此，根据不等式 3， $x \in A'_n$。

我们声称 $A_n$ 确实非空。 $A_n$ 是一个内半径为 $2u$（$4|y_n|$）、厚度为 $v_q$（$|y_n|$）的环形区域。注意，对于 $\omega$-几乎处处的 $n$，原点 $q$ 位于 $A_n$ 的外半径之外，这是因为 $2\,u$（$4|y_n|$）$+v_q$（$|y_n|$）$<|y_n|$$\omega$-几乎必然成立。因此，从 $q$ 到 $y_n$ 的任何离散路径都会经过 $A_n$。 $X$ 关于 $v_q$ 渐近链式这一条件保证，链 $x_1^n=q$、……、$x_{k+1}^n=y_n$ 中有一点位于 $A_n$。事实上，由于

$$\max_{i\in 1,\dots k}\{d(x_i^n,x_{i+1}^n)\}<v_q(|y_n|),$$

这对于至少一个点 $x_{i_n}^n$ 必须成立。定义 $w_n=x_{i_n}^n$。

还需证明，对于 $\omega$-几乎处处的$n$， $x_n$， $w_n>u$ 以及 $y_n$， $w_n>u$ 。我们只证明 $\{x_n\}$ 的情形； $\{y_n\}$ 的情形完全类似。

利用 $w_n\in A_n$ 和方程 3 可得

$$\begin{aligned}u(|x_n|+|w_n|)&\le u(|x_n|+|y_n|+d(y_n,w_n))\\&\le u(2|y_n|+d(x_n,y_n)+2\,u(4|y_n|)+v_q(|y_n|))\\&\le u(2|y_n|+3\,u(4|y_n|)+v_q(|y_n|))\end{aligned}$$

由次线性性，对于 $\omega$-几乎处处的 $n$，

$$3\,u(4|y_n|)+v_q(|y_n|)\le 2|y_n|.$$

Thus

$$u(|x_n|+|w_n|)\le u(4|y_n|)<d(x_n,w_n),$$

其中最后一个不等式由以下事实得出： $w_n\in A_n'$。

□

2.5. **AM 定理**。本节最终将证明定理 2.30。由于切锥与渐近锥莫比乌斯等价，只需处理这样一种情形：给定一个无穷远处的正则 AM 映射，

$$f_{u,v}\colon (X,q,*_X)\to(Y,q',*_Y).$$

**引理 2.50**。 如果任意正则 *AM* 映射 $f_{u,v}\colon(X,q,*_X)\to(Y,q',*_Y)$ 诱导出一个连续、单射的拟莫比乌斯映射

$$g:\mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda_n}(X,q)\to\mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda_n'}(Y,q'),$$

那么定理 *2.30* 即得证。

证明。 假设给定一个一般的正则 AM 映射 $f_{u,v}$: $(X,q,p)$ $\to(Y,q',p')$。借助例 2.27，我们得到一个正则 AM 映射$F_{u,v}$: $(X,q,*_X)$ $\to(Y,q',*_Y)$，它位于 $*_X$，具体做法是分别在其后或之前复合凯莱变换或逆度量凯莱变换。

根据假设，$F_{u,\ v}$ 诱导了一个映射 $G$ ： 锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X,\ q)$ $\to$ 锥$^{\omega}_{\lambda_n'}(Y,\ q')$。最后的结论由以下事实得出：切锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X,\ p)$和锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X,\ q)$

以及锥$^{\omega}_{\lambda'_n}(Y,\ q')$和切锥$^{\omega}_{\lambda'_n}(Y,\ p')$根据命题 2.46 和命题 2.47 是莫比乌斯等价的。

□

2.5.1. *AM* 定理的证明。 给定一个正则 AM 映射 $f_{u,v}$: $(X, q, *_X) \to (Y, q', *_Y)$。由于 $f_{u,v}$ 在 $*_X$处连续，因此对每个序列 $x_n \to *_X$, $x_n \in X_{*_X}$，使得 $x'_n \to *_Y$。回顾一下， $*_X$是 $X$的一个聚点。下文中，我们常将记号 $f(x)$ 简写为 $x'$。

任取一个序列 $z_n \to *_X$, $z_n \in X_{*_X}$。定义

$$\lambda_n = d(q, z_n)$$

and

$$\lambda'_n = d(q', z'_n).$$

根据构造以及 $f$ 在 $*_X$处的连续性，序列 $\lambda_n$ 和 $\lambda'_n$发散。我们希望证明 $f$ 诱导出一个从 $\mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda_n}(X, q)$ 到 $\mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda'_n}(Y, q')$ 的连续、单射拟莫比乌斯映射。

按照构造，序列 $\{z_n\}$ 诱导出一个点 $z_\omega \in$ 锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X,\ q)$，它不同于其原点 $q_\omega$。事实上，$D_d(q_\omega,\ z_\omega) = 1$。

在所有情形中，定理 2.30 的第三种情形可能是最容易证明的。在这种情形下，拟莫比乌斯条件化简为拟对称条件

$$\frac{d(x', y')}{d(x', z')} \leq \eta\left(\frac{d(x, y)}{d(x, z)}\right).$$

事实上，假设有三个序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\} \subset X_{*_X}$，它们在无穷远处被 $u$ 两两分离。那么 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，$\{*_X\}$ 在无穷远处也被 $u$ 两两分离。因此

$$[x'_n, y'_n, z'_n, *_Y] \leq \eta([x_n, y_n, z_n, *_X]),$$

根据交比的定义，这实际上就是三点条件

$$\frac{d(x'_n, y'_n)}{d(x'_n, z'_n)} \leq \eta\left(\frac{d(x_n, y_n)}{d(x_n, z_n)}\right).$$

**引理 2.51**。 映射 $f_{u,\ v}$ 诱导出一个映射 $X^\omega \to Y^\omega$，它连接两个超幂。

1. 如果 $\{x_n\}_\omega \in X^\omega$ 表示 锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X, q)$ 中的一个有限点，那么其像 $\{x'_n\}_\omega \in Y^\omega$ 表示 锥$^{\omega}_{\lambda'_n}(Y, q')$ 中的一个有限点。2. 如果 $\{x_n\}_\omega \in X^\omega$ 表示 锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X, q)$ 中的无穷远点，那么其像 $\{x'_n\}_\omega \in Y^\omega$ 表示 锥$^{\omega}_{\lambda'_n}(Y, q')$ 中的无穷远点。

证明。 1.1. 若 $\{x_n\}_\omega$ 表示一个与原点 $q_\omega$ 和 $z_\omega$不同的有限点 $x_\omega$，则根据引理 2.48， $\{x_n\}$、$\{z_n\}$、$\{q\}$ 几乎必然两两被 $u$分离。

因此，接下来我们可以对这个三元组应用拟对称条件，从而得到

$$\frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n}=\frac{d(q',x'_n)}{d(q',z'_n)}<\eta\left(\frac{d(q,x_n)}{d(q,z_n)}\right)=\eta\left(\frac{d(q,x_n)}{\lambda_n}\right)\quad \omega-a.s.$$

因此, $\frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n}$ 是有界的，并且 $\{x'_n\}_\omega$ 表示锥$^\omega_{\lambda'_n}(Y,\ q')$中的一个有限点。

1.2. 如果 $\{x_n\}_\omega$ 表示原点 $q_\omega$，那么 $\lim_\omega d(q,\ x_n)=M<\infty$或 $\lim_\omega d(q,\ x_n)=\infty$。

1.2.1. 在第一种情况下，根据$f_{u,\ v}$的正则性，$\{x_n\}$ 在 $\omega$-a.s.意义下始终位于 $*_X$的某个邻域之外，因此 $\{x'_n\}$ 在 $\omega$-a.s.意义下始终位于 $p'$ 的某个邻域之外。于是 $\lim_\omega d(q',\ x'_n)=M'<\infty$，并且 $\{x'_n\}_\omega$ 表示锥 $q'_\omega(Y,\ q')$的原点。

1.2.2. 在第二种情况下，$\{x_n\}$ 和 $\{q\}$ 被 $u$, $\omega$-a.s.分离（见例 2.24）。根据引理 2.48，$\{x_n\}$，$\{z_n\}$，$\{q\}$ 也在 $\omega$-a.s.意义下被 $u$两两分离。因此，我们以下可以对这个三元组应用拟对称条件，从而得到

$$\frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n}=\frac{d(q',x'_n)}{d(q',z'_n)}<\eta\left(\frac{d(q,x_n)}{d(q,z_n)}\right)=\eta\left(\frac{d(q,x_n)}{\lambda_n}\right)\quad \omega-a.s.$$

因此 $\lim_\omega \frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n}=0$，而 $\{x'_n\}_\omega$ 再次表示 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda'_n}(Y,q')$ $q'_\omega$ 的原点。

1.3. 若 $\{x_n\}_\omega$ 表示点 $z_\omega$，则根据引理 2.49，要么 $\{x_n\},\{z_n\}$被 $u$ 分离，要么存在一个表示 $z_\omega$的序列 $\{w_n\}$，使得$\{w_n\},\{x_n\}$ 被 $u$ 分离，且 $\{w_n\},\{z_n\}$ 被 $u$分离。

1.3.1. 若 $\{x_n\},\{z_n\}$ 被 $u$分离，则 $\{x_n\},\{z_n\},\{q\}$ 在 $u$下几乎处处两两分离 $\omega$（见例 2.24），于是我们回到情形 1。

1.3.2. 否则，$\{w_n\},\{x_n\},\{q\}$ 被 $\{w_n\}$分离，$\{z_n\},\{q\}$ 被 $u$两两分离。此后，我们可以分别对这两个三元组应用拟对称条件，从而得到

$$\begin{aligned}\frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n}&=\frac{d(q',x'_n)}{d(q',z'_n)}\\&=\frac{d(q',x'_n)}{d(q',w'_n)}\frac{d(q',w'_n)}{d(q',z'_n)}\\&<\eta\left(\frac{d(q,x_n)}{d(q,w_n)}\right)\eta\left(\frac{d(q,w_n)}{d(q,z_n)}\right)\\&=\eta\left(\frac{d(q,x_n)}{\lambda_n}\frac{\lambda_n}{d(q,w_n)}\right)\eta\left(\frac{d(q,w_n)}{\lambda_n}\right)\\&\to\eta(1)^2\end{aligned}$$

因此 $\frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n}$ 有界，并且 $\{x'_n\}_\omega$ 表示锥$^\omega_{\lambda'_n}(Y,\ q')$中的一个有限点 .

2.1. 如果 $\{x_n\}_\omega$ 表示无穷远点 $*_X$，那么根据引理 2.48，$\{x_n\}$、$\{z_n\}$、$\{q\}$由$u$两两分离，且这一结论以 $\omega$-几乎处处成立。

从现在起，我们可以将拟对称条件应用于这个三元组，从而得到

$$\frac{\lambda_n'}{d(q',x_n')}=\frac{d(q',z_n')}{d(q',x_n')}<\eta\left(\frac{d(q,z_n)}{d(q,x_n)}\right)=\eta\left(\frac{\lambda_n}{d(q,x_n)}\right)\quad \omega-a.s.$$

由于 $\lim^\omega \frac{\lambda_n}{d(q,\ x_n)}=0$，同样有 $\lim^\omega d^{\lambda_n'}(q',\ x_n')$ 0，因此 $\{x_n'\}_\omega$ 表示 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n'}(Y,\ q')$ 中的无穷远点。

□

**引理 2.52**。超积之间的映射 $X^\omega\to Y^\omega,\{x_n\}_\omega\mapsto\{x_n'\}_\omega$ 诱导出一个从渐近锥 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,q)$ 到$\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n'}(Y,q')$ 的良定义映射。

证明。1.1. 设 $\{x_n\}_\omega$ 和 $\{y_n\}_\omega$ 是表示 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,\ q)$ 中无穷远点 $*_X$ 的两个序列。

我们需要证明，此时 $\{x_n'\}_\omega$ 和 $\{y_n'\}_\omega$ 在 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(Y,\ q')$ 中表示同一个点。根据引理 2.51，这立即可得，因为 $\{x_n'\}_\omega$ 和$\{y_n'\}_\omega$ 都表示 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(Y,\ q')$ 中的无穷远点。

1.2. 设 $\{x_n\}_\omega$ 和 $\{y_n\}_\omega$ 是表示原点 $q_\omega$ 的两个序列。

我们需要证明，此时 $\{x_n'\}_\omega$ 和 $\{y_n'\}_\omega$ 在 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(Y,\ q')$ 中表示同一点。根据引理 2.51，这再次成立，因为由引理 2.51 证明中的步骤 1.2 可知，$\{x_n'\}_\omega$ 和 $\{y_n'\}_\omega$ 在 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(Y,\ q')$ 中都表示原点 $q'_\omega$。

1.3. 设 $\{x_n\}_\omega$ 和 $\{y_n\}_\omega$ 是表示 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,\ q)$ 中同一个不同于原点 $q_\omega$ 的有限点 $x_\omega\in$ 的两个序列。

我们需要证明，此时 $\{x_n'\}_\omega$ 和 $\{y_n'\}_\omega$ 在 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(Y,\ q')$ 中表示同一点。根据引理 2.49，$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 要么被 $u$ 以 $\omega$-几乎处处的方式分离，要么存在一个表示同一点的序列 $\{w_n\}$，使得$\{x_n\},\ \{w_n\}>u$ 和 $\{y_n\},\ \{w_n\}>u$、$\omega$-几乎处处成立。

1.3.1. 在第一种情况下，根据引理 2.48，$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{q\}$ 关于 $u$ 是 $\omega$-几乎处处两两分离的。因此，以下我们可以将拟对称条件应用于该三元组，从而得到 $\omega$-几乎处处成立。

$$\begin{aligned}\frac{d(x_n',y_n')}{\lambda_n'}&=\frac{d(q',x_n')}{\lambda_n'}\frac{d(x_n',y_n')}{d(x_n',q')}\\&\le\frac{d(q',x_n')}{\lambda_n'}\eta\left(\frac{d(x_n,y_n)}{d(x_n,q)}\right)\\&=\frac{d(q',x_n')}{\lambda_n'}\eta\left(\frac{d(x_n,y_n)}{\lambda_n}\frac{\lambda_n}{d(x_n,q)}\right).\end{aligned}$$

我们有 $\lim_\omega d_{(x_n,\,q)}^{\lambda_n} < \infty$，因为 $x_\omega \neq q_\omega$；并且 $\lim_\omega \frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n} < \infty$，因为根据引理 2.51，$\{x'_n\}_\omega$ 表示一个有限点。因此，$\lim_\omega \frac{d(x'_n,y'_n)}{\lambda'_n} = 0$、$\{x'_n\}_\omega$ 和 $\{y'_n\}_\omega$ 在 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(Y,\ q')$ 中表示同一个点。

1.3.2. 在第二种情况下，每个三元组 $\{x_n\}$、$\{w_n\}$、$\{q\}$ 和 $\{y_n\}$、$\{w_n\}$、$\{q\}$ 都以 $\omega$-几乎处处的方式被 $u$ 两两分离。因此，我们此后可以分别对这两个三元组应用拟对称度量条件，从而得到 $\omega$-几乎处处。

$$\begin{aligned}
\frac{d(x'_n,y'_n)}{\lambda'_n} &\leq \frac{d(x'_n,w'_n)}{\lambda'_n} + \frac{d(w'_n,y'_n)}{\lambda'_n}\\
&\leq \frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n}\frac{d(x'_n,w'_n)}{d(x'_n,q')} + \frac{d(q',y'_n)}{\lambda'_n}\frac{d(y'_n,w'_n)}{d(y'_n,q')}\\
&\leq \frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n}\eta\left(\frac{d(x_n,w_n)}{d(x_n,q)}\right) + \frac{d(q',y'_n)}{\lambda'_n}\eta\left(\frac{d(y_n,w_n)}{d(y_n,q)}\right)\\
&\leq \frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n}\eta\left(\frac{d(x_n,w_n)}{\lambda_n}\frac{\lambda_n}{d(x_n,q)}\right) + \frac{d(q',y'_n)}{\lambda'_n}\eta\left(\frac{d(y_n,w_n)}{\lambda_n}\frac{\lambda_n}{d(y_n,q)}\right).
\end{aligned}$$

我们再次得到 $\lim_\omega d_{(x_n,\,q)}^{\lambda_n} < \infty$ 和 $\lim_\omega d_{(y_n,\,q)}^{\lambda_n} < \infty$，因为 $x_\omega \neq q_\omega$ 和 $y_\omega \neq q_\omega$。此外，$\lim_\omega \frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n} < \infty$ 和 $\lim_\omega \frac{d(q',x'_n)}{\lambda'_n} < \infty$，因为根据引理 2.51，$\{x'_n\}_\omega$ 和 $\{y'_n\}_\omega$ 表示一个有限点。因此，$\lim_\omega \frac{d(x'_n,y'_n)}{\lambda'_n} = 0$、$\{x'_n\}_\omega$ 和 $\{y'_n\}_\omega$ 在 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(Y,\ q')$ 中表示同一个点。

□

定理 *2.30* 的证明。由引理 2.52，AM 映射 $f_{u,\ v}$ 诱导出一个良定义映射 $g\colon \mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,\ q) \to \mathrm{Cone}^\omega_{\lambda'_n}(Y,\ q')$。根据注记 2.20，映射 $g$ 是拟莫比乌斯的，当且仅当它是拟对称的。因此，我们证明 $g$ 是拟对称的，尤其是连续且单射的。

设 $\{w_n\}$，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是表示 $\mathrm{Cone}^\omega_{\lambda_n}(X,\ q)$ 中三个不同有限点$w_\omega$，$x_\omega$ 和 $y_\omega$ 的序列。由引理 2.48，$\{w_n\}$，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 几乎必然被 $u$两两分离。因此

$$\frac{d(x'_n,y'_n)}{d(x'_n,w'_n)} < \eta\left(\frac{d(x_n,y_n)}{d(x_n,w_n)}\right),$$

等价地

$$\frac{d(x'_n,y'_n)}{\lambda'_n}\frac{\lambda'_n}{d(x'_n,w'_n)} < \eta\left(\frac{d(x_n,y_n)}{\lambda_n}\frac{\lambda_n}{d(x_n,w_n)}\right).$$

取 $\omega$ 极限，得到

$$\frac{D_{d/\lambda'_n}(x'_\omega,y'_\omega)}{D_{d/\lambda'_n}(x'_\omega,w'_\omega)} \leq \eta\left(\frac{D_{d/\lambda_n}(x_\omega,y_\omega)}{D_{d/\lambda_n}(x_\omega,w_\omega)}\right).$$

所以，如果 $g\colon 锥^\omega_{\lambda_n}(X,q) \setminus \{*_\omega\} \to 锥^\omega_{\lambda'_n}(Y,q') \setminus \{*_\omega\}$ 不是常数，那么它就是连续且单射的。请记住，根据构造，$q_\omega$ 和 $z_\omega$ 是

映射到两个不同的点 $q'_\omega$ 和 $z'_\omega$，因此 $g$ 确实不是常数。此外， $g$可连续且单射地延拓到锥$\overset{\omega}{\lambda_n}(X,q)$，因为 $g(*_\omega) = *_\omega$，并且对于任意 $x^j_\omega \to *_\omega$, $g(x^j_\omega) \to *_\omega$。

□

## 3. Examples

3.1.**次线性-利普希茨等价**。在 [dC19], 中，Y. Cornulier 引入了次线性-利普希茨映射。

**定义 3.1**。映射 $f\colon\ X \to Y$若存在一个可容许规范 $u\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 使得，则称其为拟度量空间之间的次线性-利普希茨映射

$$d(f(x), f(y)) \le Cd(x,y) + C'u(|x| + |y|), \quad \forall x, y \in X,$$

对某些常数 $C$、 $C' > 0$成立。

若存在一个可容许规范 $v$ 和一个常数 $C'' > 0$ 使得，则称两个次线性-利普希茨映射 $f$、 $f'$ 等价

$$d(f(x), f'(x)) \le C''v(|x|)$$

对所有 $x \in X$。

**备注 3.2.** 度量空间之间的次线性-利普希茨映射构成一个范畴。取渐近锥后，我们得到一个从次线性-利普希茨范畴到利普希茨范畴的函子。从某种意义上说，次线性-利普希茨范畴是具有此性质的最大范畴。

次线性-利普希茨范畴中的同构称为次线性-利普希茨等价，或称 SBE 映射。

**命题3.3.** 每个 *SBE* 映射 $f\colon\ X \to Y$ 都是具有线性 $\eta$ 的 *AM* 映射。

证明. 若 $f$是 $SBE$，则 $f$在尺度低于某个可容许规范 $v$时除外，都是双利普希茨的。

事实上，一个 $SBE$ 映射满足

$$c'd(x,y) - C'u(|x| + |y|) \le d(f(x), f(y)) \le cd(x,y) + Cu(|x| + |y|),$$

对于某个规范 $u$。

固定规范 $v = 2\frac{C'}{c'}u$, 并令 $x, y \in X$，使得 $x, y > v$。那么

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\le cd(x,y) + Cu(|x| + |y|) \\ &\le \big(c + \frac{Cc'}{2C'}\big)d(x,y), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\ge c'd(x,y) - C'u(|x| + |y|) \\ &\ge \frac{c'}{2}d(x,y) \end{aligned}$$

因此存在 $D > 0$，使得对于所有 $x, y > v$，

$$\frac{1}{D} d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq D d(x, y).$$

特别地， $f$ 是一个具有线性 $\eta$ 的 AM 映射。

□

3.2. **Assouad 型映射**。

[Sem96] 如何判断一个度量空间何时与某个欧几里得空间双利普希茨等价?

这个问题听起来简单，实际却并不显而易见。如果一个度量空间能够嵌入 $\mathbb{R}^n$，且该嵌入是双利普希茨的，那么它显然是倍增的。然而，反过来并不成立；配备 Carnot-Carath´eodory 度量的三维 Heisenberg 群是倍增的，但对任意 $n$，它都不能双 Lipschitz 嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中。

在度量空间 $(X, d)$ 的语境下，倍增性意味着存在一个常数 $D > 0$，使得对于任意 $x \in X$ 和 $r > 0$，球 $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ 可由至多 $D$ 个半径为 $\frac{r}{2}$ 的球覆盖。

Assouad 嵌入定理 [Ass83] [NN12]指出，倍增度量空间的任意雪花度量 $X^\alpha = (X, d^\alpha)$ $0 < \alpha < 1$都存在到欧几里得空间中的双 Lipschitz 嵌入。

显然，将倍增度量空间嵌入欧几里得空间的 Assouad 嵌入是渐近 Möbius 映射。接下来，我们将构造一个从无限维海森堡群到希尔伯特空间的 Assouad 映射。该构造源自 Lee 和 Naor 针对有限维情形的构造 [LN06]。

设 $H_{\mathbb{C}}$ 为一个无限维复希尔伯特空间。 $H_{\mathbb{C}}$ 带有辛形式 $\Omega(a, b) = \mathrm{Im}(\langle a, b \rangle)$。

无限维海森堡群 $\mathcal{H}_\Omega$是由形如 $(a, t)$ 的元组成的集合，其中 $a \in H_{\mathbb{C}}, t \in \mathbb{R}$，其群运算为

$$(a, t)(a', t') = (a + a', t + t' + 2\,\Omega(a, a')).$$

设 $G$ 是一个群，其单位元为 $e$。 $G$ 上的群半范数是满足以下条件的函数 $G \to [0, \infty)$ ：对于所有 $g \in G$， $N(g^{-1}) = N(g)$； $\leq N(g) + N(h)$，对于所有 $g$, $h \in G$以及 $N(e) = 0$。此外，若且唯若 $g = e$时， $N(g) = 0$，则 $N$ 是 $G$上的群范数。

**注 3.4**。若 $N_1$和 $N_2$是群半范数，则$\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$是群半范数。

该函数

$$N(a, t) = \sqrt{\sqrt{||a||^4 + t^2} + ||a||^2},$$

是无限维海森堡群 $\mathcal{H}_\Omega$上的群范数。在此情况下， $N_1 = (||a||^4 + t^2)^{\frac{1}{4}}$ 是 Kor´anyi 范数。

给定 $N$,

$$d_N((a,t),(a',t')) = N((a,t)(a',t')^{-1})$$

是 $\mathcal{H}_\Omega$ 上的右不变度量。我们要证明 $d_N$ 是 $\mathcal{H}_\Omega$ 上的条件负定型核。

**定义 3.5**。 拓扑空间 $X$ 上的连续实值核 $K$ 是条件负定型的，当且仅当：

1. $K(x,x) = 0$ 对所有 $x \in X$ 均成立；2. $K(y,x) = K(x,y)$ 对所有 $x,y \in X$ 均成立；3. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$、任意元素 $x_1, \ldots, x_n \in X$，以及任意实数$c_1, \ldots, c_n$，若满足 $\sum_{i=1}^n c_i = 0$，则以下不等式成立：

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j K(x_i, x_j) \leq 0$$

若 $d_N$ 是条件负定型的，则根据 GNS 构造，存在一个实希尔伯特空间 $H$ 和一个等距映射 $T\colon (\mathcal{H}_\Omega, \sqrt{d_N}) \to H$。特别地，映射 $T\colon (\mathcal{H}_\Omega, d_N) \to H$ 是一个 AM 映射。

**定理 3.6 (**GNS 构造 [GN43][Seg47])。 设 $K$ 是拓扑空间 $X$上的一个条件负定型连续核，并且 $x_0 \in X$。那么存在一个实希尔伯特空间 $H$ 以及一个连续映射 $T\colon X \to H$，满足以下性质：

1. $K(x,y) = \|T(x) - T(y)\|^2$ 对所有 $x$、 $y \in X$均成立；2. $\{T(x) - T(x_0) : x \in X\}$ 的线性张成在 $H$中稠密。

此外，这一对 $(H,T)$ 在典范同构意义下唯一。也就是说，若 $(H',T')$ 是另一对满足条件 *1.* 和 *2.* 的对象，则存在唯一的仿射等距映射 $L\colon H \to H'$，使得对所有 $x \in X$，$T'(x) = L(T(x))$。

**定义 3.7**。 拓扑群 $G$ 上的一个正定函数是一个连续函数 $\Phi : G \to \mathbb{C}$，使得定义在 $G$ 上的核

$$(g_1, g_2) \mapsto \Phi\left(g_2^{-1} g_1\right)$$

是正型的，也就是说，

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j}\, \Phi\left(g_j^{-1} g_i\right) \geq 0$$

对于所有的 $g_1$、……、 $g_n \in G$ 以及 $c_1$、……、 $c_n \in \mathbb{C}$。

**注 3.8**。 对一些作者而言，正型核就是正定厄米核，例如 [BL00a，第 8]章。我们避免使用这一术语，因为读者可能会认为正定性还包括以下附加条件：

附加条件： $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j\, K\left(x_i, x_j\right) = 0$ 当且仅当 $c_1 = \cdots = c_n = 0$。

**注记 3.9** ([BdlHV08, 命题 C.1。6])。 设 $K_1$ 和 $K_2$ 是拓扑空间 $X$上的正型核。那么

$$K_1 K_2 : (x, y) \mapsto K_1(x, y) K_2(x, y)$$

是一个正型核。

**引理 3.10**。 对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，函数

$$\Phi_\lambda(a, t) = e^{-|\lambda|\|a\|^2 + i\lambda t}$$

在 $\mathcal{H}_\Omega$ 上是正型的。

证明。 事实上，函数 $\Phi_\lambda$ 诱导出如下核

$$K((a, s), (b, t)) := \exp(-|\lambda|\|a - b\|^2 + i\lambda(s - t - 2\,\Omega(a, b))).$$

该核可重写为若干指数函数的乘积

$$\exp(-|\lambda|(\|a\|^2 + \|b\|^2) + i\lambda(s - t)) \exp(2|\lambda|(\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) - i\,\mathrm{sign}(\lambda)\,\Omega(a, b))).$$

根据注记 3.9，正型核的乘积是正型核。

第一个因子是正型的，因为对所有 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} c_i \bar{c}_j \exp(-|\lambda|(\|a_i\|^2 + \|a_j\|^2) + i\lambda(t_i - t_j)) \\
&\qquad = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} c_i \exp(-|\lambda|\|a_i\|^2 + i\lambda t_i)\overline{(c_j \exp(-|\lambda|\|a_j\|^2 + i\lambda t_j))} \\
&\qquad = \left|\sum_{i}^{n} c_i \exp(-|\lambda|\|a_i\|^2 + i\lambda t_i)\right|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

正型核的指数函数仍是正型核 [BL00b，命题 8.2。]。因此，若 $K$，则该核是正型的

$$\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) - i\,\mathrm{sign}(\lambda)\,\Omega(a, b)$$

是正型的。上述表达式在 $\lambda < 0$ 时等于厄米型 $\langle a, b\rangle$，在 $\lambda \geq 0$ 时等于 $\overline{\langle a, b\rangle}$，因此显然它是正型核。

□

**定义 3.11**。 设 $G$ 是一个拓扑群。若连续函数 $\Psi{:}G \to \mathbb{R}$ 使得在 $G$ 上定义的核 $K\ K(g, h) = \Psi(h^{-1}g)$ 对于 $g, h \in G$ 是条件负定型的，则称其为条件负定型。

**注 3.12** ([BdlHV08，命题C.2。4])。 设 $G$ 为一个拓扑群，其单位元记为 $e$。

1. 设 $\{\Psi_t\}_t$ 是定义在 $G$ 上的条件负型函数族，并且在 $G$ 上逐点收敛于连续函数 $\Psi\colon G \to \mathbb{R}$。则 $\Psi$ 是条件负型函数。2. 设 $\Phi$ 是定义在 $G$ 上的实值正定函数。则

$$g \mapsto \Psi(e) - \Psi(g)$$

是一个条件负型函数。

**命题3.13**。 度量 $d_N\colon \mathcal{H}_\Omega \times \mathcal{H}_\Omega \to \mathbb{R}$ 是条件负定型的。

证明。 旋转不变的 $_{1\,2}$-稳定分布的存在性意味着，对于所有 $\epsilon > 0$，存在一个非负可积函数 $\varphi_\epsilon\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$，其傅里叶变换为 $\widehat{\varphi_\epsilon}(t) = e^{-\epsilon\sqrt{|t|}}$。注意，$\frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{\varphi}_\epsilon}(x) = \varphi_\epsilon(x)$。参考文献例如见 [Sat99，命题 2.5 (xii) 和定理 14.14]。

由引理 3.10，

$$F_\epsilon(a,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\lambda|\|a\|^2 + i\lambda t}\varphi_\epsilon(\lambda)\,d\lambda$$

是 $\mathcal{H}_\Omega$ 上的正定函数。注意，它也是实值的。我们使用柯西概率密度

$$h_k(x) = \frac{k}{\pi}\frac{1}{k^2 + x^2}$$

尺度参数为 $k > 0$。其特征函数为 $\widehat{h_k}(t) = e^{-k|t|}$，[Sat99，例 2.11]。

有了这一点，我们写作

$$\begin{aligned} F_\epsilon(a,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\widehat{h}_{\|a\|^2}(\lambda)\widehat{\widehat{\varphi}}_\epsilon(\lambda)\,d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\left(\widehat{h_{\|a\|^2} * \widehat{\varphi}_\epsilon}\right)(\lambda)\,d\lambda \\ &= (h_{\|a\|^2} * \widehat{\varphi}_\epsilon)(t). \end{aligned}$$

对于每个 $\epsilon$，$F_\epsilon$ 都是正型且取实值的；根据注记3.12.2，$\frac{1-F_\epsilon}{\epsilon}$ 是条件负定型的。

根据注记3.12.1，它的逐点极限也属于条件负定型。

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1 - F_\epsilon(a,t)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[h_{\|a\|^2} * \frac{1 - \widehat{\varphi}_\epsilon}{\epsilon}\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - e^{-\epsilon\sqrt{|x|}}}{\epsilon} h_{\|a\|^2}(t-x)dx \\ &= \frac{\|a\|^2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|x|}}{\|a\|^4 + (t-x)^2}dx. \end{aligned}$$

现在我们证明，对于所有的 $r,t\in\mathbb{R}$

$$r^2\int_{\mathbb{R}}\frac{\sqrt{|x|}}{r^4+(t-x)^2}dx=\pi\sqrt{\sqrt{r^4+t^2}+r^2}.$$

通过对 $x=r^2y$ 和 $s=t/r^2$作变量替换，左边可写为

$$\int_0^\infty\Big(\frac{1}{1+(s-y)^2}+\frac{1}{1+(s+y)^2}\Big)\sqrt{y}\,dy$$

该积分等于

$$\lim_{r\to0}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_{C_{r,R}}\Big(\frac{1}{1+(s-z)^2}+\frac{1}{1+(s+z)^2}\Big)\sqrt{z}\,dz,$$

其中$C_{r,\ R}$是沿正实轴有一条支割线的钥匙孔围道。上述被积函数在 $i\pm s$和 $-i\pm s$处有简单极点。

我们分别计算这些留数。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\Big(\frac{\sqrt{z}}{1+(s-z)^2},\,i+s\Big)&=\frac{\sqrt{i+s}}{2i},\\
\operatorname{Res}\Big(\frac{\sqrt{z}}{1+(s-z)^2},\,-i+s\Big)&=\frac{\sqrt{-i+s}}{-2i},\\
\operatorname{Res}\Big(\frac{\sqrt{z}}{1+(s+z)^2},\,i-s\Big)&=\frac{\sqrt{i-s}}{2i},\\
\operatorname{Res}\Big(\frac{\sqrt{z}}{1+(s+z)^2},\,-i-s\Big)&=\frac{\sqrt{-i-s}}{-2i}.
\end{aligned}$$

根据柯西留数定理，该积分等于

$$\frac{\pi}{2}\,(\sqrt{i+s}-\sqrt{-i+s}+\sqrt{i-s}-\sqrt{-i-s}).$$

这进一步简化为

$$\begin{aligned}
\pi\,\operatorname{Re}(\sqrt{i+s}+\sqrt{i-s})&=\pi\,(\operatorname{Re}(\sqrt{i+s})+\operatorname{Im}(\sqrt{i+s}))\\
&=\pi\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+s^2}+s}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{1+s^2}-s}{2}}\right)\\
&=\pi\sqrt{\sqrt{1+s^2}+1}.
\end{aligned}$$

□

## 4. Applications to dimension theory

**4.1. 有限生成群的维数理论。** 1993 年，M. Gromov 引入了渐近维数这一概念，将其作为 Lebesgue 覆盖维数在大尺度上的类比 [Gro93]。有限生成群的渐近维数是一种拟等距不变量。其最重要的应用可追溯至 Guoliang Yu，他证明了任何具有有限同伦型且渐近维数有限的有限生成群都满足诺维科夫猜想 [Yu98]。

**定义 4.1.** 拓扑空间的覆盖维数（或拓扑维数）是满足以下条件的最小数：该空间的每个有限开覆盖都有一个阶为 $n+1$的开细分。我们记作 $\dim\ X = n$。如果不存在这样的最小值，则称该空间具有无限覆盖维数。

**注记 4.2.** 文献中，拓扑维数有三种常见定义：覆盖维数（dim）、大归纳维数（Ind）和小归纳维数（ind）。对于可分度量空间，这三个概念一致 [Eng95, p. 220]。对于不可分度量空间，根据 *Kat´etov-Morita* 定理，仍有 $\mathrm{Ind}\ X\ = \dim X$ [Eng95, p. 218], ; 然而，$\mathrm{ind}\, X$ 可能不同。

**注记 4.3** （可数和 [Eng95, p. 221]）。 若可度量化空间 $X$ 可表示为一列闭子空间 $F_1, F_2, \ldots$ 的并，且对于 $i = 1$、2、. . . 有$\dim\ F_i \leq n$，则$\dim X \leq n$。

**注记 4.4 (**降维映射 [Eng95，第 242])。 若 $f\colon\ X \to Y$是从可度量化空间 $X$ 到可度量化空间 $Y$ 的闭映射，并且存在一个整数 $k \geq 0$，使得对每个 $y \in Y$都有 维数 $f^{-1}(y) \leq k$，则维数 $X \leq$维数$Y + k$。

**定义 4.5**。 设 $X$ 是一个度量空间。 $X$的渐近维数 是满足以下条件的最小数 $n$ ：对于$\mathcal{V}$ 的每个一致有界开覆盖，都存在 $X$ 的一个一致有界开覆盖 $\mathcal{U}$，其阶为 $n + 1$，使得 $\mathcal{V}$ 细化 $\mathcal{U}$。记作 $\mathit{asdim} X = n$。如果不存在这样的最小 $n$，则称该空间具有无限渐近维数。

**注记 4.6**。 $X$ 的开覆盖 $\mathcal{V}$ 称为一致有界，如果存在一个 $C > 0$，使得

$$\sup_{V\in\mathcal{V}}\ \sup_{x,y\in V} d(x, y) \leq C.$$

**注记 4.7.** 渐近维数与经典覆盖维数（或拓扑维数）的区别仅在于额外要求开覆盖必须一致有界。

**注记 4.8.** 有限生成群 $\Gamma$ 的渐近维数有若干有趣的推论。例如，当且仅当 $\Gamma$有限时，渐近维数$\Gamma = 0$ （ [BD08]中的命题 *65.*）；当且仅当 $\Gamma$ 几乎自由时，渐近维数$\Gamma = 1$ （ [BD08]中的定理 *66.*）。

**注释 4.9** ([CG04, 定理 3。5])。 对于配备左不变黎曼度量的单连通幂零李群 $N$，

$$\operatorname{asdim}(N) = \dim(N).$$

若 $\Gamma$ 是配备字范数的有限生成几乎幂零群，则其渐近锥 $G_\infty$ 是配备左不变 Carnot–Carath´eodory 距离 $d_{CC}$ [Pan83]的 Carnot 群。类似地，若 $(G, d_g)$ 是配备某种左不变黎曼度量 $d_g$的单连通幂零 Lie 群，则其渐近锥 $G_\infty$ 同样是配备左不变 Carnot–Carath´eodory 距离 $d_{CC}$ [Pan83]的 Carnot 群。

**注释 4.10**。 从代数角度看，*Lie* 群 $G_\infty$ 构造如下：根据假设，在 $\Gamma$ 中存在一个有限指数幂零子群 $N$；令

$$\Gamma' = N/\operatorname{tor} N$$

那么 $\Gamma'$ 是无挠的；根据 *Malcev* 定理， [Mal51], $\Gamma'$ 同构于某个幂零 *Lie* 群 $G$的离散余紧子群；那么 $G_\infty$ 是与 $G$相关联的分次群，即其 *Lie* 代数为与 $\mathfrak{g}$相关联的分次代数 $\mathfrak{g}_\infty$ 的单连通 *Lie* 群。

**注释 4.11**。带有左不变 *Carnot-Carath´eodory* 距离 $d_{CC}$ 的 *Carnot* 群是适当的，因为 $d_{CC}$ 诱导通常的流形拓扑 [Sus73]，而局部紧齐性空间上的任何左不变度量，只要具有适当膨胀，便是适当的。特别地， $d_{CC}$ 是完备的。

**注释 4.12**。改变水平丛上的范数时，*Carnot-Carath´eodory* 距离仍与自身双 *Lipschitz* 等价。因此，例如，我们可以讨论 *Carnot* 群之间的 *Lipschitz* 映射，而无需指定某个特定的 *Carnot-Carath´eodory* 距离。

**注释 4.13**。 对于任意带有字范数的有限生成多循环群 $\Gamma$，其渐近维数 $\operatorname{asdim}\Gamma$ 等于其 *Hirsch* 长度 $h(\Gamma)$ [BD08, 定理 66]。对于带有字范数的有限生成幂零群 $\Gamma$， *Pansu* 渐近锥定理 [Pan83]指出，其渐近锥 $G_\infty$ 的覆盖维数等于其 *Hirsch* 长度 $h(\Gamma)$。因此，对于有限生成幂零群，

$$\operatorname{asdim}\Gamma = \dim G_\infty.$$

定理 *1.1* 的证明。 映射 $f$ 分别在 $\Gamma$ 和 $\Gamma'$的渐近锥 $G_\infty$ 与 $G'_\infty$ 之间诱导出一个拟对称映射 $g$。

¯特别地， $g$ 是从 $G_\infty$ 到 $G'_\infty$的单射。设 $B_n$ 是 $G_\infty$中的一列闭球，使得 $\bigcup_n^\infty \bar{B}_n = G_\infty$。根据注释 4.11，所有闭球 $\bar{B}_n$ 都是¯紧的。因此，所有 $g|_{\bar{B}_n}$： $B_n \to G'_\infty$ 都是闭的。根据注记 4.4，对所有 $n$，

$$\dim \bar{B}_n \leq \dim G'_\infty.$$

因此，根据注记 4.3，dim $G_\infty \leq$ dim $G'_\infty$。由于 $\Gamma$ 和 $\Gamma'$ 是幂零的，注释 4.13 推出

$$\mathrm{asdim}(\Gamma) = \dim(G_\infty) \leq \dim(G'_\infty) = \mathrm{asdim}(\Gamma').$$

维数增加

$$\dim(G) \leq \dim(G')$$

对单连通幂零 Lie 群 $G$ 和 $G'$，由上述结论结合注释 4.9 可得。

如果 asdim(Γ) = asdim(Γ′)，区域不变定理表明 $g$ :$G_\infty \to g(G_\infty)$ 是一个同胚。同胚是拟对称的，当且仅当其逆映射是拟对称的。

由于 $g$ 和 $g^{-1}$ 都是拟对称的，根据 Pansu-Rademacher-Stepanov 定理，它们几乎处处可微，且 $g$ 的微分是一个群同构，它 intertwines $G_\infty$ 和 $G'_\infty$ [Pan89] 的膨胀。

反向结论由 Cornulier [dC11，命题 2.9] 得出：当且仅当存在一个在 $\Gamma$ 与 $\Gamma'$ 之间的 SBE 映射时，渐近锥 $G_\infty$ 与 $G'_\infty$ 才是双利普希茨等价的。根据上一段，存在一个 $G_\infty$ 与 $G'_\infty$ 之间的同构，它诱导出李代数的分次同构。注释 4.12 表明，赋予各自 Carnot-Carath´eodory 距离的 $G_\infty$ 与 $G'_\infty$ 是双利普希茨等价的。特别地，它们之间存在一个渐近莫比乌斯映射。

□

4.2. **CAT(0)空间的维数理论**。20 世纪 90 年代末，Bruce Kleiner 引入了几何维数的概念 [Kle99] ，以解决 Gromov 提出的关于 CAT(0)空间渐近几何的一些未决问题[Gro93，第127]页。在 [Gro93], Gromov 给出了 CAT(0)空间 $X$ 秩的几种定义，并猜想在适当假设下它们彼此等价。所有定义都基于这样一个观点： $X$ 在高于秩 $X$的维度上表现为双曲空间。（Gromov 将此称为 CAT(0)空间渐近几何中的指导原则。）Kleiner 证明，对于完备 CAT(0)空间，只要将 Gromov 使用的拓扑维数替换为几何维数，大多数定义便是一致的。

**定义 4.14**。 $\mathrm{CAT}(0)$空间 $X$ 的几何维数是 $X$中所有紧子集的最大拓扑维数。我们将$\text{geom-dim}(X)$记作 $X$的几何维数。

**例 4.15**。 一个0维CAT(0)空间是一个单点。1维CAT(0)空间与 $\mathbb{R}$-树 [Kle99]重合。

**注记 4.16.** 由于拓扑维数在包含关系下递增[Eng95,p. 220], , 显然

$$\text{geom-dim}(X) \leq \dim(X).$$

**注记 4.17.** 几何维数特别适用于CAT(0)-空间理论。例如，对于任意局部紧 *Hadamard*空间，若某个 $\Gamma \leq \text{Isom}(X)$ 在其上余紧作用，

$$\text{geom-dim}(X) = 1 + \text{geom-dim}(\partial_T X),$$

其中 $\partial_T X$ 是 *Tits*边界 [Kle99, Theorem C]。即使对于非适当的CAT(0)-空间，几何维数也很有用 [CL10]。

**注记 4.18.** 据推测，对于CAT($k$)-空间，拓扑维数与几何维数相同 [Gro93,p.133]。*Kleiner* 证明了所有可分CAT($k$)-空间中这两者等价 [Kle99]。

**定义 4.19.** 若一个度量空间 $X$ 的渐近锥都是CAT(0)-空间，则称其具有望远镜维数 $\leq n$ ，如果每个渐近锥的几何维数均为 $\leq n$。我们用tele-dim($X$) 表示 $X$的望远镜维数。

**例 4.20**。 由 [Gro93，第37] 以及例 *4.15* 可知，*Gromov*-双曲空间恰好是望远镜维数等于1的那些度量空间。

**注 4.21**。 望远镜维数本质上是 *Gromov* 对CAT(0)空间的秩所作的第一个定义 $X$，前提是 $X$ 具有某个群 $\Gamma$的余紧等距作用，并且用几何维数 [替代 *Gromov* 的拓扑维数Gro93，第 127]。事实上，如果 $X$ 是一个没有欧几里得因子的非紧型对称空间，那么

$$\text{tele-dim}(X) = \text{rank}(X),$$

见 [KL97，定理 5.2。1]。

**注 4.22**。 对于任意CAT($\kappa$)空间 $X$，其几何维数界定其望远镜维数 [Lyt05，引理 11。1] 即

$$\text{tele-dim}(X) \leq \text{geom-dim}(X).$$

**注记 4.23**。 任意一个秩为 $r$ 的欧几里得建筑的渐近锥 $X$ 都是一个秩为 $r$ [ 的欧几里得建筑KL97，定理 5.1。1]。特别地，它是一个CAT(0)空间 [BH99，定理 10A。4], , 并且

$$\text{tele-dim}(X) = \text{geom-dim}(X) = r.$$

**注记 4.24**。 关于建筑的秩，文献中存在一个令人遗憾的术语冲突。建筑的代数秩 $\Delta$ 定义为单形的最大秩 $\sigma \in \Delta$。建筑的几何秩是指其在几何实现中的公寓的拓扑维数 $|\Delta|$。当我们谈到建筑的秩 时，始终指其几何秩，并且完全避免使用代数秩这一概念。

定理 *1.2* 的证明。 映射 $f$ 诱导出一个拟对称（特别是单射）映射 $g$ ，它在渐近锥 $\mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda_n}(X,o)$ 与 $\mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda'_n}(Y,o')$ 之间；这两个渐近锥是在定理 2.30 的证明中构造的。二者都是 Hadamard 空间，因此也是适当空间。

设 $\bar{B}_n$ 是 $\mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda_n}(X,o)$ 中闭球的一个序列，使得 $\bigcup_n^{\infty} \bar{B}_n = \bar{\mathrm{Cone}}^{\omega}_{\lambda_n}(X,o)$。所有闭球 $B_n$ 都是紧的。因此，所有 $g|_{\bar{B}_n}\colon B_n \to \mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda'_n}(Y,o')$ 都是闭集。根据注记 4.4，对所有 $n$，

$$\dim \bar{B}_n \le \dim g(\bar{B}_n) \le \text{geom-dim}\, \mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda'_n}(Y,o').$$

因此，由注记 4.3，$\dim \mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda_n}(X,o) \le \text{geom-dim}\ \mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda'_n}(Y,o')$。结合注记 4.16

$$\text{geom-dim}\, \mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda_n}(X,o) \le \text{geom-dim}\, \mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda'_n}(Y,o').$$

根据注记 2.29，$(X,\ q,\ *_X)$ 的任意渐近锥都具有定理 2.30 证明中构造的形式。因此

$$\text{tele-dim}(X) \le \text{geom-dim}\, \mathrm{Cone}^{\omega}_{\lambda'_n}(Y,o') \le \text{tele-dim}(Y).$$

□

定理 1.2、注记 4.23 和例 4.20 推出以下推论。

**推论 4.25**。 不存在从有限秩欧几里得建筑 $r$ 到低秩欧几里得建筑的 *AM* 映射。

**推论 4.26**。 如果存在从 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间到双曲度量空间的 *AM* 映射，那么 $X$ 也是双曲度量空间。

## 5. On metric cotype obstructions

20 世纪 70 年代初，在 Enflo、Maurey 和 Pisier 的奠基性工作推动下，人们在巴拿赫空间研究中引入了（Rademacher）型与余型的概念 [Pis74] [MP76]。这些概念的提出为定量评估巴拿赫空间在有限尺度上与希尔伯特空间的相似程度提供了工具。

这促成了后来被称为巴拿赫空间局部理论的研究——即研究一般

巴拿赫空间中的有限维结构，尤其是这些结构在重新赋范、嵌入和超积极限下的表现。

Ribe 定理 [Rib76] 指出，这类“局部性质”可以用纯度量的方式表述。这一见解引发了人们的浓厚兴趣，尤其是在 20 世纪 90 年代和 21 世纪初，研究者致力于将局部理论推广到一般度量空间。重要进展包括 Bourgain–Milman–Wolfson 的工作，以及后来 Mendel–Naor [MN08]，引入度量余型，并确立了经典局部理论的非线性类比。

**定义 5.1**（度量余型）。设$(X,d)$ 为度量空间，且 $q>0$。若对每个整数 $n\in\mathbb{N}$，都存在一个偶整数 $m$，使得对每个 $f\colon \mathbb{Z}_m^n\to X$，空间 $(X,d)$ 满足度量余型 $q$，常数为 $C$。

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}_x\left[d\left(f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right),f(x)\right)^q\right]\le C^q m^q\mathbb{E}_{\varepsilon,x}\left[d(f(x+\varepsilon),f(x))^q\right],$$

其中，上述期望是对均匀选取的 $x\in\mathbb{Z}_m^n$ 和 $\varepsilon\in\{-1,0,1\}^n$ 而言的（$\{e_j\}_{j=1}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$的标准基）。

**定义 5.2**。度量空间 $(X,d)$ 具有 Enflo 型 $p$，如果存在 $T\in(0,\infty)$，使得对所有 $n\ge1$ 以及每个函数 $f\colon\{-1,1\}^n\to X$，

$$\mathbb{E}_\varepsilon\, d(f(\varepsilon),f(-\varepsilon))^p\le T^p\sum_{j=1}^n\mathbb{E}_\varepsilon\, d\left(f\left(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1},\varepsilon_j,\varepsilon_{j+1},\dots,\varepsilon_n\right),\right.$$
$$\left.f\left(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1},-\varepsilon_j,\varepsilon_{j+1},\dots,\varepsilon_n\right)\right)^p.$$

**注 5.3** ([MN08, 定理 1.2])。设 $X$ 是一个巴拿赫空间，且 $q\in[2,\infty)$。那么 $X$ 具有度量余型 $q$，当且仅当 $X$ 具有 *Rademacher* 余型$q$。

**注 5.4** ([IvHV20])。设 $X$ 是一个巴拿赫空间，且 $p\in[1,2]$。那么 $X$具有 *Enflo* 型 $p$，当且仅当 $X$ 具有 *Rademacher* 型 $p$。

**例 5.5**。$L_p$ 具有（*Rademacher*）型 $\min\{p,2\}$，以及 *Rademacher* 余型 $\max\{p,2\}$ [AK16, 定理 6.2。14]。

**定义 5.6.** 度量空间 $X$ 具有非平凡度量余型，如果

$$q_X=\inf\{q\geqslant 2: X\ \textit{has metric cotype}\ q\}<\infty.$$

**定义 5.7.** 度量空间 $X$ 具有非平凡型，如果

$$p_X=\sup\{p\geqslant 1: X\ \textit{has Enflo type}\ p\}>1.$$

**注 5.8**。设 $X$ 是一个无限维巴拿赫空间，并假设$p_X=\sup\{p:\ X$ 具有型 $p\}$，且 $q_X=\inf\{q:\ X$ 具有余型 $q\}$。那么 *Maurey-Pisier* 定理指出，$\ell_{p_X}$ 和 $\ell_{q_X}$ 都能有限可表示于 $X$ [MS86，第 85]页。

**注 5.9**。 度量余型定义中的“缩放参数” $m$ 取决于 $X$、 $q$ 和维数 $n$。对于任何非单点度量空间$(X, d)$ ，若其度量余型为 $q$，

$$m(X, q, n) \geqslant \frac{1}{C} n^{1/q},$$

如 [MN08, 引理 2。3] 所示。非单点度量空间 $(X, d)$ 若具有度量余型 $q$ ，且满足界$m \lesssim_{q,X} n^{1/q}$ 和$C \lesssim_{q,X} 1$ （用维诺格拉多夫记号表示，定义 *6.1*），则具有尖锐度量余型 $q$ 。

**例 5.10**。 每个具有非平凡型和 *Rademacher* 余型 $q$ 的巴拿赫空间都具有尖锐度量余型 $q$。这对所有巴拿赫空间是否成立仍是一个未解问题 [MN08]。

**例 5.11**。 *q*-重心度量空间具有尖锐度量余型 $q$ [EMN19，定理 5]。

**例 5.12**。 任何非正曲率的 *Alexandrov* 空间都是2-重心的（例如参见 [LPS00，引理 4。1] 或 [Stu03，定理 6。3]），因此具有2 阶尖锐度量余型。

**注记 5.13**。 *Naor* 发现，*Rademacher* 余型在拟对称映射下会增大 [Naor12]。更确切地说，若 $Y$ 是具有非平凡型的巴拿赫空间，且 $X$ 拟对称地嵌入 $Y$，那么

$$q_X \leq q_Y.$$

度量余型的类似结论目前仍未知。

然而，Naor 的证明允许目标空间 $Y$ 是具有尖锐度量余型的度量空间。我们可以利用这种灵活性，将这一结果应用于渐近锥。

**注记 5.14**。 注意，若$(X, d)$ 具有常数为 $C$ 、缩放参数为 $m$的度量余型 $q$ ，那么任何重标度版本都具有度量余型 $q$ ，且常数 $C$ 和缩放参数 $m$保持不变。由于度量余型条件只涉及非负实数的有限和与平均值，因此它在取渐近锥或切锥时保持稳定。

定理 *1.3* 的证明。 假设存在一个具有尖锐度量余型 $q < p$ 的度量空间 $X$ 以及一个 AM 映射 $f : \ell_p \to X$。那么结合例 2.40， $f$ 会导出一个拟对称嵌入 $g : L_p(\mu) \to Z$ ，其连接$L_p(\mu)$与 $X$的某个渐近锥 $Z$ 。

根据注 5.14， $Z$ 具有尖锐度量余型 $q$。此外

$$q_{L_p(\mu)} = p,$$

由例 5.5 得出。证明的其余部分由 [Nao12] 得出。

□

例 5.10 和例 5.12 推出以下推论。

**推论 5.15.** 假设 $p, q \in [2, \infty]$ 满足 $p > q$。那么不存在从 $\ell_p$ 到 $\ell_q$ 的正则 *AM* 映射。

**推论 5.16.** 假设 $p > 2$，那么不存在从 $\ell_p$ 到任意非正曲率亚历山德罗夫空间的正则 *AM* 映射。

## 6. Appendix

**定义 6.1** (维诺格拉多夫记号)。对于两个量 $X$ 和 $Y$，我们写作 $|X| \lesssim |Y|$（等价地，$|Y| \gtrsim |X|$），表示存在一个通用常数 $C > 0$，使得 $|X| \leq C\,|Y|$。记号 $|X| \asymp |Y|$ 表示不等式 $|X| \lesssim |Y|$ 和 $|Y| \lesssim |X|$ 同时成立。

当允许隐含常数依赖于其他参数时，这种依赖关系用下标表示。例如，给定辅助对象（如 $q$）或空间 $M$，记号 $|X| \lesssim_{q,M} |Y|$ 表示，对于某个常数 $C(q, M) > 0$，有 $|X| \leq C(q, M)\,|Y|$，该常数仅依赖于 $q$ 和 $M$。对 $|X| \gtrsim_{q,M} |Y|$ 和 $|X| \asymp_{q,M} |Y|$ 也有类似的解释。

**引理 6.2.** 若 $X$ 是巴拿赫空间，则 $X$ 的所有渐近锥锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X,0)$都与 $X$的超幂 $X^{\omega}$ 线性等距。

证明. 对于任意一点 $[x_n]_\omega \in$锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X, 0)$，我们将其对应到点 $\left\{ \frac{x_n}{\lambda_n} \right\}_\omega \in X^\omega$。此映射

$$\phi : [x_n]_\omega \mapsto \left\{ \frac{x_n}{\lambda_n} \right\}_\omega ,$$

是良定义的，因为若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 在锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X,0)$中定义了同一点，则 $\lim_\omega \|\phi([x_n]_\omega) - \phi([y_n]_\omega)\| = \lim_\omega \|\frac{x_n - y_n}{\lambda_n}\| = 0$。它同样保持范数且是线性的，因此是线性等距嵌入。容易验证，

$$\phi^{-1} : \{x_n\}_\omega \mapsto [\lambda_n x_n]_\omega ,$$

是 $\phi$的逆映射。

□

**引理 6.3.** 若$(X, q, *_X)$ 是渐近链式的，则 $X$ 在 $q$ 处的任意渐近锥，都与渐近锥锥$^{\omega}_{\lambda_n}(X, q)$等距，其中对于某个序列 $z_n \in X$，有 $\lambda_n = d(q, z_n)$。

证明。注意，只要我们能够证明：对于任意给定的超滤子 $\omega$ 和任意满足 $\lim_\omega \lambda_n = \infty$ 的序列 $\lambda_n$，都存在一个序列$z_n \in X$，使得

$$\lim_\omega \frac{\lambda_n}{|z_n|} = 1.$$

我们可以假设 $\lambda_n > 0$，并令 $z_n \in X_{*_X} \backslash B_{\lambda_n}(o)$ 为 $\varepsilon$-极小的，其含义是，对于任何其他满足 $d(o,x) \leqslant d(o,z_n)$ 的 $x \in X_{*_X} \backslash B_{\lambda_n}(o)$，都有 $|d(o,x) - d(o,z_n)| < \varepsilon$。这样的 $z_n$ 总是存在，因为假设 $*_X$ 不是孤立的。

由于 $X$ 是渐近链式的，因此存在一个序列

$$o = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = z_n \quad \text{s.t.} \quad d(x_i, x_{i+1}) \leq v(|z_n|).$$

令 $x_i$ 为 $B_{\lambda_n}(o)$ 内的极大点，意即对所有 $j > i, x_j \notin B_{\lambda_n}(o)$。

不妨设 $x_i = x_{k-1}$。事实上，若情况并非如此，则要么$d(o,x_{i+1}) \leq d(o,z_n)$，从而 $|d(o,x_{i+1}) - d(o,z_n)| < \varepsilon$，于是

$$d(x_j, x_{j+1}) \leqslant v(|z_n|) \leqslant v(|x_{i+1}| + \varepsilon),$$

要么 $d(o,x_{i+1}) > d(o,z_n)$，从而

$$d(x_j, x_{j+1}) \leqslant v(|z_n|) \leqslant v(|x_{i+1}|).$$

除去一个在 $n$ 上一致的加性 $\varepsilon$-误差外，我们可以将 $z_n$ 替换为$x_{i+1}$。

现在我们通过三角不等式将 $\lambda_n$ 与 $|z_n|$联系起来，

$$|z_n| \leq |x_{k-1}| + v(|z_n|) \leq \lambda_n + v(|z_n|).$$

特别是

$$1 - \frac{v(|z_n|)}{|z_n|} \leq \frac{\lambda_n}{|z_n|} \leq 1.$$

□

## References

[ACDB04] F. Astengo、M. Cowling 和 B. Di Blasio。凯莱变换与一致有界表示。《函数分析杂志》，213(2):241–269，2004。[AK16] Fernando Albiac 和 Nigel J. Kalton。巴拿赫空间理论专题，数学研究生教材第233卷。施普林格，[Cham], 第二版，2016。附有 Gilles Godefory 撰写的序言。[Ass83] Patrice Assouad。**实数集**中的 Lipschitz 嵌入。《法国数学会通报》，111(4):429–448，1983。[BD08] G. Bell 和 A. Dranishnikov。渐近维数。《拓扑学及其应用》，155(12):1265–1296，2008。[BdlHV08] Bachir Bekka、Pierre de la Harpe 和 Alain Valette。*Kazhdan*性质（*T*），新数学专著第11卷。剑桥大学出版社，剑桥，2008。[BH99] Martin R. Bridson 和 Andr´e Haefliger。非正曲率度量空间，数学科学基础丛书第319卷 *[*数学科学基本原理*]*。施普林格出版社，柏林，1999。[BK02] Mario Bonk 和 Bruce Kleiner。拟莫比乌斯群作用的刚性。《微分几何杂志》，61(1):81–106，2002。

[BL00a] Yoav Benyamini 和 Joram Lindenstrauss。几何非线性泛函分析。第1卷，卷48，美国数学会讨论会出版物。美国数学会，普罗维登斯，RI，2000。[BL00b] Yoav Benyamini 和 Joram Lindenstrauss。几何非线性泛函分析。第1卷，卷48，美国数学会讨论会出版物。美国数学会，普罗维登斯，RI，2000。[Buy16] S. V. Buyalo。莫比乌斯结构与次莫比乌斯结构。《代数与分析》，28(5):1–20，2016。[CG04] Gunnar Carlsson 和 Boris Goldfarb。离散群的同调相干性。《代数杂志》，276(2):502–514，2004。[CL10] Pierre-Emmanuel Caprace 和 Alexander Lytchak。有限维 CAT(0) 空间的无穷远处。《数学年刊》，346(1):1–21，2010。[dC11] Yves de Cornulier。李群的渐近锥与锥等价。《伊利诺伊数学杂志》，55(1):237–259，2011。[dC19] Yves de Cornulier。群的次线性双 Lipschitz 等价。《高等师范学校科学年刊》´Ec. Norm. Sup ´er. (4)，52(5):1201–1242，2019。[DCK72] D. Dacunha-Castelle 和 J. L. Krivine。超积在巴拿赫空间与代数研究中的应用。《数学研究》，41:315–334，1972。[EMN19] Alexandros Eskenazis、Manor Mendel 和 Assaf Naor。非正曲率并非粗略普适。《数学发明》，217(3):833–886，2019。[Eng95] Ryszard Engelking。有限与无限维数理论，纯数学 Sigma 丛书第10卷。Heldermann Verlag，Lemgo，1995。[GN43] I. Gelfand 和 M. Neumark。关于将赋范环嵌入希尔伯特空间中算子环的问题。《数学文摘》，N.S.，12/54:197–213，1943。[Gro81] Mikhael Gromov。多项式增长群与扩张映射。《高等科学研究所数学出版物》，(53):53–73，1981。[Gro93] M. Gromov。无限群的渐近不变量。载于《几何群论》第2卷（苏塞克斯，1991），伦敦数学会讲义系列第182卷，第1–295页。剑桥大学出版社，剑桥，1993。[Gro99] Misha Gromov。黎曼空间与非黎曼空间的度量结构，数学进展第152卷。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，MA，1999。基于1981年法文原版 [ MR0682063 (85e:53051}], 附有 M. Katz、P. Pansu 和 S. Semmes 撰写的附录，由 Sean Michael Bates 从法文译出。[IvHV20] Paata Ivanisvili、Ramon van Handel 和 Alexander Volberg。Rademacher 型与 Enflo 型相同。《数学年刊》(2)，192(2):665–678，2020。[KL97] Bruce Kleiner 和 Bernhard Leeb。对称空间与欧几里得建筑中拟等距的刚性。《高等科学研究所数学出版物》，(86):115–197，1997。[Kle99] Bruce Kleiner。曲率上界长度空间的局部结构。《数学杂志》，231(3):409–456，1999。[LN06] James R. Lee 和 Assaf Naor。 $L^p$ 海森堡群上的度量与 Goemans-Linial 猜想。2006。[LPS00] U. Lang、B. Pavlovi´c 和 V. Schroeder。到 Hadamard 空间的 Lipschitz 映射的延拓。《几何与泛函分析》，10(6):1527–1553，2000。[Lyt05] A. Lytchak。球面建筑与连接的刚性。《几何与泛函分析》，15(3):720–752，2005。

[Mal51] A.I.Malcev.论一类齐性空间.《美国数学会译丛》, 1951(39):33, 1951.[MN08] Manor Mendel 和 Assaf Naor. 度量余型.《数学年刊》 (2), 168(1):247–298, 2008.[MP76] Bernard Maurey 和 Gilles Pisier. 独立向量值随机变量序列及巴拿赫空间的几何性质. Studia Math., 58(1):45–90, 1976.[MS86] Vitali D. Milman 和 Gideon Schechtman. 有限维赋范空间的渐近理论, 《数学讲义》丛书第 1200 卷. 施普林格出版社，柏林，1986. 附有 M. Gromov 的附录.[Mun00] James R. Munkres. 拓扑学. Prentice Hall, Inc., 上萨德尔河（新泽西州），第二版，2000.[Nao12] Assaf Naor. 度量余型在拟对称嵌入中的应用. 载于《度量与微分几何》，Progr. Math. 第 297 卷，第 175–178 页. Birkhäuser/Springer，巴塞尔，2012.[NN12] Assaf Naor 和 Ofer Neiman. 雪花化维数无关的 Assouad 定理. Rev. Mat. Iberoam., 28(4):1123–1142, 2012.[Pal20] Gabriel Pallier. 双曲空间的大尺度次线性利普希茨几何. J. Inst. Math. Jussieu, 19(6):1831–1876, 2020.[Pan83] Pierre Pansu. 幂零流形中球与闭测地线的增长. Ergodic Theory Dynam. Systems, 3(3):415–445, 1983.[Pan89] Pierre Pansu. Carnot–Carathéodory 度量与秩一对称空间的拟等距映射.《数学年刊》 (2), 129(1):1–60, 1989.[Pan21] Pierre Pansu. 大尺度共形映射. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 54(4):831–887, 2021.[Pis74] G. Pisier. 关于不包含一致……的空间. 载于《Maurey–Schwartz 研讨会 1973–1974：空间、辐射化映射与巴拿赫空间的几何》，第 19 页，报告第 7 号（勘误见 E.1 页）. 巴黎综合理工学院，巴黎，1974.[Rib76] M. Ribe. 关于一致同胚的赋范空间. Ark. Mat., 14(2):237–244, 1976.[Sat99] Ken-iti Sato. Lévy 过程与无限可分分布, 《剑桥高等数学研究》丛书第 68 卷. 剑桥大学出版社，剑桥，1999. 译自 1990 年日文原版，作者修订.[Seg47] I. E. Segal. 算子代数的不可约表示. Bull. Amer. Math. Soc., 53:73–88, 1947.[Sem96] Stephen Semmes. 关于双利普希茨参数化不存在性以及有关权重的几何问题. Rev. Mat. Iberoamericana, 12(2):337–410, 1996.[Stu03] Karl-Theodor Sturm. 非正曲率度量空间上的概率测度. 载于《热核与流形、图及度量空间上的分析》（巴黎，2002），Contemp. Math. 第 338 卷，第 357–390 页. 美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2003.[Sus73] H´ector J. Sussmann. 向量场族的轨道与分布的可积性. Trans. Amer. Math. Soc., 180:171–188, 1973.[Vä84] Jussi V¨ais¨al¨a. 拟 Möbius 映射. J. Analyse Math., 44:218–234, 1984.

[Yu98] Guoliang Yu. 有限渐近维数群的诺维科夫猜想.《数学年刊》 *(2)*,147(2):325–355, 1998.

Department of Mathematics, University of Luxembourg,
L-4364 Esch-sur-Alzette电子邮箱地址：georg.gruetzner@uni.lu