arXiv:2601.07705v1 [math.GT] 12 Jan 2026

通过圆周作用研究阿诺索夫表示的不连续区域的拓扑

MASON HART

Contents

1. 引言 1 2. 李理论与旗簇 6 2.1. 经典群与旗簇 8 2.2. 布鲁哈分解与相对位置 16 3. 阿诺索夫表示与不连续区域 21 3.1. 阿诺索夫表示 21 3.2. 到高秩李群中的福克斯表示 27 3.3. 三维复旗簇 33 4. 4 维流形上的 S^1–作用分类 38 4.1. 圆周作用与轨道空间 38 4.2. 切向权重图 43 4.3. 分类定理 45 4.4. Hirzebruch 曲面上的作用 50 5. 旗簇的切向权重数据 54 5.1. 不变旗及其切空间 54 5.2. 纤维中的固定点与例外点 59 6. $\dim_{\mathbb{C}}\Omega$ 的纤维拓扑 $= 3$ 60 6.1. 对于 $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$, $\Omega \subseteq \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$ 60 6.2. 对于 $G = \mathrm{SL}(4, \mathbb{C})$, $\Omega \subseteq \mathbb{CP}^3$ 65 6.3. 对于 $G = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$, $\Omega \subseteq \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4)$ 68 6.4. 总结 72 参考文献 73

1. Introduction

对于秩一半单李群 G （其极大紧子群为 K），令 $X = G/K$ 为 G的对称空间。给定一个有限生成群 Γ，若表示 $\rho\colon \Gamma \to G$ 的轨道映射

$$\tau_\rho : \Gamma \to X$$

由.....给出

$$\gamma \mapsto \rho(\gamma)K$$

是一个准等距嵌入，其中群 Γ 赋予字度量，对称空间 X 赋予由 Killing 型导出的 G–不变黎曼度量。由于 G/K 具有严格负曲率， Γ 是

必然是一个双曲群。根据 δ–双曲空间的性质，存在一个相应的嵌入

$$\partial \tau_\rho : \partial \Gamma \to \partial X$$

其中， $\partial \Gamma$ 是 Γ 的格罗莫夫边界，而 ∂X 是 X的视觉边界。嵌入 $\partial \tau_\rho$ 的像称为 ρ 的极限集 Λ_ρ ，恰好是 ∂X中的非游荡点集合。凸共紧表示的极限集有一个显著性质：其补集

$$\Omega_\rho = \partial X \setminus \Lambda_\rho$$

是 Γ 通过 ρ的作用所对应的余紧不连续域。

例如，当 $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$，且 $\Gamma = \pi_1(S)$是高亏格曲面 S的基本群时，凸余紧表示 $\rho : \Gamma \to G$称为拟福克斯表示。拟福克斯表示的极限集 Λ_ρ 是 $\partial X = \partial \mathbb{H}^3 = \mathbb{CP}^1$中的一条若尔当曲线。因此，在这种情况下，不连续域$\Omega_\rho$ 分裂为两个互不相交的拓扑圆盘。将Ω_ρ 按 Γ的作用取商后，我们得到一个曲面

$$\mathcal{W}_\rho = \rho(\Gamma) \setminus \Omega_\rho$$

其带有复射影结构（即其覆盖空间 Ω_ρ 是 $\mathbb{CP}^1$ 的一个开子集，且甲板变换属于 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$）。从拓扑上看， $\mathcal{W}_\rho$ 微分同胚于 $S \sqcup S = \partial(S \times [0,1])$，可以将其视为紧致化

$$\rho(\Gamma) \setminus (\mathbb{H}^3 \cup \Omega_\rho) \cong S \times [0,1]$$

双曲三维流形 $\rho(\Gamma) \setminus \mathbb{H}^3$ 的边界。

过去二十年来，人们在将这一图景以及 Teichm¨uller 理论的其他方面推广到高秩李群方面取得了长足进展。对于高秩半单李群 G 和双曲群 Γ，Guichard 和 Wienhard [GW12]（基于 Labourie [Lab05] 所定义的 $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 的概念 $\Gamma = \pi_1(S)$）定义了从 Γ 到 G的阿诺索夫表示这一类表示。阿诺索夫表示已成为所谓高秩 Teichm¨uller 理论的焦点，担当凸共紧表示恰当的高秩类比。阿诺索夫性质的不同层级由单根的非空子集 θ 标记。于是， θ–阿诺索夫表示 $\rho : \Gamma \to G$ 构成 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 的一个开子集。对于任意 θ， θ–阿诺索夫表示总是具有离散像和有限核。

凸共紧表示与阿诺索夫表示共有的一项重要特征是，它们都允许在 X 的 G 对称空间的视觉边界内存在共紧不连续域。高秩李群 G 的对称空间 X 有一个显著的难点：视觉边界在 G 的作用下并非齐性空间。相反，视觉边界分解为 G–轨道，每个轨道都同构于一个称为旗簇的紧致齐性空间。旗簇的类型 $\mathcal{F}_\theta$ 也由单根的非空子集标记，而 θ–阿诺索夫表示 $\rho : \Gamma \to G$ 的一项基本性质是它允许存在一个 ρ–等变嵌入

$$\xi : \partial \Gamma \to \mathcal{F}_\theta.$$

称为 ρ 的极限映射。若 G 是高秩的，则 ξ 的像通常不再包含每个非游荡点，而其补集

$$\mathcal{F}_\theta \setminus \xi(\partial \Gamma)$$

不是不连续域 [KLP17b]。然而， [GW12]证明， θ–阿诺索夫表示在某个（可能不同的）旗簇 $\mathcal{F}_\eta$ 中存在余紧不连续域，其方法是在线性表示上使用 G–不变双线性型。此外，Kapovich、Leeb 和 Porti [KLP17b] 根据 G 的魏尔群 W 的组合性质，系统地描述了旗簇 $\mathcal{F}_\eta$ 中 θ–阿诺索夫表示的不连续域。这两种方法最终都将不连续域实现为极限集某种加厚形式的补集。根据 [KLP17b]，的方法，加厚过程由 W 的一组双陪集刻画，称为平衡理想（记作 I）。对于一个恰当的平衡理想 I，一个余紧不连续域

$$\Omega^I_\rho \subseteq \mathcal{F}_\eta$$

构造完成。然后，如果 Γ 是无挠的，我们就可以考虑商流形

$$\mathcal{W}^I_\rho = \rho(\Gamma) \setminus \Omega^I_\rho.$$

这个商流形 $\mathcal{W}^I_\rho$ 具有自然的 $(G, \mathcal{F}_\eta)$–结构，其意义由 Ehresmann 和 Thurston 给出，是对拟福克斯情形中所见复射影结构的推广。

一般而言，与拟福克斯情形相比， $\mathcal{W}^I_\rho$ 的拓扑更难理解。当 Γ 是曲面群，且表示 ρ 可通过一个同态

$$\iota : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to G,$$

关于拓扑还能得出更多结论。这种表示称为 ι–福克斯表示。对于到复李群 G 中的 ι-福克斯表示，Dumas 和 Sanders 计算了区域 Ω^I_ρ 和 $\mathcal{W}^I_\rho$ 的同调。对于 ι-福克斯表示，Alessandrini、Maloni、Tholozan 和 Wienhard [AMTW23] 证明了存在一个光滑的 SL(2，$\mathbb{R}$)–等变纤维丛投影

$$p : \Omega^I_\rho \to \mathbb{H}^2$$

其中，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 通过 ι作用于 Ω^I_ρ。此外，他们证明这意味着$\mathcal{W}^I_\rho$ 是以 S 为底空间、以 M^I_ρ 为纤维的光滑纤维丛，且该丛的结构群为 SO(2)。纤维丛投影 $\mathcal{W}^I_\rho \to S$ 是非显式构造的，因此纤维 M^I_ρ 通常难以确定。当 ρ 为 ι–福克斯时，该定理将确定 $\mathcal{W}^I_\rho$ 拓扑的问题归结为以下问题:

问题。 纤维 M^I_ρ的拓扑是什么？结构群 SO(2) 如何作用于 M^I_ρ?

本文的主要结果是回答不连续域位于三维复旗簇中的情形。

定理 A。 设 ρ： $\Gamma \to G$ 是一个 ι–福克斯表示，其中 ι： SL(2，$\mathbb{R}$) $\to G$ 是到 $\mathbb{C}$ 上的一个经典矩阵群中的同态。假设 ρ具有一个余紧不连续域 Ω^I_ρ，该域由 I构造，且位于维数为 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_\eta = 3$的旗簇 $\mathcal{F}_\eta$ 内。那么， p： $\Omega^I_\rho \to \mathbb{H}^2$ 的纤维 M^I_ρ 如下:

(i) 如果 $\mathcal{F}_\eta = \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$，那么 M^I_ρ 与$(S^2 \times S^2)\#(S^2 \times S^2)$微分同胚。(ii) 如果 $\mathcal{F}_\eta = \mathbb{CP}^3$，那么 M^I_ρ 与 $S^2 \times S^2$微分同胚。(iii) 如果 $\mathcal{F}_\eta = \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4)$，那么 M^I_ρ 与 $\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2$微分同胚。

在每种情况下，都可以确定$\mathrm{SO}(2)$ 的结构群作用，并且每一种作用都等价于希策布鲁赫曲面上的代数群作用，或此类作用的连通和。

本文证明，对于定理 A 中 $\mathcal{F}_\eta$ 的每种选择，同态 $\iota : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to G$ 都有两种选择（在共轭意义下），使得 $\rho = \iota \circ \phi$ 在 $\mathcal{F}_\eta$ 中存在不连续域。ι 的一种选择是映入 G 的不可约（主）表示 $\iota_{\mathbf{irr}}$，因此，这一结果描述了这些情形下 Hitchin 表示的 $\mathcal{W}_\rho^I$ 的拓扑。ι 的另一种选择是可约表示 $\iota_{\mathbf{red}}$，其分解为不可约 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 表示的方式取决于 $\mathcal{F}$。具体而言，若 $\rho_n : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 是 n 维的唯一不可约表示，则表示 $\iota_{\mathbf{irr}}$ 和 $\iota_{\mathbf{red}}$ 如下表所示：G $\mathcal{F}$

	η	$\iota_{\mathbf{irr}}$	$\iota_{\mathbf{red}}$
$\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$	$\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$	ρ_3	$\rho_2 \oplus \rho_1$
$\mathrm{SL}(4, \mathbb{C})$	$\mathbb{CP}^3$	ρ_4	$\rho_2 \oplus \rho_2$
$\mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$	拉格朗日子空间($\mathbb{C}^4$)	ρ_4	$\rho_2 \oplus \rho_1 \oplus \rho_1$.

（见下文的命题 3.8。）令 $M_{\mathbf{irr}}$（分别为 $M_{\mathbf{red}}$）表示不可约（分别为可约）情形下的纤维，令 $\mathcal{W}_{\mathbf{irr}}$（分别为$\mathcal{W}_{\mathbf{red}}$）表示不可约（分别为可约）情形下的商流形。对于定理 A 中的每个旗簇 $\mathcal{F}_\eta$，纤维 $M_{\mathbf{irr}}$ 和 $M_{\mathbf{red}}$ 虽然微分同胚，但它们具有不同的结构群作用，因此，至少在先验意义下，商流形 $\mathcal{W}_{\mathbf{irr}}$ 和 $\mathcal{W}_{\mathbf{red}}$ 的拓扑可能不同。这引出了以下问题：

问题。对于定理 A 中的旗簇 $\mathcal{F}_\eta$，$\mathcal{W}_{\mathbf{irr}}$ 和 $\mathcal{W}_{\mathbf{red}}$ 是否微分同胚?

这个问题与理解特征簇中阿诺索夫表示空间这一更广泛的问题相关。令 $\mathrm{Anosov}_\theta(\Gamma, G)$ 表示 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 中的阿诺索夫表示集合。根据 [GW12，第 9. 12], 条定理，如果 $\rho, \rho' : \Gamma \to G$ 是位于阿诺索夫$_\theta(\Gamma, G)$ 同一连通分支上的表示，那么对于任意平衡理想 I，商流形 $\mathcal{W}_\rho^I$ 和 $\mathcal{W}_{\rho'}^I$ 微分同胚。因此，流形 $\mathcal{W}_{\mathbf{irr}}$ 和 $\mathcal{W}_{\mathbf{red}}$ 的拓扑与以下问题相关：

问题。

(1) ρ_3 和 $\rho_2 \oplus \rho_1$ 是否属于同一个阿诺索夫$^{\{1,2\}}(\Gamma, \mathrm{SL}(3, \mathbb{C}))$分支? (2) ρ_4 和 $\rho_2 \oplus \rho_2$ 是否属于同一个阿诺索夫$^{\{2\}}(\Gamma, \mathrm{SL}(4, \mathbb{C}))$分支? (3) ρ_4 和 $\rho_2 \oplus \rho_1 \oplus \rho_1$ 是否属于同一个阿诺索夫$^{\{1\}}(\Gamma, \mathrm{Sp}(4, \mathbb{C}))$分支?

在本文中，我们无法对上述两个问题中的任何一个给出明确答案。

在 [AMTW23], 的结果出现之前，人们已经注意到 $\mathcal{W}_\rho^I$ 的纤维丛结构，并确定了纤维的拓扑。对于 $G = \mathrm{PSL}(4, \mathbb{R})$，$\mathcal{F}_\eta = \mathbb{RP}^3$,[GW08] 将商流形 $\mathcal{W}_\rho^I$ 识别为 S的单位切丛，并证明 Hitchin 表示恰好是单位切丛上凸叶状射影结构的全纯单值。对于 $G = \mathrm{SO}_0(2, n+1)$，$\mathcal{F}_\eta =Pho(\mathbb{R}^{2, n+1})$，Collier、Tholozan 和 Toulisse 将 $\mathcal{W}_\rho^I$ 识别为以 S 为底空间、以 Pho$(\mathbb{R}^{2, n})$为纤维的纤维丛，并根据 $\mathcal{W}_\rho^I$上的光子结构刻画了极大表示。最后，对于 $G = \mathrm{SL}(2n, \mathbb{K})$，$\mathcal{F}_\eta = \mathbb{KP}^{2n-1}$，Alessandrini、Davalo 和 Li [ADL24] 刻画了 Hitchin 表示，并将（拟）Hitchin 表示识别为 $\mathcal{W}_\rho^I$上的射影结构的全纯单值。

其他沿着这些思路的结果包括 Nolte 和 Riestenberg 的工作（$G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$，$\mathcal{F}_\eta =$ 旗$(\mathbb{R}^3)$，见 [NR24]），Davalo 和 Evans 的工作（$G = \mathrm{SO}_0(p, p+$

1) G_2', $\mathcal{F}_\eta = \mathrm{Ein}^{p-1,\,p}$，Pho$^{\times}$，见 [DE25b；DE25a]）。此外，在一篇即将发表的论文中，[Har], 作者研究了任意 $(G,\ \mathcal{F}_\eta)$ 的纤维的 h-余边类型，并将其与 $\mathcal{F}_\eta$ 内一点的加厚联系起来。

对于 $G = \mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{F}_\eta = \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4)$，Alessandrini、Maloni、Tholozan 和 Wien- hard [AMTW23] 使用了非光滑投影映射，并借助 Freedman 分类来研究单连通 4 维流形，从而证明纤维 M_ρ^I 同胚于 $\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2$。因此，定理 A 的 (iii) 部分将这一识别提升为等变微分同胚。类似地，(ii) 部分也可由 [AMTW23], 的工作推出，但本文明确确定了结构群。本文与以往工作的最后一个主要区别在于，除了准 Hitchin 表示外，本文还研究经由可约表示因子化的表示。

证明的关键工具是 Fintushel 对带有效 S^1–作用 [Fin77] 的闭单连通 4 维流形所作的分类。直观而言，该分类表明，单连通 4 维流形上的圆作用由非平凡稳定子点周围的作用决定。这些信息编码在一个嵌入该作用轨道空间的带标记图中。Fintushel 的原始论文是在拓扑范畴中开展的，因此只证明了分类在 S^1–等变同胚意义下成立，尽管按照通常的说法，该分类在光滑范畴中也成立。我们主要通过采用明确的光滑方法重新梳理 Fintushel 的原始证明，证实了这一广为流传的结论。为了使这一分类更易于应用于光滑作用，我们采用了 Jang 提出的图的另一种标记方式 [Jan18; JM23]。我们将采用 Jang 标记方式的这一分类图称为该 S^1–作用的切向权重图。

在获得关于单连通四维流形上的光滑 S^1–作用的分类定理后，我们通过将 SO(2) 在 M_ρ^I 上的作用与其在环境旗簇 $\mathcal{F}$上的作用联系起来，发展出一种确定该作用的切向权重图的方法。我们确定了一族 S^1–作用在 Hirzebruch 曲面上的切向权重图。通过证明每个纤维 M_ρ^I 的切向权重图都与某个 Hirzebruch 曲面（或 Hirzebruch 曲面的连通和）的切向权重图一致，我们得出定理 A。

我们想指出，本文的方法同样可以应用于直积群的三维复旗簇。具体而言，具有不连续域的 $\mathcal{F} = (\mathbb{CP}^1)^3$ 中的$G = (\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))^3$ 的纤维与 $\#^3(S^2 \times S^2)$ 微分同胚，而 $\mathcal{F} = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^2$ 中的 $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 的纤维与 $(S^2 \times S^2)\#\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2$ 微分同胚。为简洁起见，我们不讨论这些情形的细节，而是专注于单矩阵群。

论文提纲。第 2 节介绍所需的李理论。第 3 节定义阿诺索夫表示及其不连续域，并以命题 3.8 作结，该命题列出了可以应用我们方法的情形。第 4 节展示了如何用切向权重图对单连通闭 4 维流形上的光滑 S^1–作用进行分类（定理 4.9）。第 5 节介绍如何计算旗簇的切向权重图，并将其与纤维的切向权重图联系起来（命题 5.4）。第 6 节将这些结果应用于确定各情形下的纤维：

- 关于 $\mathcal{F}$ =旗（$\mathbb{C}^3$），参见推论 6.2 和推论 6.5。

- 关于 $\mathcal{F} = \mathbb{CP}^3$，参见推论 6.9 和推论 6.11。
- 关于 $\mathcal{F}$ =拉格朗日子空间($\mathbb{C}^4$)，请参见推论 6.13 和推论 6.17。

致谢。 首先，作者谨向导师 Sara Maloni 表达由衷的感谢，感谢她给予作者无尽的帮助与指导。她的支持对作者作为研究生的学业进展以及作为论文一部分完成本文都不可或缺。作者还要感谢 Filippo Mazzoli 在本研究项目不同阶段进行的有益讨论，以及 Nicolas Tholozan 和 Max Riestenberg 的真知灼见。

作者的研究部分得到了美国国家科学基金会项目 DMS-1848346（NSF CAREER）的资助。最后，作者还要感谢亨利·庞加莱研究所（UAR 839 CNRS-索邦大学）和 LabEx CARMIN（ANR-10-LABX-59-01）提供的支持。

2. Lie theory and flag varieties

现在，我们将阐述定义和描述阿诺索夫表示及其不连续域所需的李理论。本文中，我们只考虑取值于复李群的表示。不过，实李群和复李群的相关结构理论都会用到。每次使用的系数域都会明确说明。

若域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 上的李代数 $\mathfrak{g}$ 没有非平凡真理想，则称其为单李代数。若连通李群 G 的关联李代数 $\mathfrak{g} = T_eG$ 是单李代数，且该群具有有限中心，则称其为单连通李群。若域 $\mathbb{K}$ 上的李代数 $\mathfrak{g}$ 没有非平凡阿贝尔理想，则称其为半单李代数。 $\mathfrak{g}$ 的半单性等价于 Killing 型的非退化性

$$\kappa(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_X \circ \operatorname{ad}_Y)$$

其中

$$\operatorname{ad}_X(Y) = [X, Y]$$

迹使用域 $\mathbb{K}$ 中的系数计算。域 $\mathbb{K}$ 上的李群若其李代数 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，则称其为半单李群。

重要的半单复李群例子包括经典群

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A = 1\} \\
\mathrm{SO}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) : A^t J A = J\} \\
\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) &= \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) : A^t J' A = J'\}
\end{aligned}$$

其中

$$J = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \qquad J' = \begin{bmatrix} & J \\ -J & \end{bmatrix}$$

是可逆对称矩阵和斜对称矩阵的一种选取。为 J（或 J'）选择不同的对称矩阵（或斜对称矩阵），将得到 SL(n, $\mathbb{C}$) 的一个共轭子群。

相应的经典复李代数为

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \operatorname{tr} A = 0\}$$
$$\mathfrak{so}_n = \{A \in \mathfrak{sl}_n : A^t J + JA = 0\}$$
$$\mathfrak{sp}_n = \{A \in \mathfrak{sl}_{2n} : A^t J' + J'A = 0\}$$

其中每个都是单的。此外，还有例外单李代数 $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$ ，它们是例外群 G_2, F_4, E_6, E_7和 E_8的李代数。有关这些例外群的具体模型，参见 [OV93，第 5]章。

实数域 $\mathbb{C}$上的任何有限维单李代数，都是经典单李代数或例外单李代数的直和。就我们的目的而言，这意味着只需考虑经典群和例外群的乘积，而不必考虑实数域 $\mathbb{C}$上的整个半单李群类。

在本节余下部分，设 G是实数域 $\mathbb{C}$ 上的经典群与例外群的乘积，其李代数为 $\mathfrak{g}$。若子代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个子代数，并且在所有使其对 $\mathfrak{g}$ 的伴随作用可同时对角化的子代数中极大，则称其为嘉当子代数。任意两个嘉当子代数在 G的伴随作用下共轭。

我们可以选取 G 的一个极大紧子群 K ，其李代数为 $\mathfrak{k}$，使得 $\mathfrak{t} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{k}$ 的一个极大阿贝尔子空间，而 $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^{\perp_{\kappa_{\mathbb{R}}}}$ 的一个极大阿贝尔子空间，也是相对于 $\mathfrak{g}$ 的实基灵形式而言 $\mathfrak{k}$ 的正交补。在这种情况下，维数 $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ 称为 G 的秩。于是， $\mathfrak{g}$ 有一个限制根空间分解。限制根是一个非零实线性泛函 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ ，其根空间

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \operatorname{ad}_H(X) = \lambda(H)X \text{ for } H \in \mathfrak{a}\}$$

非零。于是，限制根的集合

$$\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0, \alpha \neq 0\}$$

是 $\mathfrak{a}^*$ 中的一个抽象根系。我们可以选取一个子集 $\Delta \subseteq \Sigma$ ，它是 $\mathfrak{a}^*$ 的一组基。我们称 Δ 中的元素为单根。若根 $\alpha \in \Sigma$ 可用基 Δ 表示，且系数均为非负（分别为非正），则称其为正根（分别为负根）。令 Σ^+ （分别为 Σ^-）表示正根（分别为负根）的集合。于是，根系的性质意味着 $\Sigma = \Sigma^+ \sqcup \Sigma^-$。我们将标准 Borel 子群 B （相对于我们所选的 K、 $\mathfrak{a}$ 和 Δ）定义为其李代数为.....的解析子群（定义在 $\mathbb{R}$ 上）

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

注意，我们对 K 和 $\mathfrak{a}$ 的选择确保每个根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的复线性子空间，因此 $\mathfrak{g}$ 实际上是 $\mathfrak{g}$ 上的一个子代数，而 B 是 G的一个复李子群。

包含 B 的 G 的真子群 P 称为标准抛物子群，其形式总是 P_θ ，其中 P_θ 是 G中李代数为

$$\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^- \cap \operatorname{Span}(\Delta \setminus \theta)} \mathfrak{g}_\alpha$$

对于某个非空子集 $\theta \subseteq \Delta$。 Δ 的非空子集 θ 称为 P 的类型。特别地， $P_\Delta = B$ 是博雷尔子群。

对于标准抛物子群 P_θ，我们关注其关联的 G–齐性空间

$$\mathcal{F}_\theta = G/P_\theta$$

我们称其为 G 的（广义）θ 类型旗簇。齐性空间 $\mathcal{F}_\Delta = G/B$ 称为 G 的完全旗簇。 $\mathcal{F}_\theta$ 中一点的稳定子（或等价地， P_θ 的一个共轭子群）称为抛物子群。

注意，限制在 $\mathfrak{a}$ 上的 Killing 型给出了一个正定内积。 Σ 的魏尔群 W 是由反射 s_α 生成的 $\mathrm{O}(\mathfrak{a},\ \kappa_{\mathbb{R}})$ 的子群，这些反射关于超平面 $\ker\alpha$，其中 $\alpha\in\Sigma_\circ$ 事实上，简单反射 $S=\{s_\alpha:\ \alpha\in\Delta\}$ 是 W 的生成集，它们构成一个 Coxeter系统。我们得到 W 在 $\mathfrak{a}^+$ 上的诱导作用，并保持由下式给出的根系 Σ

$$w\cdot\alpha=\alpha\circ w^{-1}$$

。元素 w_0 关于生成集 S 是 W 的最长元素，当且仅当 $w_0\Delta=-\Delta$。我们定义对置对合 $\nu:\ \Delta\to\Delta$ 为

$$\nu(\alpha):=-w_0\alpha.$$

我们注意到， W 与 $N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$同构，其中

$$N_K(\mathfrak{a})=\{k\in K:\mathrm{Ad}_k(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}\}$$
$$Z_K(\mathfrak{a})=\{k\in K:\mathrm{Ad}_k=\mathrm{id}_\mathfrak{a}\}$$

它通过等距变换对 $\mathfrak{a}$ 有如下自然作用：

$$(kZ_K(\mathfrak{a}))\cdot a=\mathrm{Ad}_k(a).$$

注意， $Z_K(\mathfrak{a})$的李代数实际上是 $\mathfrak{t}$，并且

$$Z_K(\mathfrak{a})=B\cap K.$$

一对抛物子群（$P,\ P'$）称为相对的，若它们是 G共轭的。对于某个 $\theta\subseteq\Delta$，一对（$P_\theta,\ P_\theta^-$），其中 P_θ^- 是 G的解析子群，其李代数为

$$\mathfrak{p}_\theta^-=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Sigma^-}\mathfrak{g}_\alpha\ \oplus\bigoplus_{\alpha\in\Sigma^+\cap\mathrm{Span}(\Delta\setminus\theta)}.$$

应注意， P_θ^- 是与 $P_{\nu(\theta)}$共轭的抛物子群。因此，我们考虑 $\mathcal{F}_\theta$ 和 $\mathcal{F}_{\nu(\theta)}$ 这两个相对旗簇。

最后，我们回顾一下 G的卡当投影。令 $\mathfrak{a}^+=\{X\in\mathfrak{a}:\alpha(X)\ \geq 0$ 表示 $\alpha\in\Sigma^+\}$ 的 Weyl室。那么，对于任意 $g\underline{\in}G$，存在$k,\ \ell\in K$ 以及唯一的 $X\in\mathfrak{a}^+$，使得

$$g=k\exp(X)\ell.$$

那么，卡当投影 $\mu:\ G\to a^+$ 是将 X 赋予 g的函数。我们将看到，卡当投影在阿诺索夫表示的定义中发挥着核心作用。

2.1. 经典群与旗簇。 现在，我们将讨论经典群的旗簇是什么样的。我们只会详细讨论 $G=\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 和 $G=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$，因为我们稍后将看到，我们的方法仅适用于这两种情形。

2.1.1. 特殊线性群的旗簇。 现在我们将范围限制在 $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$，其中$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$。我们将考虑由复数元素构成的（无迹）对角矩阵所组成的嘉当子代数：

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{sl}_n\}.$$

$\mathfrak{sl}_n$ 的实基灵形式为

$$\kappa_{\mathbb{R}}(X, Y) = 4n \,\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\, XY)$$

其中，$\mathrm{tr}\, XY$是 X， $Y \in \mathfrak{sl}_n$的矩阵乘积的迹。于是我们可以选取极大紧子群

$$K = \mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) : A^* A = I_n\}$$

其中 A^* 是 A的复转置。于是，

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{su}_n = \{A \in \mathfrak{sl}_n : A^* + A = 0$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^{\perp_{\mathbb{R}}} = \{A \in \mathfrak{sl}_n : A = A^*\}.$$

于是，我们有

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{sl}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in i\mathbb{R}\}$$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{sl}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

于是， G 的限制根为

$$\Sigma = \{\epsilon_j - \epsilon_k : j, k \text{ distinct integers in } [1, n]\}$$

其中 ϵ_j： $\mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ 是由下式定义的线性泛函

$$\epsilon_j(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_j.$$

于是，每个根空间 $\mathfrak{g}_{\epsilon_j - \epsilon_k}$ 都是 2 维的，其根向量为 E_{jk}、 iE_{jk} ，其中E_{jk} 是除第 j行第 k列的元素为 1 外所有元素均为零的 $n \times n$ 矩阵。$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 的秩为 $n-1$，我们将使用以下单根基

$$\Delta = \{\epsilon_j - \epsilon_{j+1} : j \in \{1, \ldots, n-1\}\}.$$

于是，

$$\Sigma^+ = \{\epsilon_j - \epsilon_k : 1 \le j < k \le n\} \quad \Sigma^- = \{\epsilon_j - \epsilon_k : 1 \le k < j \le n\}$$

分别是正根和负（受限）根的集合。

这意味着博雷尔子代数

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{1 \le j < k \le n} \mathbb{C} E_{jk}$$

恰好是迹为零的上三角矩阵的集合。因此， $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 的博雷尔子群B 是上三角矩阵组成的子群。

任意类型 $\theta \subseteq \Delta$ 都可唯一表示为某个子序列 $\{\epsilon_{d_1} - \epsilon_{d_1+1}, \ldots, \epsilon_{d_\ell} - \epsilon_{d_\ell+1}\}$ 的形式，其中 $d_1, \ldots, d_\ell$取自 $1, \ldots, n-1$。令 $d_0 = 0$和 $d_{\ell+1} = n$。则， P_θ是由对角线上块大小为 $d_1 - d_0$， $d_2 - d_1$， $\ldots$， $d_{\ell+1} - d_\ell$的分块上三角矩阵组成的子群，更明确地说：

$$P_\theta = \left\{ \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_{\ell+1,\ell+1} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) : A_{j,k} \in M_{d_j - d_{j-1}, d_k - d_{k-1}}(\mathbb{C}) \right\}$$

对于 $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$，我们通常通过

如上所示的序列 d_1，.....，d_ℓ 来标记抛物子群的类型，而非使用单根的子集，例如 $P_{1,\ 2} = P_{\{\epsilon_1-\epsilon_2,\epsilon_2-\epsilon_3\}}$。若 $n \leq 10$，则可以省略分隔符，直接将 $P_{1,\ 2}$ 称为 P_{12}，而不会产生歧义。

设 $e_1, \dots, e_n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的标准基。注意，对于 $k \in \{1, \dots, n-1\}$，P_k 恰好是 G 中 k 维子空间 $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ 的稳定子。因此，我们看到，旗簇 $\mathcal{F}_k$ 可以与 $\mathbb{C}^n$ 中 k 维子空间构成的格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ 等同。

同样，子群

$$P_{d_1,\dots,d_\ell} = P_{d_1} \cap \cdots P_{d_\ell}$$

稳定子空间组

$$E^\bullet_{d_1,\dots,d_\ell} = (\langle e_1, \dots, e_{d_1} \rangle, \dots, \langle e_1, \dots, e_{d_\ell} \rangle).$$

$E^\bullet_{d_1,\dots,d_\ell}$ 在 $\mathbf{Gr}_{d_1}(\mathbb{C}^n)$ 中的 G 轨道 $\times \cdots \times \mathbf{Gr}_{d_\ell}(\mathbb{C}^n)$，是 $\mathbb{C}^n$ 中型为 $d_1, \dots, d_n$ 的旗的集合。一个旗 $F^\bullet$ 属于一个型为 $d_1, \dots d_\ell$ 的 n 维复向量空间 V，它是一个元组

$$F^\bullet = (F^{d_1}, \dots, F^{d_\ell})$$

其中 F^{d_j} 是 V 的 d_j 维子空间，并且

$$F^{d_1} \subsetneq F^{d_2} \subsetneq \cdots \subsetneq F^{d_\ell}.$$

因此，$E^\bullet_{d_1,\dots,d_\ell}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个旗，其型为 $E^{d_j}_{d_1,\dots,d_\ell} = \langle e_1, \dots, e_{d_j} \rangle$，我们称之为型为 $d_1, \dots, d_\ell$的标准旗。更一般地，如果一个型为$d_1, \dots, d_\ell$的旗 $F^\bullet$ 有旗基 $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$，则称之为旗基，其中 $v_1, \dots, v_n$ 是一个满足以下条件的基

$$F^{d_j} = \langle v_1, \dots, v_{d_j} \rangle \text{ for } j \in \{1, \dots, \ell\}.$$

特别地，标准基是各种型的标准旗的旗基。型为 $\mathbf{1}, \dots, n$ 的旗称为完全旗。

于是，旗簇$\mathcal{F}_{d_1,\dots,d_\ell}$ 可以与 $\mathbb{C}^n$ 中型为 $d_1, \dots, d_\ell$的旗所构成的集合 $\mathbf{Flag}_{d_1,\dots,d_\ell}(\mathbb{C}^n)$等同。这些是旗簇的典型例子，也解释了“旗”这一名称的由来。

接下来，我们考虑 $G = \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ 的魏尔群。注意，对于每个单根 $\alpha = \epsilon_j - \epsilon_{j+1}$，

$$\ker \alpha = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{sl}_n : \lambda_j = \lambda_{j+1}\}$$

而跨越 $\ker \alpha$ 的简单反射 s_α 是对换

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_n) \mapsto \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}\lambda_{j+1}, \lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_n)$$

因此，由 $\{s_\alpha$ 生成的魏尔群 $W\colon\ \alpha \in \Delta\}$ 同构于对称群 S_n，后者通过置换对角项作用于 $\mathfrak{a}$。此外，$W = S_n$ 的最长元素（应将 Σ^+ 发送到 Σ^-）是逆序置换 $j \mapsto n - j + 1$。于是，

$$\nu(\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) = -(w_0 \cdot (\epsilon_j - \epsilon_{j+1})) = -(\epsilon_{n-j+1} - \epsilon_{n-j}) = \epsilon_{n-j} - \epsilon_{n-j+1}$$

是对置对合。这意味着 $\mathbf{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ 与 $\mathbf{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)$ 是相对旗簇。更一般地，$\mathbf{Flag}_{d_1,\dots,d_\ell}(\mathbb{C}^n)$ 与 $\mathbf{Flag}_{d'_1,\dots,d'_\ell}(\mathbb{C}^n)$ 是相对旗簇，当且仅当

$$d_j + d'_{\ell+1-j} = n \text{ for } j \in \{1, \dots, \ell\}.$$

最后，我们想讨论 $\mathbf{SL}(n,\ \mathbb{C})$ 的卡当投影，它由奇异值分解得到。

例 2.1. 任意 $g \in G$ 都有奇异值分解

$$g = ka\ell$$

其中 k，$\ell \in \mathsf{SU}(n)$，且 a 是对角矩阵 $\mathsf{diag}(\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_n)$，其实数项按降序排列。对角项 σ_j 称为 j–th g的奇异值。于是，我们有

$$g = k \exp(X) \ell$$

其中 $X \in \overline{\mathfrak{a}^+} = \{\mathsf{diag}(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{sl}_n : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$ 是对角矩阵

$$X = \operatorname{diag}(\log \sigma_1, \ldots, \log \sigma_n).$$

因此，卡当投影 $\mu : G \to \mathfrak{a}^+$ 输出奇异值的对数，即

$$g \mapsto \operatorname{diag}(\log \sigma_1(g), \ldots, \log \sigma_n(g)).$$

现在我们专门讨论 $\mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$。对于 $g \in \mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$，假设

$$g = k \begin{bmatrix} e^{\frac{\delta}{2}} & \\ & e^{-\frac{\delta}{2}} \end{bmatrix} \ell$$

对于某个 $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $k, l \in \mathsf{SU}(2)$。设 $O \in \mathbb{H}^3$ 为这样一点：其在 $\mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$ 中的稳定子为 $\mathsf{SU}(2)$。那么，

$$d_{\mathbb{H}^3}(O, g \cdot O) = d_{\mathbb{H}^3}\left(O, \begin{bmatrix} e^{\frac{\delta}{2}} & \\ & e^{-\frac{\delta}{2}} \end{bmatrix} \cdot O\right) = \delta = \mu(g)$$

因此，我们看到，对于 $G = \mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$，$g$ 的卡当投影与 g在 $\mathbb{H}^3$ 中对原点的位移一致。

现在我们已经介绍了 $G = \mathsf{SL}(n, \mathbb{C})$，接下来将讨论 $G = \mathsf{Sp}(n, \mathbb{C})$。

2.1.2. 辛群的各向同性旗簇。考虑 $\mathbb{C}^{2n}$ 作为相对于基 $e_1, \ldots, e_n, e_{-n}, \ldots, e_{-1}$写出的向量。我们将

$$\operatorname{Sp}(2n, \mathbb{C}) = \{A \in \operatorname{SL}(n, \mathbb{C}) : A^t J' A = J'\},$$

其中

$$J = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \qquad J' = \begin{bmatrix} & J \\ -J & \end{bmatrix},$$

作为保持非退化双线性形式$\omega : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$ 的 $\mathbb{C}^{2n}$ 线性变换，其中

$$\omega(e_j, e_{-k}) = \delta_{jk}, \quad \omega(e_{-j}, e_k) = -\delta_{jk} \quad \text{for } j \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{-n, -n+1, \ldots, n\}.$$

回顾一下，G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 为

$$\mathfrak{sp}_{2n} = \left\{A \in \mathfrak{sl}_{2n} : A^t J' + J' A = 0\right\}.$$

更明确地说，这是由以下矩阵构成的集合

$$\mathfrak{sp}_{2n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,-n} & \cdots & a_{1,-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & a_{n,-n} & \cdots & a_{1,-n} \\ a_{-n,1} & \cdots & a_{-n,n} & -a_{n,n} & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-1,1} & \cdots & a_{-n,1} & -a_{n,1} & \cdots & -a_{1,1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}_{2n} \right\}.$$

换言之， $\mathfrak{sp}_{2n}$ 中的元素具有分块形式 $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$，其中 B、C 沿副对角线对称，而 A 和 $--D$ 关于副对角线反射，即

$$B = JB^tJ, \qquad C = JC^tJ, \qquad D = -JA^tJ.$$

我们考虑反对称（相对于副对角线而言）的对角矩阵构成的嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ ，即

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_n, \ldots, -\lambda_1) : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}\}$$

我们选取极大紧子群 $K = \mathsf{Sp}(n) = \mathsf{Sp}(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$。该子群的李代数为

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ -B^* & -JA^tJ \end{bmatrix} : A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ A^* = -A,\ B = JB^tJ \right\}$$

其正交补为

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^{\perp_{\mathbb{R}}} = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & -JA^tJ \end{bmatrix} : A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ A^* = A,\ B = JB^tJ \right\}.$$

我们有

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_n, \ldots, -\lambda_1) : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in i\mathbb{R}\}$$
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_n, \ldots, -\lambda_1) : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}.$$

于是， G 的限制根为

$$\{\pm(\epsilon_j + \epsilon_k), \pm(\epsilon_j - \epsilon_k) : 1 \le j < k \le n\} \cup \{\pm 2\epsilon_j : 1 \le j \le n\}$$

其中，ϵ_j： $\mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ 是线性泛函

$$\epsilon_j(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_n, \ldots, -\lambda_1)) = \lambda_j$$

对于 $j \in \{1, \ldots, n\}$。

设$E_{j,\ k}$为满足以下条件的 $2n \times 2n$ 矩阵：$E_{j,\ k}e_\ell = \delta_{\ell k}e_j$对于 $j,\ k,\ \ell \in \{1, \ldots, n, -n, \ldots, -1\}$。对于不同的 $j,\ k \in \{1, \ldots, n\}$，根空间$\mathfrak{g}_{\epsilon_j+\epsilon_k}$的基为$E_{-j,\ k} + E_{-k,\ j}$。每个根空间在 $\mathbb{R}$上均为二维。对于任意 $1 \le j < k \le n$,

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}_{\epsilon_j+\epsilon_k} && \text{has the basis} && E_{-j,k} + E_{-k,j},\ iE_{-j,k} + iE_{-k,j}, \\
&\mathfrak{g}_{-\epsilon_j-\epsilon_k} && \text{has the basis} && E_{j,-k} + E_{k,-j},\ iE_{j,-k} + iE_{k,-j}, \\
&\mathfrak{g}_{\epsilon_j-\epsilon_k} && \text{has the basis} && E_{j,k} - E_{-k,-j},\ iE_{j,k} - iE_{-k,-j}, \\
&\mathfrak{g}_{\epsilon_k-\epsilon_j} && \text{has the basis} && E_{k,j} - E_{-j,-k},\ iE_{k,j} - iE_{-j,-k}.
\end{aligned}$$

此外，对于 $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}_{2\epsilon_j} && \text{has the basis} && E_{-j,j},\ iE_{-j,j}, \\
&\mathfrak{g}_{-2\epsilon_j} && \text{has the basis} && E_{j,-j},\ iE_{j,-j}.
\end{aligned}$$

Sp(2n, $\mathbb{C}$) 的秩为 n，我们将选取单根的基为

$$\Delta = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n\} \cup \{2\epsilon_n\}.$$

那么，

$$\Sigma^+ = \{\epsilon_j \pm \epsilon_k : 1 \leq j < k \leq n\} \cup \{2\epsilon_j : 1 \leq j \leq n\}$$
$$\Sigma^- = \{\epsilon_j \pm \epsilon_k : 1 \leq k < j \leq n\} \cup \{-2\epsilon_j : 1 \leq j \leq n\}$$

分别是正根和负根的集合。

我们注意到，正根恰好是那些根空间由严格上三角矩阵构成的根。因此，Sp(2$n, \mathbb{C}$) 的标准 Borel 子群是 Sp(2$n, \mathbb{C}$) 与 SL(2$n, \mathbb{C}$) 的标准 Borel 子群的交集。换言之，

$$B = \{A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) : A \text{ is upper triangular}\}.$$

Borel 子群之间这种关系的一个推论是，Sp(2$n, \mathbb{C}$) 的完全旗簇 $\mathcal{F}_\Delta$ 同构于 Sp(2$n, \mathbb{C}$) 对标准完全旗 $E^\bullet_{full}$ 在 Flag$_{full}$($\mathbb{C}^{2n}$) 中的轨道。采用另一种以 1,…, $n, -n, \ldots, -1$ 为指标的方式，标准完全旗如下所示:

$$E^\bullet_{full} = (E^1_{full}, \ldots, E^n_{full}, E^{-n}_{full}, \ldots, E^{-1}_{full})$$

因此，对于 $r \in \{1, \ldots, n\}$,

$$E^r_{full} = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$$
$$E^{-r}_{full} = \langle e_1, \ldots, e_n, e_{-n}, \ldots, e_{-r} \rangle$$

需要指出，双线性型 ω 的构造使得

$$E^{-r} = (E^{r-1})^{\perp_\omega}$$

对每个 $r \in \{1, \ldots, n\}$ 都成立。这一关系在 Sp(2$n, \mathbb{C}$) 的作用下保持不变。事实上，这一关系刻画了 $E^\bullet_{full}$ 的 Sp(2$n, \mathbb{C}$)–轨道。

更明确地说，若 Flag$_{full}$($\mathbb{C}^{2n}$) 中的一个元素 $F^\bullet$ 满足以下条件，则称其为扩展的 ω–各向同性完全旗

$$F^{-r} = (F^{r-1})^{\perp_\omega}.$$

于是，完全旗簇 $\mathcal{F}_\Delta$ 可以等同于 Flag$_{full}$($\mathbb{C}^{2n}$) 中扩展的 ω–各向同性旗所构成的子集。注意，对于 ω–各向同性完全旗 $F^\bullet$， F^{r-1} 与 F^{-r} 之间的这一关系意味着子空间 $F^{-n}, \ldots, F^{-1}$ 是冗余信息。因此，我们可以用半完全旗更简洁地表示 ω–各向同性完全旗 $F^\bullet$:

$$(F^1, F^2, \ldots, F^n) \in \mathrm{Flag}_{1,\ldots,n}(\mathbb{C}^{2n}).$$

对于每个 $r \in \{1, \ldots, n\}$， F^r 都是各向同性的，即 $F^r \subseteq (F^r)^{\perp_\omega}$。通过从 Flag$_{full}$($\mathbb{C}^{2n}$) 到 Flag$_{1,\ldots,n}$($\mathbb{C}^{2n}$) 的这一投影，我们得到由各向同性子空间构成的型为 1, … , n 的旗子集。

定义 2.1。一个旗 $F^\bullet$ 属于型为 d_1 的 $\mathbb{C}^{2n}$，……，d_ℓ，满足

$$F^{d_\ell} \subseteq (F^{d_\ell})^{\perp_\omega}$$

称为 $\mathbb{C}^{2n}$中的 ω–各向同性旗。

$\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{C})$的完全旗簇可实现为型为$\mathbf{1},\dots,n$的 ω–各向同性旗的子集，记作

$$\mathrm{IsoFlag}_{full}(\mathbb{C}^{2n},\omega)=\left\{(F^1,\dots,F^n)\in\mathrm{Flag}_{1,\dots,n}(\mathbb{C}^{2n}):F^n=(F^n)^{\perp_\omega}\right\}.$$

与 $\mathsf{SL}(n,\mathbb{C})$ 的部分旗簇情形一样，$\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{C})$ 的其他（部分）旗簇也由将一个 ω–各向同性完全旗投影到其构成的各向同性子空间得到。设 $d_1,\dots,d_\ell$ 是 $\mathbf{1},\dots,n$ 的一个子序列。于是，我们将型为 $d_1,\dots,d_\ell$ 的 ω– 各向同性旗簇定义为以下子集

$$\mathrm{IsoFlag}_{d_1,\dots,d_\ell}(\mathbb{C}^{2n},\omega)=\{(F^{d_1},\dots,F^{d_\ell})\in\mathrm{Flag}_{d_1,\dots,d_\ell}(\mathbb{C}^{2n}):F^{d_\ell}\subseteq(F^{d_\ell})^{\perp_\omega}\}.$$

若我们将 Δ 中的单根标记为

$$\alpha_j=\begin{cases}\epsilon_j-\epsilon_{j+1} & 1\le j\le n-1\\ 2\epsilon_n & j=n\end{cases}$$

那么 $\mathsf{IsoFlag}_{d_1,\dots,d_\ell}(\mathbb{C}^{2n},\omega)$ 就是 $\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{C})$ 的类型为 $\{\alpha_{d_1},\dots,\alpha_{d_\ell}\}$ 的（部分）旗簇。令 P 为 $\mathsf{SL}(2n,\mathbb{C})$ 的抛物子群，它由具有以下块大小的分块上三角矩阵组成

$$d_1,d_2-d_1,\dots,d_\ell-d_{\ell-1},n-d_\ell,n-d_\ell,d_\ell-d_{\ell-1},\dots,d_2-d_1,d_1.$$

令 Q 为 $\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{C})$ 的抛物子群，它是标准（ω–各向同性）旗 $E^\bullet_{d_1,\dots,d_\ell}$ 的稳定子，其型为 $d_1,\dots,d_\ell$。于是，我们有

$$Q=P\cap\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}).$$

值得注意的各向同性部分旗簇包括

$$\mathbb{CP}^{2n-1}=\mathrm{IsoFlag}_1(\mathbb{C}^{2n},\omega)$$
$$\mathrm{Lag}(\mathbb{C}^{2n})=\mathrm{IsoFlag}_n(\mathbb{C}^{2n},\omega).$$

拉格朗日格拉斯曼流形 $\mathsf{Lag}(\mathbb{C}^{2n})$ 是 $\mathbb{C}^{2n}$ 中极大各向同性子空间的集合。之后，我们将考察 $\mathsf{Lag}(\mathbb{C}^4)$ 内不连续域的拓扑。

最后，我们讨论 $\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{C})$ 的魏尔群。对于 $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$，我们引入如下简写：

$$\mathrm{asdiag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n,-\lambda_n,\dots,-\lambda_1).$$

那么，对于 $j\in\{1,\dots,n-1\}$,

$$\ker\alpha_j=\ker(\epsilon_j-\epsilon_{j+1})=\{\mathrm{asdiag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathfrak{a}:\lambda_j=\lambda_{j+1}\}$$

因此，简单反射 s_{α_j} 通过对换作用于 $\mathfrak{a}$：

$$\mathrm{asdiag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\mapsto\mathrm{asdiag}(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_{j+1},\lambda_j),\lambda_{j+2},\dots,\lambda_n).$$

另一方面，我们有

$$\ker\alpha_n=\ker\epsilon_n=\{\mathrm{asdiag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathfrak{a}:\lambda_n=0\}$$

因此，简单反射通过坐标取负作用于 $\mathfrak{a}$

$$\mathrm{asdiag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\mapsto\mathrm{asdiag}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},-\lambda_n).$$

那么，由简单反射 $s_{\alpha_1},\dots,s_{\alpha_n}$ 生成的魏尔群 W 同构于带符号置换矩阵群：

$$W\cong\{DP\in\mathsf{O}(n):\ D\text{对角的，条目为 }\pm1\text{、}P\text{置换矩阵}\}.$$

给定一个带符号置换矩阵 DP，存在 c_1、……、$c_n \in \{\pm 1\}$ 和 $\sigma \in S_n$，使得 $D = \mathrm{diag}(c_1$、……、$c_n)$，且 P是置换矩阵 σ。我们将带符号置换的集合记作

$$S_n^{\pm} = \left\{\sigma^{\pm} : \ \sigma^{\pm} \text{是 } \{1, \dots, n, -n, \dots, -1\} \text{的一个置换，且 } \sigma^{\pm}(-j) = -\sigma^{\pm}(j)\right\}.$$

那么，带符号置换矩阵 DP 对应于带符号置换

$$\sigma^{\pm}(j) = \mathrm{sign}(j) c_{\sigma(j)} \sigma(|j|) \text{ for } j \in \{1, \dots, n, -n, \dots, -1\}$$

。我们将用 $\sigma^{\pm}$ 表示带符号置换

$$\begin{pmatrix} c_{\sigma(1)}\sigma(1) & \cdots & c_{\sigma(n)}\sigma(n) \end{pmatrix}.$$

例如，矩阵 $\begin{bmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ 对应于带符号置换

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

注意，$W = S_n^{\pm}$ 上的群运算并非简单的置换复合。具体而言，对于 c_1，……，c_n，f_1，……，$f_n \in \{\pm 1\}$ 和 σ，$\tau \in S_n$，若

$$\sigma^{\pm}(j) = \mathrm{sign}(j) c_{\sigma(|j|)} \sigma(|j|) \qquad \tau^{\pm}(j) = \mathrm{sign}(j) f_{\sigma(|j|)} \tau(|j|)$$

于是，

$$(\sigma^{\pm} \cdot \tau^{\pm})(j) = \mathrm{sign}(j) c_{\sigma(\tau(|j|)} f_{\tau(|j|)} \sigma(\tau(|j|))$$

对于 $j \in \{1, \dots, n, -n, \dots, -1\}$。

$W = S_n^{\pm}$ 的最长元素是对应于取负的带符号置换。也就是说，

$$w_0 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \cdots & -n+1 & -n \end{pmatrix}.$$

这也意味着，对置对合 $\nu(\alpha) = -\alpha \circ w_0$ 在 Δ 上平凡作用。因此，每个旗簇都是自对偶的。

2.1.3. 特殊正交群的各向同性旗簇。如前所述，特殊正交群的详细李理论与本文后续内容关系不大，但我们现在简要概述一下。对于 $G = \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$，分析大体上与 $G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ 类似。取 $\mathbb{C}^n$ 标准基 e_1，……，e_n。群 $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ 保持双线性型 $\omega\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$，其定义为

$$\omega(e_j, e_k) = \delta_{j+k, n+1}.$$

我们将情形分为 $n = 2p$ 和 $n = 2p+1$，其中 $p \geq 1$。$\mathrm{SO}(2p, \mathbb{C})$ 和 $\mathrm{SO}(2p+1, \mathbb{C})$ 的秩均为 p。$\mathrm{SO}(2p+1, \mathbb{C})$ 的旗簇可识别为具有不同型的 ω各向同性旗的集合；完全旗簇则为

$$\mathrm{IsoFlag}_{full}(\mathbb{C}^{2p+1}, \omega) = \{F^{\bullet} \in \mathrm{Flag}_{1,\dots,p}(\mathbb{C}^{2p+1}) : F^p \subseteq (F^p)^{\perp_\omega}\}.$$

维数最小的旗簇是 $\mathbb{CP}^{2p}$中的光滑二次超曲面，即

$$\mathrm{Quad}_{2p} = \{\ell \in \mathbb{CP}^{2p} : \ell \subseteq \ell^{\perp_\omega}\}$$

其复维数为 $2p-1$。对于 $G = \mathrm{SO}(2p, \mathbb{C})$，有一个特殊的微妙之处。注意，$p$平面

$$E^{p^+} = \langle e_1, \dots, e_{p-1}, e_p \rangle, \quad E^{p^-} = \langle 1, \dots, e_{p-1}, e_{p+1} \rangle$$

都是极大各向同性子空间。然而，与对换 p 和 $p+1$ 相对应的置换矩阵会将 E^{p+} 变为 E^{p-}，其行列式为 -1。事实上，若分析 E^{p^+} 的稳定子的分块结构

在 $\mathsf{O}(2p,\mathbb{C})$ 内，可以发现任何保持 E^{p^+} 的 $A\in\mathsf{O}(2p,\mathbb{C})$ 都保持定向，因此，任何将 E^{p^+} 变为 E^{p^-} 的 $A\in\mathsf{O}(2p,\mathbb{C})$ 都不属于 $\mathsf{SO}(2p,\mathbb{C})$。由此可知，$\mathbb{C}^{2p}$ 中型为 ω 的各向同性 p 维平面集合并非 $\mathsf{SO}(2p,\mathbb{C})$ 的齐性空间，而是分成分别对应于 E^{p^+} 和 E^{p^-} 的两个轨道。我们将 $E^{p^\pm}$ 的轨道中的元素称为各向同性 $p^\pm$ 维平面。$\mathsf{SO}(2p,\mathbb{C})$ 的完全旗簇 $\mathsf{Flag}^{full}(\mathbb{C}^{2p},\omega)$ 是由元组 $(F^1,\dots,F^{p-1},F^{p^+},F^{p-})$ 构成的集合，其中 $(F^1,\dots,F^{p-1})$ 是一个型为 $1,\dots,p-1$ 的旗，F^{p^+} 和 F^{p^-} 分别是 ω 维各向同性 p^+ 平面和 p^- 维平面，并且 $F^{p-1}=F^{p^+}\cap F^{p^-}$。部分旗簇可通过投影到各个组成子空间得到，包括各向同性 p^+ 维平面和 p^- 维平面。

类似于 $\mathsf{SO}(2p+1,\ \mathbb{C})$，$\mathsf{SO}(2p,\ \mathbb{C})$ 的最小维数旗簇是 $\mathbb{CP}^{2p-1}$中的光滑二次超曲面，即

$$\mathrm{Quad}_{2p-1}=\{\ell\in\mathbb{CP}^{2p-1}:\ell\subseteq\ell^{\perp_\omega}\}$$

其复维数为 $2p-2$。

至此，我们完成了对经典群旗簇的讨论。

2.2. **布鲁哈分解与相对位置**。现在，我们将描述布鲁哈分解，以及它如何提供一种衡量旗相对位置的方法。具体而言，我们将看到，G 的旗簇中元素之间的关系是组合性的，这种关系由魏尔群上的布鲁哈特序刻画。固定 G 为 $\mathbb{C}$上的某个经典群和例外群的乘积。关于旗簇的相对位置函数，更多讨论见 [DS20 的第3] 节和 [CS24 的第 3]节。我们主要采用 [Ste18]的记号。

定义 2.2。设 $\theta,\ \eta\subseteq\Delta$ 为 G的旗类型。设 $(\Pi,\ \leq)$ 为一个偏序集。$\mathcal{F}_\theta$ 和 $\mathcal{F}_\eta$ 的相对位置函数取值于 Π，是满足下述条件的函数 $\mathrm{pos}:\ \mathcal{F}_\theta\times\mathcal{F}_\eta\to\Pi$

$$\mathrm{pos}(x_1,y_1)\leq\mathrm{pos}(x_2,y_2)$$

当且仅当 G–轨道 (x_1,y_1) 包含于 G–轨道 (x_2,y_2) 的闭包中时，也就是说

$$G\cdot(x_1,y_1)\subseteq\overline{G\cdot(x_2,y_2)}.$$

由此定义可立即得出，$\mathrm{pos}(x_1,y_1)\ =\mathrm{pos}(x_2,y_2)$ 当且仅当 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 位于 $\mathcal{F}_\theta\times\mathcal{F}_\eta$ 内的同一个 G–轨道中。因此，Π 参数化了 $\mathcal{F}_\theta\times\mathcal{F}_\eta$ 中成对元素的 G–同余类，其中序关系 $\leq$刻画了同余类退化为较不一般的同余类的过程。

设 B 为标准抛物子群。回忆一下，对于每个 $w\in W$，我们可以选取一个 $\tilde{w}\in N_K(\mathfrak{a})$，使得 $w=\mathrm{Ad}_{\tilde{w}}|_{\mathfrak{a}}$。于是，$G$ 的布鲁哈分解为

$$G=\bigsqcup_{w\in W}B\tilde{w}B$$

其中 $B\tilde{w}B$ 表示 $\tilde{w}$ 的双陪集，它仅取决于 w。

定义 2.3. 令 $f\in\mathcal{F}_\Delta$ 为标准全旗，使得 f 在G 中的稳定子为 B。那么，对于任意一对旗 $x,y\in\mathcal{F}_\Delta$，存在 g_1,g_2 使得

$$x=g_1f,\quad y=g_2f.$$

于是，我们定义函数 $\mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}$：$\mathcal{F}_\Delta \times \mathcal{F}_\Delta \to W$，使得 $\mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}(x,y)$ 是唯一的 $w \in W$，满足

$$Bg_1^{-1}g_2B = B\tilde{w}B.$$

为了定义相对位置函数$_{\Delta,\ \Delta}$：$\mathcal{F}_\Delta \times \mathcal{F}_\Delta \to W$，我们在魏尔群 W 上赋予布鲁哈特序：$w_1 \leq w_2$ 若生成集中的简单反射存在某个约化表达式 $s_1 \cdots s_\ell$，且存在子序列 j_1，.....，j_k 使得

$$w_1 = s_{j_1} \cdots s_{j_k} \qquad \text{and} \qquad w_2 = s_1 \cdots s_\ell.$$

注意，最长元素 $w_0 \in W$ 必然是相对于布鲁哈特序的最大元素。 h
关于布鲁哈特序。

对于 $G = \mathrm{SL}(n,\ \mathbb{C})$，其中 $\mathcal{F}_\Delta = \mathrm{Flag}^{full}(\mathbb{C}^n)$，相对位置函数的取值属于 S_n。下面的命题对此作进一步说明。

命题 2.1。 任取 $\mathbb{C}^n$中的两个完全旗 $F^\bullet$、$H^\bullet$，以下结论成立：

(i) 存在一个旗基 $v_1, \ldots, v_n$，属于 $F^\bullet$，以及一个置换 $\sigma \in S_n$，使得 $v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}$ 是 $H^\bullet$ 的旗基。(ii) 相对位置 $\mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}(F^\bullet, H^\bullet)$ 由置换 σ 表示。

证明。 对于 (i)，我们首先注意到，对每个固定的 $j \in \{1, \ldots, n\}$，函数 D_j：$\{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, j\}$ 定义为

$$D_j(k) = \dim(F^k \cap H^j)$$

是非递减的，而且更强地

$$0 \leq D_j(k) - D_j(k-1) \leq 1 \text{ for all } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

连同这样一个事实：

$$D_j(n) = \dim(\mathbb{C}^n \cap H^j) = j \qquad \text{and} \qquad D_j(0) = \dim(\{0\} \cap H^j) = 0,$$

我们得出，对每个 j，集合

$$K_j = \{k : 1 \leq k \leq n, D_j(k) - D_j(k-1) = 1\}$$

恰有 j 个元素。对于任意 $k \in K_j$，由

$$D_j(k) - D_j(k-1) = \dim(F^k \cap H^j) - \dim(F^{k-1} \cap H^j) = 1$$

这意味着我们可以选择一些

$$v_k \in (F^k \setminus F^{k-1}) \cap H^j.$$

特别是，这将意味着

$$v_k \in (F^k \setminus F^{k-1}) \cap H^{j+1}$$

因此

$$D_{j+1}(k) - D_{j+1}(k-1) = \dim(F^k \cap H^{j+1}) - \dim(F^{k-1} \cap H^{j+1}) = 1.$$

换句话说，$k \in K_{j+1}$ 进一步推广可得，存在一个包含关系链

$$\varnothing \neq K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \cdots \subsetneq K_{n-1} \subsetneq K_n = \{1, \ldots, n\}.$$

那么，必定存在一个置换 $\sigma \in S_n$ 使得

$$K_j = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(j)\}$$

对于 $j \in \{1, \dots, n\}$。于是，我们有

$$v_1 \in F^1 \setminus F^0,\ v_2 \in F^2 \setminus F^1,\ \dots,\ v_n \in F^n \setminus F^{n-1}$$

因此， $v_1, \dots, v_n$ 是 $F^\bullet$的旗基。

若 $k = \sigma(j)$，则 $k \in K_j$，因此

$$v_k \in (F^k \setminus F^{k-1}) \cap H^j.$$

另一方面， $k \notin K_{j-1}$，因此

$$F^k \cap H^{j-1} = F^{k-1} \cap H^{j-1}$$

这意味着 $v_k \notin H^{j-1}$。因此，对于 $j \in \{1, \dots, n\}$

$$v_k = v_{\sigma(j)} \in H^j \setminus H^{j-1}.$$

换句话说，

$$v_{\sigma(1)} \in H^1 \setminus H^0,\ v_{\sigma(2)} \in H^2 \setminus H^1,\ \dots,\ v_{\sigma(n)} \in H^n \setminus H^{n-1}$$

因此， $v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}$ 是 $H^\bullet$的旗基。这就完成了 (i) 的证明。

对于 (ii)，我们对 $v_1, \dots, v_n$ 进行归一化，使得矩阵

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

构成一个行列式为 1 的矩阵。然后，若 P_σ 是满足下述条件的带符号置换矩阵

$$P_\sigma e_j = \begin{cases} \operatorname{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)} & j = 1 \\ e_{\sigma(j)} \end{cases},$$

于是，我们有

$$F^\bullet = A E^\bullet_{full}, \quad H^\bullet = A P_\sigma E^\bullet_{full}.$$

这意味着与 $\operatorname{pos}_{\Delta,\Delta}(F^\bullet, H^\bullet)$ 对应的双陪集为

$$B A^{-1} A P_\sigma B = B P_\sigma B.$$

带符号置换矩阵 P_σ 被构造为 $N_K(\mathfrak{a})$ 的一个元素，用以表示 σ。因此，

$$\operatorname{pos}_{\Delta,\Delta}(F^\bullet, H^\bullet) = \sigma.$$

□

回顾一下，我们将 $G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ 视为以下空间上的线性变换：

$$\mathbb{C}^{2n} = \langle e_1, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-1} \rangle$$

保持反对称双线性形式

$$\omega(e_j, e_{-k}) = \delta_{jk}, \quad \omega(e_{-j}, e_k) = -\delta_{jk} \quad \text{for } j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{-n, -n+1, \dots, n\}.$$

$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ 的完全旗簇为 $\mathrm{Flag}^{full}(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$，其魏尔群为带符号置换群 $S_n^{\pm}$。于是，对于 $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$，命题 2.1 也有类似的版本。

命题 2.2。给定两个完全 ω–各向同性旗 $F^\bullet, H^\bullet$，将它们扩展为 $\mathbb{C}^{2n}$ 中的完全旗，使得

$$F^{-r} = (F^{r-1})^{\perp_\omega}, \qquad H^{-r} = (H^{r-1})^{\perp}$$

对于 $r \in \{1, \dots, n\}$。以下结论成立：

(i) 存在一个旗基 $v_1, \ldots, v_n, v_{-n}, \ldots, v_{-1}$，对于 $F^\bullet$，以及一个带符号的置换 $\sigma^\pm \in S_n^\pm$，使得 $v_{\sigma^\pm(1)} \cdots, v_{\sigma^\pm(n)}\ v_{\sigma^\pm(-n)} \cdots, v_{\sigma^\pm(-1)}$ 是 $H^\bullet$ 的旗基。
(ii) 相对位置 $\mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}(F^\bullet, H^\bullet)$ 由 $\sigma^\pm$ 表示。

证明：对于 (i)，由命题 2.1 可知，存在一个旗基 v_1，.....，v_n、v_{-n}.....，v_{-1}，其对应于 $F^\bullet$ 和某个置换

$$\sigma^\pm : \{1, \ldots, n, -n, \ldots, -1\} \to \{1, \ldots, n, -n, \ldots, -1\}$$

使得 $v_{\sigma^\pm(1)} \cdots$、$v_{\sigma^\pm(n)}\ v_{\sigma^\pm(-1)} \cdots$，$v_{\sigma^\pm(-n)}$ 是 $H^\bullet$的旗基。为简化记号 g 我们暂时省略上标 (±)。我们需要证明

$$\sigma(-j) = -\sigma(j) \text{ for } j \in \{1, \ldots, n, -n, \ldots, -1\}.$$

为此，反设存在某个 $j_1 \in \{1, \ldots, n, -n, \ldots, -1\}$，使得 $\sigma(j_1) \neq -\sigma(-j_1)$。由于我们可以将 $\sigma^{-1}(-\sigma(j_1))$ 与 j_1交换，因此不妨设 $\sigma(j_1)$ 为正。于是，我们有

$$v_{\sigma(-j_1)} \in H^{-j_1} \setminus H^{-j_1-1} = \langle v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(j+1-1)} \rangle^{\perp_\omega} \setminus \langle v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(j_1)} \rangle^{\perp_\omega}$$

因此 $\omega(v_{\sigma(j_1)}\ v_{\sigma(-j_1)}) \neq 0$。根据 $H^\bullet$ 上的 ω–各向同性条件，必有

$$\sigma(j_1) + \sigma(-j_1) \leq 0$$

。但我们还知道

$$\sigma(j) \neq -\sigma(-j)$$

因此

$$\sigma(j_1) < -\sigma(-j_1).$$

那么，$j_2 = \sigma^{-1}(-\sigma(-j_1))$ 也满足 $\sigma(j_2) > 0$ 和 $\sigma(j_2) \neq -\sigma(-j_2)$，因此同样的论证会得到一个无限序列 j_1，j_2，.....，使得

$$0 < \sigma(j_1) < \sigma(j_2) < \cdots$$

这与 $\{1, \ldots, n\}$ 的有限性矛盾。因此，

$$\sigma(j) = -\sigma(-j) \text{ for all } j \in \{1, \ldots, n, -n, -\ldots, -1\},$$

也就是说，置换

$$\sigma^\pm : \{1, \ldots, n, -n, \ldots, -1\} \to \{1, \ldots, n, -n, \ldots, -1\}$$

是一个带符号置换。

对于 (ii)，令 P为满足以下条件的 $2n \times 2n$ 矩阵：

$$Pe_j = \begin{cases} \mathrm{sign}(\sigma(j)) e_{\sigma(j)} & j \in \{1, \ldots, n\} \\ e_{\sigma(j)} & j \in \{-n, \ldots, -1\} \end{cases}$$

随后，直接计算可得 P 属于 $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$，具体而言为 $N_K(\mathfrak{a})$。此外，$PZ_K(\mathfrak{a})$对应于带符号置换 $\sigma^\pm$。□

我们已经看到，布鲁哈分解为完全旗簇提供了一个相对位置函数。对于部分旗簇，我们有

$$G = \bigsqcup_{w \in W_{\theta,\eta}} P_\theta \tilde{w} P_\eta$$

其中$W_{\theta,\ \eta}$ 是双陪集空间

$$W_{\theta,\eta} = (P_\theta \cap N_K(\mathfrak{a})) \setminus N_K(\mathfrak{a}) / (P_\eta \cap N_K(\mathfrak{a})).$$

通过如下识别， $W = N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a}) = \langle s_\alpha \colon \alpha \in \Delta \rangle$，我们实际上有 $(N_K(\mathfrak{a}) \cap P_\theta)/Z_K(\mathfrak{a}) = \langle s_\alpha \colon \alpha \in \Delta \setminus \theta \rangle$ $(N_K(\mathfrak{a}) \cap P_\eta)/Z_K(\mathfrak{a}) = \langle s_\alpha \colon \alpha \in \Delta \setminus \eta \rangle$，因此 $W_{\theta,\ \eta}$ 也可以识别为双陪集空间

$$W_{\theta,\eta} = W_\theta \setminus W / W_\eta$$

其中 $W_\theta = \langle \{ s_\alpha \colon \alpha \in \Delta \setminus \theta \} \rangle$ （并且 W_η 的定义类似）。由此，我们可以像处理完全旗时那样，对部分旗的相对位置作出组合描述。为完成这一描述，我们将在下一个命题中看到， W 上的布鲁哈特序如何下降到 $W_{\theta,\ \eta}$。

设 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$ 是 $\mathcal{F}_\theta \times \mathcal{F}_\eta$ 中的旗对。设 $\pi_\theta \colon \mathcal{F}_\Delta \to \mathcal{F}_\theta$ 和 $\pi_\eta \colon \mathcal{F}_\Delta \to \mathcal{F}_\eta$ 为投影映射，并选取提升 $\tilde{x}_1,\ \tilde{y}_1,\ \tilde{x}_2$ 和 $\tilde{y}_2$。那么，相对位置

$$w_1 = \mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \quad w_2 = \mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$$

确定双陪集 $[w_1],\ [w_2] \in W_{\theta,\ \eta}$，且这些双陪集与提升的选取无关。对于每个双陪集 $[w] \in W_{\theta,\ \eta}$，存在唯一的元素 $\min[w] \in [w]$，它关于布鲁哈特序是极小的（见 [BB06]）。

命题 2.3. 给定(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 以及上述的 $[w_1], [w_2]$，以下条件等价

(a) G对(x_1, y_1) 和(x_2, y_2) 的轨道满足

$$G \cdot (x_1, y_1) \subseteq \overline{G \cdot (x_2, y_2)}.$$

(b) 双陪集 $[w_1], [w_2]$ 满足

$$\min[w_1] \leq \min[w_2]$$

其中 $\leq$ 是 W 的布鲁哈特序。

证明。 假设 (a) 成立，则存在 G 中的一个序列 $\{g_n\}$，使得 $g_n \cdot (x_2, y_2) \to (x_1, y_1)$。我们可以选择 (x_2, y_2) 的提升 $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) \in \mathcal{F}_\Delta \times \mathcal{F}_\Delta$，使得

$$\mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = \min[w_2].$$

然后，利用 $\mathcal{F}_\Delta \times \mathcal{F}_\Delta$ 的紧致性并取一个子序列，我们可以假设 $g_n \cdot (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ 收敛到 $\mathcal{F}_\Delta \times \mathcal{F}_\Delta$ 中的旗 $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$。$G$ 的等变性以及 $\pi_\theta \times \pi_\eta$ 的连续性意味着 $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ 实际上是 (x_1, y_1) 的一个提升。于是，我们可以得出

$$G \cdot (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) \subseteq \overline{G \cdot (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)}.$$

于是，我们得出

$$\min[w_1] \leq w_1 \leq w_2 = \min[w_2].$$

因此，我们证明了 (a)⇒(b)。

Assuming (b), choose lifts $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ and $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ so that

$$w_1 = \mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = \min[w_1] \leq \min[w_2] = \mathrm{pos}_{\Delta}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = w_2.$$

于是，

$$G \cdot (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) \subseteq \overline{G \cdot (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)}.$$

对两边应用 $\pi_\theta \times \pi_\eta$，并利用 $\pi_\theta \times \pi_\eta$ 的连续性，我们得出

$$G \cdot (x_1, y_1) \subseteq \overline{G \cdot (x_2, y_2)}.$$

由此完成了 (b)⇒(a)。 □

双陪集 $[w_1], [w_2] \in W_{\theta,\ \eta}$ 之间的关系称为 $W_{\theta,\ \eta}$上的布鲁哈特序。将这些内容结合起来，我们可以为部分旗定义一个相对位置函数。

定义 2.4。 相对位置函数 $\mathrm{pos}_{\theta,\eta} : \mathcal{F}_\theta \times \mathcal{F}_\eta \to W_{\theta,\eta}$ 的定义如下：对于 $x \in \mathcal{F}_\theta, y \in \mathcal{F}_\eta$, $\mathrm{pos}_{\theta,\eta}(x, y)$ 是双陪集 $[w] \in W_{\theta,\eta}$，其中$w =$ 对于任意提升 $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{F}_\Delta$，$\mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}(\tilde{x}, \tilde{y})$

现在我们将考察部分旗簇的相对位置函数的一些具体情形。

例 2.2。 设 $G = \mathrm{SL}(4, \mathbb{C})$, $\theta = \{1, 2, 3\}$ 且 $\eta = \{1\}$，使得

$$\mathcal{F}_\theta = \mathrm{Flag}_{full}(\mathbb{C}^4) \qquad \mathcal{F}_\eta = \mathbb{CP}^3 \qquad W_{\theta,\eta} = S_4/S_3$$

其中 S_3 被视为固定 1 的 S_4 子群。

这意味着 $[\sigma] \in S_4/S_3$ 由 $\sigma(1)$ 决定。若 $F^\bullet \in \mathrm{Flag}^{full}(\mathbb{C}^4)$ 的旗基为 $v_1, \ldots, v_4$ 且 $H^1 = \langle v_{\sigma(1)} \rangle$，则

$$\sigma(1) = \min\{j : H^1 \subseteq F^j\}.$$

因此，$\mathrm{Flag}^{full}(\mathbb{C}^4)$ 与 $\mathbb{CP}^3$ 的相对位置函数可以更简单地用 $\{1, 2, 3, 4\}$ 中的值来描述，即:

$$\mathrm{pos}(F^\bullet, H^1) = \min\{j : H^1 \subseteq F^j\}.$$

例 2.3. 令 $G = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$, $\theta = \{1\}$ 且 $\eta = \{2\}$，则

$$\mathcal{F}_\theta = \mathbb{CP}^3 \quad \mathcal{F}_\eta = \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4).$$

魏尔群 W是 $\{1, 2, -2, -1\}$ 的带符号置换群。$W_{\{1\}}$ 对带符号置换 $\sigma^\pm \in W$ 的左作用会翻转 $(\sigma^\pm)^{-1}(2)$ 的符号，而 $W_{\{2\}}$ 的右作用则在保持符号不变的同时置换各输出。这意味着唯一剩下的信息是符号 $\mathrm{sign}((\sigma^\pm)^{-1}(1))$。换言之，若将 $F^1 \in \mathbb{CP}^3$ 和 $H^2 \in \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4)$ 扩展为扩展的完整 ω 各向同性旗 $F^\bullet$、$H^\bullet$，使得 $F^\bullet$ 的旗基为 v_1，v_2，v_{-2}，v_{-1}，而 $H^\bullet$ 的旗基为$v_{\sigma^\pm(1)}$ $v_{\sigma^\pm(2)}$ $v_{\sigma^\pm(-2)}$ $v_{\sigma^\pm(-1)}$，那么相对位置

$$\mathrm{pos}_{\{1\},\{2\}}(F^1, H^2) = [\sigma^\pm]$$

由 $\mathrm{sign}((\sigma^\pm)^{-1}(1))$ 确定。

3. Anosov representations and domains of discontinuity

在本节中，我们将定义阿诺索夫表示，并介绍其在旗簇中的不连续域的构造。随后，我们将重点研究 ι-福克斯表示的不连续域的拓扑。最后，我们将列出一些适用我们方法的情形。

3.1. 阿诺索夫表示。 阿诺索夫表示最初由 Labourie [Lab05] 针对 $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 和 Γ 一致格定义。随后，Guichard 和 Wienhard [GW12] 将阿诺索夫表示推广到了任意半单李群 G 和字双曲群 Γ。此后，人们发现了许多彼此等价的阿诺索夫表示刻画。本文采用的定义是最易于表述的定义之一，遵循 [KLP17b]和 [BPS 19]的工作。

设 Γ 是一个字双曲群，其字度量为 $|\cdot|$，且 G 是一个非紧致

李代数为 $\mathfrak{g}$ 且中心有限的连通李群。本文中， G 将是一个复李群，但同一定义也适用于实群。设 $(K, \mathfrak{a}, \Delta)$ 如第 2 节所述。回顾一下，卡当投影

$$\mu : G \to \overline{\mathfrak{a}^+}.$$

是对双曲空间位移函数的推广。

定义 3.1. 对于类型 $\theta \subseteq \Delta$，若存在常数 $C, c > 0$ 使得表示 $\rho : \Gamma \to G$ 是 P_θ–阿诺索夫（或简称 θ–阿诺索夫），则称该表示为 P_θ–阿诺索夫表示。

$$\alpha(\mu(\rho(\gamma))) \geq C|\gamma| - c \text{ for all } \alpha \in \theta, \gamma \in \Gamma.$$

回忆由 $\nu(\alpha) = -(w_0 \cdot \alpha)$ 给出的对置对合 $\nu : \Delta \to \Delta$。注意，根据 GW12 引理 3.18]，是 θ–阿诺索夫等价于是 $(\theta \cup \nu(\theta))$–阿诺索夫。下文中，我们始终假设 $\theta = \nu(\eta)$，即 P_θ 是一个自对置抛物子群。

令 $\partial\Gamma$ 为 Γ的格罗莫夫边界。θ–阿诺索夫表示最重要的特征之一，是它们存在一个从 $\partial\Gamma$ 到 $\mathcal{F}_\theta$的特殊嵌入。

命题 3.1 ([GGKW17，定理 1。3])。 *</style}*对于一个 θ–阿诺索夫表示

$$\rho : \Gamma \to G,$$

存在唯一的连续映射 $\xi : \partial\Gamma \to \mathcal{F}_\theta$，使得

(i) 映射 ξ 是 ρ–等变的：对于 $x \in \partial\Gamma, \gamma \in \Gamma$，有 $\rho(\gamma) \cdot \xi(x) = \xi(\gamma \cdot x)$。

(ii) 映射 ξ 是横截的：对于任意不同的 $x, y \in \partial\Gamma$，$\mathrm{pos}_\theta(\xi(x), \xi(y)) = [w_0]$。

(iii) 映射 ξ 具有动力学保持性：对于任意在 Γ 中的非挠元 γ，若其吸引不动点为 $\gamma^+ \in \partial\Gamma$，则 $\xi(\gamma^+)$ 是 $\rho(\gamma)$ 在 $\mathcal{F}_\theta$上的作用的吸引不动点。

这样的映射称为 ρ的极限映射。

例 3.1。设 $\Gamma = \pi_1(S_g)$，其中 $g \geq 2$ 且 $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$。由于 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 的秩为 1，博雷尔子群是唯一的抛物子群，而 $\mathbb{CP}^1$是唯一的旗簇。于是， $\rho : \Gamma \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 是阿诺索夫的，当且仅当轨道映射

$$\tau_{\rho,O} : \Gamma \to \mathbb{H}^3 \qquad \gamma \mapsto \rho(\gamma) \cdot O$$

对于某个（或任意） $O \in \mathbb{H}^3$，它是准等距嵌入（见 [GW12，定理 5.15]）。这些称为拟福克斯表示。在这种情况下，极限映射 ξ 恰好是边界映射 $\partial\tau_{\rho,\, O}$：由准等距嵌入 $\tau_{\rho,\, O}$诱导而来。

ξ 的像是 $\rho(\Gamma)$ 的极限集。极限集的补集

$$\Omega = \mathbb{CP}^1 \setminus \xi(\partial\Gamma)$$

在 $\rho(\Gamma)$ 的作用下具有适当不连续作用。Ω 关于 $\rho(\Gamma)$ 的商空间是一个与 $S_g \sqcup S_g$ 微分同胚的闭流形。

我们将看到如何利用 $\xi(\partial\Gamma)$ 的加厚版本，为映入高秩李群的阿诺索夫表示构造不连续域。在此之前，我们必须讨论一项额外的数据，它决定了应“如何”对极限曲线进行加厚。

3.1.1.平衡理想与不连续域。现在，我们将介绍 Kapovich-Leeb-Porti 构造阿诺索夫表示的不连续域的方法。有关这些区域的更多讨论，请参见 [KLP17b], [Ste18]。

我们继续假设 θ 是自对偶的，即 $\theta = \nu(\theta)$。回顾 2.2，对于类型 θ，η，双陪集空间

$$W_{\theta,\eta} = W_\theta \setminus W / W_\eta$$

关于布鲁哈特序，是相对位置函数 $\mathrm{pos}_{\theta,\eta}: \mathcal{F}_\theta \times \mathcal{F}_\eta \to W_{\theta,\eta}$的取值集合。

假设 $\theta = \nu(\theta)$ 且 $w_0 s_\alpha w_0 = s_{\nu(\alpha)}$ 是 w_0正规化 W_θ，由此可得。这意味着对于 $[w] \in W_{\theta,\eta}$，$w_0[w] = [w_0 w]$ 是 $W_{\theta,\eta}$中的一个定义良好的双陪集。这定义了 $W_{\theta,\eta}$ 上的一个由 w_0给出的逆序作用。

定义 3.2。$W_{\theta,\eta}$ 的理想是一个子集 $I \subseteq W_{\theta,\eta}$，满足

$$[w_1] \leq [w_2],\ [w_2] \in I \ \Rightarrow [w_1] \in I$$

理想有三种性质可供考量:

- 若满足$W_{\theta,\eta} \setminus I \subseteq w_0 I$，则理想 I 是胖的。
- 若满足$w_0 I \subseteq W_{\theta,\eta} \setminus I$，则理想 I 是瘦的。
- 若满足$w_0 I = W_{\theta,\eta} \setminus I$，则理想 I 是平衡的。

给定理想$I \subseteq W_{\theta,\eta}$ 和旗 $x \in \mathcal{F}_\theta$，按照 I 对 x 进行加厚所得的子集为

$$\Phi_x^I = \{y \in \mathcal{F}_\eta : \mathrm{pos}_{\theta,\eta}(x,y) \in I\}$$

它是 $\mathcal{F}_\eta$的闭子集。由于相对位置函数 $\mathrm{pos}_{\theta,\eta}$ 具有G–不变性，按照理想 I 进行的加厚满足等变关系

$$g \cdot \Phi_x^I = \Phi_{g\cdot x}^I \text{ for } x \in \mathcal{F}_\theta,\ g \in G.$$

命题 3.2 ([KLP17a, 定理 7.13])**.** 设 $\rho: \Gamma \to G$ 是一个 θ–阿诺索夫表示，其极限映射为 $\xi: \partial\Gamma \to \mathcal{F}_\theta$。若$I \subseteq W_{\theta,\eta}$ 是一个胖理想，且 K_ρ^I 是按照 I对 $\xi(\partial\Gamma)$ 进行的加厚，即

$$K_\rho^I = \bigcup_{t \in \partial\Gamma} \Phi_{\xi(t)}^I,$$

那么其补集

$$\Omega_\rho^I = \mathcal{F}_\eta \setminus K_\rho^I$$

是 ρ的不连续域。

若 I 是平衡的，则商空间

$$\mathcal{W}_\rho^I = \rho(\Gamma) \setminus \Omega_\rho^I$$

是紧致的。

因此，θ–阿诺索夫表示在$\mathcal{F}_\eta$ 中存在一个余紧不连续域，条件是$W_{\theta,\eta}$ 包含一个平衡理想。事实上，Stecker 在 [Ste18] 中证明，这基本上是在旗簇中为Δ–阿诺索夫表示构造不连续域的唯一方法。

我们注意到，如果满足 $\theta' \subseteq \theta$，则存在自然投影 $\pi_W: W_{\theta,\eta} \to W_{\theta',\eta}$，其定义为

$$W_\theta w W_\eta \mapsto W_{\theta'} w W_\eta.$$

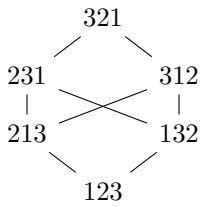


FIGURE 1. $W = S_3$上的布鲁哈特序哈斯图

我们还有投影 $\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_\theta \to \mathcal{F}_{\theta'}$，其定义为

$$gP_\theta \mapsto gP_{\theta'}.$$

重要的是，这些投影与相对位置相容，具体而言，

$$\mathrm{pos}_{\theta',\eta}(\pi_{\mathcal{F}}(x), y) = \pi_W(\mathrm{pos}_{\theta,\eta}(x, y))$$

对于 $x \in \mathcal{F}_\theta$ 和 $y \in \mathcal{F}_\eta$（这由如下事实推出： $W_\theta = (N_K(\mathfrak{a}) \cap P_\theta)/Z_K(\mathfrak{a})$）。由此可知，若$I \subseteq W_{\theta,\eta}$ 是命题 3.2 中的平衡理想，且存在一个平衡理想$I' \subseteq W_{\theta',\eta}$ 使得

$$I = \pi_W^{-1}(I'),$$

那么这些理想在 $\mathcal{F}_\eta$ 内定义的区域相同，即

$$\Omega_\rho^I = \Omega_\rho^{I'}.$$

由此得出的结论是，区域 Ω_ρ^I 实际上并不要求 ρ 为 θ–阿诺索夫，只需满足较弱的 θ'–阿诺索夫条件。

注 3.1. 上述观察给出了一个步骤，用于找出表示要在旗簇 $\mathcal{F}_\eta$中存在不连续域所需的正确最小阿诺索夫条件。令 $\theta = \Delta$。首先，我们在 $W_{\Delta,\eta} = W/W_\eta$ 内寻找平衡理想 I。然后，存在一个平衡理想 $I' \subseteq W_{\theta',\eta}$，使得 $I = \pi_W^{-1}(I')$ 当且仅当 I 是左 $W_{\theta'}$– 不变的。因此，

$$\theta' = \{\alpha \in \Delta : s_\alpha \cdot I = I\}$$

是使得 $W_{\theta',\eta}$ 存在平衡理想的最小 $\theta' \subseteq \Delta$。

使用 Kapovich-Leeb-Porti 方法构造的许多不连续域也由 Guichard & Wienhard 在 [GW12] 中进行了描述。现在我们将介绍一些可以用任一方法构造的值得注意的不连续域。

例 3.2. 令 $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$。考虑全型 $\theta = \eta = \Delta = \{1, 2\}$。 $\mathcal{F}_\theta = \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$ 与 $\mathcal{F}_\eta = \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$ 中旗之间的相对位置集合由 $W = S_3$ 编号。若将置换 $\sigma \in S_3$ 记作字符串 $\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)$，则 W 的哈斯图如图 1 所示，因此我们可以确定， $W = S_3$ 中唯一的平衡理想是子集 $I = \{123, 213, 132\}$。注意，这个理想可以更形式化地描述为

$$I = \{\sigma \in S_3 : \sigma(1) = 1 \text{ or } \{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{1, 2\}\}$$

。如果 $F^\bullet$， $H^\bullet$ 是 $\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$ 中的旗，且

$$\mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}(F^\bullet, H^\bullet) = \sigma,$$

那么存在一个旗基 v_1, v_2, v_3，使得 $F^\bullet$ 满足：$v_{\sigma(1)}$, $v_{\sigma(2)}$, $v_{\sigma(3)}$ 是 $H^\bullet$的旗基。条件“ $\sigma(1) = 1$ 或 $\{\sigma(1)\ \sigma(2)\} = \{1, 2\}$ ”意味着 $F^1 = H^1 = \langle v_1\rangle$ 或 $F^2 = H^2 = \langle v_1,\ v_2\rangle$。由此可在不涉及魏尔群 S_3的情况下描述平衡理想，即：

$$\mathrm{pos}_{\Delta,\Delta}(F^\bullet, H^\bullet) \in I \ \text{ if and only if } \ \text{either } F^1 = H^1 \text{ or } F^2 = H^2.$$

那么，对于任意具有极限曲线ξ：$\partial\Gamma \to \mathsf{Flag}(\mathbb{C}^3)$的 Borel 阿诺索夫表示 $\rho : \Gamma \to \mathsf{SL}(3, \mathbb{C})$，开子集

$$\Omega^I_\rho = \{H^\bullet \in \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3) : H^1 \neq \xi^1(t), H^2 \neq \xi^2(t) \text{ for all } t \in \partial\Gamma\}$$

是作用 $\rho(\Gamma)$ 的一个余紧不连续域。

例 3.3. 现在令 $G = \mathsf{SL}(4, \mathbb{C})$，并考虑类型 $\theta = \Delta, \eta = \{1\}$，使得 $\mathcal{F}_\theta$ =Flag($\mathbb{C}^4$) 和 $\mathcal{F}_\eta = \mathbb{CP}^3$。那么，与例 2.2 中一样，相对位置$[\sigma] \in W_{\theta,\ \eta}$由 $\sigma(1)$ 确定，我们可以考虑相对位置函数

$$\mathrm{pos}(F^\bullet, H^1) = \min\{j : H^1 \subseteq F^j\}.$$

其取值于 $\{1, 2, 3, 4\}$，通常的序给出布鲁哈特序。此外， w_0 在 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上的作用由通常的序反转 $j \mapsto 5 - j$ 给出。

那么可以确定， $\{1, 2, 3, 4\}$ 中唯一的平衡理想是集合$I = \{1, 2\}$。注意，这个理想在 $W_{\{2\}} = \{\sigma \in$$S_4$的左作用下保持不变： $\sigma(\{1, 2\}) = \{1, 2\}\}$，因此特别地，它只取决于 F^2

$$\mathrm{pos}(F^\bullet, H^1) \in \tilde{I} \iff H^1 \subseteq F^2.$$

˜这意味着， I 下降为$W_{\{2\},\ \{1\}}$ 中的一个平衡理想 I，其中

$$\mathrm{pos}_{\{2\},\{1\}}(F^2, H^1) \in I \iff H^1 \subseteq F^2.$$

根据命题 3.2，这意味着，对于任意 {2}–阿诺索夫表示 $\rho : \Gamma \to \mathsf{SL}(4, \mathbb{C})$，其极限映射为 $\xi^2 : \partial\Gamma \to \mathsf{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$，则

$$\Omega^I_\rho = \mathbb{CP}^3 \setminus \bigcup_{t\in\partial\Gamma} \mathbb{P}(\xi^2(t))$$

是一个余紧不连续域。

最后，我们将讨论如何为 1–阿诺索夫辛表示在拉格朗日格拉斯曼流形内构造一个不连续域。这是 Guichard-Weinhard 方法构造不连续域的一个实例。更多详情请参见 [GW12]第 7 节。为保持统一，我们将改为描述与该区域对应的平衡理想。

例 3.4。 设 $G = \mathsf{Sp}(4, \mathbb{C})$，并考虑类型 $\theta = \Delta$ 和 $\eta = \{2\}$，使得

$$\mathcal{F}_\theta = \mathrm{IsoFlag}_{full}(\mathbb{C}^4, \omega), \quad \mathcal{F}_\eta = \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4)$$

回顾一下，魏尔群 W G 是由$\{1, 2, -2, -1\}$的带符号置换组成的群。子群 W_η由对换 s_1 =(2 1)生成。当 s_1 从右侧作用时，它会置换输出的绝对值而不改变其符号，例如：

$$(1\ \ -2)\cdot s_1 = (2\ \ -1) \quad (-1\ 2)\cdot s_1 = (-2\ 1).$$

$$(-,-)$$
$$|$$
$$(-,+)$$
$$|$$
$$(+,-)$$
$$|$$
$$(+,+)$$

FIGURE 2. 布鲁哈特序在 $W_{\Delta,\ \{2\}}$ 对于 $G = \mathrm{Sp}(4,\ \mathbb{C})$

这意味着，相对位置$W_{\theta,\ \eta} = W/W_\eta$ 可以看作符号对的集合

$$W_{\theta,\eta} = \{(+,+),(-,+),(+,-),(-,-)\}$$

使得 $(-,\ +)$ 表示陪集 $\{(-1\ 2),\ (-2\ 1)\}$。$W_{\theta,\ \eta}$上的布鲁哈特序如图 2 所示，其中 $w_0 = (-2\ -1)$ 通过翻转每个有序对中的两个符号起作用。由此得出，$I = \{(+,\ +),\ (+,\ -)\}$ 是 $W_{\theta,\ \eta}$ 中唯一的平衡理想。

相对于 I 保持不变的唯一简单反射是 $s_2 = (1\ -2)$。因此，根据注 3.1，表示 $\Gamma \to \mathrm{Sp}(4,\ \mathbb{C})$ 只需是 $\{1\}$–阿诺索夫表示，便可在 $\mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4)$ 中存在不连续域。

更具体地说，一个符号有序对是否属于 I，只取决于第一个符号。于是，我们可以将 $W_{\{1\},\ \eta}$ 视为符号集合 $\{+,-\}$，其投影$W_{\theta,\ \eta} \to W_{\{1\},\ \eta}$ 由投影到第一个因子来表示。因此，I 投影到平衡理想 $I' = \{+\}$。于是，对于任意具有极限映射 $\xi^1\colon \partial\Gamma \to \mathbb{CP}^3$ 的 $\{1\}$–阿诺索夫表示 $\Gamma \to \mathrm{Sp}(4,\ \mathbb{C})$,

$$\Omega_\rho^{I'} = \{L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4) : \mathrm{pos}_{\{1\},\{2\}}(\xi^1(t), L) \notin I' \text{ for all } t \in \partial\Gamma\}$$

是 ρ in $\mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4)$ 中的一个不连续域。

我们从例 2.3 回忆，$[\sigma^{\pm}]$ of$W_{\{1\},\ \{2\}}$ 中的一个元素由$(\sigma^{\pm})^{-1}(1)$的符号决定。

设 $F^\bullet,\ H^\bullet$ 为扩展的 ω–各向同性旗。设 $v_1,\ v_2,\ v_{-2},\ v_{-1}$为$F^\bullet$的一个旗基，并设 $\sigma^{\pm} \in W$为一个带符号置换，使得 $v_{\sigma^{\pm}(1)}\ v_{\sigma^{\pm}(2)}\ v_{\sigma^{\pm}(-2)}\ v_{\sigma^{\pm}(-1)}$ </style}为 的一个旗基。于是根据命题 2.2, pos, $\{2\}(F^1,\ H^2) = [\sigma^{\pm}]$。注意，$(\sigma^{\pm})^{-1}(1)$ 为正，当且仅当 $(\sigma^{\pm})^{-1}(1) = 1,\ 2$，而这恰好发生在

$$F^1 = \langle v_1\rangle \subseteq \langle v_{\sigma^{\pm}(1)}, v_{\sigma^{\pm}(2)}\rangle = H^2.$$

这意味着，不连续域 $\Omega_\rho^{I'}$ 可以更简洁地表示为

$$\Omega_\rho^{I'} = \{L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4) : \xi^1(t) \not\subseteq L \text{ for all } t \in \partial\Gamma\}.$$

值得注意的是，平衡理想 $I' = \{+\}$ 可推广到任意 $W_{\{1\},\ \{n\}}$ 对于$G = \mathrm{Sp}(2n,\ \mathbb{C})$, 因此对于任意 $\{1\}$–阿诺索夫表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Sp}(2n,\ \mathbb{C})$，子集

$$\Omega_\rho^{I'} = \{L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^{2n}) : \xi^1(t) \not\subseteq L \text{ for all } t \in \partial\Gamma\}.$$

是 ρ 在 $\mathrm{Lag}(\mathbb{C}^{2n})$ 中的余紧不连续域。

此外，I' 在$W_{\{n\}\Phi\{1\}}$ 有一个逆理想 I''，因此

$$[w] \in I'' \iff [w^{-1}] \in I' \text{ for } w \in W_{\{n\},\{1\}}$$

这会交换 $\mathcal{F}_\theta$ 和 $\mathcal{F}_\eta$的作用。具体而言，如果 $\rho : \Gamma \to$Sp$(2n, \mathbb{C})$ 是一个 $\{n\}$–阿诺索夫表示，那么子集

$$\Omega_\rho^{I''} = \{\ell \in \mathbb{CP}^{2n-1} : \ell \not\subseteq \xi^n(t) \text{ for all } t \in \partial\Gamma\}.$$

这两个区域（以及它们对应的正交群版本）在 Guichard 和 Wienhard 构造不连续域的过程中发挥着关键作用，参见 [GW12，第 2 节.7]。

3.2. 映入高秩李群的福克斯表示。现在我们将讨论阿诺索夫表示中的一个主要子类，这也是本文关注的重点，即 ι–福克斯表示。我们的目标是理解第 3.1.1 节中针对这些表示所描述的不连续域的拓扑。

3.2.1. ι–福克斯表示。回顾例 2.1，对于 SL$(2, \mathbb{C})$，取 $(K, \mathfrak{a}, \Delta)$ 作为

$$K = \mathrm{SU}(2), \quad \mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & \\ & -\lambda \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad \Delta = \{\alpha_1\} = \{\epsilon_1 - \epsilon_2\}$$

那么，将卡当投影与单根 α_1 复合后，得到原点 O 在 $\mathbb{H}^3$中的位移:

$$\alpha_1(\mu(\gamma)) = d_{\mathbb{H}^3}(O, \gamma \cdot O) \text{ for } \gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

对于 SL$(2, \mathbb{R})$，取 $(K, \mathfrak{a}, \Delta)$ 作为时，同样的论证也成立

$$K = \mathrm{SO}(2), \quad \mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & \\ & -\lambda \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad \Delta = \{\alpha_1\} = \{\epsilon_1 - \epsilon_2\}$$

得到

$$\alpha_1(\mu(\gamma)) = d_{\mathbb{H}^2}(O, \gamma \cdot O) \text{ for all } \gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

这意味着，表示 $\rho : \Gamma \to$ SL$(2, \mathbb{R})$ 是 α_1–阿诺索夫，当且仅当存在常数 C，$c > 0$ 使得

$$d_{\mathbb{H}^2}(O, \rho(\gamma) \cdot O) \geq C|\gamma| - c$$

这等价于说，由 $\gamma \mapsto \rho(\gamma) \cdot O$定义的映射 $\tau_{\rho,\, O} : \Gamma \to \mathbb{H}^2$ 是一个准等距嵌入。这就是 SL$(2, \mathbb{R})$ 中凸共紧表示的定义。秩一情形下凸共紧表示的性质，是将阿诺索夫表示定义为高秩推广的主要动机之一。

固定 $g \geq 2$，并令 S 为亏格为 g 的闭可定向曲面。令 $\Gamma = \pi_1(S)$。若 S配备了常截面曲率为 -1 的黎曼度量，则万有覆盖 $\tilde{S}$ 可识别为 $\mathbb{H}^2$，使得$\tilde{S}$ 的甲板变换对应于 $\mathbb{H}^2$的等距变换。由此得到一个表示

$$\bar{\phi} : \Gamma \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2).$$

由 [Cul86], 可知，存在一个提升 $\phi : \Gamma \to$ SL$(2, \mathbb{R})$，使得图 3 中的图表可交换。这样的表示 $\phi : \Gamma \to$ SL$(2, \mathbb{R})$称为福克斯表示。接着，由于 Γ 通过 ϕ 以 $\tilde{S}$的甲板变换的形式作用在 $\mathbb{H}^2$ 上，根据施瓦茨–米尔诺引理，我们可知轨道映射$\tau_{\eta,\, O} : \Gamma \to \mathbb{H}^2$ 是一个准等距嵌入。因此，$\theta : \Gamma \to$ SL$(2, \mathbb{R})$是 α_1–阿诺索夫的。这个论证也说明，秩一李群中任意一致格的包含映射都是阿诺索夫的。

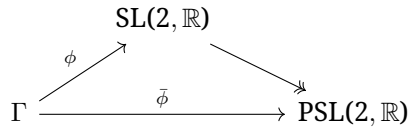


FIGURE 3. 福克斯表示到 SL(2, ℝ) 的提升

沿用记号 $\Gamma = \pi_1(S)$，其中 $\theta : \Gamma \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$是一个福克斯表示。设 G 是一个（可能是高秩的）李群，并选定一个$(K, \mathfrak{a}, \Delta)$。为了构造阿诺索夫表示 $\rho : \Gamma \to G$，我们需要一个表示 $\iota : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to G$。

定义 3.3。对于李群 G 和非平凡同态 $\iota : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to G$，若存在某个福克斯表示 $\phi : \Gamma \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 使得 $\rho = \iota \circ \phi$，则称表示 $\rho : \Gamma \to G$ 为 ι–福克斯 。

那么，下面的命题将告诉我们，$\theta \subseteq \Delta$ 的哪种类型 $\rho = \iota \circ \phi$ 是 θ–阿诺索夫表示。

命题 3.3 ([GW12，命题 4。7])。设 $\iota : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to G$ 是一个表示，其诱导的李代数同态为 $d\iota : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$。假设选取了 $(K, \mathfrak{a}, \Delta)$，使得

$$a_\iota = d\iota \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \right) \in \overline{\mathfrak{a}^+}.$$

那么，$\rho = \iota \circ \phi$ 是 θ–阿诺索夫，其中

$$\theta = \{\alpha \in \Delta : \alpha(a_\iota) \neq 0\}.$$

若将阿诺索夫表示理解为奇异值间隙不断增大的表示，就能更好地理解命题 3.3；这一点将在下一个例子中看到。

例 3.5。令 $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$，并对 $(K, \mathfrak{a}, \Delta)$ 采用标准选取，如下

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{SU}(n) \\ \mathfrak{a} &= \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{sl}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\} \\ \Delta &= \{\epsilon_j - \epsilon_{j+1} : 1 \leq j \leq n-1\}. \end{aligned}$$

对于 $d \geq 1$，令 $\rho_d : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(d, \mathbb{C})$ 为唯一的、维数为 d 的不可约 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$–表示。我们可以将 $\mathbb{C}^d$ 与空间 $\mathbb{C}^{(d-1)}[X, Y]$ 等同，该空间由 X, Y 中次数为 $d-1$ 的齐次多项式构成，并以基 $X^{d-1}, X^{d-2}Y, \ldots, Y^{d-1}$ 表示。在此对应下，可以如下描述 ρ_d 在 $\mathbb{C}^{(d-1)}[X, Y]$ 上的线性作用

$$\rho_d \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \cdot f(X, Y) = f(DX - BY, AY - CX)$$

对于 $f(X, Y) \in \mathbb{C}^{(d-1)}$。

n 的一个分拆 是一个元组 $(d_1, \ldots, d_\ell)$，满足

(1) 各项 $d_1, \ldots, d_\ell$ 均为正整数。(2) 各项按降序排列，即 $d_1 \geq d_2 \geq \cdot \geq d_\ell$。(3) 各项之和为 n，即 $d_1 + \ldots + d_\ell = n$。

各项 $d_1, \dots, d_\ell$ 称为该分拆的部分，而某个部分在分拆中出现的次数称为该部分的重数。

对于任意分拆 $(d_1, \dots, d_\ell)$，我们有表示

$$\rho_{d_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{d_\ell} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}).$$

Jacobson-Morozov定理的一个推论是，任意表示 $\iota : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 都共轭于 $\rho_{d_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{d_\ell}$，其中 $(d_1, \dots, d_\ell)$ 是 n的唯一分拆。关于这一分类的进一步讨论，请参见 [CM93，第 3 节。2]。

因此，我们继续假设，对于 n 的某个分拆 $(d_1, \dots, d_\ell)$，有 $\iota = \rho_{d_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{d_\ell}$。那么，由于

$$\rho_d \left(\begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \lambda^{d-1} & & & & & \\ & \lambda^{d-3} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda^{3-d} & & \\ & & & & \lambda^{1-d} \end{bmatrix}$$

我们看到

$$a_{\rho_d} = d\rho_d \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} d-1 & & & & & \\ & d-3 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 3-d & & \\ & & & & 1-d \end{bmatrix}.$$

特别是，a_{ρ_d} 是具有实数项的对角的。这意味着

$$a_\iota = a_{\rho_{d_1}} \oplus \cdot \oplus a_{\rho_{d_\ell}}$$

是 $\mathfrak{a}$ 的一个元素。因此，对于 $N_K(\mathfrak{a})$ 中的某个适当元素 k，$\mathrm{Ad}_k(a_\iota)$ 属于闭 Weyl 室 $\mathfrak{a}^+$。更明确地说，k 是一个带符号置换矩阵，它对 a_ι 的对角项进行置换，使得 $\mathrm{Ad}_k(a_\iota)$ 的对角项按降序排列。于是，由 $\iota'(g) = k\iota(g)k^{-1}$ 给出的表示 $\iota' : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 满足命题 3.3 的假设，因此对于 $\theta = \{\alpha \in \Delta : \alpha(a_{\iota'}) \neq 0\}$，$\iota'$ （从而 ι 也）是 θ–阿诺索夫的。

举一个具体的例子，令 $n = 6$ 和

$$\iota = \rho_3 \oplus \rho_2 \oplus \rho_1.$$

那么，

$$a_\iota = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

然后，通过共轭

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将得到表示 ι'，使得

$$a_{\iota'} = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}.$$

那么， $\theta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}$ 其中 $\alpha_j = \epsilon_j - \epsilon_{j+1}$。

这个例子使我们能够用 n 的分拆来描述映入 SL(n, $\mathbb{C}$) 的广义 ι–福克斯表示。现在，我们将看到这如何应用于 $G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$。

命题 3.4 ([CM93，定理 5.1。3])。 对于 $2n$ 的一个分拆$(d_1, \dots, d_\ell)$，考虑表示

$$\iota = \rho_{d_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{d_\ell} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2n, \mathbb{C}).$$

以下各项等价：

(1) 向量空间 $\mathbb{C}^{2n}$ 具有一个 ι–不变的辛形式 ω，因此我们可以将 ι 视为一个表示

$$\iota : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{C}^{2n}, \omega).$$

(2) $(d_1, \dots, d_\ell)$ 的每个奇数部分都具有偶数重数。

3.2.2. 不连续域的光滑纤维化。 现在，我们准备讨论 ι–福克斯表示的不连续域。

首先注意，对于 $\Gamma = \pi_1(S)$， Γ 通过 θ在 $\mathbb{H}^2$ 上的余紧作用刻画了一个 θ–等变同胚

$$\psi : \mathbb{RP}^1 \to \partial\Gamma$$

其中，在上半平面模型中， $\mathbb{RP}^1$ 被认作 $\mathbb{H}^2$ 的边界。令ρ 为一个 ι–福克斯表示，它是 θ–阿诺索夫表示，且极限映射为 $\xi : \partial\Gamma \to \mathcal{F}_\theta$。那么，复合映射 $\xi \circ \psi$：$\mathbb{RP}^1 \to \mathcal{F}_\theta$ 是一个 ρ–等变映射，我们称之为 ρ的极限曲线。事实上，从现在起，我们将省略 ψ，并将极限曲线简写为 $\xi : \mathbb{RP}^1 \to \mathcal{F}_\theta$。 $\mathbb{RP}^1$ 相较于 $\partial\Gamma$ 的重要性质在于，它具有 SL($2, \mathbb{R}$)的自然作用。特别地，可以证明 ξ 相对于这一作用是ι–等变的，即

$$\xi(g \cdot t) = \iota(g) \cdot \xi(t) \quad \text{for all } g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \text{ and } t \in \mathbb{RP}^1.$$

这意味着 $\xi(\mathbb{RP}^1)$ 在 ι(SL(2, $\mathbb{R}$)) 的作用下保持不变。因此，根据加厚的等变性，对于任意平衡理想 $I \subseteq W_{\theta,\ \eta}$，极限曲线的加厚

$$K_\rho^I = \bigcup_{t \in \mathbb{RP}^1} \Phi^I_{\xi(t)}$$

及其关联的不连续域

$$\Omega_\rho^I = \mathcal{F}_\eta \setminus K_\rho^I$$

都是旗簇 $\mathcal{F}_\eta$ 中 ι(SL(2, $\mathbb{R}$)) 不变的子集。

在这种情况下以及更一般的情形中，Alessandrini、Maloni、Tholozan 和 Wienhard 利用该 SL(2, $\mathbb{R}$)–作用 [AMTW23] 将不连续域 Ω_ρ^I 实现为一个纤维丛。

命题 3.5 ([AMTW23，定理 3.1])。对于一个 ι–福克斯表示 $\rho : \Gamma \to G$ 以及如上所述的不连续域 Ω_ρ^I，存在一个光滑的 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$–等变纤维丛投影

$$p : \Omega_\rho^I \to \mathbb{H}^2$$

其中 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 通过 ι作用于 Ω_ρ^I。此外，p 的纤维是一个闭流形。

这一结果为我们提供了关于 ι–福克斯表示的不连续域的重要拓扑信息。特别地，Ω_ρ^I 与$\mathbb{H}^2 \times M_\rho^I$微分同胚，其中 $M_\rho^I = p^{-1}(O)$ 是一个维数为 $\dim \mathcal{F}_\theta - 2$ 的闭流形。

注 3.2. 注意，我们有一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$–等变投影 $p : \Omega_\rho^I \to \mathbb{H}^2$，以及一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$–等变函数 $K_\rho^I \to \mathbb{RP}^1$，它将加厚 $\Phi_{\xi(t)}^I$ 映射到t。将这些结合起来，我们得到一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$–等变函数 $\bar{p} : \mathcal{F}_\eta \to \mathbb{H}^2$

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} p(x) & x \in \Omega_\rho^I \\ t & x \in \Phi_{\xi(t)}^I \end{cases}$$

对于 $x \in \mathcal{F}_\eta$。

为了进一步说明命题 3.5 的含义，我们简要回顾一下主 S^1–丛的欧拉类作为一个障碍类的构造。

将单位圆 S^1 视为 $\mathbb{C}^\times$的闭子群。令 H 为 S^1 或$\mathbb{C}^\times$。令 B 为光滑流形。回忆一下，光滑主 H丛 $\pi : P \to B$ 覆盖B，并带有作用于 P 上的光滑（右） H 作用，使得 H 在 P的每个纤维上自由且传递地作用。

考虑光滑主丛 $\pi : P \to B$。给 B 赋予一个光滑三角剖分，令 $B^{(n)}$ 表示该三角剖分的 n骨架。0骨架 $B^{(0)}$ 是由点组成的离散集合，因此我们可以选取一个截面

$$s^{(0)} : B^{(0)} \to \pi^{-1}(B^{(0)}).$$

边的端点上的任意截面都可以连续地延拓到这条边上，因此我们可以将$s^{(0)}$ 延拓为一个连续截面

$$s^{(1)} : B^{(1)} \to \pi^{-1}(B^{(1)}).$$

对于 B中的任意定向2单形 σ，纤维丛 $\pi|_\sigma : \pi^{-1}(\sigma) \to \sigma$ 是平凡的，因此存在一个连续截面

$$t : \sigma \to \pi^{-1}(\sigma).$$

因此，$s|_{\partial\sigma}$和 $t|_{\partial\sigma}$都是 $\partial\sigma$上的连续截面。这意味着存在一个连续函数

$$\phi : \partial\sigma \to H$$

使得

$$\phi(x) \cdot t(x) = s(x) \text{ for } x \in \partial\sigma.$$

然后，由于 σ 是定向的，$\partial\sigma \cong S^1$ 上存在诱导定向，因此 ϕ 的度：$\partial\sigma \to H$ 是良定义的。然后，由对应关系定义的 2- 上链 c

$$\sigma \mapsto \deg(\phi)$$

是一个余循环，而上同调类 $[c]$ 与截面的选择无关。这个上同调类 $[c] \in H^2(B;\mathbb{Z})$ 称为 P 的欧拉类。欧拉类是

P 存在截面的唯一障碍，这是一个经典结果：这种对应关系

$$P \mapsto [c]$$

定义了一个对应

$$\{\text{smooth principal } H\text{–bundles}\} \leftrightarrow H^2(B;\mathbb{Z}).$$

参见 [Mor01，第 6.2] 节。

设 $\pi:\ P \to B$ 是定义在光滑流形 B 上的光滑主 S^1 丛，且 F 是带有光滑（左） S^1 作用的光滑流形。那么，在 $P \times F$ 上定义的右 S^1 作用

$$\tilde{E} = (p, f) \cdot g = (p \cdot g, g^{-1} \cdot f)$$

是光滑、自由且适当的。因此，商空间 $P \underset{S^1}{\times} F = \tilde{E}/S^1$ 是一个光滑流形。可以证明，映射 $\bar{\pi}:\ E \to B$ 由下式给出

$$[p, f] \mapsto \pi(p)$$

定义了一个光滑纤维丛投影。纤维丛 $\bar{\pi}:\ E \to B$ 称为 P 和 F 的伴随丛。

注意，如果 P是一个主 S^1 丛，并考虑带有 S^1 子群作用的 $\mathbb{C}^\times$，那么伴随丛 $P \times \mathbb{C}^\times$ 通过该作用自然成为一个主 $\mathbb{C}^\times$ 丛$_{S^1}$

$$[[p, f] \cdot h = [p, fh] \text{ for } h \in \mathbb{C}^\times.$$

在这种情况下， P的欧拉类与 $P \underset{S^1}{\times} \mathbb{C}^\times$ 的类相同。注意，先验而言，丛的拓扑同时取决于 P 的欧拉类以及 F上的光滑 S^1 作用。如果 P的欧拉类为 $e \in H^2(B;\mathbb{Z})$，则 $F = S^1$ 带有该作用

$$g \cdot f = g^k f \qquad g \in S^1, f \in S^1$$

对于某个 $k \in \mathbb{Z}$。于是，伴随丛 $P \times F$ 同构于一个欧拉类为 ke的主 $_{S^1}S^1$ 丛。

最后，我们注意到，如果 B 是闭可定向曲面，那么 $H^2(B;\mathbb{Z})$ 是一个自由 $\mathbb{Z}$ 模，其基由一点的庞加莱对偶给出。因此，闭可定向曲面上的主 S^1 丛可由一个整数指定，尽管该整数的符号取决于曲面的定向选择。

现在陈述 [AMTW23] 结果的第二部分。令 $p\colon \Omega^I_\rho \to \mathbb{H}^2$ 为命题 3.5 中的 $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$–等变纤维丛。对 Γ 的作用取商空间后，我们得到一个从 $\mathcal{W}^I_\rho = \Gamma \backslash \Omega^I_\rho$ 到 $S \cong \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ 的映射，记作

$$\bar{p} : \mathcal{W}^I_\rho \to S.$$

注意， p 的等变性意味着 $M^I_\rho = p^{-1}(O)$ 在 $\iota(\mathsf{SO}(2))$ 的作用下保持不变（因为原点 $O \in \mathbb{H}^2$ 在 $\mathsf{SO}(2)$ 的作用下保持不变）。

命题 3.6 ([AMTW23])。 令 g 为曲面 S 的亏格。

对于一个 ι–福克斯表示 $\rho:\ \Gamma \to G$，其商流形为 $\mathcal{W}^I_\rho$，映射

$$\bar{p} : \mathcal{W}^I_\rho \to S$$

是一个同构于伴随丛的光滑纤维丛

$$P \underset{S^1}{\times} M_\rho^I \to S$$

其中 P是一个主 S^1丛，其欧拉类为 $g-1$，底空间为 S，而 S^1 通过同态作用于 M_ρ^I

$$S^1 \cong \mathrm{SO}(2) \xrightarrow{\iota} \iota(\mathrm{SO}(2)).$$

这一结论的一个推论是，若要确定商流形 $\mathcal{W}_\rho^I$的拓扑，可以通过将纤维 M_ρ^I确定到S^1等变微分同胚的程度来做到这一点。自然地，我们会先将范围限定在这样一类流形的纤维上：其 S^1作用的拓扑已得到充分理解。

3.3. 三维复旗簇。 本文的主要目标是将讨论限定在纤维 M_ρ^I 为单连通四维流形的情形，并应用 Fintushel 对这类流形上的 S^1作用的分类，以确定 M_ρ^I 的拓扑及其 S^1作用。为此，本节最后将确定在什么样的群 G 和旗簇 $\mathcal{F}_\eta$ 的选择下， M_ρ^I会是单连通四维流形。对于每种情形，我们将确定表示 ι 的选择，使得 $\rho = \iota \circ \phi$ 在 $\mathcal{F}_\eta$ 中具有一个不连续域。

首先，旗簇的舒伯特分解意味着，如果 G 是复李群，那么 G 的任意旗簇 $\mathcal{F}_\eta$ 都是单连通的。其次，如果 K_ρ^I的实余维至少为 3，那么 Ω_ρ^I（因而 M_ρ^I）必定是单连通的。因此，为了找到作为单连通 4 维流形的纤维 M_ρ^I，我们需要在复维数为 3 的复旗簇中寻找不连续域。

对于每个 $G = \mathsf{SL}(n,\ \mathbb{C})$，$\mathsf{SO}(n,\ \mathbb{C})$、$\mathsf{Sp}(2n,\ \mathbb{C})$，我们将确定 n 取何值时， G 的旗簇过大，即

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_\eta > 3 \text{ for all non-empty } \eta \subseteq \Delta.$$

只需证明，对于极小旗簇 $\mathcal{F}_\eta$，其中 η 是某个单根 $\alpha \in \Delta$对应的单元素集 $\{\alpha\}$，该不等式成立。

对于 $G = \mathsf{SL}(n,\ \mathbb{C})$ 且满足 $n \geq 3$ 的情形，极小旗簇为格拉斯曼流形

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = \mathcal{F}_{\{k\}}$$

对于 $k \in \Delta = \{1, \ldots, n-1\}$。抛物子群 P_k的分块形式意味着其复维数为 $n^2 - 1 - k(n-k)$，这意味着

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = k(n-k) \geq n-1.$$

因此，对于 $n \geq 5$，$\mathsf{SL}(n,\ \mathbb{C})$ 不存在复维数为 3 的旗簇。

对于满足 $n \geq 4$的 $G = \mathsf{SO}(n,\ \mathbb{C})$，极小旗簇是全迷向格拉斯曼流形

$$\mathrm{IsoFlag}_k(\mathbb{C}^n) = \{F^k \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) : F^k \subset (F^k)^{\perp_\omega}\}$$

对于 $k \in \{1, \ldots, p\}$，其中 $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$（需要注意的是，对于 $n = 2p$，$\mathsf{IsoFlag}_p(\mathbb{C}^n)$ 分裂为两个极小旗簇，而 $\mathsf{IsoFlag}_{p-1}(\mathbb{C}^n)$ 不是极小旗簇）。根据 [EH16，第 4.6] 节，其维数为

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_k(\mathbb{C}^n) = k(n-k) - \binom{k+1}{2}.$$

固定 n 后，该维数是关于 k 的二次函数，在 $k = \frac{1}{3}n - \frac{1}{6}$ 处取得最大值，因此 $k \in \{1, \dots, p\}$ 的最小维数对应于距离这个最大值最远的情形。对于 $n = 4, 6$，这个最小维数在 $k = p$ 处取得，其值为

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_2(\mathbb{C}^4) = 1$$
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_3(\mathbb{C}^6) = 3.$$

对于 $n = 5, 8$，最小维数在 $k = 1$ 和 $k = p$ 处同时达到

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_1(\mathbb{C}^5) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_2(\mathbb{C}^5) = 3$$
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_1(\mathbb{C}^8) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_4(\mathbb{C}^8) = 6.$$

对于 $n = 7, n \geq 9$，最小维数在 $k = 1$ 处达到

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_1(\mathbb{C}^n) = n - 2.$$

因此，对于 $n \geq 7$，$\mathsf{SO}(n, \mathbb{C})$ 不存在复维数为 3 的旗簇。

对于满足 $n \geq 2$ 的 $G = \mathsf{Sp}(2n, \mathbb{C})$，极小旗簇是全迷向格拉斯曼流形

$$\mathrm{IsoFlag}_k(\mathbb{C}^{2n}, \omega) = \{F^k \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) : F^k \subseteq (F^k)^{\perp_\omega}\}$$

其中 ω 是 $\mathbb{C}^{2n}$ 上的非退化辛形式，且 $k \in \{1, \dots, n\}$。回顾第 2.1 节，$\mathsf{IsoFlag}_k(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ 中标准旗的稳定子 Q 是 $\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{C})$ 与 $\mathsf{SL}(2n, \mathbb{C})$ 的抛物子群 $P_{k,\, 2n-k}$ 的交集。这意味着，若 $\mathfrak{q}$ 是 Q 的李代数，则一个矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,-n} & \cdots & a_{1,-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & a_{n,-n} & \cdots & a_{1,-n} \\ a_{-n,1} & \cdots & a_{-n,n} & -a_{n,n} & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-1,1} & \cdots & a_{-n,1} & -a_{n,1} & \cdots & -a_{1,1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}_{2n}$$

当且仅当属于 $\mathfrak{q}$

$$a_{i,j} = 0 \text{ for } i \in [k, n], j \in [1, k]$$
$$a_{-i,j} = 0 \text{ for } i \in [1, n], j \in [1, \min\{i, k\}].$$

这些线性关系意味着 $\mathfrak{q}$ 在 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 中的余维为 $k(2n-k) - \binom{k}{2}$。因此，

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_k(\mathbb{C}^{2n}, \omega) = k(2n-k) - \binom{k}{2}.$$

固定 n 后，该维数再次是关于 k 的二次函数。通过对前述情况进行类似分析，我们得出以下结论。对于 $n = 2$，旗簇的最小维数为

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_1(\mathbb{C}^4, \omega) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IsoFlag}_2(\mathbb{C}^4, \omega) = 3.$$

对于 $n \geq 3$，最小维数的旗簇总是 $\mathbb{CP}^{2n-1} = \mathsf{IsoFlag}_1(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$，其中

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{CP}^{2n-1} = 2n - 1 \geq 2(3) - 1 = 5.$$

因此，$\mathsf{Sp}(4, \mathbb{C})$ 是唯一具有复维数为 3 的旗簇的辛群。

通过考察这些维数公式，我们得出以下命题。

命题 3.7。设 G 是秩至少为2的复经典群。假设 G 有一个旗簇 $\mathcal{F}$，满足维数 $_{\mathbb{C}}\mathcal{F} = 3$。那么，$(G, \mathcal{F})$ 属于以下情形之一：

(i) 群 G 是 $SL(3,\mathbb{C})$，旗簇 $\mathcal{F}$ 是 $Flag(\mathbb{C}^3)$。*(ii)* 群 G 是 $SL(4,\mathbb{C})$，旗簇 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{CP}^3$ 或 $Gr_3(\mathbb{C}^4)$。*(iii)* 群 G 是 $Sp(4,\mathbb{C})$，旗簇 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{CP}^3$ 或拉格朗日子空间$(\mathbb{C}^4)$。*(iv)* 群 G 是 $SO(5,\mathbb{C})$，旗簇 $\mathcal{F}$ 是 $Quad_3$ 或 $IsoFlag_2(\mathbb{C}^5, \omega)$。*(v)* 群 G 是 $SO(6,\mathbb{C})$，旗簇 $\mathcal{F}$ 是 $IsoFlag_{3^+}(\mathbb{C}^6, \omega')$ 或 $IsoFlag_{3^-}(\mathbb{C}^6, \omega')$。

其中，ω（分别是 ω'）是定义在 $\mathbb{C}^5$（分别是 $\mathbb{C}^6$）上的非退化对称双线性形式。

注释 3.3。注意，命题 3.7 中的情形 (iv) 和 (v) 存在如下冗余：例外同构 $\mathfrak{so}_5 \cong \mathfrak{sp}_4$ 和 $\mathfrak{so}_6 \cong \mathfrak{sl}_4$ 意味着存在覆盖同态

$$\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(5,\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SL}(4,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(6,\mathbb{C}).$$

这些覆盖同态在抛物子群之间（进而在旗簇之间）诱导出双射。由此可知，只需考虑 Sp(4，$\mathbb{C}$) 和 SL(4，$\mathbb{C}$)，而无需考虑 SO(5，$\mathbb{C}$) 或 SO(6，$\mathbb{C}$)。

此外，$\mathbb{CP}^1$ 与 $Gr_3(\mathbb{C}^4)$ 之间的对偶性意味着，任何在 $\mathbb{CP}^3$ 中存在不连续域的表示，在 $Gr_3(\mathbb{C}^4)$ 中也存在一个等价的不连续域。我们将通过仔细考察每种情形下的平衡理想，来看最后一处冗余。

固定一个福克斯表示 $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$。我们将在本节结尾确定，$\iota : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的哪些选取会使 $\to G$ 生成一个 $\rho = \iota \circ \phi$–福克斯表示，并使其在命题 3.7 的情形 (i-iv) 所列的某个旗簇中拥有不连续域。

$\mathbf{SL(3,\mathbb{C})}$: 令 $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 且 $\mathcal{F}_\eta = \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$。$\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$ 中的不连续域由 W_Δ，$\Delta = S_3$ 中的平衡理想构造而成。正如例 3.2 所示，只有一个平衡理想，它描述了 Borel 阿诺索夫表示的不连续域。根据 3.3，令 ι 为不可约表示

$$\rho_3 : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$$

或可约表示

$$\rho_2 \oplus \rho_1 : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$$

将生成一个 Borel 阿诺索夫表示 $\rho = \iota \circ \phi$。

对于 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}} = \rho_3$，令

$$\xi_{\mathbf{f},\mathbf{i}} : \mathbb{RP}^1 \to \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$$

为 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}} = \iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}} \circ \phi$ 的极限曲线。于是，

$$\Omega_{\mathbf{f},\mathbf{i}} = \left\{ F^\bullet \in \mathrm{Flag}\left(\mathbb{C}^3\right) : F^1 \neq \xi^1_{\mathbf{f},\mathbf{i}}(t),\ F^2 \neq \xi^2_{\mathbf{f},\mathbf{i}}(t) \ \text{ for all } t \in \mathbb{RP}^1 \right\}$$

是 $\rho_{\mathbf{f},\mathbf{i}}$ 的不连续域。根据命题 3.5，存在一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$– 等变投影

$$p_{\mathbf{f},\mathbf{i}} : \Omega_{\mathbf{f},\mathbf{i}} \to \mathbb{H}^2.$$

将 $\Omega_{\mathbf{f},\mathbf{i}}$ 按 Γ 的作用取商，得到商流形

$$\mathcal{W}_{\mathbf{f},\mathbf{i}} = \Gamma \setminus \Omega_{\mathbf{f},\mathbf{i}}.$$

对于 $\iota_{\mathbf{f},\ \mathbf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_1$，令

$$\xi_{\mathbf{f},\mathbf{r}} : \mathbb{RP}^1 \to \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$$

为 $\iota_{\mathbf{f},\ \mathbf{r}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathbf{f},\ \mathbf{r}} = \iota_{\mathbf{f},\ \mathbf{r}} \circ \phi$ 的极限曲线。那么，

$$\Omega_{\mathbf{f},\mathbf{r}} = \left\{ F^\bullet \in \mathrm{Flag}\left(\mathbb{C}^3\right) : F^1 \neq \xi^1_{\mathbf{f},\mathbf{r}}(t),\ F^2 \neq \xi^2_{\mathbf{f},\mathbf{r}}(t) \ \text{ for all } t \in \mathbb{RP}^1 \right\}$$

是 $\rho_{\mathbf{f},\ \mathbf{r}}$ 的不连续域。根据命题 3.5，存在一个 SL(2，$\mathbb{R}$)–等变投影

$$p_{\mathbf{f},\mathbf{r}} : \Omega_{\mathbf{f},\mathbf{r}} \to \mathbb{H}^2.$$

将 $\Omega_{\mathbf{f},\ \mathbf{r}}$ 对 Γ 的作用取商，得到商流形

$$\mathcal{W}_{\mathbf{f},\mathbf{r}} = \Gamma \setminus \Omega_{\mathbf{f},\mathbf{r}}.$$

令 $G = \mathrm{SL}(4,\ \mathbb{C})$ 和 $\mathcal{F}_\eta = \mathbb{CP}^3$。由例 3.3 可知，只有一个平衡理想能够描述 $\mathbb{CP}^3$ 中的不连续域，且它要求该表示是 2–阿诺索夫。根据命题 3.3，ι–福克斯表示 $\Gamma \to \mathrm{SL}(4,\ \mathbb{C})$ 是 2–阿诺索夫，当且仅当它具有中间奇异值间隙。当且仅当对于一个仅含偶数部分的 4 的分拆，$\iota = \rho_{d_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{d_\ell}$ 时，这一条件成立。因此，可能的选项是 $\iota_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}} = \rho_4$ 和 $\iota_{\mathbf{p},\ \mathbf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_2$。

对于 $\iota_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}} = \rho_4$，令

$$\xi_{\mathbf{p},\mathbf{i}} : \mathbb{RP}^1 \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$$

为 $\iota_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}} = \iota_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}} \circ \phi$的极限曲线。那么，

$$\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{i}} = \left\{ F^1 \in \mathbb{CP}^3 :\ F^1 \not\subseteq \xi^2_{\mathbf{p},\mathbf{i}}(t) \ \text{ for all } t \in \mathbb{RP}^1 \right\}$$

是 $\rho_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}}$的不连续域。根据命题 3.5，存在一个 SL(2，$\mathbb{R}$)–等变投影

$$p_{\mathbf{p},\mathbf{i}} : \Omega_{\mathbf{p},\mathbf{i}} \to \mathbb{H}^2.$$

将 $\Omega_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}}$ 按 Γ 的作用取商，可得到商流形

$$\mathcal{W}_{\mathbf{p},\mathbf{i}} = \Gamma \setminus \Omega_{\mathbf{p},\mathbf{i}}.$$

对于 $\iota_{\mathbf{p},\ \mathbf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_2$，令

$$\xi_{\mathbf{p},\mathbf{r}} : \mathbb{RP}^1 \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$$

为 $\iota_{\mathbf{p},\ \mathbf{r}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathbf{p},\ \mathbf{r}} = \iota_{\mathbf{p},\ \mathbf{r}} \circ \phi$的极限曲线。那么，

$$\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{r}} = \left\{ F^1 \in \mathbb{CP}^3 :\ F^1 \not\subseteq \xi^2_{\mathbf{p},\mathbf{r}}(t) \ \text{ for all } t \in \mathbb{RP}^1 \right\}$$

是 $\rho_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$ 的一个不连续域。根据命题 3.5，存在一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$– 等变投影

$$p_{\mathbf{p},\mathbf{r}} : \Omega_{\mathbf{p},\mathbf{r}} \to \mathbb{H}^2.$$

将 $\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$ 按照 Γ 的作用取商，可得到商流形

$$\mathcal{W}_{\mathbf{p},\mathbf{r}} = \Gamma \setminus \Omega_{\mathbf{p},\mathbf{r}}.$$

如果 $G = \mathrm{Sp}(4,\ \mathbb{C})$，但域旗簇仍然是 $\mathcal{F}_\eta = \mathbb{CP}^3$，那么唯一的平衡理想（我们在例 2.3 中见过）仍将对应于区域 $\Omega_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}}$ 和 $\Omega_{\mathbf{p},\ \mathbf{r}}$。这是因为 $\iota_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}}$ 和 $\iota_{\mathbf{p},\ \mathbf{r}}$ 都具有命题 3.4 所述的不变辛形式，因此 $\rho_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}}$ 和 $\rho_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}}$ 可以重新解释为取值于 Sp(4，$\mathbb{C}$) 的 $\{2\}$–阿诺索夫表示，并具有极限曲线

$$\xi_{\mathbf{p},\mathbf{i}}, \xi_{\mathbf{p},\mathbf{r}} : \mathbb{RP}^1 \to \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4).$$

为简化论证，我们将重点关注把 $\rho_{\mathsf{p,\ i}}$ 和$\rho_{\mathsf{p,\ r}}$ 解释为取值于 SL(4， $\mathbb{C}$) 的表示。

设 $G = \mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{F}_\eta = \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4)$。根据例 2.3，描述 $\mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4)$ 中一个不连续域的平衡理想只有一个，且它要求该表示是 $\{1\}$–阿诺索夫。为了使

$$\iota = \rho_{d_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{d_\ell} : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$$

存在不变的辛形式（从而 ι 可解释为取值于 $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$ 的表示），分拆 $(d_1,\cdots,d_\ell)$ 中每个奇数部分的重数都必须是偶数。4 的唯一满足条件的分拆为

$$(4),\quad (2,2),\quad (2,1,1),\quad (1,1,1,1).$$

在这些分拆中，只有 (4) 和 (2, 1,1) 会产生一个 $\{1\}$–阿诺索夫 ι–福克斯表示。因此，我们得到表示

$$\iota_{\mathsf{l,i}} = \rho_4 : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$$
$$\iota_{\mathsf{l,r}} = \rho_2 \oplus \rho_1 \oplus \rho_1 : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(4,\mathbb{C}).$$

对于 $\iota_{\mathsf{l,i}} = \rho_4$，令

$$\xi_{\mathsf{l,i}} : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{CP}^3$$

为 $\iota_{\mathsf{l,i}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathsf{l,i}} = \iota_{\mathsf{l,i}} \circ \phi$ 的极限曲线。那么，

$$\Omega_{\mathsf{l,i}} = \left\{ L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4) :\ \xi^1_{\mathsf{l,i}}(t) \not\subseteq L \ \text{ for all } t \in \mathbb{RP}^1 \right\}$$

是 $\rho_{\mathsf{l,i}}$ 的不连续域。根据命题 3.5，存在一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 等变投影

$$p_{\mathsf{l,i}} : \Omega_{\mathsf{l,i}} \to \mathbb{H}^2.$$

将 $\Omega_{\mathsf{l,i}}$ 对 Γ 的作用取商，可得商流形

$$\mathcal{W}_{\mathsf{l,i}} = \Gamma \setminus \Omega_{\mathsf{l,i}}.$$

对于 $\iota_{\mathsf{l,r}} = \rho_2 \oplus \rho_1 \oplus \rho_1$，令

$$\xi_{\mathsf{l,r}} : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{CP}^3$$

为 $\iota_{\mathsf{l,r}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathsf{l,r}} = \iota_{\mathsf{l,r}} \circ \phi$ 的极限曲线。那么，

$$\Omega_{\mathsf{l,r}} = \left\{ L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4) :\ \xi^1_{\mathsf{l,r}}(t) \not\subseteq L \ \text{ for all } t \in \mathbb{RP}^1 \right\}$$

是 $\rho_{\mathsf{l,r}}$ 的不连续域。根据命题 3.5，存在一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$– 等变投影

$$p_{\mathsf{l,r}} : \Omega_{\mathsf{l,r}} \to \mathbb{H}^2.$$

对 $\Omega_{\mathsf{l,\ r}}$ 取 Γ 作用下的商，得到商流形

$$\mathcal{W}_{\mathsf{l,r}} = \Gamma \setminus \Omega_{\mathsf{l,r}}.$$

上述分析列出了一系列情形，为本文后续内容提供指导。我们在下面的命题中予以总结。

命题 3.8. 设 G 是一个旗簇维数为 3 的单连通复经典群。令 $\rho :\ \Gamma \to G$ 为一个 ι–福克斯表示。假设 ρ 在 $\mathcal{F}_\eta$ 中存在一个通过

Kapovich-Leeb-Porti 的平衡理想构造的紧致不连续作用区域。那么， G、 $\mathcal{F}_\eta$ 和 ι 的取值对应于下表中的一行：

G	$\mathcal{F}_\eta$	ι
$\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$	旗 $(\mathbb{C}^3)$	ρ_3 和 $\rho_2 \oplus \rho_1$
$\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$，$\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$	$\mathbb{CP}^3$	ρ_4 和 $\rho_2 \oplus \rho_2$
$\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$	拉格朗日子空间 $(\mathbb{C}^4)$	ρ_4 和 $\rho_2 \oplus \rho_1 \oplus \rho_1$

4. Classification of S^1–actions on 4–manifolds

本节的主要结果是 Fintushel 分类的一个光滑版本，该分类针对闭单连通4维流形上的S^1–作用。此分类最初发表于 [Fin77], , 指出这类圆周作用由嵌入在4维流形轨道空间中的带权图决定。Fintushel 分类是在拓扑范畴中完成的，附加于图上的权重数据编码了4维流形内异常轨道周围的S^1–作用。对于光滑作用，这些权重数据更容易用切丛上诱导的 S^1–作用来表示。Jang 和 Musin 在 [JM23] 中采用了这种方法，分析（不一定是单连通的）4维流形上的S^1–作用。我们改造他们的带标记图，重新推演 Fintushel 的证明，以便在等变微分同胚意义下分类光滑的 S^1–作用。

4.1. 圆周作用与轨道空间。在第 4 节余下部分， M 将是一个带有光滑 S^1作用的闭单连通4维流形。由于 $S^1 =\{g \in \mathbb{C} : \ |g| = 1\}$ 是一个紧李群，我们可以在 M 上选取一个不变黎曼度量，使得 S^1 通过等距变换作用。 S^1 的任意闭子群都具有如下形式

$$H_m = \{z \in S^1 : z^m = 1\}$$

其中某个 $m \geq 0$。

对每个H_m 的（定向）不可约实表示进行分类将很有用（参见 BD85，第 8]节）。在下面这个命题中，我们将把一个 H_m表示指定为有序对（V， ρ），其中 V 是一个实向量空间，而 ρ ： $H_m \to$ 到 GL(V) 是一个同态。向量空间 V要么是 $\mathbb{R}$ ，要么是带有标准定向的 $\mathbb{C}$ 。

命题 4.1。对于任意整数 $m \geq 0$,

- 若 $m = 1$，则 $H_1 = \{1\}$且唯一不可约的 H_1–表示 i s $(V_0^1, \ \rho_0^1) = (V = \mathbb{R}, \ \rho : \ H_1 \to \mathbb{R}^\times)$ 且 $\rho(g) = 1$。
- 若 $m \neq 0,1$，则 $H_m \cong \mathbb{Z}_m$ 且不可约的 H_m–表示为

$$(V_d^m, \rho_d^m) = \begin{cases} (V = \mathbb{R}, \ \rho : H_m \to \mathbb{R}^\times) \ with \ \rho(g) = g^d & d = 0, \frac{m}{2} \\ (V = \mathbb{C}, \ \rho : H_m \to \mathbb{C}^\times) \ with \ \rho(g) = g^d & otherwise \end{cases}$$

  对于 $d \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$。
- 若 $m = 0$，则 $H_m = S^1$ 且不可约的 S^1–表示为

$$(V_w^0, \rho_w^0) = \begin{cases} (V = \mathbb{R}, \ \rho : H_m \to \mathbb{R}^\times) \ with \ \rho(g) = 1 & w = 0 \\ (V = \mathbb{C}, \ \rho : H_m \to \mathbb{C}^\times) \ with \ \rho(g) = g^w & w \neq 0 \end{cases}$$

  对于 $w \in \mathbb{Z}$。整数 w 称为定向表示V_w^0的权重。

在本文余下部分中，我们将用向量空间 V（其作用由我们的标记方式隐含给出）来指称上述命题中描述的不可约表示，例如，V_1^2是表示（V_1^2，ρ_1^2）的简写。偶尔，在明确使用复系数时，V_0^m表示平凡复H_m–表示，而非实表示。

请注意，如果我们忽略 V_w^0 的定向，那么 $V_w^0 \cong V_{-w}^0$。在 S^1 表示的直和中，将偶数个权重取反不会改变定向。这一原则概括如下命题。

命题 4.2. 设 $w_1, \ldots, w_k$ 和 $w'_1, \ldots, w'_k$ 为非零整数。那么，$V_{w_1}^0 \oplus \cdots \oplus V_{w_k}^0$ 与 $V_{w'_1}^0 \oplus \cdots V_{w'_k}^0$ 之间存在一个 S^1 表示的同构，当且仅当存在一个 $\{1, \ldots, k\}$ 的置换 σ，使得对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，$w_i = \pm w'_{\sigma(i)}$。当且仅当$\operatorname{sign}(w_1 \cdots w_k) = \operatorname{sign}(w'_1 \cdots w'_k)$ 时，该同构保持定向。

现在，我们将根据点的稳定子来考察 S^1–作用 M 的结构。对于 $m \geq 0$，令

$$\operatorname{Fix}(M, m) = \{x \in M : h \cdot x = x \text{ for } h \in H_m\}.$$

命题 4.3。对于每个 $m \geq 0$,

(i) 子集 $\operatorname{Fix}(M, m)$ 是 S^1–不变的。(ii) $\operatorname{Fix}(M, m)$ 的每个连通分支都是M中的全测地子流形。(iii) $\operatorname{Fix}(M, m)$ 的每个连通分支都是可定向的，并且在M中具有偶余维。(iv)$\operatorname{Fix}(M, m)$的欧拉示性数与 M相同，并且 $\chi(M) = \chi(\operatorname{Fix}(M, m))$。

证明。 陈述 (i) 源于以下观察：同一轨道中的点具有共轭的稳定子子群，并且 S^1 是阿贝尔的。陈述 (ii) 是 [Kob95，定理 5.1]的推论。

对于 (iii)，令 C 为 $\operatorname{Fix}(M, m)$ 的一个连通分支，并选取一个点$x \in C$。我们考虑线性表示 $H_m \to \mathrm{O}(T_x M)$。由于 H_m 是一个约化群，我们可以将 $T_x M$ 分解为不可约子表示。通过考察从 x出发的测地线，我们得到：对于所有 $h \in H_m\}$，$T_x C = \{v \in T_x M : h \cdot v = v$。因此，我们只需确定 $T_x M$ 的非平凡不可约子表示的维数之和为偶数。如果$m \neq 2$，则 $H_m \cong S^1$ 或 $\mathbb{Z}_m$，其不可约表示或者是平凡的，或者是 2 维的。因此，对于所有 $h \in H_m\}$，$T_x C = \{v \in T_x M$：$h \cdot v = v$ 必须在 $T_x M$中具有偶余维。如果 $m = 2$，则 $H_m = \mathbb{Z}_2$ 有两个不可约表示，二者均为 1 维。在此情形下，$H_m \cong \mathbb{Z}_2$，因此如果 $g \in H_m$ 是 2 阶元素，则 $T_x M$ 按 g 的特征子空间分解为：$T_x M \to T_x M$。

$$T_x M = E_1 \oplus E_{-1}$$

其中 $E_{\pm 1} = \{v \in T_x M$： $g \cdot v = \pm v\}$，因此 $E_1 = T_x C$。为得出 E_{-1} 是偶数维的，我们注意到 g 是作用于 M 上的单参数族 S^1 中的一个元素。特别地，g： $M \to M$ 与恒等映射同伦，因此保持定向。保持定向的线性变换 g：$T_x M \to T_x M$ 迫使 E_{-1} 为偶数维。同样的考虑也表明，

C 的法丛具有一个 S^1 不变的定向。由于 M 是定向的，这在 C 上诱导出一个定向。至此，(iii) 的证明完成。

对于 (iv)，当 $m = 0$ 时，该情形直接由 [Kob95，定理 5.5]，得出，即 $\chi(M) = \chi(F)$，其中 $F = \mathrm{Fix}(M, 0)$。对于 $m > 0$，注意到 (i) 和 (ii) 意味着 $\mathrm{Fix}(M, m) = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} C_i$，其中每个 C_i 都是 M 的 S^1–不变子流形。于是，[Kob95，定理 5.5] 蕴含 $\chi(C_i) = \chi(C_i \cap F)$

$$\chi(\mathrm{Fix}(M,m)) = \sum_{i=1}^{\ell} \chi(C_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \chi(C_i \cap F) = \chi\left(\bigsqcup_{i=1}^{\ell} C_i \cap F\right) = \chi(F) = \chi(M).$$

□

注意，上述命题对连通可定向闭流形上的任意圆作用都成立 M（无需假设单连通性或 $\dim M = 4$）。下面的内容将以某种方式使用单连通性或 $\dim M = 4$。大多数论证基于 [Fin77] 中所采用的论证。

在本节余下部分，我们固定以下记号（借用自 [Fin77]），用于表示不动点和例外点：

$$F = \mathrm{Fix}(M, 0) \qquad\qquad E = \bigcup_{m>0} \mathrm{Fix}(M, m) \setminus F.$$

令 M^* 表示 M 和 p 的轨道空间：$M \to M^*$ 为轨道投影。对于 $A \subseteq M$，A^* 是 $p(A)$ 的简写。另一方面，如果我们先描述一个子集 $A^* \subseteq M^*$，那么 A 是 $p^{-1}(A^*)$ 的简写。

命题 4.4. 对于 $m \geq 2$，若 C 是 $\mathrm{Fix}(M, m)$ 的一个连通分支，且对于除 m 以外的任何 $m' \in m\mathbb{Z}_{\geq 0}$，它都不包含于 $\mathrm{Fix}(M, m')$ 中，则 C 与带有 $g \cdot [z_0$ 作用的 $\mathbb{CP}^1$ 等变微分同胚，其中 S^1 的作用为 $g \cdot [z_0 : z_1] = [z_0 : g^m \cdot z_1]$。特别地，$C^*$ 是一个闭弧，其端点为 $(C \cap F)^*$，内点为 $(C \setminus F)^*$。内点 $C \setminus F$ 的稳定子为 H_m。

证明。根据命题 4.3(i,ii,iii)，C 是一个 S^1–不变的维数为 0 或 2 的子流形。然而，C 不包含于 F 中，且包含一个真 S^1–轨道，因此它具有正维数。于是，C 是一个连通的可定向曲面。此外，$C \cap F$ 在 C 中的余维必为偶数，因此它是一个有限集的点。由命题 4.3(iv)，我们得到 $\chi(C) = \chi(C \cap F) \geq 0$。这意味着 C 要么是球面，要么是环面。根据 [MY60，引理 2.3]，C 不可能是环面。因此，C 是球面，且 $|C \cap F| = 2$。C 不包含于任何更小的 $\mathrm{Fix}(M, m')$ 中这一条件意味着，$C \setminus F$ 中一点的稳定子必为 H_m。这些性质刻画了命题中所描述的 $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ 上的作用。□

定义 4.1。满足命题 4.4 假设的 $\mathrm{Fix}(M, m)$ 的一个连通分支称为权重为 m 的例外球面。

下面的结果是利用切丛上的 S^1–作用分解流形的第一步。

命题 4.5。设 N 是 M 中一个闭的、S^1–不变的子流形，$T^{\perp}N$ 是相对于我们在 M 上选定的 S^1–不变度量的法丛。设 $\exp : TM \to M$ 为指数映射。那么，存在某个 $\epsilon > 0$，使得 $\exp$ 限制在

$$B_\epsilon(T^{\perp}N) = \{(x, v) \in T^{\perp}N : ||v|| \leq \epsilon\}$$

上是一个等变微分同胚，其像为 N 的一个紧邻域。特别是，exp 限制在

$$\mathring{B}_\epsilon(T^\perp N) = \{(x,v) \in T^\perp N : ||v|| < \epsilon\}$$

也是一个从其映到 N 的开邻域上的 S^1–等变微分同胚。

证明。 参见 [Bre72] 的第 2 节。 □

引理 4.6。 对每个 $x \in M$，记其轨道为 $O = S^1 \cdot x$，稳定子为 H_m。那么，由下式定义的映射 $\nu\colon H_m \setminus B_\epsilon(T_x^\perp O) \to M^*$

$$[(x,v)] \mapsto p(\exp(x,v))$$

是一个到 x^* 的紧邻域上的同胚。

证明。 由于涉及的集合是紧致且豪斯多夫的，只需证明ν是连续且单射的。首先注意到，映射 $p \circ \exp : B_\epsilon(T_x^\perp O) \to M^*$是连续函数的复合，因此连续。由命题 4.5，exp 是 H_m–等变的。因此， $p \circ \exp$ 将 H_m–轨道映到M^*中的同一点。于是，$p \circ \exp$ 诱导出连续映射 $\nu\colon H_m \setminus B_\epsilon(T_x^\perp O) \to M^*$。现在证明其单射性。任取 (x, v_1) 和 (x, v_2)，使得

$$\nu([(x,v_1]) = p(\exp(x,v_1)) = p(\exp(x,v_2)) = \nu([(x,v_2)]).$$

那么，必定存在某个 $g \in S^1$，使得 $g\exp(x, v_1) = \exp(x, v_2)$。由于指数映射是 S^1–等变且为单射，这意味着 $g \in H_m$ 和 $g \cdot v_1 = v_2$。当然，这就推出 $[(x, v_1)] = [(x, v_2)]$ 属于 $H_m \setminus B_\epsilon(T_x^\perp O)$。因此， ν是到其像上的同胚。为了说明 ν 的像是 x^*的一个邻域，我们注意到

$$\nu(H_m \setminus \mathring{B}_\epsilon(T_x^\perp O)) = p(\exp(\mathring{B}_\epsilon(T^\perp O)))$$

且 $\exp(\mathring{B}_\epsilon(T^\perp O))$ 是 S^1–不变的 x开邻域。 □

这为我们提供了一种相当直接的方式，可以根据在 $T_x^\perp O$上的作用来理解 M^*在x^* 附近的局部拓扑。现在我们将其明确写出。

命题4.7。 对于每个 $x \in M$，令 $O = S^1 \cdot x$ 表示其轨道， H_m表示其稳定子。对于不同的情形，我们将 $T_x^\perp O$ 这一类描述为一种 H_m–表示。

(a) 如果 $x \notin E \cup F$，那么 $H_m = \{1\}$，且 $T_x^\perp O$ 同构于 $V_0^1 \oplus V_0^1 \oplus V_0^1$。在这种情况下， M^* 在 x^*附近局部同胚于 $\mathbb{R}^3$。(b) 如果 $x \in E \setminus F$，那么 H_m 是一个非平凡循环群，且 $T_x^\perp O$ 同构于某个 $d \in \{1, \ldots, m-1\}$对应的 $V_0^m \oplus V_d^m$。在这种情况下， M^* 在 x^*附近局部同胚于 $\mathbb{R}^3$。(c) 如果 $x \in F$ 是一个孤立不动点，那么对于某些互素整数 w_1、$w_2 \neq 0$， $H_m = S^1$ 和 $T_x^\perp O \cong V_{w_1}^0 \oplus V_{w_2}^0$。在这种情况下， M^* 在 x^*附近局部同胚于 $\mathbb{R}^3$。(d) 如果 $x \in F$ 且位于一个不动曲面上，那么 $H_m = S^1$ 且 $T_x^\perp O \cong V_0^0 \oplus V_0^0 \oplus V_1^0$。在这种情况下， M^* 在 x^*附近局部同胚于 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$。

证明。 **情形 (a)**。 如果 $x \notin E \cup F$，那么 x 不被任何平凡元素固定，因此其稳定子 H_m 是平凡的。于是， $O = S^1 \cdot x$ 是一个嵌入圆， S^1 在其上自由作用。然后，$T_x^\perp O$ 是一个三维向量空间， $H_m = \{1\}$ 在其上平凡作用。根据引理 4.6， x^* 有一个同胚于

$$H_m \setminus B_\epsilon(T_x^\perp O) \cong B_\epsilon(\mathbb{R}^3)$$

其中 x^* 对应于原点。

情形（b）。如果 $x \in E \setminus F$，那么 H_m 必须是 S^1的非平凡真子群，即 $m \neq 0$，1。因此，轨道 $O = S^1 \cdot x$ 是一个嵌入圆。根据命题 4.4，O 是例外球面 C 的一条纬线，其权重为 m。由于 C 由 H_m固定，T_xC 与作为 H_m–表示的 $V_0^m \oplus V_0^m$同构。于是，切空间 T_xM 具有如下 S^1–不变分解

$$T_xM = T_xC \oplus T_x^\perp C \cong (V_0^m \oplus V_0^m) \oplus V_d^m$$

对于某个 $d \in \{0, 1, \dots, m-1\}$。如果 $d = 0$，那么 H_m在 T_xM上平凡作用，这意味着在 C 上的作用不会是 Fix(M，m)的整个连通分支。因此，$d \in \{1, \dots, m-1\}$。注意到 $T_xO \subseteq T_xC$，因此

$$T_x^\perp O = (T_x^\perp O \cap T_xC) \oplus T_x^\perp C \cong V_0^m \oplus V_d^m.$$

根据引理 4.6，x^* 有一个与.....同胚的邻域

$$H_m \setminus B_\epsilon(V_0^m \oplus V_d^m).$$

注意，H_m 在$V_0^m \oplus V_d^m$上的作用类似于 $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ 上的作用

$$g \cdot (t, z) = (t, g^d z) \text{ for } g \in H_m,\ (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}.$$

令 $k = \frac{m}{\gcd(m,d)}$。那么，

$$D = \left\{ (t, r\cos\theta + ir\sin\theta) : t \in \mathbb{R}, r \geq 0, \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{k}\right] \right\}$$

是 H_m作用下的一个楔形基本域。商空间 $H_m \setminus D$与 $\mathbb{R}^3$同胚。因此，M^* 在 x^*处局部同胚于 $\mathbb{R}^3$。

情形（c）。如果 $x \in F$ 是一个孤立不动点，那么 $H_m = S^1$ 和

$$O = S^1 \cdot x = \{x\}.$$

因此，$T_x^\perp O = T_xM$ 分解为非平凡的 S^1–表示：$T_xM \cong V_{w_1}^0 \oplus V_{w_2}^0$。注意，$H_{w_1} \cap H_{w_2}$ 在 T_xM 上的作用是平凡的，因此，由于 M 上的作用是有效的，必有 $H_{w_1} \cap H_{w_2} = \{1\}$。换言之，$w_1$ 和w_2 互素。由于 x 是孤立不动点，w_1 和 w_2 都不能为 0。根据引理 4.6，x^* 有一个与.....同胚的邻域

$$S^1 \setminus B_\epsilon(V_{w_1}^0 \oplus V_{w_2}^0)$$

注意到，由于 S^1–作用的线性性，$B_\epsilon(V_{w_1}^0 \oplus V_{w_2}^0)$ 是以下对象的 S^1–等变锥

$$\partial\, B_\epsilon(V_{w_1}^0 \oplus V_{w_2}^0)$$

这是一个 3 维流形，其轨道给出了一个塞弗特纤维化。根据 [Sei80，第 3], 节，轨道空间

$$S^1 \setminus \partial\, B_\epsilon(V_{w_1}^0 \oplus V_{w_2}^0) \cong S^2$$

因此由该锥

$$S^1 \setminus B_\epsilon(V_{w_1}^0 \oplus V_{w_2}^0) \cong B^3.$$

因此，在这种情况下，x^* 具有一个欧几里得邻域。

情形（d）。若 x 位于某个不动曲面上，即 Fix(M，0) 的一个二维分支 S 上，则 $H_m = S^1$。注意，$T_x^\perp O = T_xM$ 具有 S^1–不变分解

$$T_xM = T_xS \oplus T_x^\perp S = (V_0^0 \oplus V_0^0) \oplus V_1^0.$$

S^1–作用在 $V_0^0 \oplus V_0^0 \oplus V_1^0$ 上的形式类似于 $\mathbb{C}^2$，其作用为

$$g \cdot (z_1, z_2) = (z_1, gz_2) \text{ for } g \in S^1,\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

于是，该闭子集与每个 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ S^1–轨道恰好相交一次。因此可以证明，轨道空间

$$S^1 \setminus (V_0^0 \oplus V_0^0 \oplus V_1^0)$$

同胚于 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$，而 x^* 对应于原点 (0，0)。 □

上述命题推出以下推论，它对轨道空间的拓扑施加了严格限制（比较 [Fin77，命题 3.1]）。

推论 4.8。 轨道空间 M^* 是一个紧致的单连通3–流形，其边界点对应于 M中的不动曲面上的点。

证明。 剩下要证明的只是 $\pi_1(M^*)$ 是平凡的。取一个基点$x_0 \notin E \cup F$。然后，任取一个以 x_0为基点的闭路 $\gamma\colon\ [0,1] \to M^*$。首先，我们可以将 γ同伦移离边界。根据 4.4，$(E \cup F)^* \setminus \partial M^*$是由有限集的点和弧组成的并集，且每个点至多有两条相邻的弧。结合命题4.7，我们看到 $(E \cup F)^* \setminus \partial M^*$实际上是 M^*中的一个嵌入图。如果将 γ 同伦为与该图横截，则由于余维较低，它们的交集为空。因此经过同伦后，可以假设 γ是 $(M \setminus (E \cup F))^*$中的一条闭路。然而，请注意，这是主 S^1–丛的底空间。

$$p : M \setminus (E \cup F) \to (M \setminus E \cup F)^*.$$

由于纤维 $S^1 \cdot x_0$是路径连通的， $p_*\colon\ \pi_1(M \setminus (E \cup F)\ x_0) \to \pi_1((M \setminus (E \cup F))^*,\ x_0^*)$ 是满射。因此，取同伦后，我们可以假设$\gamma\colon [0,1] \to (M \setminus (E \cup F))^*$ 提升为一个以 x_0 为基点的闭路 $\tilde{\gamma}\colon$ $[0,1] \to M \setminus (E \cup F)$。我们知道 $\tilde{\gamma}$ 在 M 中是零伦的，因此 γ 在 M^*中也是零伦的。□

4.2. **切向权重图**。本节旨在介绍一种新的标记方案，该方案基于 [Jan18], 中使用的多重图，用切空间对不动点的作用来标记光滑作用的轨道数据图的顶点和边。随后，我们利用这一新的标记方案，在一个特殊情形下证明 Fintushel 分类的光滑类比。

定义 4.2. 设 $x \in F$ 是一个孤立不动点。由命题4.7，T_xM 与某些互素整数对应的 $V_{w_1}^1 \oplus V_{w_2}^1$ 同构。由命题 4.2，$\text{sign}(w_1 w_2) \in \{\pm 1\}$ 由 T_xM 上的定向和圆作用决定。我们称 $\text{sign}(w_1 w_2)$ 为 x的符号。滥用记号，我们也将使用 $(\pm)$ 符号来表示符号。

取非零的 $v_1 \in V_{w_1}^0$、 $v_2 \in V_{w_2}^0$，以及非平凡的 $g \in S^1$，使得

$$v_1,\ g \cdot v_1,\ v_2,\ g \cdot v_2$$

是 T_xM 的一组有序基，并定义了一种定向，我们称之为 T_xM的旋转定向。这一定向与所作的选择无关。如果旋转定向与 T_xM上的自然定向一致，则 x 的符号为（+）；如果二者相反，则为（–）。

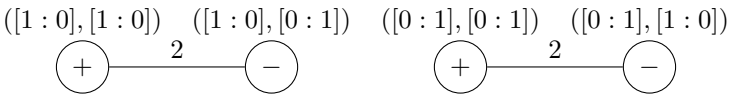


FIGURE 4. S^1作用于 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$的切向权重图

回顾命题 4.4， M 中的任意一点 x ，若其稳定子为 H_w ，则位于一个权重为 w的例外球面上；该球面是一个子流形，且与 $\mathbb{CP}^1$ 在 S^1–作用下等变微分同胚

$$g \cdot [z_0 : z_1] = [z_0 : g^m \cdot z_1]$$

。这些数据为我们提供了如下定义M 切向权重图所需的标记:

定义4.3。 设 M 是一个带有 S^1作用的单连通四维流形，且$(E\cup F)^* \setminus \partial M^*$不包含多面体循环（等价地， $H_1(E\cup F) = 0$）。那么，我们称 M 具有无环的 S^1作用。在这种情况下，我们可以将$(E \cup F)^*$视为一个抽象标记图，而不依赖于它在 M^*中的嵌入。 M 的切向权重图 $\mathcal{G}$ 是如下带标记图： $\mathcal{G}$ 的顶点分为两类，圆形顶点对应孤立不动点，方形顶点对应不动曲面。连接两个圆形顶点的边对应于包含相应孤立不动点的例外球面。方形顶点没有相连的边。

(1) 对应于孤立不动点 x 的圆形顶点，标记为 x 的符号。(2) 对应于不动曲面分支 S 的方形顶点，标记为主 S^1 丛 $U^\perp S$ 的欧拉数 $e \in \mathbb{Z}$ ，其中 $S \cong S^*$ 定向为 ∂M^* 的一个边界分支。(3) 对应于例外球面 C 的边，标记为 C 的权重$w \geq 2$ 。

例 4.1。 考虑 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 上的 S^1 作用，定义如下:

$$g \cdot ([z_0 : z_1], [w_0 : w_1]) = ([z_0 : gz_1], [w_0 : g^2 w_1]).$$

要看出其切向权重图就是图4所示的图，注意 $\{[1:\ 0]\} \times \mathbb{CP}^1$ 和 $\{[0:\ 1]\} \times \mathbb{CP}^1$ 是两个权重 2 的例外球面。为了计算例如 $p =$ $([1:\ 0], [0:\ 1])$ 处的符号，我们可以将切空间分解为各个因子

$$T_p\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 = T_{[1:0]}\mathbb{CP}^1 \times T_{[0:1]}\mathbb{CP}^1 \cong V_1^0 \oplus V_{-2}^0$$

因此， p 处的符号为（–）。

令 M^+ 和 M^- 为具有上述 S^1–作用的两个 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 副本。令 x^+ 为 M^+ 中对应于 $([1:\ 0], [1:\ 0])$ 的点，令 x^- 为 M^- 中对应于 $([1:\ 0], [0:\ 1])$ 的点。根据命题 4.5，存在x^+ 的一个球邻域 B^+，其边界与 $T_{x^+}M^+ \cong V_1^0 \oplus V_2^0$ 中的单位球面等变微分同胚。类似地，存在 x^- 的一个球邻域 B^-，其边界与 $T_{x^-}M^- \cong V_1^0 \oplus V_{-2}^0$ 中的单位球面等变微分同胚。于是，反定向同构 $V_2^0 \cong V_{-2}^0$ 确定了一个反定向的 S^1–等变微分同胚 $\varphi\colon \partial B^+ \to \partial B^-$。将 $M^+ \setminus \mathring{B}^+$ 和 $M^- \setminus \mathring{B}^-$ 粘合起来，便在 $M^+ \# M^- \cong (S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$ 上得到一个 S^1–作用。在这一构造中，我们

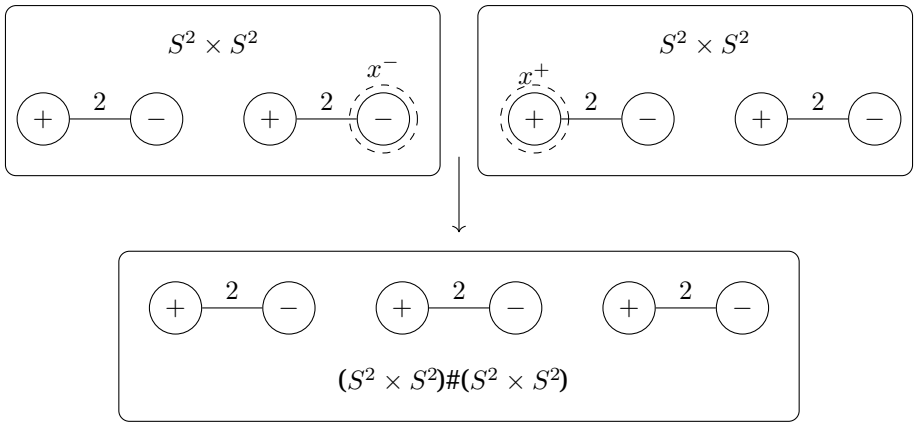


FIGURE 5. S^1在 $S^2 \times S^2$上的作用的等变连通和

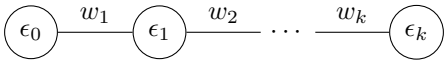
取包含 x^+ 的权重 $2\ \mathbb{CP}^1$ 与包含 x^-的权重 $2\ \mathbb{CP}^1$作连通和。因此，剩下三个权重 $2\ \mathbb{CP}^1$。见图5。

4.3. **分类定理**。 我们的目标是在这一特殊情形下证明 4 维流形上圆周作用的光滑分类。在很大程度上，我们将沿用 [Fin77],的策略，但采用光滑方法。

定理 4.9。 设 M^σ和 M^τ是闭的单连通4维流形，带有无环的有效光滑 S^1作用，其切向权重图分别为$\mathcal{G}^\sigma$ 和 $\mathcal{G}^\tau$。假设 $\mathcal{G}^\sigma$ 与 $\mathcal{G}^\tau$ 之间存在图同构，且该同构保持顶点和边的标记。则存在一个保持定向的S^1等变微分同胚 $\varphi\colon\ M^\sigma \to M^\tau$。

在证明定理 4.9 之前，我们需要以下引理。

引理 4.10. 设 M^σ和 M^τ是带有有效 S^1–作用的闭单连通4维流形。设 E^σ、 E^τ、 F^σ、 F^τ分别为相应的例外集和不动点集。假设 $E^\sigma \cup F^\sigma$和 $E^\tau \cup F^\tau$中存在连通分支 $C^\sigma = C_1^\sigma \cup \cdots C_k^\sigma$和 $C^\tau = C_1^\tau \cup \cdots C_k^\tau$，且它们各自对应一条带有如下标记的多面体弧



使得 C_i^σ（分别为 C_i^τ）是权重为 w_i 的例外球面，其中包含孤立不动点 x_{i-1}^σ、 x_i^σ（分别为 x_{i-1}^τ、 x_i^τ），其符号为 ϵ_{i-1}、 ϵ_i。那么，存在 S^1–不变开邻域 U^σ和 U^τ，分别包含 C^σ和 C^τ，以及一个保定向的 S^1–等变微分同胚 $f\colon\ U^\sigma \to U^\tau$。

引理 4.11。 设 A 是底空间为 S^2的光滑主 S^1丛。设 $f\colon\ A \to A$ 是一个保持每个纤维不变的丛态射。那么，存在一个光滑的 S^1等变同伦，将 f 变形为 恒等映射。

定理 *4.9* 的证明（假设引理 *4.10*、引理 *4.11*）。我们在 [中采取的策略是：利用引理 4.10，在不动点和例外点附近构造等变微分同胚 $\varphi\colon M^\sigma \to M^\tau$，再利用引理 4.11 将其扩展到所有点。

令 $E^\sigma \cup F^\sigma$ 和 $E^\tau \cup F^\tau$ 分别为 M^σ 和 M^τ 中的例外点集和不动点集。令 $Q_1^\sigma, \cdots Q_k^\sigma$ 为 $E^\sigma \cup F^\sigma$ 中对应于多面体弧（包括孤立点）的连通分支，并令 $Q_1^\tau, \cdots Q_k^\tau$ 为 $E^\tau \cup F^\tau$ 中对应的连通分支。由引理 4.10 可知，对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，存在 Q_i^σ 的邻域 U_i^σ 和 Q_i^τ 的邻域 U_i^τ，以及一个 S^1–等变微分同胚 $f_i \colon U_i^\sigma \to U_i^\tau$。对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，选取 Q_i^σ 的闭球邻域（B_i^σ）*，使其包含于（U_i^σ）* 中，且其边界是位于（$M^\sigma \setminus E^\sigma \cup F^\sigma$）* 内的光滑球面。令 B_i^σ 为位于（B_i^σ）* 内的轨道之并。我们定义 $B_i^\tau = f_i$（B_i^σ）。

设 S_1^σ，……，S_ℓ^σ 是 $E^\sigma \cup F^\sigma$ 中对应于不动曲面的连通分支，其对应的 S_1^τ，……，S_ℓ^τ 是 $E^\tau \cup F^\tau$ 的连通分支。对于充分小的 $\epsilon''' > 0$，S_1^σ，……，S_ℓ^σ 的闭 ϵ''' 邻域（分别为 S_1^τ，……，S_ℓ^τ 的闭 ϵ''' 邻域）与 $\bigcup_{i=1}^k B_i^\sigma$（分别与 $\bigcup_{i=1}^k B_i^\sigma$）不相交。令 Z_1^σ，……，Z_ℓ^σ 和 Z_1^τ，……，Z_ℓ^τ 为这些 ϵ''' 邻域。注意，每个 ∂Z_i^σ 和 ∂Z_i^τ 都是球面上的主 S^1 丛，其结构群来自我们原先的 S^1 作用。于是，Z_i^σ 和 Z_i^τ 通过纤维变换由 ∂Z_i^σ 和 ∂Z_i^τ 产生。由于每一对 Z_i^σ 和 Z_i^τ 具有相同的欧拉数，因此存在一个保持定向的 S^1 等变丛等价 $\alpha_i \colon Z_i^\sigma \to Z_i^\tau$。这就完成了在不动点和例外点附近邻域上构造等变映射 φ。

那么，

$$P^\sigma = M^\sigma \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k \mathring{B}_i^\sigma \cup \bigcup_{i=1}^\ell \mathring{Z}_i^\sigma \right)$$

$$P^\tau = M^\tau \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k \mathring{B}_i^\tau \cup \bigcup_{i=1}^\ell \mathring{Z}_i^\tau \right)$$

是带有自由 S^1 作用的 4 维流形，其边界为

$$\partial P^\sigma = \bigcup_{i=1}^k \partial B_i^\sigma \cup \bigcup_{i=1}^\ell \partial Z_i^\sigma$$

$$\partial P^\tau = \bigcup_{i=1}^k \partial B_i^\tau \cup \bigcup_{i=1}^\ell \partial Z_i^\tau$$

那么，我们可以将 P^σ、P^τ 及其 S^1–不变子流形视为定义在其轨道空间上的光滑主 S^1–丛。令 $f_i^* \colon (B_i^\sigma)^* \to (B_i^\sigma)^*$ 和 $\alpha_i^* \colon (Z_i^\sigma)^* \to (Z_i^\tau)^*$ 表示轨道空间上的诱导映射。注意，正如推论 4.8 所述，$(P^\sigma)^*$ 和 $(P^\tau)^*$ 分别是边界微分同胚的紧致单连通 3 维流形。根据庞加莱猜想（已由[Per02]证明），存在某个微分同胚 $\varphi^*|_{(P^\sigma)^*} \colon (P^\sigma)^* \to (P^\tau)^*$，它将 f_i^* 和 α_i 从 $(\partial P^\sigma)^*$ 延拓到 $(P^\sigma)^*$。然后，构造 $\varphi^*|_{(\partial P^\sigma)^*} \colon (\partial P^\sigma)^* \to (\partial P^\tau)^*$，使得主丛 ∂P^τ 的欧拉类恰好被拉回为主丛 ∂P^σ 的欧拉类。若 P 是边界为 ∂P 的单连通 3 维流形，则由庞加莱对偶 $H^2(P, \partial P) \cong H_1(P) = 0$ 以及正合列

$$H^2(P, \partial P; \mathbb{Z}) \to H^2(P; \mathbb{Z}) \to H^2(\partial P; \mathbb{Z})$$

我们得出，上同调上的映射 $H^2(P; \mathbb{Z}) \to H^2(\partial P; \mathbb{Z})$ 是单射。将此应用于 $(P^\sigma)^*$ 和 $(P^\tau)^*$，我们得出主

丛 P^τ通过 $\varphi^*|_{(P^\sigma)^*}$ 拉回到 P^σ。因此，存在某个光滑的（S^1–等变）丛等价 $\psi\colon P^\sigma \to P^\tau$，它在轨道空间上诱导映射 $\varphi|_{(P^\sigma)^*}$。根据引理 4.11，存在从 $\psi|_{\partial P^\sigma}\colon \partial P^\sigma \to \partial P^\tau$ 到 $\varphi|_{\partial P^\sigma}\colon \partial P^\sigma \to P^\tau$ 的光滑 S^1–等变同伦。利用带颈邻域，我们可以将其延拓为从 $\psi\colon P^\sigma \to P^\tau$ 到 $\varphi|_{\partial P^\sigma}$ 的一个延拓的光滑同伦，使其成为一个 S^1–等变微分同胚 $\varphi|_{P^\sigma}\colon P^\sigma \to P^\tau$。然后，将 $\varphi|_{P^\sigma}$ 与 f_i 和 α_i 结合，便得到 M^σ 与 M^τ 之间的 S^1–等变微分同胚。□

引理 4.11 是 [Fin77，引理 6.1] 的光滑版本，证明也相同。因此，剩下的只有证明引理 4.10。

引理 *4.10* 的证明。目标是在 M^σ 和 M^τ 上找到合适的 S^1 不变度量，以及一个 $\epsilon'' > 0$，从而我们可以构造 S^1 等变微分同胚。

$$f_i : N_i^\sigma \to N_i^\tau$$

对于每个 i，C_i^σ 和 C_i^τ 的 ϵ''–邻域 N_i^σ 与 N_i^τ 之间。注意，如果 ϵ'' 足够小，那么最近点投影

$$\pi_i^\sigma : N_i^\sigma \to C_i^\sigma$$

是光滑纤维丛投影。为了确保这些微分同胚在邻域的交集上保持一致，在选择我们的度量和 ϵ'' 时需要特别谨慎。我们希望映射 π_i^σ and π_{i+1}^σ 限制在 $X_i^\sigma = N_i^\sigma \cap N_{i+1}^\sigma$ 上时，与投影映射 $(x, y) \mapsto x$ and $(x, y) \mapsto y$ 等距，其中 $(x, y) \in \mathbb{R}^4$ 且 $||x||, ||y|| < \epsilon''$。现在，我们将看到如何选择 ϵ''。

步骤 1 – 选择 ϵ'':
根据命题 4.5，存在一个 $\epsilon > 0$，使得 exp：$TM^\sigma \to M^\sigma$ 限制到 $B_\epsilon(T^\perp\{x_0^\sigma, \dots, x_k^\sigma\})$ 后，是一个映到 $\{x_0^\sigma, \dots, x_k^\sigma\}$ 的紧致邻域上的 S^1–等变微分同胚。现在，通过 exp 将 $B_\epsilon(T^\perp\{x_0^\sigma, \dots, x_k^\sigma\})$ 上的欧几里得度量推前，并将其延拓到 M^σ 的其余部分，从而在 M^σ 上赋予一个新的 S^1–不变度量。将此度量记为 m。然后，对于切向量 v_1，$v_2 \in T_xM^\sigma$，我们定义一个新的黎曼度量如下：

$$\frac{1}{2\pi}\int m(e^{i\theta}\cdot v_1, e^{i\theta}\cdot v_2)d\theta$$

其中，S^1 通过作用在 M^σ 上的作用的微分作用于 TM^σ。这将得到 M^σ 上一个新的 S^1–不变度量，它在 x_0^σ 附近与欧几里得度量一致，$\dots, x_k^\sigma$。

选取一个 $\epsilon' < \epsilon/2$，并考虑 $R_i^\sigma = C_i^\sigma \setminus B_{\epsilon'}(x_i^\sigma)$，其中 $i \in \{1, \dots, k-1\}$。那么，每个 R_i^σ 和 C_{i+1}^σ 都是 M^σ的互不相交的紧致子集。类似地，如果 $L_i^\sigma = C_i^\sigma \setminus \mathring{B}_{\epsilon'}(x_{i-1}^\sigma)$，其中 $i \in \{1, \dots, k-1\}$，那么 L_i^σ和 C_{i-1}^σ是 M^σ的互不相交的紧致子集。对于一个（可能带边界的）子流形 $A \subseteq M^\sigma$，令 $N_r(A) = \{x \in M^\sigma : d(x, A) < r\}$ 为 A的 r邻域。选取某个 $\epsilon'' < \epsilon'$，使得对每个 $i \in \{1, \dots, k-1\}$，$N_{\epsilon''}(R_i^\sigma) \cap N_{\epsilon''}(C_{i+1}^\sigma) = N_{\epsilon''}(L_i^\sigma) \cap N_{\epsilon''}(C_{i-1}^\sigma) = \varnothing$。

令 $N_i^\sigma = N_{\epsilon''}(C_i^\sigma)$ 对于 $i \in \{1, \dots, k\}$。现在我们考虑交集 $X_i^\sigma = N_i^\sigma \cap N_{i+1}^\sigma$，对于 $i \in \{1, \dots, k-1\}$。对于 $z \in X_i^\sigma$，$z \notin N_{\epsilon''}(R_i^\sigma)$ 和 $z \notin N_{\epsilon''}(L_{i+1}^\sigma)$ 以及 $\mathring{}$，因此必定存在某个 $x \in B_{\epsilon'}(x_i^\sigma) \cap C_i^\sigma$ 和 $y \in B_{\epsilon'}(x_i^\sigma) \cap C_{i+1}^\sigma$，使得

$$d(z, x) = d(z, C_i^\sigma) < \epsilon'' \qquad d(z, y) = d(z, C_{i+1}^\sigma) < \epsilon''.$$

此外，测地线 $[z, x]$ 和 $[z, y]$ 分别与 C_i^σ和 C_{i+1}^σ 正交，且包含在 $B_\epsilon(x_i^\sigma)$ 中。因此，点 x_i^σ、x、z、y 构成一个欧几里得

矩形。这意味着矩形中相对的边长度相等，因此

$$d(x, x_i^\sigma) = d(z, y) < \epsilon'', \quad d(y, x_i^\sigma) = d(x, z) < \epsilon''.$$

因此，每个 $z \in X_i^\sigma$距离 C_i^σ（分别为 C_{i+1}^σ）上的某一点都不到 ϵ''，而该点与 x_i^σ的距离又不到 ϵ''。

对 M^τ重复相同的过程，我们可以假设存在某个 ϵ，ϵ''，其上有 $\epsilon'' < \epsilon/2$和 S^1不变度量，使得 $N_\epsilon(\{x_1^\sigma, \dots, x_k^\sigma\})$ 和 $N_\epsilon(\{x_1^\tau, \dots, x_k^\tau\})$ 是欧几里得的，并且每个 $z \in X_i^\sigma$（分别为 $X_i^\tau = N_{\epsilon''}(C_i^\tau) \cap N_{\epsilon''}(C_{i+1}^\tau)$）到 C_i^τ（分别为 $C_{i+1}\sigma$、C_i^τ、C_{i+1}^τ）中的某一点的距离都不到 ϵ''，而该点到 x_i^σ（分别为 x_i^τ）的距离不到 ϵ''。

步骤2 – 构建等变微分同胚：

设 $N_i^\tau = N_{\epsilon''}(C_i^\tau)$。下一步是构造等变微分同胚

$$f_i : N_i^\sigma \to N_i^\tau$$

使得 $f = f_i(x)$ 对于 $x \in N_i^\sigma$有定义。于是，

$$f : N_1^\sigma \cup \dots \cup N_k^\sigma \to N_1^\tau \cup \dots \cup N_k^\tau$$

将是 S^1–等变微分同胚，它定义在 C^σ 和C^τ 的开邻域之间，我们的证明就完成了。

注意，最近点投影 π_i^σ：$N_i^\sigma \to C_i^\sigma$是一个纤维丛投影，其在 $x \in C_i^\sigma$上方的纤维由所有满足以下条件的点 y组成：存在一条测地线 $[x, y]$，位于 M^σ中，使得 $d(x, y) = \epsilon''$，且 $[x, y]$与 C_i^σ正交。然后，将 π_i^σ限制在 ∂N_i^σ上，我们得到一个纤维丛投影

$$\partial \pi_i^\sigma : \partial N_i^\sigma \to C_i^\sigma$$

借此，∂N_i^σ成为球面上的圆丛。

证明的下一部分是构造一个作用于 ∂N_i^σ的 $S^1 \times S^1$作用，使其除了位于 x_{i-1}^σ 和 x_i^σ上方纤维中的点之外都是自由的。这将使我们能够运用光滑主丛的理论来构造微分同胚。

步骤3 – 构造一个自由的 $S^1 \times S^1$作用：

赋予 C_i^σ一种定向，使其在$T_{x_{i-1}^\sigma} C_i^\sigma$上诱导出旋转定向。随后对 ∂N_i^σ的每个纤维定向，使这种定向与 C_i^σ上的定向相结合后，给出 ∂N_i^σ上的自然定向。由于每个纤维都是定向圆，我们还得到一个额外的 S^1作用（记为 $\odot$），使得$e^{i\theta}$ 按照诱导定向将每个圆旋转 θ。由此，∂N_i^σ成为以 C_i^σ为底空间的主 S^1丛。这些丛也可以看作子丛经过指数映射 $\exp : T^\perp C_i^\sigma \to M^\sigma$后的像，即

$$\begin{aligned}
\bar{N}_i^\sigma &= \exp\left(\{(x, v) \in T^\perp C_i^\sigma : ||v|| \leq \epsilon''\}\right) \\
N_i^\sigma &= \exp\left(\{(x, v) \in T^\perp C_i^\sigma : ||v|| < \epsilon''\}\right) \\
\partial N_i^\sigma &= \exp\left(\{(x, v) \in T^\perp C_i^\sigma : ||v|| = \epsilon''\}\right)
\end{aligned}$$

由于我们原来的 S^1–作用（我们仍将其记作 $\cdot$）是通过等距变换作用的，因此它与这个新的 S^1–作用可交换。令 $T = S^1 \times S^1$，并在 ∂N_i^σ 上定义一个结合这两个作用的 T–作用（记作 $\barwedge$）。特别地，

$$(g, h) \barwedge x = g \cdot (h \odot x) \text{ for } g, h \in S^1, x \in \partial N_i^\sigma$$

令 η_i 为 $H_{w_i} \cong \mathbb{Z}/w_i\mathbb{Z}$ 的一个生成元。于是，在我们的 $(\boxtimes)$–作用下，$(\eta_i, 1)$ 通过施加原来的 $(\cdot)$–作用 η_i 而作用。它固定 C_i^σ 中的每个点，因此将每个纤维旋转一个阶为 w_i 的角度。由于这类旋转角构成离散集合，而通过 η_i 的作用是连续的，因此必定存在一个常数旋转角，它作用于每个纤维。换言之，存在某个 $h_i \in S^1$，使得

$$\eta_i \cdot x = h_i^{-1} \odot x, \text{ so } \ (\eta_i, h_i)\boxtimes\, x = x \text{ for all } x \in \partial N_i^\sigma.$$

事实上，我们注意到

$$(\partial \pi_i^\sigma)^{-1}(x_\ell^\sigma) = \exp(\{(x_\ell^\sigma, v) \in T_{x_\ell^\sigma} C_i^\sigma : ||v|| = \epsilon''\}) \text{ for } \ell \in \{i-1, i\}$$

由于我们在 $T_{x_{i-1}^\sigma} C_i^\sigma$ 上采用旋转定向，而在 $T_{x_{i-1}} M^\sigma$ 上采用自然定向，因此对于 $T_{x_{i-1}^\sigma} M^\sigma$ 上的 $(\cdot)$–作用，有

$$T_{x_{i-1}^\sigma} M^\sigma = T_{x_{i-1}} C_i^\sigma \oplus T_{x_{i-1}}^\perp C_i^\sigma \cong V_{w_i}^0 \oplus V_{\epsilon_{i-1} w_{i-1}}^0$$

而对于 $T_{x_i^\sigma} M^\sigma$，$(\cdot)$–作用以相对定向旋转 $T_{x_i^\sigma} C_i^\sigma$，因此

$$T_{x_i^\sigma} M^\sigma = T_{x_i} C_i^\sigma \oplus T_{x_i}^\perp C_i^\sigma \cong V_{-w_i}^0 \oplus V_{-\epsilon_i w_{i+1}}^0.$$

因此，对于具有 $||v|| < \epsilon''$ 和 $x = \exp(x_i^\sigma, v)$ 的 $(x_i^\sigma, v) \in T_{x_i^\sigma}^\perp C_i^\sigma$，有

$$\begin{aligned} \eta_i \cdot x &= \eta_i \cdot \exp(x_i^\sigma, v) \\ &= \exp(x_i^\sigma, \eta_i^{-\epsilon_i w_{i+1}} \cdot v) \\ &= \eta_i^{-\epsilon_i w_{i+1}} \odot \exp(x_i^\sigma, v). \end{aligned}$$

我们得出结论：$h_i = \eta_i^{\epsilon_i w_{i+1}}$。通过类似的论证，我们可以得出结论：$h_i = \eta_i^{-\epsilon_{i-1} w_{i-1}}$。

利用这一观察，我们可以在 ∂N_i^σ 上定义一个新的 T 作用，记为 $(\diamond)$，使得

$$(g, h) \diamond x = (\tilde{g}, \tilde{g}^{\epsilon_i w_{i+1}} h)\boxtimes x.$$

其中 $\tilde{g} \in S^1$ 满足 $\tilde{g}^{w_i} = g$。事实 $(h, h^{\epsilon_i w_{i+1}})\boxtimes x = x$ 对于 $h \in H_{w_i}$ 成立，这意味着 $(\diamond)$ 作用定义良好，且与 $\tilde{g}$ 的选择无关。注意，$(\diamond)$ 作用在 $\partial N_i^\sigma \setminus (\partial \pi_i^\sigma)^{-1}(\{x_{i-1}^\sigma, x_i^\sigma\})$ 上是自由的，具体如下：

任取一个 $x \in \partial N_i^\sigma \setminus (\partial \pi_i^\sigma)^{-1}(\{x_{i-1}^\sigma, x_i^\sigma\})$，以及满足 $(g, h) * x = x$ 的 $(g, h) \in T$。那么，

$$\partial \pi_i^\sigma((g, h) \diamond x) = \tilde{g} \cdot \partial \pi_i^\sigma(x) = \partial \pi_i^\sigma(x)$$

因此，$\tilde{g}$ 稳定 $\partial \pi_i^\sigma(x) \in C_i^\sigma \setminus \{x_{i-1}^\sigma, x_i^\sigma\}$。所以，$\tilde{g} \in H_{w_i}$ 且 $g = 1$。于是，$(g, h) \diamond x = (1, h) \diamond x = (1, h)\boxtimes x = h \odot x = x$。但是，$S^1$ 在 ∂N_i^σ 上的 $(\odot)$ 作用是自由的，因此 $h = 1$。

我们还有一个丛结构：T在 $\partial N_i^\tau \setminus (\pi_i^\tau)^{-1}(\{x_{i-1}^\tau, x_i^\tau\})$上对 ∂N_i^τ施加了一个自由的 $(\diamond)$–作用。

现在，我们有了 $(T, \diamond)$–作用，可以构造微分同胚 $f_i \colon N_i^\sigma \to N_i^\tau$。我们首先在交集 $N_i^\sigma \cap N_{i+1}^\tau$上定义 f_i，然后求得 $(T, \diamond)$-等变微分同胚 $\partial f_i \colon \partial N_i^\sigma \to \partial N_i^\tau$。由于度量和 $(T, \diamond)$–作用的构造经过了精心设计，对 ∂f_i 进行纤维变换将得到我们所需的 $(S^1, \cdot)$–等变微分同胚 $f_i \colon N_i^\sigma \to N_i^\tau$。

现在，我们选择 $(S^1,\cdot)$–等变等距变换 $\psi_i^\sigma\colon B_\epsilon(V_{w_i}^0\oplus V_{\epsilon_i w_{i+1}})^0\to B_\epsilon(x_i^\sigma)$ 和 $\psi_i^\tau\colon B_\epsilon(V_{w_i}^0\oplus V_{\epsilon_i w_{i+1}}^0)\to B_\epsilon(x_i^\tau)$。于是，每个 $\psi_i^\tau\circ(\psi_i^\sigma)^{-1}$ 都将 $(\pi_i^\sigma)^{-1}(C_i^\sigma\cap B_{\epsilon''}(x_i^\sigma))$ 微分同胚地映到 $(\pi_i^\tau)^{-1}(C_i^\tau\cap B_{\epsilon''}(x_i^\tau))$，并将 $(\pi_{i+1}^\sigma)^{-1}(C_{i+1}^\sigma\cap B_{\epsilon''}(x_i^\sigma))$ 微分同胚地映到 $(\pi_{i+1}^\tau)^{-1}(C_{i+1}^\tau\cap B_{\epsilon''}(x_i^\tau))$。将这些映射限制到 ∂N_i^σ上时，它们是 $(T,*)$–等变的，因为它们是 $(S^1,\cdot)$–等变等距变换，将 C_i^σ 中的点映到 C_i^τ 中的点，因此保留了用于定义 $(\diamond)$–作用的两种 S^1–作用。我们将这些限制视为 $\partial f_i|_{\partial\pi_i^\sigma{}^{-1}(C_i\cap B_{\epsilon''}(\{x_{i-1}^\sigma,x_i^\sigma\}))}$。注意，每个 $\partial N_i^\sigma\setminus(\pi_i^\sigma)^{-1}(\{x_{i-1}^\sigma,x_i^\sigma\})$ 和 $\partial N_i^\tau\setminus(\pi_i^\tau)^{-1}(\{x_{i-1}^\tau,x_i^\tau\})$ 的 $(T,\diamond)$–轨道空间都与 $\mathbb{R}$微分同胚。因此，我们可以将 $\partial f_i|_{(\partial\pi_i^\sigma)^{-1}(C_i^\sigma\cap B_{\epsilon''}(x_i^\sigma))}$ 延拓为 $(T,\diamond)$–等变微分同胚 $\partial f_i\colon\partial N_i^\sigma\to\partial N_i^\tau$。需要指出的是，由于 $(T,\diamond)$–作用包含了原先的 S^1–作用以及使 ∂N_i^σ和 ∂N_i^τ成为主 S^1–丛的自由 S^1–作用，我们看到 ∂f_i 实际上是一个 S^1–等变丛同构。因此，通过纤维变换， ∂f_i 诱导出一个 S^1–等变微分同胚 $f_i\colon N_i^\sigma\to N_i^\tau$。具体而言，该纤维变换如下进行。任取一个 $z\in N_i^\sigma$，并假设 z位于测地线 $[x,y]$上，其中 $x\in C_i^\sigma$且 $y\in(\partial\pi_i^\sigma)^{-1}(x)$。于是，由于 $\partial f_i\colon\partial N_i^\sigma\to\partial N_i^\tau$是丛同构，$(\pi_i^\sigma)^{-1}(x)$ 在 ∂f_i的作用下被微分同胚地映到某个纤维 $(\partial\pi_i^\tau)^{-1}(f_i(x))$，且对应唯一的 $f_i(x)\in C_i^\tau$。接着， $\partial f_i(y)\in(\partial\pi_i^\tau)^{-1}(f_i(x))$，并且测地线 $[f_i(x)\ \partial f_i(y)]$上存在唯一一点 $f_i(z)$，使得 $d(z,y)=d(f_i(z)\ \partial f_i(y))$。由于 ∂f_i是 $(S^1,\cdot)$–等变的，且 $(S^1,\cdot)$通过等距变换作用，用于定义 $f_i(z)$的构形在该作用下保持不变。因此，对于每个 $i\in\{1,\dots,k\}$， $f_i\colon N_i^\sigma\to N_i^\tau$都是 $(S^1,\cdot)$–等变的。

剩下的只需验证 f_i和 f_{i+1}在 $X_i^\sigma=N_i^\sigma\cap N_{i+1}^\sigma$上相同。任取一个 $z\in X_i$。于是我们可以假设 z 位于一条测地线 $[x,y]$ 上，其中$x\in C_i^\sigma\cap B_{\epsilon''}(x_i^\sigma)$ 和 $y\in(\partial\pi_i^\sigma)^{-1}(x)$。那么， $f_i(z)$ 是位于连接 $f_i(x)$ 与 $\partial f_i(y)$ 的测地线上的唯一点，满足 $d(f_i(z)\ \partial f_i(y))=d(z,\ y)$。然而，我们知道

$$\partial\pi_i(\partial f_i(y))=\psi_i^\tau(\partial\pi_i^\tau((\psi_i^\sigma)^{-1}(y))))=\psi_i^\tau((\psi_i^\sigma)^{-1}(x))$$

因此 $f_i(x)=\psi_i^\tau((\psi_i^\sigma)^{-1}(x))$。那么，由于 $\psi^\tau\circ(\psi_i^\sigma)^{-1}\colon\ B_\epsilon(x_i^\sigma)\to B_\epsilon(x_i^\tau)$ 也是一个等距变换，点 $z'=\psi_i^\tau((\psi_i^\sigma)^{-1}(z))$ 是位于测地线 $[f_i(x)\ \partial f_i(y)]$ 上的一点，因此 $d(\psi_i^\tau((\psi_i^\sigma)^{-1}(z))\ \partial f_i(y))=d(z,y)$。因此， $f_i(z)=\psi_i^\tau((\psi_i^\sigma)^{-1}(z))$。最后，我们注意到 f 在每个 x_i^σ处都保持定向。□

4.4. 希策布鲁赫曲面上的作用。 希策布鲁赫曲面是以 $\mathbb{CP}^1$为底空间的代数 $\mathbb{CP}^1$丛。它们代表了一类重要的带圆周作用的 4 维流形。例如，Jang [Jan19] 证明，任何带有圆作用且具有 4 个不动点的近复 4 维流形，其切向权重数据都与希策布鲁赫曲面上的一个代数作用相同。根据推论 4.9，这意味着如果M 是单连通的，那么 M 就与 $S^2\times S^2$ 或 $\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2$微分同胚。我们将明确描述希策布鲁赫曲面及其圆周作用。

定义 4.4。 令 $\mathbb{P}^{q+3}$ 为 $M_{2,\ q+2}(\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^{2(q+2)}$ 中由以下形式的矩阵组成的子空间的射影化

$$\begin{bmatrix}x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3}\\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4}\end{bmatrix}\ \text{for } x_1,\dots,x_{q+4}\in\mathbb{C}.$$

我们将上述矩阵在 $\mathbb{P}^{q+3}$ 中的等价类记为

$$\begin{Bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3} \\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4} \end{Bmatrix}.$$

对于 $q \geq 0$，Hirzebruch 曲面 Hir(q) 是由秩不等式定义的 $\mathbb{P}^{q+3}$ 的子簇

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3} \\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4} \end{bmatrix} \leq 1.$$

注意，Hir(q) 的定义方程组由行列式为零给出

$$x_1 x_{k+1} - x_2 x_k = 0 \text{ for } 3 \leq k \leq q+3$$
$$x_j x_{k+1} - x_{j+1} x_k = 0 \text{ for } 3 \leq j < k \leq q+3$$

Hirzebruch 曲面是有理卷绕曲面的例子。关于有理卷绕曲面以及上述将 Hir(q) 实现为射影簇的讨论，参见 Reid[Rei96]。

Hirzebruch 曲面的本质特征是，它们是以 $\mathbb{CP}^1$ 为底空间、纤维为实数域 $\mathbb{CP}^1$ 的丛。这意味着可以通过该丛的粘合函数确定其拓扑。

命题 4.12. 该映射

$$\begin{Bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3} \\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4} \end{Bmatrix} \mapsto \operatorname{colsp} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3} \\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4} \end{bmatrix}$$

定义一个纤维丛投影 $\pi : \mathrm{Hir}(q) \to \mathbb{CP}^1$，其纤维为 $\mathbb{CP}^1$。若 q 为偶数，该丛是平凡的，且 $\mathrm{Hir}(q)$ 与 $S^2 \times S^2$ 微分同胚。若 q 为奇数，该丛是非平凡的，且 $\mathrm{Hir}(q)$ 与 $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$ 微分同胚。

证明。 首先注意，π 是良定义的，因为 $(x_1, x_2, \ldots, x_{q+4})$ 不为零向量意味着其秩

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3} \\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4} \end{bmatrix}$$

不为零。结合定义 Hir(q) 的秩不等式可知，列空间

$$\operatorname{colsp} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3} \\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4} \end{bmatrix}$$

是 $\mathbb{C}^2$ 的一维子空间，因此定义了 $\mathbb{CP}^1$ 的一个元素。设 $U_1 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{[0 : 1]\}$，且 $U_2 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{[1 : 0]\}$。我们先在开覆盖 $\mathbb{CP}^1 = U_1 \cup U_2$ 上为 π 找到平凡化。对于 $z \in \mathbb{C}$,

$$[\alpha : \beta] \mapsto \begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \beta z & \cdots & \beta z^q \\ \alpha z & \beta z & \beta z^2 & \cdots & \beta z^{q+1} \end{Bmatrix}$$

是 $\mathbb{CP}^1$ 与 π^{-1}之间的微分同胚（$[1 : z]$）。因此，$\varphi_1 : \pi^{-1}(U_1) \to U_1 \times \mathbb{CP}^1$ 定义为

$$\varphi_1 \left(\begin{Bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3} \\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4} \end{Bmatrix} \right) \mapsto \left([x_1 : x_2], [x_1 : x_3] \right)$$

是 π 在 U_1上的平凡化。
另一方面，对于 $z \in \mathbb{C}$

$$[\alpha : \beta] \mapsto \begin{Bmatrix} \alpha z & \beta z^{q+1} & \beta z^q & \cdots & \beta z \\ \alpha & \beta z^q & \beta z^{q-1} & \cdots & \beta \end{Bmatrix}$$

是 $\mathbb{CP}^1$ 与 π^{-1}之间的微分同胚（$[z\colon 1]$）。因此，$\varphi_2\colon \pi^{-1}(U_2) \to U_2 \times \mathbb{CP}^1$定义为

$$\varphi_2\left(\begin{Bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3} \\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4} \end{Bmatrix}\right) \mapsto \left([x_1 : x_2], [x_2 : x_{q+4}]\right)$$

是 π 在 U_2上的平凡化。因此，$\pi : \mathrm{Hir}(q) \to \mathbb{CP}^1$ 是纤维为 $\mathbb{CP}^1$的光滑纤维丛。

现在我们计算 $z \in \mathbb{C}^\times$在 $[1\colon z] \in U_1 \cap U_2$上方的转移函数 $\psi_z\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$。也就是说

$$\begin{aligned} ([1 : z], \psi_z([\alpha : \beta])) &= \varphi_2(\varphi_1^{-1}([1 : z], [\alpha : \beta])) \\ &= \varphi_2\left(\begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \beta z & \cdots & \beta z^q \\ \alpha z & \beta z & \beta z^2 & \cdots & \beta z^{q+1} \end{Bmatrix}\right) \\ &= ([\alpha : \alpha z], [\alpha z : \beta z^{q+1}]) \\ &= ([1 : z], [\alpha : \beta z^q]) \end{aligned}$$

因此 $\psi_z : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ 由 $\psi_z([\alpha : \beta]) = [\alpha : \beta z^q]$给出。因此，该丛的结构群为 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$，且该丛的同构类由映射 $U_1 \cap U_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 的同伦类确定，该映射由$z \mapsto \psi_z$给出。由于 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 是连通的，我们可以将这个同伦类与 $\pi_1(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})) \cong \pi_1(\mathrm{PSU}(2)) \cong \mathbb{Z}_2$ 中的元素等同，该元素由闭路 $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{PSU}(2)$ 表示，并由 $\gamma(\theta) = \psi_{e^{2\pi i\theta}}$给出。于是，$\gamma$提升为路径 $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to \mathrm{SU}(2)$，它位于 $\mathrm{PSU}(2)$ 的万有覆盖空间中，并由以下内容给出

$$\tilde{\gamma}(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-q\pi i\theta} & \\ & e^{q\pi i\theta} \end{bmatrix}$$

当且仅当 q 为偶数时，它在 $\mathrm{SU}(2)$ 中构成一个闭路。这意味着有两个同伦类，因此丛有两个同构类。如果 q 为偶数，则 $\mathrm{Hir}(q)$ 与平凡丛 $\mathrm{Hir}(0)$ 微分同胚 $= \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 如果 q 为偶数。如果 q 为奇数，则 $\mathrm{Hir}(q)$ 与非平凡丛 $\mathrm{Hir}(1) \cong \mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$ □微分同胚

现在，我们将在每个希策布鲁赫曲面 $\mathrm{Hir}(q)$ 上定义一类 S^1 作用。这些作用将作为我们构造阿诺索夫表示纤维上的 S^1 作用所需的基本构件。

定义4.5。设 a, b 为整数。设 $\mathrm{Hir}(q;\, a, b)$ 为希策布鲁赫曲面 $\mathrm{Hir}(q)$，其上的 S^1 作用定义为

$$g \cdot \begin{Bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3} \\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & g^a x_3 & g^{a+b} x_4 & \cdots & g^{a+qb} x_{q+3} \\ g^b x_2 & g^{a+b} x_4 & g^{a+2b} x_5 & \cdots & g^{a+(q+1)b} x_{q+4} \end{Bmatrix}.$$

既然我们已经在单连通四维流形 $\mathrm{Hir}(q)$ 上定义了这一 S^1 作用，现在来求 $\mathrm{Hir}(q; a, b)$ 的切向权重图。我们观察到：

命题4.13。设 $a,\ b \in \mathbb{Z}$。

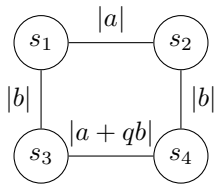


FIGURE 6. Hir(q; a, b) 的切向权重图

(i) 这些点

$$p_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix} \qquad p_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix}$$
$$p_3 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix} \qquad p_4 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

是 Hir(q; a, b) 中的不动点。

(ii) 球面

$$S_{12} = \left\{ \begin{Bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix} : [\alpha : \beta] \in \mathbb{CP}^1 \right\}$$
$$S_{13} = \left\{ \begin{Bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix} : [\alpha : \beta] \in \mathbb{CP}^1 \right\}$$
$$S_{24} = \left\{ \begin{Bmatrix} 0 & \alpha^{q+1} & \alpha^q\beta & \cdots & \alpha\beta^q \\ 0 & \alpha^q\beta & \alpha^{q-1}\beta^2 & \cdots & \beta^{q+1} \end{Bmatrix} : [\alpha : \beta] \in \mathbb{CP}^1 \right\}$$
$$S_{34} = \left\{ \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \end{Bmatrix} : [\alpha : \beta] \in \mathbb{CP}^1 \right\}$$

是 Hir(q; a, b) 的 S^1–不变子流形。

(iii) 作为 S^1–表示，

$$T_{p_1}S_{12} \cong V_a^0 \qquad T_{p_1}S_{13} \cong V_b^0$$
$$T_{p_2}S_{12} \cong V_{-a}^0 \qquad T_{p_2}S_{24} \cong V_b^0$$
$$T_{p_3}S_{13} \cong V_{-b}^0 \qquad T_{p_3}S_{34} \cong V_{a+qb}^0$$
$$T_{p_4}S_{24} \cong V_{-b}^0 \qquad T_{p_4}S_{34} \cong V_{-a-qb}^0$$

证明。 部分 (i,ii) 可通过直接检查所定义的作用得到。将 S^1–作用限制到 (ii) 中的每个球面上，即可得到 (iii) 中的权重。□

这为我们确定切向权重图的所有符号和权重提供了全部信息。

推论 4.14。 对于 a、b 为满足 $a+qb \neq 0$ 的非零互素整数，Hir(q; a、b) 的切向权重图如图6所示，其中 $s_1 =$ 符号(ab)、 $s_2 = -s_1$、 $s_3 = -s_4$、 $s_4 =$ 符号$(ab+qb^2)$。

比较 [Jan19，例 2.10]。

命题4.15。 对于 $q \geq 0$，Hir(q;1,0) 的切向权重图如图7所示。



FIGURE 7. Hir(q; 1，0) 的切向权重图

证明。 考察 S^1 在 Hir(q; 1,0) 上的作用， S_{13} 和 S_{24} 是不动曲面。根据命题 4.3(iv), 这些不动曲面包含 Hir(q; 1,0) 中唯一的固定点或例外点。根据 [Fin77，引理 5.1], , 切向权重图有两个方形顶点，标签分别为 e 和 $-e$ ，其中 $e \geq 0$ 是某个值。这意味着我们只需确定 $U^{\perp}S_{24}$ 的欧拉类，直到相差一个符号。换句话说，我们可以忽略计算欧拉类时采用的是哪种定向。

注意， S^1 在 Hir(q) 上的作用可扩展为 $\mathbb{C}^{\times}$ 作用。具体而言，

$$g \cdot \begin{Bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{q+3} \\ x_2 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{q+4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & gx_3 & gx_4 & \cdots & gx_{q+3} \\ x_2 & gx_4 & gx_5 & \cdots & gx_{q+4} \end{Bmatrix} \text{ for } g \in \mathbb{C}^{\times}.$$

该作用的非主轨道恰好是 S_{13} 和 S_{24} 中的不动点。令 $E = \text{Hir}(q) \setminus (S_{13} \cup S_{24})$。由于投影 Hir($q$) $\to \mathbb{CP}^1$ 在该作用下是 $\mathbb{C}^{\times}$ 不变的，这意味着 $\pi|_E \colon E \to \mathbb{CP}^1$ 是一个主 $\mathbb{C}^{\times}$ 丛。于是， E 的欧拉类与 $U^{\perp}S_{24}$ 的欧拉类相同。

对 $\mathbb{CP}^1$ 作三角剖分，使得存在一个（闭）单形 σ ，满足

$$[0:1] \in \sigma \subseteq \mathbb{CP}^1 \setminus \{[1:0]\}$$

并且 $\partial\sigma = \{[\alpha : \beta] : |\alpha| = |\beta|\}$ 令 L 为 σ 内部的补集。对于$[\alpha : \beta] \in L$,

$$[\alpha : \beta] \mapsto \begin{Bmatrix} \alpha^{q+1} & \alpha^{q+1} & \alpha^q\beta & \cdots & \alpha\beta^q \\ \alpha^q\beta & \alpha^q\beta & \alpha^{q-1}\beta^2 & \cdots & \beta^{q+1} \end{Bmatrix}$$

定义一个截面 $s \colon L \to E|_L$。类似地，对于 $[\alpha : \beta] \in \sigma$,

$$[\alpha : \beta] \mapsto \begin{Bmatrix} \alpha\beta^q & \alpha^{q+1} & \alpha^q\beta & \cdots & \alpha\beta^q \\ \beta^{q+1} & \alpha^q\beta & \alpha^{q-1}\beta^2 & \cdots & \beta^{q+1} \end{Bmatrix}$$

定义一个截面 $t \colon \sigma \to E|_{\sigma}$ 。那么，转移函数 $\phi \colon \partial\sigma \to \mathbb{C}^{\times}$ 由下式给出

$$[\alpha : \beta] \mapsto \frac{\beta^q}{\alpha^q}.$$

因此，定义欧拉类的 2-上链将 $-q$ =deg(ϕ) 赋给单形σ。由于三角剖分中的任何其他 2-单形 σ' 都包含在 L中，因此赋值为 0。这意味着 $-q$ 是该丛的欧拉数。□

5. TANGENTIAL WEIGHT DATA FOR FLAG VARIETIES

现在，我们将说明一种通用方法，用于计算第 2.1 节所定义的 SL(n, $\mathbb{C}$) 旗簇的切向权重数据。在第 6 节中，我们将此方法具体应用于命题 3.7 中列出的旗簇。

5.1. 不变旗及其切空间。设 V是一个 n 维 $\mathbb{C}$向量空间，带有一个 $\mathbb{C}$ 线性 S^1作用。根据 [BD85，命题 8.1], , 存在互不相同的整数 $w_1, \dots w_k \in \mathbb{Z}$（称为权重），其重数为 $\delta_1, \dots,$ $\delta_k \geq 1$，使得

$$V \cong (V^0_{w_1})^{\delta_1} \oplus \cdots \oplus (V^0_{w_k})^{\delta_k}$$

这称为 V 的权分解，而 V 中其 $\mathbb{C}$ 张成的子空间为 S^1 不变的向量称为权向量。注意，在 $w=0$的情形下， V_0^0 应表示平凡的复 表示（$V=\mathbb{C},\rho:\ S^1\to\mathbb{C}^\times$），其 $\rho(g)$ 为 $=1$。

定义 5.1。设 $F^\bullet=(F^{d_1},\dots,F^{d_\ell})\in$旗$_{d_1,\dots,d_\ell}(V)$ 是 V 中的一个旗，且其中每个 F^{d_j} 都是 S^1–不变的。于是，权旗基是一个向量序列$v_1,\dots,v_n\in V$，它对应一个权序列 $\omega_1,\dots,\omega_n\in\{w_1,\dots,w_k\}$，满足$g\cdot v_i=g^{\omega_i}\cdot v_i$对于 $i\in\{1,\dots,n\}$，且 $F^{d_j}=\langle v_1,\dots,v_{d_j}\rangle$对于每个 $j\in\{1,\dots,\ell\}$。

任何 S^1–不变旗都存在权旗基，这是通过对旗中的每个子空间归纳地求出其权分解得到的。

设 $\mathcal{F}=$旗$_{d_1,\dots,d_\ell}(\mathbb{C}^n)$ 是固定型 $(d_1,\dots,d_\ell)$ 的旗簇。设 $P_{d_1,\dots,d_\ell}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的标准抛物子群，它稳定型为 $(d_1,\dots,d_\ell)$ 的标准旗 $E_\vartheta^\bullet$；再设 $\mathfrak{p}\subseteq\mathbb{C}^{n\times n}$ 为 P 的李代数，其分块三角形的块大小为 $d_1,\dots,d_\ell$。这意味着 $\mathfrak{p}$ 由 $\{E_{ij}\}_{(i,j)\notin\mathcal{I}}$ 张成，其中 E_{ij} 是 $n\times n$ 矩阵，其唯一非零元素 1 位于第 i 行、第 j 列，并且

$$\mathcal{I}=\mathcal{I}_{d_1,\dots,d_\ell}=\mathbb{N}^2\cap\left(\bigcup_{r=1}^{\ell}(d_r,n]\times[1,d_r]\right).$$

注意， $P=\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})\cap\mathfrak{p}$。令 $\mathfrak{u}$ 表示 $\{E_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{I}}$ 在 $\mathbb{C}^{n\times n}$中的张成空间。

考虑旗簇 $\mathcal{F}=\mathrm{Flag}_{d_1,\ \dots,\ d_\ell}(V)$，并令 $F^\bullet\in\mathcal{F}$为一个具有权旗基 v_1，…， v_n及相应权重 ω_1，…， ω_n的 S^1–不变旗。

定义 5.2。相对于旗基 v_1，…， v_n的 $\mathcal{F}$仿射图是映射 $\varphi_{v_1,\ \dots,\ v_n}:\ \mathfrak{u}\to\mathcal{F}$，使得 $u\mapsto(I_n+u)\cdot F^\bullet$，其中 $I_n+u\in\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ 通过由基 v_1，…， v_n诱导的同构 $\mathrm{GL}(V)\ \cong\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ 作用于 $\mathcal{F}=\mathrm{Flag}_{d_1,\ \dots,\ d_\ell}(V)$。

具体而言，一个元素

$$u=\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}}u_{ij}E_{ij}$$

被映射到旗 $(U^{d_1},\ \dots,\ U^{d_\ell})$，其中 U^{d_r}由以下向量张成

$$v_j+\sum_{d_r<i\le n}u_{ij}v_i\ \text{for}\ 1\le j\le d_r.$$

仿射图为我们提供了一种对旗簇切空间进行建模的方法。

命题 5.1。以下结论成立：

(1) 映射 $\varphi_{v_1,\dots,v_n}:\mathfrak{u}\to\mathcal{F}$ 是 S^1–等变的，若赋予 $\mathfrak{u}$ 线性 S^1–作用 $g\cdot E_{ij}=g^{\omega_i-\omega_j}E_{ij}$，其中$(i,j)\in\mathcal{I}$。*(2)* 切空间 $T_{F^\bullet}\mathcal{F}$作为 S^1–表示，同构于 $\bigoplus_{(i,j)\in\mathcal{I}}V^0_{\omega_i-\omega_j}$。

证明。任取$u=\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}}u_{i,j}E_{ij}$属于$\mathfrak{u}$。那么，根据定义，$\varphi_{v_1,\dots,v_n}(u)=U^\bullet=(U^{d_1},\dots,U^{d_\ell})$，其中 U^{d_r} 是由 V 张成的子空间

$$v_j+\sum_{d_r<i\le n}u_{ij}v_i\ \text{for}\ 1\le j\le d_r.$$

那么， $g\cdot U^\bullet$由这些向量张成。

$$v_j'=g\cdot v_j+g\cdot\left(\sum_{d_r<i\le n}u_{i,j}v_i\right)=g^{\omega_j}v_j+\sum_{d_r<i\le n}g^{\omega_i}u_{i,j}v_i\ \text{for}\ 1\le j\le d_r.$$

换句话说， v_1'、.....、 v_n' 是 $g\cdot U^\bullet$的一组旗基。于是， $g^{-\omega_1}v_1'$、.....、 $g^{-\omega_n}v_n'$ 也是 $g\cdot U^\bullet$的一组旗基。那么， $g\cdot U^{d_r}$由这些向量张成

$$g^{-\omega_j}v_j' = v_j + \sum_{d_r<i\leq n} g^{\omega_i-\omega_j}u_{i,j}v_i \text{ for } 1\leq j\leq d_r,$$

这意味着

$$g\cdot U^\bullet = \varphi_{v_1,\dots,v_n}\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} g^{\omega_i-\omega_j}u_{ij}E_{ij}\right).$$

因此，如果赋予 $\mathfrak{u}$ 线性 S^1 作用，且 $g\cdot E_{ij} = g^{\omega_i-\omega_j}E_{ij}$，那么 $\varphi_{v_1,\ \dots,\ v_n}\colon\ \mathfrak{u}\to\mathcal{F}$ 是 S^1 等变的。

于是，$\varphi_{v_1,\ \dots,\ v_n}$ 在 0 处的微分是 S^1 等变的线性同构，介于 $\mathfrak{u}$ 与 $T_{F^\bullet}\mathcal{F}$ 之间。对 $\mathfrak{u}$ 的上述作用意味着 E_{ij} 是权重为 $\omega_i-\omega_j$ 的权向量，因此 $\mathfrak{u}$ 与 $\bigoplus_{(i,\ j)\in\mathcal{I}} V^0_{\omega_i-\omega_j}$ 之间也存在一个 S^1 等变的线性同构。□

现在，我们将利用这个仿射图，给出一种明确识别旗簇内例外球面的方法。

命题 5.2。 对于 $(i,j)\in\mathcal{I}$，令 $q_1,\dots,q_n$ 为基向量序列 $v_1,\dots,v_n$，其中交换了 v_i 和 v_j，即

$$(q_1,\dots,q_n) = (v_1,\dots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\dots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\dots,v_n).$$

考虑旗 $Q^\bullet$，其旗基为 $q_1,\dots,q_n$，以及相对于旗基$\varphi_{q_1,\dots,q_n}$的 $\mathcal{F}$ 对应的仿射图。则有：

(i) $\varphi_{v_1,\dots,v_n}(\lambda E_{ij}) = \varphi_{q_1,\dots,q_n}(\lambda^{-1}E_{ij})$ 对于 $\lambda\in\mathbb{C}^\times$。

(ii) 在 $\mathbb{CP}^1$ 上赋予由下式给出的 S^1–作用：

$$g\cdot[z_0:z_1] = [g^{\omega_i-\omega_j}z_0:z_1] \text{ for } g\in S^1.$$

则由下式给出的映射 $\psi:\mathbb{CP}^1\to\mathcal{F}$

$$\psi([\alpha:\beta]) = \begin{cases}\varphi_{v_1,\dots,v_n}(\lambda E_{ij}) & [\alpha:\beta]=[\lambda:1]\\ Q^\bullet & [\alpha:\beta]=[1:0]\end{cases}$$

是一个 S^1–等变嵌入。

证明。 首先，我们证明 (i)。对于 $\lambda\in\mathbb{C}$，令 $F^\bullet_\lambda = \varphi_{v_1,\dots,v_n}(\lambda E_{ij})$。特别地，我们有 $F^\bullet_0 = F^\bullet$。 对于 $\lambda\neq 0$，旗 $F^\bullet_\lambda$按定义为旗 $(F^{d_1}$、.....、 $F^{d_l})$ 其中

$$F^{d_r} = \begin{cases}\langle v_1,\dots,v_{d_r}\rangle & d_r<j\\ \langle v_1,\dots,v_{j-1},v_j+\lambda v_i,v_{j+1},\dots,v_{d_r}\rangle & d_r\geq j\end{cases}$$

$$F^{d_r} = \begin{cases}\langle v_1,\dots,v_{d_r}\rangle & d_r<j\\ \langle v_1,\dots,v_{j-1},v_i+\lambda^{-1}v_j,v_{j+1},\dots,v_{d_r}\rangle & d_r\geq j\end{cases}$$

另一方面，令 $Q^\bullet_{\lambda^{-1}} = \varphi_{q_1,\dots,q_n}(\lambda^{-1}E_{ij})$ 表示 $\lambda\in\mathbb{C}^\times$。于是，

$$Q^{d_r}_{\lambda^{-1}} = \begin{cases}\langle q_1,\dots,q_{d_r}\rangle & d_r<j\\ \langle q_1,\dots,q_{j-1},q_j+\lambda^{-1}q_i,q_{j+1},\dots,q_{d_r}\rangle & d_r\geq j\end{cases}$$

如果用 v_1、.....、 v_n 来改写这一表达式，我们可以看到

$$Q^{d_r}_{\lambda^{-1}} = \begin{cases} \langle v_1, \dots, v_{d_r} \rangle & d_r < j \\ \langle v_1, \dots, v_{j-1}, v_i + \lambda^{-1} v_j, v_{j+1}, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1} \dots, v_{d_r} \rangle & d_r \geq j \end{cases}$$

我们注意到

$$\langle v_i + \lambda^{-1} v_j, v_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_i + \lambda^{-1} v_j, v_i \rangle$$

因此，对于 $j \geq d_r$， $Q^{d_r}_{\lambda^{-1}}$ 也可以看作由以下向量张成的子空间

$$v_1, \dots, v_{j-1}, v_i + \lambda^{-1} v_j, v_{j+1}, \dots, v_{d_r}.$$

换言之， $F^{d_r}_{\lambda}$和 $Q^{d_r}_{\lambda^{-1}}$ 由相同的向量张成。我们得出

$$\varphi_{v_1,\dots,v_n}(\lambda E_{ij}) = F^{\bullet}_{\lambda} = Q^{\bullet}_{\lambda^{-1}} = \varphi_{q_1,\dots,q_n}(\lambda^{-1} E_{ij}).$$

(i) 的证明至此完成。

为证明 **(ii)**，只需证明 ψ ： $\mathbb{CP}^1 \to \mathcal{F}$ 是一个 S^1–等变的单射浸入。然后， $\mathbb{CP}^1$ 的紧致性将意味着 ψ 是一个嵌入。我们将通过限制到以下两个仿射图来证明这一点： χ_0, χ_∞ ： $\mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1$ ，它们分别由 $\chi_0(\lambda) = [\lambda\colon\ 1]$ 和 $\chi_\infty(\lambda) = [1\colon\ \lambda]$ 给出，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$。

首先，考虑图表 χ_0。然后，

$$\psi(\chi_0(\lambda)) = \psi([\lambda : 1]) = \varphi_{v_1,\dots,v_n}(\lambda E_{ij}).$$

注意到 $\varphi_{v_1,\ \dots,\ v_n}$ 是开舒伯特胞腔的参数化，因此尤其是一个嵌入。这意味着 $\psi \circ \chi_0$ 是一个单射浸入。此外，对于 $g \in S^1$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们可以使用命题 5.1 得出

$$\begin{aligned} g \cdot \psi(\chi_0(\lambda)) &= g \cdot \varphi_{v_1,\dots,v_n}(\lambda E_{ij}) \\ &= \varphi_{v_1,\dots,v_n}(g^{\omega_i - \omega_j} \lambda E_{ij}) \\ &= \psi(\chi_0(g^{\omega_i - \omega_j} \lambda)) \\ &= \psi([g^{\omega_i - \omega_j} \lambda : 1]) \\ &= \psi(g \cdot [\lambda : 1]) \\ &= \psi(g \cdot \chi_0(\lambda)) \end{aligned}$$

因此，映射 ψ 在图表 χ_0上是 S^1–等变的。

注意到第 **(i)** 部分意味着

$$\psi(\chi_\infty(\lambda)) = \psi([1 : \lambda]) = \varphi_{q_1,\dots,q_n}(\lambda E_{ij}).$$

因此，我们可以使用与之前相同的推理，得出将 ψ 限制在图表 ψ_∞ 上是一个 S^1–等变的单射浸入。

具有 S^1–等变性或是浸入是一个局部性质，因此这意味着 ψ是 S^1–等变浸入。单射性不是局部条件，但由于每个图表都排除了一个点（$[1\colon\ 0]$ 对应 χ_0 ，以及 $[0\colon\ 1]$ 对应 χ_∞），我们只需注意到

$$\psi([0 : 1]) = F^{\bullet} \neq Q^{\bullet} = \psi([1 : 0])$$

从而得出 ψ 实际上是单射。这就完成了 **(ii)** 的证明。 □

从命题 5.1 和命题 5.2 中获得的信息可以用矩阵直观地表示。

定义 5.3. 设 V 为一个带有线性 SO(2) 作用的 n 维复向量空间，且 $F^\bullet \in$ 旗$_{d_1,\ldots,d_\ell}$ 为一个 SO(2) 不变旗。我们将 $F^\bullet$ 的 SO(2) 差矩阵定义如下：

选取一个权旗基 v_1，……，v_n 作为 $F^\bullet$。差矩阵的列和行分别由 v_1，……，v_n标记。如果 $(i,\ j) \notin \mathcal{I}$，那么第 i 行、第 j 列的元素为 $*$。如果 $(i,\ j) \in \mathcal{I}$，那么第 i 行、第 j 列的元素为 $\omega_i - \omega_j$。

现在假设 $-I_2 \in$ SO(2) 在 $\mathbb{P}(V)$ 上的作用是平凡的。那么，$F^\bullet$ 的 PSO(2)–差分矩阵与上文相同，只是第 i 行、第 j 列的元素在 $(i,\ j) \in \mathcal{I}$ 时标记为 $\frac{\omega_i - \omega_j}{2}$。

如何结合上述命题解读差矩阵，将在下一个例子中说明，并在第 6 节中加以运用。

例 5.1。赋予 $V = \mathbb{C}^3$ 线性 SO(2) 作用，使得

$$R_\theta \cdot v = \begin{bmatrix} e^{2\theta} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-2\theta} \end{bmatrix}$$

那么，若 v_1，v_2，v_3 表示 $V = \mathbb{C}^3$的标准有序基，则它们构成一个权基，其权重为 $\omega_1 = 2$，$\omega_2 = 0$，$\omega_3 = -2$。令 $F^\bullet$ 为型为 (1，2) 的旗，其旗基为 v_2，v_0，v_{-2}，使得 $F^\bullet$ 是一个 SO(2) 不变旗，即

$$F^1 = \langle f_2 \rangle, \quad F^2 = \langle f_2, f_0 \rangle$$

那么，$F^\bullet$ 的 SO(2) 差矩阵为

$F^\bullet$	v_2	v_0	v_{-2}
v_2	$*$	$*$	$*$
v_0	-2	$*$	$*$
v_{-2}	-4	-2	$*$

这意味着，通过恒等对应 $S^1 \cong$ SO(2)，$T_{F^\bullet}\text{Flag}^{1,2}(V)$ 与 $V^0_{-2} \oplus V^0_{-2} \oplus V^0_{-4}$同构。第 v_0 行第 v_2 列的元素对应于 $\lambda \in \mathbb{C}$的旗的切方向，其形式为

$$F^\bullet_\lambda = \varphi_{v_2,v_0,v_{-2}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot F^\bullet = \left(\langle v_2 + \lambda v_0 \rangle, \langle v_2, v_0 \rangle\right).$$

-2元素记录了 $\{F^\bullet_\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{C}\}$在 $F^\bullet$处的切空间作为 SO(2) 模与 V^0_{-2}同构。由于 $\lambda \to \infty$,

$$F^\bullet_\lambda \to Q^\bullet = (\langle v_0 \rangle, \langle v_0, v_2 \rangle),$$

这恰好就是旗基为 v_0，v_2，v_{-2} 的旗，也就是说，v_2 和 v_0 互换了。

现在，SO(2) 在 $\text{Flag}^{1,2}(V)$ 上的作用并非有效作用；权重 $\omega_1 = 2$，$\omega_2 =$0，$\omega_3 = -2$ 具有公因子 2。因此，矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ 的作用是平凡的，并且在 $\text{Flag}^{1,2}(V)$ 上诱导出一个 PSO(2) 作用。这使每个稳定子的阶减半，进而使每个切空间的权重减半。这就是为什么 $F^\bullet$ 的 PSO(2)–差分矩阵是

$F^\bullet$	v_2	v_0	v_{-2}
v_2	$*$	$*$	$*$
v_0	-1	$*$	$*$
v_{-2}	-2	-1	$*$

因此，差矩阵简洁地概括了 SO(2)（或 PSO(2)）作用于旗簇时的权重。

5.2. **纤维中的不动点和例外点**。 现在，我们将阐述一个基本观察，它使我们能够将纤维中的不动点和例外点与旗簇中的不动点和例外点联系起来。

引理 5.3。 设$\Omega_\rho^I \subsetneq \mathcal{F}_D$ 是某个 ι–福克斯表示 $\rho = \iota \circ \phi : \pi_1(S_g) \to G$ 的 *Kapovich-Leeb-Porti* 域，并设 $\bar{p} : \mathcal{F}_\eta \to \mathbb{H}^2$ 是注 *3.2* 中所述的紧化$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$–等变投影映射。设 M 是 $\bar{p}$ 在 $\mathbb{H}^2$中原点 O 上方的纤维。

(i) 若 $x \in \mathcal{F}_\eta$ 在 *SO(2)* 中的稳定子阶数大于 *2*，则 $x \in M$。因此，对于 $m \neq 1$，*2*，有 *Fix(*M, m*, SO(2)) =Fix(*$\mathcal{F}_\eta, m$*, SO(2))*。*(ii)* 假设 ι*: SL(2,*$\mathbb{R}$*)* $\to G$ 诱导出一个表示 $\bar{\iota}$*: PSL(2,*$\mathbb{R}$*)*$\to$*PG*，使得等变映射 $\bar{p}$*:* $\mathcal{F}_\eta \to \mathbb{H}^2$ 是 $\bar{\iota}$–等变的。那么，若 $x \in \mathcal{F}_\eta$在 *PSO(2)* 中的稳定子非平凡，则 $x \in M$。因此，对于 $m \neq 1$，有 *Fix(*M, m*, PSO(2)) =Fix(*$\mathcal{F}_\eta, m$*, PSO(2))*。*(iii)* 若 $x \in M$ 是 *SO(2)* 作用下的一个孤立不动点，则 T_xM 的符号等于 $T_x\mathcal{F}_\eta$的符号。

证明。 对于 (i)，设 $g \in \mathrm{Stab}^{\mathrm{SO}(2)}(x)$ 是一个阶大于 2 的元素，并考虑投影 $\bar{p}(x) \in \mathbb{H}^2$。于是，

$$g \cdot x = x \Rightarrow g \cdot \bar{p}(x) = \bar{p}(x).$$

然而， g 作为 SO(2) 中阶大于 2 的元素，在 $\mathbb{H}^2$ 中只有一个不动点，即 O。因此， $p(x) = O$ 和 $x \in \overline{M} = p^{-1}(O)$。

假设我们有一个诱导表示 $\bar{\iota}$： PSL(2，$\mathbb{C}$) $\to$ PG。那么，如果 $x \in \mathcal{F}_D$ 在 PSO(2) 中具有非平凡稳定子，则其在 SO(2) 中的稳定子必定具有大于 2 的阶，因此 (ii) 得证。

对于 (iii)，注意到 p 的等变性给出了 S^1–表示的正合列

$$0 \to T_xM \to T_x\mathcal{F}_\eta \xrightarrow{dp} T_O\mathbb{H}^2 \to O.$$

因此，我们得到定向的 S^1–表示的同构

$$T_x\mathcal{F}_\eta \cong T_xM \oplus T_O\mathbb{H}^2 \cong T_xM \oplus V_2^0.$$

由于 $T_O\mathbb{H}^2$ 的权重为正， T_xM 和 $T_x\mathcal{F}_\eta$ 的符号必须一致。□

注意，如果 $\mathcal{F}_\eta$ 的不动点和例外点仅位于例外球面上，那么切向权重图的定义对 $\mathcal{F}_\eta$ 仍然有意义。由此得到以下推论：

命题 5.4. 沿用引理 *5.3* 中的记号

(i) 如果 $\iota(\mathrm{SO}(2))$ 对 $\mathcal{F}_\eta$ 的作用是有效的，切向权重图为 $\mathcal{G}$，且 $\mathcal{G}$ 不含方形顶点或标记权重 2 的边，那么 $\mathcal{G}$ 也是 M 的切向权重图。

(ii) 假设 $\iota : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to G$ 诱导出一个表示 $\bar{\iota} : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \to PG$。如果 $\bar{\iota}(\mathrm{PSO}(2))$ 对 $\mathcal{F}_D$ 的作用是有效的，切向权重图为 $\mathcal{G}$，且 $\mathcal{G}$ 有方形顶点，那么 $\mathcal{G}$ 也是 M 的切向权重图。

证明。对于 (i)，假设 $\iota(\mathrm{SO}(2))$–作用在 $\mathcal{F}_\eta$ 上是有效的，其切向权重图为 $\mathcal{G}$，且没有标记权重 2 的方形顶点或边。这意味着，对于 $\mathcal{F}_\eta$中的任意固定点或例外点，命题 5.3(i) 均适用。因此，M 的切向权重图具有相同的顶点、边以及标记边的权重。此外，命题 (iii) 表明，标记圆形顶点的符号也相同。

(ii) 的证明类似。 □

命题 5.2 和 5.4 为确定旗簇中不连续域的纤维的固定点和例外点提供了一种统一方法。具体而言，差分矩阵提供了一个紧致的框架，用于计算 $\mathcal{F}_D$ 的切向权重图，然后命题 5.4 将其与 M的切向权重图联系起来。我们将在下一节中明确实施这一策略。

6. Topology of fibers for 维$_{\mathbb{C}}\Omega = 3$

现在我们已经构建了所需的工具，可以着手考察命题 3.8 中列出的每个不连续域，并确定各自的拓扑和结构群作用。对于 G 和 $\mathcal{F}_\eta$的每种选择，我们将考虑相应的不可约表示和可约表示 $\iota : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to G$，并描述其在 $\mathcal{F}_\eta$上诱导的 SO(2) 作用。然后，运用第 5 节中介绍的技巧，我们可以确定每种情形下纤维 M^I_ρ的切向权重图。最后，将这些切向权重图与 Hirzebruch 曲面的切向权重图进行比较后，我们可以应用定理 4.9，在等变微分同胚意义下确定 M^I_ρ。

6.1. **对于** $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$, $\Omega \subseteq \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$。令 $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$，并令 $\mathcal{F}_\eta = \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$。回顾第 3.3 节，若 $\iota_{\mathbf{f},\mathbf{i}} = \rho_3$，则任何 $\iota_{\mathbf{f},\mathbf{i}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathbf{f},\mathbf{i}} : \Gamma \to \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 都是 Borel- 阿诺索夫表示，并且存在一个不连续域

$$\Omega_{\mathbf{f},\mathbf{i}} = \{F^\bullet \in \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3) : F^1 \neq \xi^1_{\mathbf{f},\mathbf{i}}(t) \text{ and } F^2 \neq \xi^2_{\mathbf{f},\mathbf{i}}(t) \text{ for all } t \in \mathbb{RP}^1\},$$

其中 $\xi_{\mathbf{f},\mathbf{i}} : \mathbb{RP}^1 \to \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$ 是极限曲线。我们将 SL(2) 等变投影 $p_{\mathbf{f},\mathbf{i}} : \Omega_{\mathbf{f},\mathbf{i}} \to \mathbb{H}^2$ 上方原点O 处的纤维记为 $M_{\mathbf{f},\mathbf{i}}$，即

$$M_{\mathbf{f},\mathbf{i}} := p^{-1}_{\mathbf{f},\mathbf{i}}(O).$$

类似地，若 $\iota_{\mathbf{f},\mathbf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_1$，则任意 $\iota_{\mathbf{f},\mathbf{r}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathbf{f},\mathbf{r}} : \Gamma \to \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 都是 Borel- 阿诺索夫的，并且存在一个不连续域

$$\Omega_{\mathbf{f},\mathbf{r}} = \{F^\bullet \in \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3) : F^1 \neq \xi^1_{\mathbf{f},\mathbf{r}}(t) \text{ and } F^2 \neq \xi^2_{\mathbf{f},\mathbf{r}}(t) \text{ for all } t \in \mathbb{RP}^1\}$$

其中$\xi_{\mathbf{f},\mathbf{r}} : \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$ 是极限曲线。我们将 SL(2) 等变投影 $p_{\mathbf{f},\mathbf{r}} : \Omega_{\mathbf{f},\mathbf{r}} \to \mathbb{H}^2$ 在原点上方的纤维记为 $M_{\mathbf{f},\mathbf{r}}$，即

$$M_{\mathbf{f},\mathbf{r}} := p^{-1}_{\mathbf{f},\mathbf{r}}(O).$$

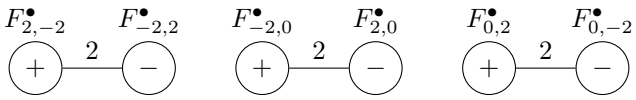


FIGURE 8. 图注

6.1.1. 不可约情形。现在，我们将确定$M_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}$的拓扑和结构群作用。

令 $V=\mathbb{C}^{(2)}[X,Y]$ 为 $\mathbb{C}$–张成的

$$X^2, XY, Y^2$$

在 $\mathbb{C}[X,Y]$ 中。因此，我们可以将 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}\colon \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(3,\ \mathbb{C})$ 表示为

$$\iota\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\cdot f(X,Y) = f(dX-bY, -cX+aY).$$

将 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}$ 限制到 SO(2) 后，我们在 V 上得到一个线性 SO(2) 作用。 V具有权向量$f_2=(X-iY)^2$，$f_0=X^2+Y^2$，$f_{-2}=(X+iY)^2$，其权重为

$$\begin{aligned}\iota_{\mathbf{f},\mathbf{i}}(R_\theta)\cdot f_2 &= e^{2i\theta} f_2\\ \iota_{\mathbf{f},\mathbf{i}}(R_\theta)\cdot f_0 &= f_0\\ \iota_{\mathbf{f},\mathbf{i}}(R_\theta)\cdot f_{-2} &= e^{-2i\theta} f_{-2}\end{aligned}$$

注意，由于 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}(\{\pm I_2\}) \subseteq \{\pm I_3\}$，在 Flag($\mathbb{C}^3$) 上诱导出一个 PSL(2，$\mathbb{C}$) 作用，其中 $g\cdot x = \iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}(\tilde{g})\cdot x$ 对于 $g\in \mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{C})$，$g=\pm\tilde{g}$ 以及 Flag($\mathbb{C}^3$)。此外，$\Omega_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}$ 将具有 PSL(2，$\mathbb{R}$) 不变性，并且 $p_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}\colon \Omega_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}} \to \mathbb{H}^2$ 将是 PSL(2，$\mathbb{R}$)–等变的。根据引理 5.3,

$$\mathrm{Fix}(M_{\mathbf{f},\mathbf{i}}, m, \mathrm{PSO}(2)) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3), m, \mathrm{PSO}(2))$$

对所有 $m\neq 1$ 均成立。因此,

$$\mathrm{Fix}(M_{\mathbf{f},\mathbf{i}}, 0, \mathrm{PSO}(2)) = \{F^\bullet_{2,0}, F^\bullet_{2,-2}, F^\bullet_{0,2}, F^\bullet_{0,-2}, F^\bullet_{-2,2}, F^\bullet_{-2,0}\},$$

其中 $F^\bullet_{i,\,j}$是以 f_i，f_j为基的旗，即

$$F^\bullet_{i,j} = (\langle f_i\rangle), \langle f_i, f_j\rangle) \text{ for } i,j\in\{-2,0,2\}.$$

现在我们可以来看下面的结果。

命题 6.1。 *PSO(2)*$\mathrm{PSO}(2)$在$\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$上的作用的切向权重图（其中 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}=\rho_3$ ）如图 *8* 所示。 *PSO(2)*$\mathrm{PSO}(2)$在 $\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$ 上的作用的切向权重图（其中 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}=\rho_3$ ）如图 *8* 所示。

证明。 要确定切向权重图，我们需要确定 PSO(2) 在每个 $F^\bullet_{i,\,j}\in F$ 处作用的差矩阵，见定义 5.3。

对于 $F^\bullet_{2,\,-2}$和 $F^\bullet_{-2,\,2}$，PSO(2) 差矩阵为

$F^\bullet_{2,-2}$	f_2	f_{-2}	f_0
f_2	$*$	$*$	$*$
f_{-2}	-2	$*$	$*$
f_0	-1	1	$*$

$F^\bullet_{-2,2}$	f_{-2}	f_2	f_0
f_{-2}	$*$	$*$	$*$
f_2	2	$*$	$*$
f_0	1	-1	$*$

根据命题 5.1，$F^{\bullet}_{2,\,-2}$的符号为 (+)，$F^{\bullet}_{-2,\,2}$的符号为 (–)，并且存在一个权重 $2\ \mathbb{CP}^1$，连接 $F^{\bullet}_{2,\,-2}$和 $F^{\bullet}_{-2,\,2}$。
对于 $F^{\bullet}_{-2,\,0}$和 $F^{\bullet}_{2,\,0}$，PSO(2) 差矩阵为

$F^{\bullet}_{-2,0}$	f_{-2}	f_0	f_2
f_{-2}	$*$	$*$	$*$
f_0	1	$*$	$*$
f_2	2	1	$*$

$F^{\bullet}_{2,0}$	f_2	f_0	f_{-0}
f_2	$*$	$*$	$*$
f_0	-1	$*$	$*$
f_{-2}	-2	-1	$*$

因此，$F^{\bullet}_{-2,\,0}$的符号为 (+)，$F^{\bullet}_{2,\,0}$的符号为 (–)，并且有一个权重 $2\mathbb{CP}^1$ 连接着 $F^{\bullet}_{-2,\,0}$和 $F^{\bullet}_{2,\,0}$。
对于 $F^{\bullet}_{0,\,2}$和 $F^{\bullet}_{0,\,-2}$，PSO(2) 差矩阵为

$F^{\bullet}_{0,2}$	f_0	f_2	f_{-2}
f_0	$*$	$*$	$*$
f_2	1	$*$	$*$
f_{-2}	-1	-2	$*$

$F^{\bullet}_{0,-2}$	f_0	f_{-2}	f_2
f_0	$*$	$*$	$*$
f_{-2}	-1	$*$	$*$
f_2	1	2	$*$

因此，$F^{\bullet}_{0,\,2}$的符号为 (+)，$F^{\bullet}_{0,\,-2}$的符号为 (–)，并且有一个权重 $2\mathbb{CP}^1$ 连接着 $F^{\bullet}_{0,\,2}$和 $F^{\bullet}_{0,\,-2}$。
这确定了所述的切向权重图。根据命题 5.4，这也是 $M_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}$的切向权重图。□

回顾例 4.1，其中在 $(S^2\times S^2)\#(S^2\times S^2)$ 上存在一个光滑的 S^1–作用，其切向权重图如图所示。由定理 4.9 可得以下结果。

推论 6.2. 对于 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}=\rho_3$ 和 $\mathcal{F}_\eta=\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$，

(i) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$–等变纤维丛投影 $p_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}:\Omega_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}\to\mathbb{H}^2$ 的纤维为$M_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}$，它与 $(S^2\times S^2)\#(S^2\times S^2)$微分同胚。结构群为 $\mathrm{PSO}(2)$，作用如图 *8* 所述。*(ii)* 流形 $\mathcal{W}_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}}$与以下丛微分同胚：该丛是 S_g 上欧拉类为 $g-1$ 的 $\mathrm{PSO}(2)$–主丛的伴随丛，纤维为 $(S^2\times S^2)\#(S^2\times S^2)$，其 $\mathrm{PSO}(2)$–作用如上所述。

6.1.2. 可约情形。现在，我们将确定 $M_{\mathbf{f},\mathbf{r}}$ 的拓扑和结构群作用。与其他情形相比，这种情形需要稍微不同的论证。

令 V 为 X,Y,Z 在 $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ 中张成的 $\mathbb{C}$。那么，我们将 $\iota_{\mathbf{f},\mathbf{r}}=\rho_2\oplus\rho_1:\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\to\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 表示为

$$\iota\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)\cdot f(X,Y,Z)=f(dX-cY,aY-bX,Z)$$

将 ι 限制到 SO(2)，我们得到 V 上的线性 SO(2) 作用。于是，V 的权向量为 $f_1=X-iY$, $f_0=Z$, $f_{-1}=X+iY$，对应的权重为

$$\iota_{\mathbf{f},\mathbf{r}}(R_\theta)\cdot f_1=e^{i\theta}f_1$$
$$\iota_{\mathbf{f},\mathbf{r}}(R_\theta)\cdot f_0=f_0$$
$$\iota_{\mathbf{f},\mathbf{r}}(R_\theta)\cdot f_{-1}=e^{-i\theta}f_{-1}$$

根据引理 5.3,

$$\mathrm{Fix}(M,0,\mathrm{SO}(2))=\{F^{\bullet}_{1,0},F^{\bullet}_{1,-1},F^{\bullet}_{0,1},F^{\bullet}_{0,-1},F^{\bullet}_{-1,1},F^{\bullet}_{-1,0}\},$$

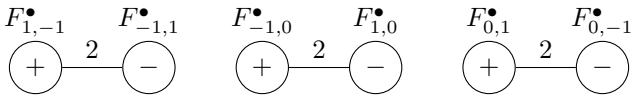


FIGURE 9. Flag($\mathbb{C}^3$) 的切向权重图，用于 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_1$

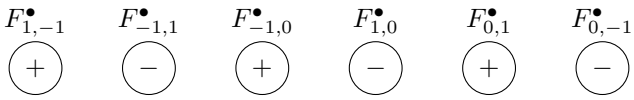


FIGURE 10. 图注

其中

$$F^\bullet_{i,j} = (\langle f_i \rangle), \langle f_i, f_j \rangle) \text{ for } i,j \in \{1,0,-1\}.$$

由于 V 且取 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_1$ 时的权重是 V 且取 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{i}} = \rho_3$时权重的一半，因此 Flag($\mathbb{C}^3$) 且取$\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{r}} =$ 时的 SO(2) 差矩阵，与 Flag($\mathbb{C}^3$) 且取 $\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{r}} = \rho_3$时的 PSO(2) 差矩阵相同。因此，当$\iota_{\mathbf{f},\,\mathbf{r}}$ 时，SO(2) 作用于 Flag($\mathbb{C}^3$) 的切向权重图如图 9 所示。不过请注意，这个切向权重图中特别包含权重为 2 的边。这意味着我们不能直接应用命题 5.4。事实上，$M_{\mathbf{f},\,\mathbf{r}}$的切向权重图并不相同，下面我们将证明这一点。

命题6.3。 以下结论成立：

(i) 纤维 $M_{\mathbf{f},\mathbf{r}}$与 $\mathrm{Fix}(\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3), 2, \mathrm{SO}(2))$ 的交集是横截的。交点恰为 $\{F^\bullet_{1,0}, F^\bullet_{1,-1}, F^\bullet_{0,1}, F^\bullet_{0,-1}, F^\bullet_{-1,1}, F^\bullet_{-1,0}\}$。(ii) $M_{\mathbf{f},\mathbf{r}}$ 的切向权重图如图*6.3*所示。

证明。 任取 $x \in M_{\mathbf{f},\mathbf{r}} \cap$ Fix(Flag($\mathbb{C}^3$), 2,SO(2))。由命题 5.1，在 $-I \in$ SO(2) 的作用下，切空间 T_xFlag($\mathbb{C}^3$) 的特征子空间为 E_1,E_{-1}，其维数分别为 $\dim_{\mathbb{C}} E_1 = 1$ 和 $\dim_{\mathbb{C}} E_{-1} = 2$。注意， T_x Fix(Flag($\mathbb{C}^3$), 2,SO(2)) 在 $-I$ 的作用下保持不变。此外，若在 Flag($\mathbb{C}^3$) 上取一个 SO(2) 不变厄米度量，则由 ρ 的等变性可知，$T_x^\perp M_{\mathbf{f},\mathbf{r}}$ 也在 $-I$ 的作用下保持不变。因此，T_x Fix(Flag($\mathbb{C}^3$), 2, SO(2)) $= T_x^\perp M_{\mathbf{f},\mathbf{r}} = E_1$。特别地，$M_{\mathbf{f},\mathbf{r}}$与 Fix(Flag($\mathbb{C}^3$), 2, SO(2)) 在 x 处横截相交。

因此，纤维 $M_{\mathbf{f},\,\mathbf{r}}$ 与 Fix(Flag($\mathbb{C}^3$)，2，SO(2)) 横截相交，故交集只有有限个点，其中包括 $F^\bullet_{1,\,0}$，$F^\bullet_{1,\,-1}$，$F^\bullet_{0,\,1}$，$F^\bullet_{0,\,-1}$，$F^\bullet_{-1,\,1}$，$F^\bullet_{-1,\,0}$。由于交集也具有 SO(2) 不变性，因此不可能包含其他点；否则，它将包含一个一维轨道。

根据引理 5.3，符号计算仍然适用。因此，$M_{\mathbf{f},\,\mathbf{r}}$ 的切向权重图必定如上所述。□

命题 6.4。存在一个光滑的 S^1 作用于 $(S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$，其切向权重图与图 *10* 中相同

证明。我们继续辨认 $S^1 = \{g \in \mathbb{C} : \ |g| = 1\}$。考虑由下式给出的 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 上的 S^1 作用

$$g \cdot ([z_0 : z_1], [w_0 : w_1]) = ([z_0 : gz_1], [w_0 : gw_1]).$$

按照例 4.1 中的相同推理，切向权重图如图 11 所示。应用例 4.1 中相同的连通和构造，我们得到

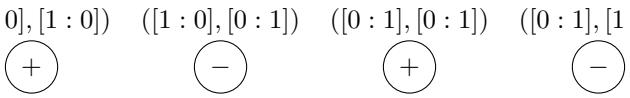


FIGURE 11. 关于 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$上 S^1–作用的切向权重图

在 $(S^2 \times S^2)\#(S^2 \times S^2)$ 上的一个作用，其切向权重图如上所述。 □

然后，再次根据定理 4.9，我们能够得出 $M_{\mathbf{f},\mathbf{r}}$ 的拓扑和结构群作用如下。

推论 6.5。对于 $\iota_{\mathbf{f},\mathbf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_1$ 和 $\mathcal{F}_\eta = \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^3)$，

(i) $p_{\mathbf{f},\mathbf{r}} : \Omega_{\mathbf{f},\mathbf{r}} \to \mathbb{H}^2$ 是一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$–等变纤维丛投影，其纤维为$M_{\mathbf{f},\mathbf{r}}$ 且微分同胚于 $(S^2 \times S^2)\#(S^2 \times S^2)$。结构群为 $\mathrm{SO}(2)$，其作用如图 *10* 所述。(ii) $\mathcal{W}_{\mathbf{f},\mathbf{r}}$ 是与 S_g 上的 $\mathrm{SO}(2)$–主丛相关联的丛，其欧拉类为 $2g-2$，纤维为 $(S^2\times S^2)\#(S^2\times S^2)$，并带有上述 $\mathrm{SO}(2)$–作用。

6.1.3. 复结构与辛结构的障碍。 在转而讨论其他旗簇中的区域之前，我们先指出，纤维 $M_{\mathbf{f},\ \mathbf{i}}$ 和$M_{\mathbf{f},\ r}$ 微分同胚于 $(S^2 \times S^2)\#(S^2 \times S^2)$，由此可得一个推论。

命题 6.6。 该4维流形$(S^2 \times S^2)\#(S^2 \times S^2)$ 不具有近复结构，因此也不具有复结构或辛结构。

证明。 Hirzebruch 的一个经典结果 [Hir87, p. 777] 指出，对于任意维数为 $4k$ 的近复流形 M，我们有

$$\sigma(M) \equiv (-1)^{2k}\chi(M) \pmod 4$$

其中 $\sigma(M)$ 是 $H_{2k}(M)$ 上交叉形式的型，而 $\chi(M)$ 是 M 的欧拉示性数。

另一方面，对于 $M = (S^2 \times S^2)\#(S^2 \times S^2)$，有

$$\sigma(M) = \sigma\left(S^2 \times S^2\right) + \sigma\left(S^2 \times S^2\right) = 0 + 0 = 0$$

and

$$\chi(M) = \chi\left(S^2 \times S^2\right) + \chi\left(S^2 \times S^2\right) - 2 = 4 + 4 - 2 = 6.$$

因此， $M = (S^2 \times S^2)\#(S^2 \times S^2)$ 不具有近复结构。

□

这就导出了以下推论。

推论 6.7。 对于不连续域 $\Omega = \Omega_{\mathbf{f},\ \mathbf{i}}$ （分别对于 $\Omega_{\mathbf{f},\ \mathbf{r}}$），

(i) 不存在全纯纤维丛投影 $\pi : \Omega \to \mathbb{H}^2$。(ii) 不存在辛纤维丛投影 $\pi : \Omega \to \mathbb{H}^2$，其含义见*[LM06]*。

第 (i) 部分已由 Dumas 和 Sanders [DS20,Thm. D] 通过复解析方法在更一般的情形下证明。

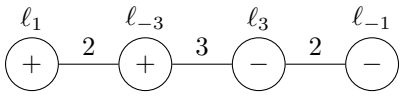


FIGURE 12. PSO(2) 作用于 $M_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}$ 时的切向权重图

6.2. **对于** $G=\mathrm{SL}(4,\mathbb{C}),\Omega\subseteq\mathbb{CP}^3$。 设 $G=\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$，并设 $\mathcal{F}_\eta=\mathbb{CP}^3$。回顾第 3.3 节，若 $\iota_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}=\rho_4$，则任意 $\iota_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}:\Gamma\to\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ 都是 2–阿诺索夫表示，并且存在一个不连续域

$$\Omega_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}=\{F^1\in\mathbb{CP}^3:F^1\not\subseteq\xi^2_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}(t)\text{ for all }t\in\mathbb{RP}^1\},$$

其中 $\xi_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}:\mathbb{RP}^1\to\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ 是极限曲线。我们将 SL(2) 等变投影 $p_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}:\Omega_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}\to\mathbb{H}^2$ 在原点上方的纤维记为 $M_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}$。

同样，若 $\iota_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}=\rho_2\oplus\rho_2$，则任意 $\iota_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}:\Gamma\to\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ 都是 2–阿诺索夫表示，并且存在一个不连续域

$$\Omega_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}=\{F^1\in\mathbb{CP}^3:F^1\not\subseteq\xi^2_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}(t)\text{ for all }t\in\mathbb{RP}^1\},$$

其中 $\xi_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}:\mathbb{RP}^1\to\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ 是极限曲线。我们将 SL(2) 等变投影 $p_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}:\Omega_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}\to\mathbb{H}^2$ 在原点上方的纤维记为 $M_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}$。

6.2.1. 不可约情形。本节将确定 $M_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}$ 的拓扑及其结构群作用。

令 $V=\mathbb{C}^{(3)}[X,Y]$ 为 X^3、X^2Y、XY^2、Y^3 在 $\mathbb{C}[X,Y]$ 中张成的 $\mathbb{C}$。那么，我们可以将 $\iota_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}=\rho_4:\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\to\mathrm{SL}(4,\mathbb{C}$ 表示为

$$\iota\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)\cdot f(X,Y)=f(dX-bY,aY-cX).$$

将 $\iota_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$ 限制到 SO(2)，可得到在 V 上的线性 SO(2)=作用。SO(2)–模 V 的权向量为 $f_3=(X-iY)^3$、$f_1=(X-iY^2)(X+iY)$、$f_{-1}=(X+iY)(X-iY)^2$、$f_{-3}=(X+iY)^3$，其权重为

$$\iota_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}(R_\theta)\cdot f_w=e^{wi\theta}f_w.$$

注意，由于 $\iota(-I_2)=-I_4$，$\iota_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}$ 给出了一个 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$–作用于 $\mathbb{CP}^3$ 上，其中 $g\cdot x=\iota_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}(\tilde{g})\cdot x$ 对于 $g\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$，$g=\pm\tilde{g}$ 和 $x\in\mathbb{CP}^3$。由引理 5.3 可知，

$$F=\mathrm{Fix}(M_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}},0,\mathrm{PSO}(2))=\{\ell_3,\ell_1,\ell_{-1},\ell_{-3}\},$$

其中

$$\ell_w=\langle f_w\rangle\text{ for }w\in\{3,1,-1,-3\}.$$

命题 6.8。 $\mathrm{PSO}(2)$ 对 $M_{\mathfrak{p},\mathfrak{i}}$ 的作用所对应的切向权重图如图 *12* 所示。

证明。 为确定切向权重图，我们需要确定作用在每个 $\ell_w\in F$ 上的 PSO(2) 的差矩阵。

PSO(2) 差矩阵为

ℓ_1	f_1	f_3	f_{-1}	f_{-3}
f_1	$*$	$*$	$*$	$*$
f_3	1	$*$	$*$	$*$
f_{-1}	-1	$*$	$*$	$*$
f_{-3}	-2	$*$	$*$	$*$

ℓ_{-3}	f_{-3}	f_3	f_1	f_{-1}
f_{-3}	$*$	$*$	$*$	$*$
f_3	3	$*$	$*$	$*$
f_1	2	$*$	$*$	$*$
f_{-1}	1	$*$	$*$	$*$

ℓ_3	f_3	f_1	f_{-1}	f_{-3}
f_3	$*$	$*$	$*$	$*$
f_1	-1	$*$	$*$	$*$
f_{-1}	-2	$*$	$*$	$*$
f_{-3}	-3	$*$	$*$	$*$

ℓ_{-1}	f_{-1}	f_3	f_1	f_{-3}
f_{-1}	$*$	$*$	$*$	$*$
f_3	2	$*$	$*$	$*$
f_1	1	$*$	$*$	$*$
f_{-3}	-1	$*$	$*$	$*$

因此， ℓ_1 的符号为（+），且存在一个权重 $2\,\mathbb{CP}^1$ 连接 ℓ_1 和 ℓ_{-3}。 ℓ_{-3} 的符号为（+），且还存在一个权重 $3\,\mathbb{CP}^1$ 连接 ℓ_{-3} 和 ℓ_3。 ℓ_3 的符号为（−），且还存在一个权重 $2\,\mathbb{CP}^1$ 连接 ℓ_3 和 ℓ_{-1}。由此确定了 $\mathbb{CP}^3$ 的切向权重图。根据命题 5.4，这也告诉我们 $M_{\mathbf{p},\ \mathbf{i}}$ 的切向权重图。□

注意，图 12 中的切向权重图与推论 4.14 为 Hir(2; -1,2) 确定的切向权重图相同。因此，由定理 4.9 可得以下结果。

推论 6.9。 对于 $\iota_{\mathbf{p},\mathbf{i}} = \rho_4$ 和 $\mathcal{F}_\eta = \mathbb{CP}^3$，

(i) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 等变纤维丛投影 $p_{\mathbf{p},\mathbf{i}} : \Omega_{\mathbf{p},\mathbf{i}} \to \mathbb{H}^2$ 的纤维为 $M_{\mathbf{p},\mathbf{i}}$，且等变微分同胚于 $\mathrm{Hir}(2;-1,2)$，其中识别了 $S^1 \cong \mathrm{PSO}(2)$。特别地，$M_{\mathbf{p},\mathbf{i}}$ 微分同胚于 $S^2 \times S^2$。*(ii)* 流形 $\mathcal{W}_{\mathbf{p},\mathbf{i}}$ 微分同胚于与 S_g 上的 $\mathrm{PSO}(2)$–主丛相伴的丛，其欧拉类为 $g-1$，纤维为 $S^2 \times S^2$，并带有上述 $\mathrm{PSO}(2)$–作用。

6.2.2. 可约情形。 本节将确定 $M_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$ 的拓扑和结构群作用。这是我们首次在纤维中看到不动曲面的情形。

令 V 为 $\mathbb{C}[X_1,Y_1,X_2,Y_2]$ 内由 X_1,Y_1,X_2,Y_2 张成的 $\mathbb{C}$ 线性空间。我们用 V 上的线性作用表示 $\iota_{\mathbf{p},\mathbf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_2 : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$，其形式如下

$$\iota_{\mathbf{p},\mathbf{r}}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \cdot f(X_1,Y_1,X_2,Y_2) = f(dX_1 - cY_1, aY_1 - bX_1, dX_2 - cY_2, aY_2 - bX_2).$$

将 $\iota_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$ 限制到 SO(2)，可得到 V 上的线性 SO(2) 作用。于是， V 有权向量 $e_1 = X_1 - iY_1, e_{-1} = X_1 + iY_1, f_1 = X_2 - iY_2, f_{-1} = X_2 + iY_2$，其权重为

$$\iota_{\mathbf{p},\mathbf{r}}(R_\theta)\cdot e_1 = e^{i\theta}e_1 \qquad \iota_{\mathbf{p},\mathbf{r}}(R_\theta)\cdot e_{-1} = e^{-i\theta}e_{-1}$$
$$\iota_{\mathbf{p},\mathbf{r}}(R_\theta)\cdot f_1 = e^{i\theta}f_1 \qquad \iota_{\mathbf{p},\mathbf{r}}(R_\theta)\cdot f_{-1} = e^{-i\theta}f_{-1}$$

于是，任意 SO(2) 权向量要么是 e_1, f_1 的 $\mathbb{C}$ 线性组合，要么是 e_{-1}, f_{-1} 的 $\mathbb{C}$ 线性组合。由于权向量的张成空间恰好是 SO(2) 作用在 $\mathbb{CP}^3$ 上的不动点，因此，根据命题 5.3，射影直线 $\langle e_1, f_1\rangle$ 和 $\langle e_{-1}, f_{-1}\rangle$ 是 $\mathbb{CP}^3$ 中的不动曲面，因而也是 $M_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$ 中的不动曲面。由于没有其他不动点，$M_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$ 中也没有例外球面。因此，



FIGURE 13. $M_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$的切向权重图

唯一需要计算的切向权重数据，是这些不动曲面的欧拉类。

为了计算这个欧拉类，我们回顾陈类与欧拉类之间的关系。对于流形B 上的任意秩1复向量丛 E，都有一个与之关联的主 $\mathbb{C}^\times$丛 P，使得 E 与 $P \times \mathbb{C}$同构。$\mathbb{C}^\times$

于是， P 的欧拉类与 E 的第一陈类一致，记作$c_1(E)$。关于陈类的更详细讨论，参见 [Joh 74]。

命题 6.10。 $M_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$上的$\mathrm{PSO}(2)$作用的切向权重图如图*13*所示。

证明。 注意，根据 [Fin77，引理 5.1]，，由于只有两个不动曲面，切向权重图有两个方形顶点，其标签分别为 e 和 $-e$，其中$e \in \mathbb{Z}$为某个值。因此，我们只需确定 $|e|$ 即可确定切向权重图。

在 $\mathcal{F}_\eta = \mathbb{CP}^3$ 上固定一个 PSO(2) 作用不变的厄米度量。考虑不动曲面 $C_1 = \langle e_1, f_1\rangle$ 和 $C_{-1} = \langle e_{-1}, f_{-1}\rangle$。选取 V 的一个权基 v_1、v_2、v_3、v_4，使得 v_1、$v_2 \in C_1$ 且 v_3、 $v_4 \in C_{-1}$。那么，关于该基，$\ell = \langle v_1\rangle$ 的 PSO(2) 权矩阵为

ℓ	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	$*$	$*$	$*$	$*$
v_2	0	$*$	$*$	$*$
v_3	-1	$*$	$*$	$*$
v_4	-1	$*$	$*$	$*$

利用该厄米度量，切空间 $T_\ell\mathbb{CP}^3$ 分解为 $T_\ell C_1 \oplus T_\ell^\perp C_1$。PSO(2) 在 $T_\ell C_1$ 上的作用具有权重 0，因为 C_1 是不动曲面。 $T_\ell C_1^\perp$ 只有权重 -1，且 PSO(2) 通过复数乘法作用。那么，$T_\ell^\perp C_1 \cap T_\ell M_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$是 $T_\ell^\perp M_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$ 的实子空间，并且在 PSO(2) 作用下不变。由于 PSO(2) 在 $T_\ell^\perp C_1$ 上通过复数乘法作用，$T_\ell^\perp C_1 \cap T_\ell M_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$ 实际上是 $T_\ell C_1^\perp$ 的复子空间。令 ℓ 在 C_1 上变化，我们得出 $T\mathbb{CP}^3|_C$ 分解为

$$T\mathbb{CP}^3|_{C_1} = TC_1 \oplus (T^\perp C_1 \cap TM_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}) \oplus T^\perp M_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}|_{C_1}$$

设 $E = T^\perp C_1 \cap TM_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$。注意到 $p_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}\colon \Omega_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}} \to \mathbb{H}^2$ 诱导出平凡化$dp_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}\colon T^\perp M_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}} \to T_O\mathbb{H}^2$，因此 $T^\perp M_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}|_{C_1}$是一个平凡丛。因此，我们得到第一陈类之间的关系。

$$c_1(T\mathbb{CP}^3|_{C_1}) = c_1(TC_1) + c_1(E)$$

将 C_1 与复定向下的基本类配对后，我们得出 E 作为秩1复向量丛的陈数为 2。该陈数的绝对值将与 e 相同。因此， $|e| = 2$，且切向权重图如所述。□

我们注意到，图 12 中的切向权重图与命题4.15 为 Hir(2; 1，0) 确定的切向权重图相同。因此，由定理 4.9 可得以下结果。

推论 6.11。 对于 $\iota_{\mathsf{p},\ \mathsf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_2$ 和 $\mathcal{F}_\eta = \mathbb{CP}^3$,

(i) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$–等变纤维丛投影 $p_{\mathsf{p},\ \mathsf{r}} : \Omega_{\mathsf{p},\ \mathsf{r}} \to \mathbb{H}^2$ 的纤维为 $M_{\mathsf{p},\ \mathsf{r}}$，它与 $\mathrm{Hir}(2;1,0)$等变微分同胚，其中将$S^1 \cong \mathrm{PSO}(2)$视为同一对象。特别地，$M_{\mathsf{p},\ \mathsf{r}}$ 与 $S^2 \times S^2$微分同胚。*(ii)* 流形$\mathcal{W}_{\mathsf{p},\ \mathsf{r}}$ 与一个伴随丛微分同胚；该丛关联于定义在 S_g 上的$\mathrm{PSO}(2)$主丛，其欧拉类为 $g-1$，纤维为 $S^2 \times S^2$，并带有上述 $\mathrm{PSO}(2)$作用。

6.3. **对于** $G = \mathsf{Sp}(4,\ \mathbb{C})$, $\Omega \subseteq \mathsf{Lag}(\mathbb{C}^4)$。 令 $G = \mathsf{Sp}(4,\ \mathbb{C})$，并令 $\mathcal{F}_\eta = \mathsf{Lag}(\mathbb{C}^4)$。回顾第 3.3 节，若 $\iota_{\mathsf{l},\ \mathsf{i}} = \rho_4$，则任意 $\iota_{\mathsf{l},\ \mathsf{i}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathsf{l},\ \mathsf{i}} : \Gamma \to \mathsf{Sp}(4,\ \mathbb{C})$ 都是 $\{\alpha_1\}$–阿诺索夫表示（其中 $\{\alpha_1\}$ 是$\mathbb{CP}^3$中一条直线的 $\mathsf{Sp}(4,\ \mathbb{C})$–稳定子），并且存在一个不连续域

$$\Omega_{\mathsf{l},\mathsf{i}} = \{L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4) : \xi^1_{\mathsf{l},\mathsf{i}}(t) \not\subseteq L \text{ for all } t \in \mathbb{RP}^1\},$$

其中 $\xi_{\mathsf{l},\mathsf{i}} : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{CP}^3$ 是极限曲线。我们将 $\mathsf{SL}(2)$ 等变投影 $p_{\mathsf{l},\mathsf{i}} : \Omega_{\mathsf{l},\mathsf{i}} \to \mathbb{H}^2$ 的原点上方的纤维记为 $M_{\mathsf{l},\mathsf{i}}$。

类似地，若 $\iota_{\mathsf{l},\mathsf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_1 \oplus \rho_1$，则任意 $\iota_{\mathsf{l},\mathsf{r}}$–福克斯表示 $\rho_{\mathsf{l},\mathsf{r}} : \Gamma \to \mathsf{Sp}(4,\mathbb{C})$ 都是 $\{\alpha_1\}$–阿诺索夫表示，并且存在一个不连续域

$$\Omega_{\mathsf{l},\mathsf{r}} = \{L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4) : \xi^1_{\mathsf{l},\mathsf{r}}(t) \not\subseteq L \text{ for all } t \in \mathbb{RP}^1\},$$

其中 $\xi_{\mathsf{l},\mathsf{r}} : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{CP}^3$ 是极限曲线。我们将 $\mathsf{SL}(2)$ 等变投影 $p_{\mathsf{l},\mathsf{r}} : \Omega_{\mathsf{l},\mathsf{r}} \to \mathbb{H}^2$ 的原点上方的纤维记为 $M_{\mathsf{l},\mathsf{r}}$。

6.3.1. 不可约情形。现在，我们将确定 $M_{lag,irr}$ 的拓扑以及结构群作用。策略与之前类似，但我们需要特别关注所使用的辛形式。

令 V为 $\mathbb{C}^{(2)}[X,Y]$。我们按照第6.2.1节中的方式表示作用于 V上的 $\iota_{\mathsf{l},\mathsf{i}} = \rho_4$。

利用基 $f_3 = (X-iY)^3$, $f_1 = (X-iY)^2(X+iY)$, $f_{-1} = (X-iY)(X+iY)^2$, $f_{-3} = (X+iY)^3$, , 赋予 V辛形式 ω

$$\omega = \begin{bmatrix} & & & -4 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 4 & & & \end{bmatrix}.$$

于是，$\iota_{\mathsf{l},\mathsf{i}} = \rho_4$ 的像包含于 $\mathsf{Sp}(V,\omega)$ 中。因此，我们可以将 $\iota_{\mathsf{l},\mathsf{i}}$ 视为取值于 $\mathsf{Sp}(4,\mathbb{C})$ 的主表示。

我们的目标是在 $\mathsf{Lag}(V,\omega)$ 中找出不动点和例外点。首先，让我们运用常用方法找出 $\mathsf{Gr}_2(V)$ 中的不动点和例外点。回顾一下，f_3, f_1, f_{-1}, f_{-3} 是 V 的 $\mathsf{SO}(2)$ 权基，其权重为

$$\iota_{\mathsf{l},\mathsf{i}}(R_\theta) \cdot f_w = e^{wi\theta} f_w.$$

由于权重互不相同，$\mathsf{Gr}_2(V)$ 中的不动点对应于从 f_3、f_1、f_{-1}、f_{-3} 中选取 2 个基向量。因此，我们得到这些不动点

$$L_{w_1,w_2} = \langle f_{w_1}, f_{w_2} \rangle \text{ for } w_1, w_2 \in \{3,1,-1,-3\} \text{ with } w_1 > w_2$$

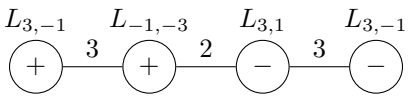


FIGURE 14. PSO(2) 作用在 $M_{\text{I, i}}$上的切向权重图

经观察可知，$L_{3、1}$、 $L_{3、-1}$、 $L_{1、-3}$、 $L_{-1、-3}$ 是拉格朗日的，但 $L_{3、-3}$ 和 $L_{1、-1}$ 不是。

命题6.12。 在$M_{\text{I, i}}$上的$\mathrm{PSO}(2)$作用的切向权重图如图*14*所示。

证明。 现在，对每个固定的拉格朗日子空间 L，我们希望为 T_L Lag(V, ω) 构造一个模型。按照定义 5.2，令 $\mathfrak{u} = \mathbb{C}E_{31} \oplus \mathbb{C}E_{32} \oplus \mathbb{C}E_{41} \oplus \mathbb{C}E_{42}$和 $\varphi_{i,\ j}$: $\mathfrak{u} \to$ Gr$_2$(V) 为相对于旗标基的仿射图

$$
\begin{aligned}
&f_3, f_1, f_{-1}, f_{-3} \text{ if } i = 3,\ j = 1\\
&f_3, f_{-1}, f_1, f_{-3} \text{ if } i = 3,\ j = -1\\
&f_1, f_{-3}, f_3, f_{-1} \text{ if } i = 1,\ j = -3\\
&f_{-1}, f_{-3}, f_3, f_1 \text{ if } i = -1,\ j = -3.
\end{aligned}
$$

那么，对于 $L_{3,\ 1}$，我们有:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{3,1}^{-1}(\mathrm{Lag}(V,\omega)) &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{bmatrix} L_{3,1} \text{ is Lagrangian} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} : \omega(f_3 + af_{-1} + cf_{-3}, f_1 + bf_{-1} + df_{-3}) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} : 4d + a = 0 \right\}.
\end{aligned}
$$

如果将它与对应于 $L_{3,\ 1}$ 的 PSO(2)–差分矩阵进行比较

$L_{3,1}$	f_3	f_1	f_{-1}	f_{-3}
f_3	$*$	$*$	$*$	$*$
f_1	$*$	$*$	$*$	$*$
f_{-1}	-2	-1	$*$	$*$
f_{-3}	-3	-2	$*$	$*$

,

我们看到 T_{L_3},1 Lag(V,ω) 同构于 $V_{-1}^0 \oplus V_{-2}^0 \oplus V_{-3}^0$。因此，$L_3$,1 的符号为 (–)。在 Gr$_2$($V$) 中，根据命题 5.2，存在一个权重 3 的 $\mathbb{CP}^1$，连接 L_3,1 和 $L_{1,-3}$，以及一个权重 2 的 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$，连接 L_3,1、 $L_{3,-3}$,$L_{3,-3}$ 和 $L_{-1,-3}$。因此，在 Lag(V,ω) 中，存在一个权重 3 的 $\mathbb{CP}^1$，连接 L_3,1 和 L_{-3},1，以及一个权重 2 的 $\mathbb{CP}^1$，连接 L_3,1 和 $L_{-1,-3}$。对于其他固定的

拉格朗日子空间，我们有原像和 PSO(2)–差分矩阵

$$\varphi_{-1,-3}^{-1}(\mathrm{Lag}(V,\omega)) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} : 4a + d = 0 \right\},$$

$L_{-1,-3}$	f_{-1}	f_{-3}	f_3	f_1
f_{-1}	$*$	$*$	$*$	$*$
f_{-3}	$*$	$*$	$*$	$*$
f_3	2	3	$*$	$*$
f_1	1	2	$*$	$*$

$$\varphi_{1,-3}^{-1}(\mathrm{Lag}(V,\omega)) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} : 4a - d = 0 \right\},$$

$L_{1,-3}$	f_1	f_{-3}	f_3	f_{-1}
f_1	$*$	$*$	$*$	$*$
f_{-3}	$*$	$*$	$*$	$*$
f_3	1	3	$*$	$*$
f_{-1}	-1	1	$*$	$*$

$$\varphi_{3,-1}^{-1}(\mathrm{Lag}(V,\omega)) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} : a + 4d = 0 \right\},$$

$L_{3,-1}$	f_3	f_{-1}	f_1	f_{-3}
f_3	$*$	$*$	$*$	$*$
f_{-1}	$*$	$*$	$*$	$*$
f_1	-1	1	$*$	$*$
f_{-3}	-3	-1	$*$	$*$

因此，$L_{-1,\,-3}$ 和$L_{3,\,-1}$ 的符号分别为（+），而 $L_{1,\,-3}$ 的符号为（–）。此外，还有一条权重为 3 的 $\mathbb{CP}^1$ 连接$L_{-1,\,-3}$ 和 $L_{3,\,-1}$。这就得到了所描述的切向权重图。□

由推论 4.14 和定理 4.9，我们得到

推论 6.13。对于 $\iota_{\mathfrak{l},\,\mathfrak{i}} = \rho_4$ 和 $\mathcal{F}_\eta$ =拉格(朗)$(\mathbb{C}^4)$，

(i) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$–等变纤维丛投影 $p_{\mathfrak{l},\,\mathfrak{i}} : \Omega_{\mathfrak{l},\,\mathfrak{i}} \to \mathbb{H}^2$ 的纤维为$M_{\mathfrak{l},\,\mathfrak{i}}$，它与 $\mathrm{Hir}(1;\,-1,3)$等变微分同胚，并将 $S^1 \cong$识别为$\mathrm{PSO}(2)$。特别地，$M_{\mathfrak{l},\,\mathfrak{i}}$ 与 $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$微分同胚。*(ii)* 流形 $\mathcal{W}_{\mathfrak{l},\,\mathfrak{i}}$ 与以下丛微分同胚：该丛是与$\mathrm{PSO}(2)$–主丛 S_g 相关联的丛，其欧拉类为 $g-1$，纤维为 $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$，并具有所描述的 $\mathrm{PSO}(2)$–作用。

6.3.2. 可约情形。现在，我们将确定 $M_{\mathfrak{l},\mathfrak{r}}$ 的拓扑和结构群作用。至于 $M_{\mathfrak{l},\mathfrak{r}}$，也会有不动曲面，我们将以类似方式处理。

令 V 为 $\mathbb{C}[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$内由 X_1、Y_1、X_2、Y_2 张成的 $\mathbb{C}$。我们用作用于 V 上的线性作用表示 $\iota_{\mathfrak{l},\mathfrak{r}} = \rho_2 \oplus \rho_1 \oplus \rho_1$，其形式为

$$\iota_{\mathfrak{l},\mathfrak{r}} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \cdot f(X_1, Y_1, X_2, Y_2) = f(dX_1 - cY_1, aY_1 - bX_1, X_2, Y_2)$$

将 $\iota_{\mathfrak{l},\mathfrak{r}}$ 限制到 SO(2)，得到 V 上的线性 SO(2) 作用。V 的权向量为 $f_{1,} = X_1 - iY_1$、$f_{-1} = X_1 + iY_1$、X_2 和 Y_2，其权重为

$$\iota_{\mathfrak{l},\mathfrak{r}}(R_\theta) \cdot f_1 = e^{i\theta} f_1 \qquad \iota_{\mathfrak{l},\mathfrak{r}}(R_\theta) \cdot f_{-1} = e^{-i\theta} f_{-1}$$
$$\iota_{\mathfrak{l},\mathfrak{r}}(R_\theta) \cdot X_2 = X_2 \qquad \iota_{\mathfrak{l},\mathfrak{r}}(R_\theta) \cdot Y_2 = Y_2$$

取基 f_1，f_{-1}，X_2，Y_2，赋予 V 辛形式

$$\omega = \begin{bmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{bmatrix}.$$



FIGURE 15. SO(2) 作用于 $M_{l,r}$ 的切向权重图

换言之，$\langle f_1,\ f_{-1}\rangle$ 和 $\langle X_2,\ Y_2\rangle$ 上的辛形式都与 $\mathbb{C}^2$上的标准辛形式对应。由于 $\mathrm{Sp}(\mathbb{C},\ 2) = \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C})$，可知$\iota_{l,\ r}(\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{R}))$ 保持 ω。因此，我们有 $\iota_{l,\ r}\colon \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(V,\ \omega) \cong \mathrm{Sp}(4,\ \mathbb{C})$。

现在，我们来确定由 SO(2) 作用固定的 V 拉格朗日子空间。

命题6.14. 设 $L \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Lag}(V,\omega),0,\mathrm{SO}(2))$ 则，

- 要么 $L = \langle f_1, \alpha X_2 + \beta Y_2\rangle$ 对某个 $[\alpha:\ \beta] \in \mathbb{CP}^1$,
- 要么 $L = \langle f_{-1}, \alpha X_2 + \beta Y_2\rangle$ 对某个 $[\alpha:\ \beta] \in \mathbb{CP}^1$。

证明。令 $P_1 = \langle X_1,\ Y_1\rangle$和 $P_2 = \langle X_2,\ Y_2\rangle$。注意，$V$的权空间为 $\langle f_1\rangle$、$\langle f_{-1}\rangle$和 P_2。由于 L是 SO(2)不变的，因此它是一个权子模。因此，

$$L = (L \cap \langle f_1\rangle) \oplus (L \cap \langle f_{-1}\rangle) \oplus (L \cap P_2)$$

由于 $P_1 = \langle f_1,\ f_{-1}\rangle$ 和 P_2 都不是各向同性的，所以必有 $L =$$(L \cap P_1)$ 或 $\oplus\, (L \cap P_2)$。注意，$L \cap P_1$ 是 P_1中的一条 SO(2)不变直线。由于 SO(2) 作用在 P_1 上的权重各不相同，唯一的 SO(2)不变直线就是权空间 $\langle f_1\rangle$ 和 $\langle f_{-1}\rangle$。因此，必有 $L = \langle f_1\rangle \oplus L \cap P_2$ 或 $L = \langle f_{-1}\rangle \oplus L \cap P_2$。最后注意，$P_2$ 中的任意直线都是 SO(2)不变的，并且与 P_1关于ω正交。因此，任取直线 $\langle \alpha X_2 + \beta Y_2\rangle$ 都可作为 $L \cap P_2$。□

现在，为了确定切向权重图，我们只需计算这些不动曲面的欧拉类。我们将用到一个关于射影簇的陈类的有用事实。

命题 6.15 ([EH16, 例 5.19])。设 $\mathbb{P}^n$ 为一个复射影空间，α 为 $\mathbb{P}^n$中一个超平面的庞加莱对偶。考虑 $\mathbb{P}^n$ 中的 Z_1、.....、Z_k 个代数超曲面，其度分别为 d_1、.....、d_k。假设它们的交集

$$X = Z_1 \cap \cdots \cap Z_k$$

是一个完全交。那么，X的切丛的第一陈类为

$$\left(n + 1 - \sum_{i=1}^{k} d_i\right) \alpha|_X.$$

命题 6.16。M_{l}上的$\mathrm{SO}(2)$作用是有效的，且其切向权重图如图 *15* 所示，$_{r}$

证明。在 $\mathrm{Lag}(V,\omega)$上固定一个厄米度量。令 $L \in C = \{\langle f_1, \alpha X_2 + \beta Y_2\rangle\colon\ [\alpha:\beta] \in \mathbb{CP}^1\}$。选取某个 v_2，使得 v_1, v_2 构成 $\langle X_2, Y_2\rangle$的一组基。于是，使用基 f_1, v_1, f_{-1}, v_2，L 的 SO(2) 差矩阵为

L	f_1	v_1	f_{-1}	v_2
f_1	$*$	$*$	$*$	$*$
v_1	$*$	$*$	$*$	$*$
f_{-1}	-2	-1	$*$	$*$
v_2	-1	0	$*$	$*$

-2 项对应于 $T_L^{\perp} M_{\mathsf{l},\mathsf{r}} \cong T_O \mathbb{H}^2$。因此，SO(2) 作用在 $T_L M_{\mathsf{l},\mathsf{r}}$上的权重为 -1 和 0，对每个 $L \in C$均如此。因此，我们得出结论，SO(2) 作用在$M_{\mathsf{l},\mathsf{r}}$ 上是有效的。由于 $M_{\mathsf{l},\mathsf{r}}$ 仅包含两个不动曲面，其切向权重图必定有两个方形顶点，标记为 e 和 $-e$，其中某个 $e \in \mathbb{Z}$。与命题 6.10 中一样，权重仅为 -1 或 0 这一事实意味着 $TM_{\mathsf{l},\mathsf{r}}$ 是 $T\mathrm{Lag}(V,\omega)|_{M_{\mathsf{l},\mathsf{r}}}$的一个复子丛。 e的绝对值将与 $T^{\perp}C \cap TM_{\mathsf{l},\mathsf{r}}$的陈数绝对值一致。

首先，我们将 $\mathrm{Gr}_2(V)$ 视为 $\mathbb{P}(\wedge^2 V)$ 中由 Pl¨ucker 关系定义的代数簇

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$$

其中，x_{ij} 是对应于 $x_i \wedge x_j$ 的齐次坐标，其中 x_1、x_2、x_3、x_4是我们的原基 f_1、f_{-1}、X_2、Y_2。然后，$\mathrm{Lag}(V、\omega)$ 是 $\mathrm{Gr}_2(V)$ 的一个子簇，它是通过添加以下关系得到的

$$x_{12} + x_{34} = 0$$

此外，C 是 $\mathbb{P}(\wedge^2 V)$ 中由 $f_1 \wedge X_2$ 和 $f_1 \wedge Y_2$张成的射影直线。因此，我们有如下子簇包含关系

$$C \subseteq \mathrm{Lag}(V,\omega) \subseteq \mathrm{Gr}_2(V) \subseteq \mathbb{P}(\wedge^2 V).$$

注意，由于 $\mathrm{Lag}(V、\omega)$ 是由一组方程定义的子簇，其中包含一个二次关系和一个一次关系，其切丛的第一陈类为

$$(6-2-1)\alpha|_{\mathrm{Lag}(V,\omega)} = 3\alpha|_{\mathrm{Lag}(V,\omega)}$$

其中，α 是一个超平面的庞加莱对偶，也是 $H^2(\mathbb{P}(\wedge^2 V)\ \mathbb{Z})$ 的生成元。此外，同构 $H^2(\mathbb{P}(\wedge^2 V)\ \mathbb{Z}) \cong H^2(C、\mathbb{Z})$ 意味着 $\alpha|_C$ 生成 $H^2(C、\mathbb{Z})$。因此，

$$c_1(T^{\perp}C) = c_1(T\,\mathrm{Lag}(V,\omega)|_C) - c_1(TC) = 3\alpha|_C - 2\alpha|_C = \alpha|_C$$

由于 $T^{\perp}M_{\mathsf{l},\ \mathsf{r}}$是 $T\mathrm{Lag}(V,\ \omega)|_{M_{\mathsf{l},\ \mathsf{r}}}$的平凡子丛，我们得出

$$c_1(T^{\perp}C \cap TM_{\mathsf{l},\mathsf{r}}) = 3\alpha|_C.$$

因此，$T^{\perp}C \cap TM_{\mathsf{l},\ \mathsf{r}}$的欧拉类的绝对值为 1。这给出了所描述的切向权重图。□

请注意，这个切向权重图与命题4.15中 $\mathrm{Hir}(1;1,\ 0)$ 所描述的图一致。因此，由定理 4.9，我们得出以下结论。

推论 6.17. 对于 $\iota_{\mathsf{l},\ \mathsf{r}} = \rho_2 \oplus \rho_1 \oplus \rho_1$ 和 $\mathcal{F}_\eta = \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^4)$，

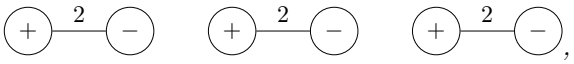
(i) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$–等变纤维丛投影 $p_{\mathsf{l},\ \mathsf{r}} : \Omega_{\mathsf{l},\ \mathsf{r}} \to \mathbb{H}^2$ 的纤维为$M_{\mathsf{l},\ \mathsf{r}}$，且在识别 $S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$后，等变微分同胚于 $\mathrm{Hir}(1;1,\ 0)$。特别地，$M_{\mathsf{l},\ \mathsf{r}}$ 微分同胚于 $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$。*ii* 流形$\mathcal{W}_{\mathsf{l},\ \mathsf{r}}$ 微分同胚于与 S_g 上欧拉类为 $2g-2$ 的 $\mathrm{SO}(2)$–主丛相伴的丛，其纤维为 $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$，并带有上述 $\mathrm{SO}(2)$–作用。 —

6.4. **总结**。 我们最后通过以下定理总结推论 6.2、6.5、6.9、6.11、6.13 和 6.17 的结果。

定理 6.18. 对于$(G, \mathcal{F}_\eta, \iota)$ 作为命题 *3.8* 表格中的条目列出时，相应的不连续区域 Ω_ρ^I 具有一个纤维 M_ρ^I，其有效结构群为 Q，且其切向权重图上的 Q–作用如下：

(1) 对于 $G=\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$，$\mathcal{F}_\eta=$旗$(\mathbb{C}^3)$，则 M_ρ^I与$(S^2\times S^2)\#(S^2\times S^2)$微分同胚。此外，

- 若 $\iota=\rho_3$，则 $Q=\mathrm{PSO}(2)$ 且切向权重图为

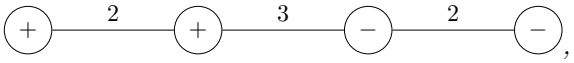


- 若 $\iota=\rho_2\oplus\rho_1$，则 $Q=\mathrm{SO}(2)$ 且切向权重图为



(2) 对于 $G=\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$，$\mathcal{F}_\eta=\mathbb{CP}^3$，则 M_ρ^I与 $S^2\times S^2$微分同胚。此外，

- 若 $\iota=\rho_3$，则 $Q=\mathrm{PSO}(2)$ 且切向权重图为

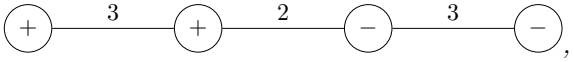


- 若 $\iota=\rho_2\oplus\rho_2$，则 $Q=\mathrm{PSO}(2)$ 且切向权重图为



(3) 对于 $G=\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$，$\mathcal{F}_\eta=$拉格朗日子空间$(\mathbb{C}^4)$，则 M_ρ^I 与 $\mathbb{CP}^2\times\mathbb{CP}^2$ 微分同胚。此外，

- 若 $\iota=\rho_3$，则 $Q=\mathrm{PSO}(2)$，且切向权重图为



- 若 $\iota=\rho_2\oplus\rho_1\oplus\rho_1$，则 $Q=\mathrm{SO}(2)$，且切向权重图为



References

[ADL24] Daniele Alessandrini、Colin Davalo 和 Qiongling Li。《具有（拟）Hitchin 全纯单值化的射影结构》。载于：伦敦数学会杂志110.4（2024），e13003。 DOI：https://doi. org/10.1112/jlms.13003.[AMTW23] Daniele Alessandrini、Sara Maloni、Nicolas Tholozan 和 Anna Wienhard。与阿诺索夫表示相关的纤维丛。2023。arXiv：2303 . 10786 [math.GT]。 URL：https :/ / arxiv . org / abs/ 2303.10786.[BB06] A. Bjorner 和 F. Brenti。*Coxeter* 群组合学。数学研究生教材。Springer 柏林海德堡，2006。 ISBN：9783540275961.[BD85] Theodor Br¨ocker 和 Tammo tom Dieck。《初等表示论》。载于：紧李群的表示。柏林，海德堡：Springer 柏林海德堡，1985，第64–122 页。 ISBN：978- 3-662-12918-0。 DOI：10.1007/978-3-662-12918-0_2。[BPS19] Jairo Bochi、Rafael Potrie 和 Andr´es Sambarino。《阿诺索夫表示与支配分裂》。载于：欧洲数学会杂志21.11（2019 年 7 月），第 3343–3414 页。 ISSN：1435- 9863。 DOI：10.4171/jems/905。 URL：http://dx.doi.org/10.4171/JEMS/905。

[Bre72] 《第六章：光滑作用》。载于：紧致变换群导论。Glen E. Bredon 编。第 46 卷，《纯粹与应用数学》。Elsevier，1972，第 296–368 页。 DOI: https://doi. org / 10 . 1016 / S0079 - 8169(08) 60137 - 3。 URL: https : // www. sciencedirect.com/science/article/pii/S0079816908601373.[CM93] David Collingwood 和 William McGovern。半单李代数中的幂零轨道 -

李代数。Chapman & Hall，1993年。[CS24] Le´on Carvajales 和 Florian Stecker。《阿诺索夫表示在齐性空间上的作用：不连续域》。载于：《数学进展》459（2024年），第110022页。 ISSN: 0001-8708。 DOI: https : // doi .org / 10 . 1016/ j.aim . 2024 .110022。 URL: https:/ /www. sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870824005383.[Cul86] Marc Culler。《将表示提升到覆盖群》。载于：《数学进展》59.1（1986年），第64–70页。 ISSN: 0001-8708。 DOI: https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90037-X。[DE25a] Colin Davalo 和 Parker Evans。《 G_2'-曲面群表示的几何结构》。2025年。arXiv: 2510 . 12757 [math.DG]。 URL: https://arxiv.org/abs/2510.12757。[DE25b] Colin Davalo 和 Parker Evans。《$SO_0(p, p+1)$-Hitchin 表示在爱因斯坦宇宙中的几何结构》。2025年。arXiv: 2510.12779 [math.GT]。 URL: https://arxiv.org/abs/2510.12779。[DS20] Emily Dumas 和 Andrew Sanders。《与广义拟 Fuchsian 表示相关的紧复流形的几何》。载于：《几何与拓扑》24.4（2020年），第1615–1693页。 DOI: 10.2140/ gt.2020.24.1615。 URL: https://doi.org/10.2140/gt.2020.24. 1615。[EH16] David Eisenbud 和 Joe Harris。《3264及其全部：代数几何第二课程》。剑桥大学出版社，2016年。[Fin77] Ronald Fintushel。《单连通四维流形上的圆周作用》。载于：《美国数学会汇刊》230（1977年），第147–171页。 ISSN: 00029947。 URL: http://www.jstor.org/stable/ 1997715。[GGKW17] Fran¸cois Gu´eritaud、Olivier Guichard、Fanny Kassel 和 Anna Wien- hard。《阿诺索夫表示与适当作用》。载于：《几何与拓扑》21.1（2017年2月），第485–584页。 ISSN: 1465-3060。 DOI: 10 . 2140/gt.2017.21.485。 URL: http://dx.doi.org/10.2140/gt. 2017.21.485。[GW08] Olivier Guichard 和 Anna Wienhard。《$PSL_4(\mathbb{R})$的凸叶状射影结构与Hitchin 分支》。载于：（2008年）。[GW12] Olivier Guichard 和 Anna Wienhard。《阿诺索夫表示：不连续域及其应用》。载于：《数学发明》190.2（2012年2月），第357–438页。 ISSN: 1432-1297。 DOI: 10.1007/ s00222-012-0382-7。 URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00222- 012-0382-7。[Har] Mason Hart。《通过同伦类型区分阿诺索夫表示的分支》。编写中。

[Hir87] Friedrich Hirzebruch。《Friedrich Hirzebruch文集》。1：1951–1962。Springer数学文库。1987年。ISBN：9783642415807；3642415806。[Jan18] Donghoon Jang。《具有离散不动点集的定向流形上的圆作用及四维分类》。载于：《几何与物理学杂志》133（2018年11月），第181–194页。ISSN：0393-0440。DOI：10.1016/j.geomphys.2018.07.010。URL：http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2018.07.010。[Jan19] Donghoon Jang。《具有四个不动点的近复流形上的圆作用》。载于：《数学杂志》294.1–2（2019年4月），第287–319页。ISSN：1432-1823。DOI：10.1007/s00209-019-02267-z。URL：http://dx.doi.org/10.1007/s00209-019-02267-z。[JM23] Donghoon Jang 和 Oleg R. Musin。《定向四维流形上的圆作用》。2023年。arXiv：2307.04576 [math.AT]。URL：https://arxiv.org/abs/2307.04576。[Joh74] James D. Stasheff John Milnor。《特征类》。数学年鉴研究丛书76。普林斯顿大学出版社，1974年。ISBN：0691081220；9780691081229。[KLP17a] Michael Kapovich、Bernhard Leeb 和 Joan Porti。《阿诺索夫子群：动力学与几何刻画》。2017年。arXiv：1703.01647[math.GR]。URL：https://arxiv.org/abs/1703.01647。[KLP17b] Michael Kapovich、Bernhard Leeb 和 Joan Porti。《旗流形上的动力学：适当不连续域与余紧性》。载于：《几何与拓扑》22.1（2017年），第157–234页。[Kob95] Shoshichi Kobayashi。《黎曼流形的等距变换》。载于：《微分几何中的变换群》。柏林、海德堡：Springer 柏林海德堡，1995年，第39–76页。ISBN：978-3-642-61981-6。DOI：10.1007/978-3-642-61981-6_2。URL：https://doi.org/10.1007/978-3-642-61981-6_2。[Lab05] Francois Labourie。《阿诺索夫流、曲面群与射影空间中的曲线》。2005年。arXiv：math/0401230 [math.DG]。URL：https://arxiv.org/abs/math/0401230。[LM06] Francois Lalonde 和 Dusa McDuff。《纤维丛上的辛结构》。2006年。arXiv：math/0010275 [math.SG]。URL：https://arxiv.org/abs/math/0010275。[Mor01] Shigeyuki Morita。《微分形式几何》。数学专著译丛。美国数学会，2001年。ISBN：0821810456。[MY60] Deane Montgomery 和 C. T. Yang。《实数域上主轨道维数为 $n-3$的群》。载于：《伊利诺伊数学杂志》4（1960年），第507–517页。[NR24] Alexander Nolte 和 J. Maxwell Riestenberg。《凹叶状旗结构与$SL_3(\mathbb{R})$ Hitchin 分支》。2024年。arXiv：2407.06361 [math.GT]。URL：https://arxiv.org/abs/2407.06361。[OV93] Arkadij L. Onishchik 和 Ernest Borisovich Vinberg。《李群与李代数III》。1993年。

[Per02] 格里戈里·佩雷尔曼。里奇流的熵公式及其几何应用。2002年。arXiv: math / 0211159 [math.DG]。 URL: https://arxiv.org/abs/math/0211159.[Rei 96] 迈尔斯·里德。代数曲面专题。1996年。arXiv: alg-geom/9602006 [alg-geom]。 URL: https://arxiv.org/abs/alg-geom/ 9602006.[Sei80] 赫伯特·塞弗特。“三维纤维化空间的拓扑”。载于：塞弗特与特雷尔法尔：一本拓扑学教科书。沃尔夫冈·海尔译。原德文论文发表于1932年《数学学报》。学术出版社，1980年，第359–437页。[Ste18] Florian Stecker。“阿诺索夫表示的平衡理想与不连续域”。载于：《专献几何》218（2018年）。