arXiv:2601.07712v1 [cs.GT] 12 Jan 2026

强化基于时刻表的用户均衡公共交通分配中的优先级

Liyang Feng[1, 2], Hanlin Sun[2], Yu (Marco) Nie[3], Jun Xie[*1]，以及 Jiayang Li[*2]

[1]西南交通大学交通与物流学院，中国成都[2]香港大学数据与系统工程系，中国香港[3]西北大学土木与环境工程系，美国伊利诺伊州

摘要

拥挤的公共交通系统中的拒载会导致排队延误和出发时间变化，进而重塑客流。在公共交通分配中正确建模这些响应，关键在于执行两项优先规则：车上乘客享有持续乘车优先权，候车乘客之间实行先到先服务（FCFS）上车。现有基于时刻表的模型通常通过显式动态加载和群体层面的期望成本来执行这些规则，但离散车辆班次可能导致显著的群体内部成本差异，从而削弱行为一致性。我们重新审视 Nguyen 等人（2001）的隐式优先级框架 [《基于时刻表的交通网络乘客分配建模框架》。《交通科学》35(3)：238–249], 。该框架通过可用容量这一概念编码上车优先级，并根据实际的个人出行体验（而非群体平均体验）刻画路径和出发选择。然而，该框架缺乏明确的数学表述以及求解均衡的精确计算方法。在此，我们推导出一个等价的非线性互补问题（NCP）表述，并在温和条件下证明均衡存在性。我们还表明，多重均衡可能存在，其中包括在行为上存在疑问的均衡。为排除这些伪影，我们提出一种改进的弧级非线性互补问题表述。该表述不仅对应于更严格且具有行为一致性的均衡概念，而且在计算上也更易处理。我们将 NCP 重新表述为一个连续可微的均衡约束数学规划（MPEC），并提出两种求解算法。基准算例和香港案例研究的数值研究表明，该模型能够再现持续乘车优先权和先到先服务排队，并捕捉由上车优先级竞争所驱动的出发时间变化。

关键词：基于时刻表的公共交通分配；上车优先级；非线性互补问题

1 引言

在人口稠密且公共交通是主要出行方式的城市地区，候车乘客常常因公共交通车辆容量有限而无法登上驶来的车辆。例如，在香港，晚高峰期间，从香港岛开往九龙的公交车往往在前几个站点就已满载，导致中间站的乘客眼看着几辆公交车驶过，却没有空位可上车。这种现象在当地被称为“顶闸”（香港巴士维基，2025年）。在北京的沙河镇，作为北京最大的

*通讯作者。电子邮箱：jun.xie@swjtu.edu.cn (Jun Xie)；jiayangl@hku.hk (Jiayang Li)。

郊区住宅区之一，拥挤情况可能非常严重，通勤者在地铁站候车，最长要等30分钟才能上车（《北京日报》，2023年）。因此，缓解此类拥挤是交通规划者和运营方的核心目标。然而，为了制定有效决策，需要可靠地预测乘客如何选择路径，以及如何根据运力紧张造成的延误调整出发时间。这项任务通常通过公共交通分配模型来处理。

1.1 挑战

公共交通分配模型大致可分为基于频率的模型和基于时刻表的模型。前一类模型以服务频率而非确切的出发时间来表示每条线路，并假设站点上的所有乘客都经历相同的预期等待时间，而不考虑他们实际的到达时间（Spiess 和 Florian，1989；Wu 等，1994；Cominetti 和 Correa，2001；Cepeda 等，2006；Xu 等，2020、2022）。虽然这类模型可以在路段层面将车辆容量设为约束，但无法在物理层面体现容量导致的延误，尤其是乘客错过一辆或多辆驶过的车辆时所产生的延误。基于时刻表的模型则更适合处理车辆容量限制的物理影响，因为这类模型通常会依据公布的时刻表来表示各个车辆班次。在这些模型中，乘客可以根据首个公共交通站点的预期上车时间来选择从家中出发的时间，而该时间可能与首辆车的到达时间并不一致（换言之，模型明确考虑了排队时间）。然而，现实性增强也使分配问题变得更加复杂。一个棘手的关键问题是：当车辆容量不足时，哪些乘客可以优先获得座位。这涉及持续乘车优先权（即已上车的乘客必须留在车上）以及先到先服务（*FCFS*）规则（即候车乘客按到达顺序上车）（Hamdouch 和 Lawphongpanich，2008）。

一种常见的优先级建模方法是采用动态网络加载（DNL）（Nuzzolo 等人，2001；Poon 等人，2004；Papola 等人，2008；Hamdouch 等人，2011；Nuzzolo 等人，2012；Hamdouch 等人，2014；Cats 等人，2016；Gentile 和 N¨okel，2016；Yao 等人，2017；Cats 和 West，2020）。在这些模型中，乘客按照所选路径和出发时间进行分组，动态网络加载过程会根据优先规则明确地模拟乘客在所有站点的上车情况。由于车辆容量限制，同一组内的个体可能承担不同的实际成本，因此通常会计算流量加权的期望出行成本，作为该组的代表成本。据此，均衡被定义为这样一种状态：任何一组都无法通过更换路径或出发时间来降低其期望出行成本。然而，在基于时刻表的公共交通模型中，服务在时间上本质上是离散的。因此，即使组规模趋近于零，组内的成本差也不一定会消失，因为剩余容量紧张仍可能导致一组乘客被分配到连续的不同班次上。这不仅仅是数学上的细节：即便在极限情况下，假定同一组内的乘客行为完全相同也值得质疑，因为他们所感受到的成本差异足以引发行为偏离[1]。

另一种方法由 Nguyen 等人（2001）率先提出，我们称之为隐式优先级排序。该框架不模拟登车事件，而是通过可用容量的概念来隐式地编码优先级。具体而言，已经上车的乘客享有最高优先级（持续乘车优先权），其次是按照到达站点的先后顺序排列的候车乘客（先到先服务）。随后，将上车弧的可用容量定义为：先为优先级更高的弧上的所有乘客分配座位后，车辆剩余的容量。如果某条弧上的可用容量不大于零，那么经由该弧到达的乘客就无法搭乘该

[1]在附录A中，我们通过一个简单示例更具体地说明这一问题。

弧的乘客在该班次中无法上车，必须等待下一班。利用这种表示方式，Nguyen 等人（2001）提出了一种新的均衡原理：只有当某条路径上的所有上车弧在均衡状态下都具有正的可用容量时，乘客才能改选该路径。换言之，只有在改选路径不会挤走优先级更高的乘客，也不会使任何车辆路段超载时，才允许改选。这样一来，部分乘客能够顺利上车，而其他乘客可能会被留下；同时，模型会根据每个人的实际体验，分别刻画其调整决策的动机。

尽管 Nguyen 等人（2001）的框架在概念上十分优雅，但尚未得到充分发展。虽然该框架给出了明确定义的均衡条件，但一种便于分析或计算的数学表述仍未明朗。目前还没有提出能够求得满足原始优先级约束的均衡的精确算法。相反，Nguyen 等人（2001）求解了一个放宽优先级约束的近似问题，因此如何获得精确解仍是一个悬而未决的问题。

1.2 我们的贡献

我们为 Nguyen 等人（2001）的模型提出了一种等价的非线性互补问题（NCP）公式。利用这一公式，我们证明了在温和条件下均衡状态的存在性。据我们所知，这一理论结果此前尚未得到确立。该结果为在一般公共交通分配情境中应用该模型奠定了基础。我们还表明，多重均衡确实存在，而且更重要的是，其中一些在行为上并不现实。

鉴于这一发现，我们进一步提出了一种改进的 NCP 公式，并证明它只会产生行为一致的均衡解。新的 NCP 公式在计算上更易处理：由于它在弧层面而非路径层面施加优先规则，因此可以利用常用的列生成技术，避免路径枚举。我们使用 Fischer–Burmeister 函数，将“硬性”优先级条件重新表述为一个连续可微函数的零点集，并将该函数作为一个仍与原问题等价的均衡约束数学规划（MPEC）的上层目标。随后，我们采用两种方法求解这一 MPEC：一种基于隐式微分的下降法，以及一种基于非线性规划的方法。

最后，我们通过一系列数值研究展示了改进模型的实际适用性，其中包括 Nguyen 等人（2001）提出的基准，以及基于 Sioux Falls 网络构建的假设性基于时刻表的公共交通网络。具体而言，我们对前往香港大学的早高峰通勤开展了一项现实案例研究，乘客可选择公交车或地铁服务，而地铁乘客可能会在车站电梯处遭遇严重排队。模型准确再现了电梯处的先到先服务排队现象，并揭示了公交乘客因争夺上车优先级而提前出发的调整；需求水平越高，这种调整幅度越大。

1.3 组织结构

本文其余部分安排如下。第 2 节对问题进行设定，并介绍现有的带优先权的基于时刻表的公共交通分配模型。第 3 节通过提出一个等价的非线性互补问题公式，重新审视 Nguyen 等人（2001）的框架，证明其解的存在性，并考察其中一些解所表现出的行为不现实性。第 4 节介绍我们改进后的模型，讨论其解析性质，并开发用于求解该模型的算法。第 5 节报告数值实验，以验证所提出的模型和算法；第 6 节总结全文。

2 Nguyen 等人的模型

2.1 问题设定

公共交通网络。考虑一个公共交通系统，其中 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{L}$ 分别表示公交站点和公交线路的集合。对于每条线路 $l \in \mathcal{L}$，令 $s_l^i \in \mathcal{S}$ 表示其经过的第 i 个站点（$i = 1, \ldots, n_l$），其中 n_l 为该线路服务的站点总数。每条线路 l 有 m_l 个班次，每个班次 j（$j = 1, \ldots, m_l$）均遵循一份时刻表，其中规定了其在站点 s_l^i（$i = 1, \ldots, n_l$）的到达时间 $\tau_l^{\text{arr}}{}_{,j,i}$ 和出发时间 τ^{dep} l,j,i。除每个班次在首站的到达时间 $\tau_l^{\text{arr}}{}_{,j,1} = -\infty$ 以及在末站的出发时间 τ^{dep} l,j,$n_l = \infty$ 外，所有时刻表数值均定义在离散时间轴 $\mathcal{T}$ 上。

乘客通过以下方式使用该系统。设 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}$ 分别表示出发地集合和目的地集合。乘客可以从起点步行至一定步行范围内的任意站点；对于每个起点$o \in \mathcal{O}$，相应的可达站点集合记为 $\mathcal{S}_o^{\text{walk}} \subseteq \mathcal{S}$，从$o$到$s \in \mathcal{S}_o^{\text{walk}}$的步行时间为$t_{o\,s}^{\text{walk}}$，。随后，他们沿公交线路在站点之间出行。最后，他们在目的地步行范围内的某个站点下车，再步行前往目的地；对于每个目的地$d \in \mathcal{D}$，相应的可达站点集合记为 $\mathcal{S}_d^{\text{walk}} \subseteq \mathcal{S}$，从$s \in \mathcal{S}_d^{\text{walk}}$到$d$的步行时间为$t_{d\,s}^{\text{walk}}$。出行过程中，乘客可以在多条线路共用的任意站点换乘。不过，为简化起见，我们不允许需要步行前往其他站点的换乘，但将此类换乘纳入模型并不困难。

例如，图1展示了一个小型公共交通网络，其中有四个站点 A、B、C 和 D，以及两条线路。1号线是只有一个班次的普通线路，2号线是有两个班次的快线。时刻表

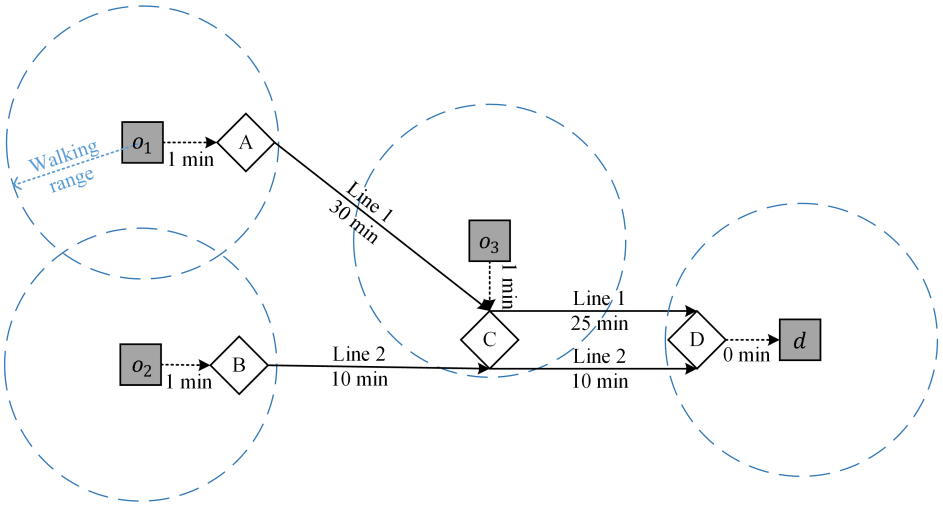


图1：公共交通网络示例。

所有班次的时刻表见表1。有三个出发地，o_1, o_2, 和o_3, ，分别通过步行与站点 A、B 和 C 相连；另有一个目的地d，通过步行与站点 D 相连。每个出发地到其对应站点的步行时间为 1 分钟，而目的地到其对应站点的步行时间为 0 分钟。

对于一个起讫点对 $w = (o,d) \in \mathcal{W} := \mathcal{O} \times \mathcal{D}$，乘客可能有不同的期望到达时间。我们将他们划分为有限个类别 $\mathcal{B}_w$，其中每个类别 $b \in \mathcal{B}_w$ 都有一个期望到达时间窗$[\tau^-{}_{w,b}, \tau^+{}_{w,b}]$ 和固定需求 $d_{w,b} \in \mathbb{R}_+$。每位乘客都要选择出发时间和出行路径。

表1：示例网络的时刻表。

线路	Runs	A站		B站		C站		D站	
		到达	出发	到达	出发	到达	出发	到达	出发
1	1	$-\infty$	7:25	-	-	7:55	7:55	8:20	∞
2	1	-	-	$-\infty$	7:50	8:00	8:00	8:10	∞
2	2	-	-	$-\infty$	8:10	8:20	8:20	8:30	∞

当所有公共交通车辆的容量都足够，乘客总能搭乘其到达站点后第一辆到达的车辆时，指定乘客的出发时间、接入站点、换乘站点和离开站点，以及公交线路序列，就能完全确定其到达目的地的时间：任何两位乘客只要作出相同的上述选择，到达时间就会相同。然而，在超饱和条件下，部分乘客可能遭遇拒载，不得不等待后续车辆。在这种情况下，上述粗略描述已不足以反映他们的实际出行经历。我们必须改为描述其详细的时空事件，包括他们上车、换乘车辆和下车的时间。

事件—活动图。为表示此类事件，我们构建了事件—活动图 $\mathcal{H}(\mathcal{E}, \mathcal{A})$，其中每个节点 $\mathrm{E} \in \mathcal{E}$ 对应于特定时间发生的事件（Yin 等人，2025）。这些事件包括：(1) $\mathrm{E}_{o}^{\mathrm{str}}{}_{,t}$ (时间戳 t)，表示起点为 $\mathrm{o} \in \mathcal{O}$ 且在时间 $\mathrm{t} \in \mathcal{T}$开始行程的乘客的出发事件；(2) $\mathrm{E}^{\mathrm{dep}}\,\mathrm{l,j,i}$（时间戳 $\tau^{\mathrm{dep}}\,\mathrm{l,j,i}$），表示线路 $\mathrm{l} \in \mathcal{L}$ 的班次 $\mathrm{j} = 1, \ldots\ldots, \mathrm{m}_l$ 在站点 s_l^i 的出发事件，其中 $\mathrm{i} = 1, \ldots\ldots, \mathrm{n}_l$；以及 (3) $\mathrm{E}^{\mathrm{arr}}{}_{,j,i}$（时间戳 $\tau_{l}^{\mathrm{arr}}{}_{i,j,}$），表示线路 l 的班次 $\mathrm{j} = 1, \ldots\ldots, \mathrm{m}_l$ 在站点 s_l^i 的到达事件，其中 $\mathrm{i} = 1, \ldots\ldots, \mathrm{n}_l$。此外，我们创建了两类虚拟节点：(4) 对每个 $\mathrm{o} \in \mathcal{O}$ 设置的 $\mathrm{E}_o^{\mathrm{ogn}}$，以及 (5) 对每个 $\mathrm{d} \in \mathcal{D}$ 设置的 $\mathrm{E}_d^{\mathrm{dst}}$，分别表示乘客进入公共交通系统之前行程的起始点，以及完成行程后的终点。为连接这些事件节点，我们引入了活动弧，每个 $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ 表示乘客进行的一种可行时空移动，具体如下。

(1) **接入弧**：$\mathcal{A}^{\mathrm{access}}$。对于每个起点 $o \in \mathcal{O}$ 和出发时间 $t \in \mathcal{T}$，添加一条从 E_o^{ogn}到 $E_{o\,t}^{\mathrm{str}}$的弧，表示起点 o 处的乘客选择在时间 t开始行程。

(2) **上车弧**：$\mathcal{A}^{\mathrm{boarding}}$。对于每个 $o \in \mathcal{O}$ 和 $t \in \mathcal{T}$，以及每条线路 $l \in \mathcal{L}$ 和站点索引$i = 1, \ldots, n_l$，若 $s_l^i \in \mathcal{S}_o^{\mathrm{walk}}$，则对于每个满足$\tau^{\mathrm{dep}}{}_{l,j,i} \geq t + t^{\mathrm{walk}}{}_{o,s_l^i}$的班次 $j = 1,\ldots,m_l$，添加一条从 $E_o^{\mathrm{str}}{}_{,t}$到 $E^{\mathrm{dep}}{}_{l,j,i}$的弧。这些弧表示乘客步行至站点 s_l^i，并尝试乘坐任何在其到达站点后发车的班次。

(3) **停留弧**：$\mathcal{A}^{\mathrm{dwelling}}$。对于每条线路$l \in \mathcal{L}$和班次$j = 1, \ldots, m_l$，添加一条从$E^{\mathrm{arr}}{}_{,j,i}$到$E^{\mathrm{d}}$。即$i = 1, \ldots, n_l - 1$，表示车辆停靠在站点$s_l^i$时乘客留在车内的弧。

（4）**乘车弧**：$\mathcal{A}^{\mathrm{riding}}$。对于每条线路$l \in \mathcal{L}$和班次$j = 1$、……、$m_l$，对于每个$i = 1$、……、$n_l - 1$，从$s_l^i$站到$s^{i+1}{}_l$站行驶时，在$E^{\mathrm{dep}}{}_{l}$、$_{j}$、$_{i}$与$E_l^{\mathrm{arr}}$、$_{j}$、$_{i+1}$之间添加一条弧，表示仍留在车内的乘客。

(5) **换乘弧**：$\mathcal{A}^{\mathrm{transfer}}$。对于任意两条线路 l、$l' \in \mathcal{L}$ 以及站点索引 $i = 1, \ldots, n_l$和 $i' = 1, \ldots, n_{l'}$，若$s_{l}^{i} = s^{i'}{}_{l'}$，则对于每个班次 $j = 1, \ldots, m_l$和 $j' = 1, \ldots, m_{l'}$，若 $\tau_l^{\mathrm{arr}}{}_{,j,i} \leq \tau^{\mathrm{dep}}{}_{l',j,i'}$，则添加一条从 $E_l^{\mathrm{arr}}{}_{,j,i}$到

$E^{\text{dep}}_{l',j',i'}$。该弧表示乘客在$s^i_l$ 站点从线路 l 下车，并换乘至同一站点稍后发车的线路l' 的一个班次。

(6) 离站弧： $\mathcal{A}^{\text{egress}}$。对于每个目的地 $d \in \mathcal{D}$，以及每条线路 $l \in \mathcal{L}$ 和站点索引 $i = 1, \ldots\ldots, n_l$，如果$s^i_l \in \mathcal{S}^{\text{walk}}_d$，则对于每个班次 $j = 1, \ldots\ldots, m_l$，添加一条从 $E^{\text{arr}}_{l,j,i}$ 到 E^{dst}_d的弧。这表示乘客在站点 s^i_l 下车后步行前往目的地 d。

图2展示了与图1中的公共交通网络和表1中的时刻表相对应的事件—活动图。圆形节点表示车辆到达和出发事件，方形节点表示出发地和目的地，六边形节点表示乘客出发时间。为简便起见，我们为出发地 o_1 和o_2 各设置一个出发时间（分别为7:24和7:53），并为出发地 o_3 设置两个出发时间（7:49和8:09）。

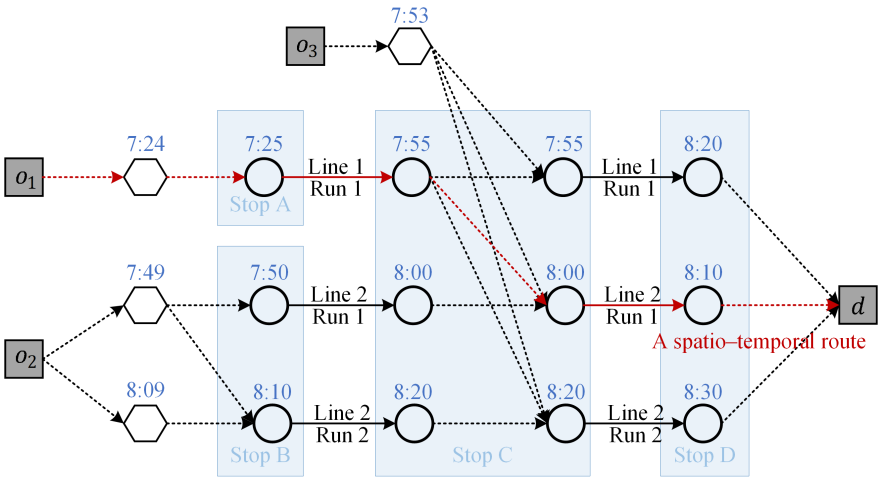


图2：示例公共交通网络的事件—活动图。

时空路径。 根据上述构造，从E^{ogn}_o到E^{dst}_d的每条路径都代表起讫点对$w = (o,d) \in \mathcal{W}$乘客的一条可行时空路径，例如图 2 中突出显示的红色路径。对于每个此类起讫点对w，我们用 $\mathcal{R}_w$ 表示E^{ogn}_o与E^{dst}_d之间所有路径的集合。对于每个$w \in \mathcal{W}$、类别$b \in \mathcal{B}_w$和路径$r \in \mathcal{R}_w$，令$f^r_{w,b}$ 表示选择路径r的类别b 乘客人数，并将所有此类变量汇总为向量$\boldsymbol{f}$。$\boldsymbol{f}$的可行集记为 $\mathcal{F}$，由所有满足以下条件的$\boldsymbol{f}$ 构成

$$\sum_{r \in \mathcal{R}_w} f^r_{w,b} = d_{w,b}, \quad \forall w \in \mathcal{W},\ \forall b \in \mathcal{B}_w, \tag{1}$$

$$f^r_{w,b} \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{W},\ \forall b \in \mathcal{B}_w,\ \forall r \in \mathcal{R}_w, \tag{2}$$

$$x_A \leq u_A, \quad \forall A \in \mathcal{A}^{\text{riding}}, \tag{3}$$

其中$x_A = \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{b \in \mathcal{B}_w} \sum_{r \in \mathcal{R}_w} f^r_{w,b} \delta^{r,A}_{w,b}$ 表示分配到弧$A \in \mathcal{A}$上的总流量；如果弧A 属于路径r </style}，则$\delta^{r,A}_{w,b} = 1$；否则为 $\delta^{r,A}_{w,b} = 0$；$u_A \in \mathbb{R}_+$ 是与A关联线路的车辆容量。

我们在此不对成本施加特定的函数形式；后续分析只需要温和的正则性条件，我们会在需要时陈述这些条件。令$c^r_{w,b}(\boldsymbol{f})$ 表示起讫点对$w \in \mathcal{W}$、类别$b \in \mathcal{B}_w$的乘客沿路径$r \in \mathcal{R}_w$出行时所承担的总出行成本。该总成本通常包括

旅行时间成本、货币票价、车厢拥挤效用损失，以及相对于期望到达时间窗提前或延迟到达所产生的惩罚等组成部分。

2.2 隐式优先级下的用户均衡

在隐式优先级框架下，优先规则（例如，车上乘客享有持续乘车优先权，上车乘客遵循先到先服务）通过定义在终止于车辆出发事件的弧上的可用容量来体现；这些容量决定哪些乘客可以上车，哪些乘客必须等待。我们将所有此类终止于车辆出发事件的弧集记为 $\mathcal{A}^{\text{priority}} = \mathcal{A}^{\text{boarding}} \cup \mathcal{A}^{\text{dwelling}} \cup \mathcal{A}^{\text{transfer}}$，即上车弧、停留弧和换乘弧。对于任意出发事件$E^{\text{dep}}{}_{l,j,i}$，所有终止于该事件的弧均按全序 $\prec$ 排列，以指定其上车优先级：停留弧优先级最高（持续乘车优先权），其余上车弧和换乘弧则按照乘客到达站点s_l^i的时间升序排列（体现先到先服务规则）。给定此优先顺序，弧$A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}$ 上的可用容量定义为

$$q_A(\boldsymbol{x}) = u_{\text{riding}(A)} - \sum_{A' \in \text{Prior}(A)} x_{A'},$$

此处，$u^{\text{riding}(A)}$ 表示乘车弧 riding(A) 的车辆容量，该弧的尾节点与 A 的头节点重合。集合 Prior(A) = { $A' \in \mathcal{A}^{\text{priority}}$: head(A′) = head(A), $A' \preceq A$} 包含所有优先级等于或高于 A 的弧，其中 head(A) 为 A 的头节点。因此，q_A 表示为弧 A 及所有优先级更高的弧安排乘客上车后，车辆的剩余容量。换言之，它决定了优先级低于 A 的弧最多还能承载多少名乘客。例如，如图3所示，停留弧 (E^{arr}_{21}, ,2, E^{dep}_{212}, ,) 的可用容量为 3。因此，优先级较低的上车弧 ($E^{\text{str}}_{o_3}$,7:53, E^{dep}_{212}, ,) 最多总共可承载 3 名乘客

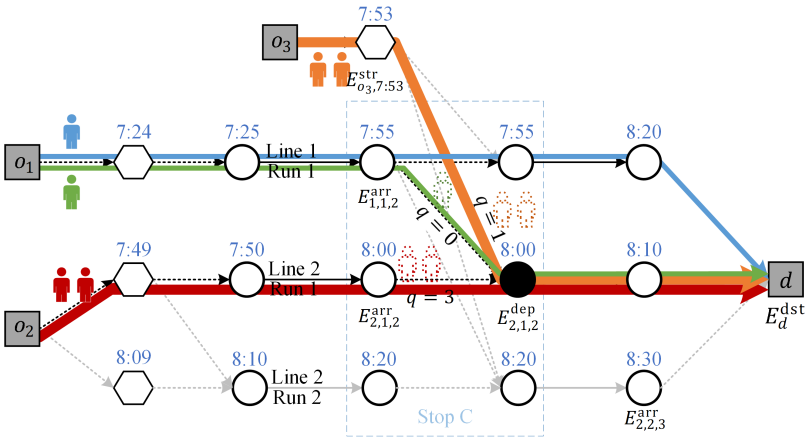


图3：隐式优先级和用户均衡整数规划的示意图。

以及换乘弧(E^{arr}_{11}, ,2,E^{dep}_{212}, ,)。由于起点为o_3 的两名乘客较早到达C站（出发时间为7:53，步行时间为1分钟，因此于7:54到达），他们首先通过上车弧上车。两人上车后，与该上车弧相关的可用容量降至1，因此之后最多只有一名乘客可以通过优先级较低的换乘弧上车。

对于每个起讫点对$w \in \mathcal{W}$、类别$b \in \mathcal{B}_w$和路径$r \in \mathcal{R}_w$，令$Q^r_{w,b}(f) = \min\{q_A(x) : A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}{}_{w,b,r}\}$表示路线可用容量，其中$\mathcal{A}^{\text{priority}}{}_{w,b,r}$是属于该路径的上车弧、停站弧和换乘弧集合。于是，我们可以如下定义路径可用性以及具有隐式优先级的用户均衡（Nguyen 等人，2001）：

定义 1（路径可用性）。给定任意可行流量向量$f \in \mathcal{F}$，对于每个起讫点对$w \in \mathcal{W}$和类别$b \in \mathcal{B}_w$，若路径$r \in \mathcal{R}_w$中的每条弧在$\mathcal{A}^{priority}$ w、b、r中均可用，则称路径r可用。等价地，若$Q^r_{w、b}(f) > 0$，则该条件成立。

定义 *2*（隐式优先级用户均衡）。若没有任何个体能够通过单方面切换到另一条可用路径来降低其出行成本$c^r_{w,b}(f)$，则可行流量向量$f \in \mathcal{F}$是隐式优先级用户均衡（用户均衡整数规划）。形式化地，令$\mathcal{R}^{dominate}_{w\,b\,r}(f) = \{r' \in \mathcal{R}_w : c^{r'}_{w,b}(f) < c^r_{w,b}(f)\}$表示按出行成本计主导路径$r$的路径集合，并令这些主导路径的总可用容量为$\tilde{Q}^r_{w,b}(f) = \sum_{r' \in \mathcal{R}^{dominate}_{w\,b\,r}} Q^{r'}_{w,b}(f)$。那么，若$f$是一个用户均衡整数规划解，则

$$f^r_{w,b} = 0 \quad whenever\ \tilde{Q}^r_{w,b}(f) > 0, \quad \forall w \in \mathcal{W},\ \forall b \in \mathcal{B}_w,\ \forall r \in \mathcal{R}_w. \tag{4}$$

2.3 示例

这里通过一个简单示例来说明用户均衡整数规划（UEIP）的概念。为简化起见，我们忽略拥挤效用损失和票价，并假设路径出行成本仅由固定的车内行程时间和迟到惩罚构成。乘客的期望到达时间窗均为 [8:10, 8:20]，，因此，只有在离站弧$(E^{\text{arr}}_{2}, 2, 3, E^{\text{dst}}_{d})$上才会产生10分钟的迟到惩罚，其他弧均无惩罚。每个起讫点对的需求为2，车辆容量为5。

表2报告了一个用户均衡整数规划解f^*和一个非用户均衡整数规划解f，相应的流量分别见图3和图4。在此示例中，优先级在C站起作用，它决定哪些乘客可以搭乘快线*2*号线第*1*班次。如前所述，对停站弧、上车弧和换乘弧设置可用容量，可确保用户均衡整数规划解f^*完全符合优先级规则。相比之下，图4所示的非用户均衡整数规划解违反了这一

表2：示例公共交通网络的用户均衡整数规划与非用户均衡整数规划结果。

OD	路线	描述	Cost	f^*	$Q(f^*)$	f	$Q(f)$
(o_1, d)	r_1	7:24 - 1号线第1班次	56	1	3	0	3
(o_1, d)	r_2	7:24 - 1号线第1班次 - 2号线第1班次	46	1	0	2	0
(o_1, d)	r_3	7:24 - 1号线第1班次 - 2号线第2班次	76	0	3	0	3
(o_2, d)	r_4	7:49 - 2号线第1班次	21	2	3	2	3
(o_2, d)	r_5	7:49 - 2号线第2班次	51	0	5	0	5
(o_2, d)	r_6	8:09 - 2号线第2班次	31	0	5	0	5
(o_3, d)	r_7	**7:53 - 1号线第1班次**	**27**	**0**	**5**	**1**	**4**
(o_3, d)	r_8	**7:53 - 2号线第1班次**	**17**	**2**	**1**	**1**	**2**
(o_3, d)	r_9	7:53 - 2号线第2班次	47	0	5	0	5

规则。具体而言，在C站较早到达的o_3名乘客，让较晚到达的换乘乘客得以搭乘更快的*2*号线第*1*班次（表2中的路径r_8，成本为17），而自己却搭乘*1*号线第*1*班次（路径r_7，，成本为27）。在隐式优先级框架下，这种分配不可能是

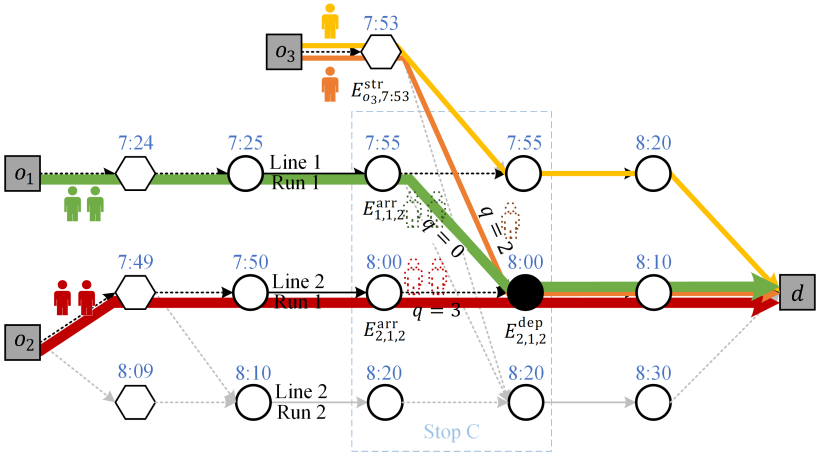


图4：示例公共交通网络中非 UEIP 流的可视化。

均衡：在f下，路径r_8 仍有一个单位的可用容量，因此目前使用r_7的乘客有明确动机改用可用且成本更低的路径r_8。

该示例表明，隐式优先级框架能够自然地执行登乘优先规则：只有遵循指定优先级结构的流模式才能构成用户均衡。然而，Nguyen 等人（2001）的隐式优先级框架缺乏正式的数学表述及相应的求解算法。后续章节将填补这些空白。

3 Nguyen 等人模型的分析

本节将基于一种新提出的数学表述，分析 Nguyen 等人（2001）的模型。在整个分析过程中，均采用以下假设。

假设 1。 对于每个起讫点对 $w \in \mathcal{W}$、每个类别 $b \in \mathcal{B}_w$ 以及每条路径 $r \in \mathcal{R}_w$，出行成本 $c^r_{w,\,b}(f)$ 对于所有可行的 $f \in \mathcal{F}$ 均为正。

假设 2。 给定任意可行流量向量 $f \in \mathcal{F}$，对于每个起讫点对 $w \in \mathcal{W}$ 和类别 $b \in \mathcal{B}_w$，至少存在一条路径 $r \in \mathcal{R}_w$ 使得 $Q^r_{w,\,b}(f) > 0$，即至少有一条可用路径。

假设 2 排除了这样的退化情形：对于某个起讫点对，可行分配 $f \in \mathcal{F}$ 耗尽了所有可能的公交路径的容量，包括涉及延误的路径；在正常运营条件下，这是一项合理的条件。本节其余部分安排如下。第 3.1 节介绍 Nguyen 等人（2001）模型的一种等价重述。第 3.2 节考察解的存在性与唯一性。最后，数值示例说明该模型可能存在行为上不现实的解（第 3.3 节）。

3.1 一种新的用户均衡整数规划表述

为便于模型构建，我们首先给出与条件 (4) 等价的替代 UEIP 条件，以更明确地刻画路径成本与路径流量之间的关系。

命题 1。 可行解 $f^* \in \mathcal{F}$ 满足条件 (4) 当且仅当存在 $\mu_{w,b} \in \mathbb{R}$，使得对每个 $w \in \mathcal{W}$ 和 $b \in \mathcal{B}_w$，

$$c^r_{w,b}(f^*) \geq \mu_{w,b} \quad if\ Q^r_{w,b}(f^*) > 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}_w, \tag{5a}$$

$$\mu_{w,b} \geq c^r_{w,b}(f^*) \quad if\ f^{r*}_{w,b} > 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}_w. \tag{5b}$$

证明。首先，假设 $f^* \in \mathcal{F}$ 满足方程（5）。对于每个起讫点 $w \in \mathcal{W}$、类别 $b \in \mathcal{B}_w$和路径 $r \in \mathcal{R}_w$，若 $\tilde{Q}^r_{w,b}(f^*) > 0$，则必定至少存在一条路径 $r' \in \mathcal{R}^{\text{dominate}}_{w,b,r}$，使得 $c^{r'}_{w,b}(f^*) > c^r_{w,b}(f^*)$ 且 $Q^{r'}_{w,b}(f^*) > 0$。根据方程（5a），有 $\mu_{w,b} \leq c^{r'}_{w,b}(f^*) < c^r_{w,b}(f^*)$。然后，根据（5b），必有 $f^{r*}_{w,b} = 0$。因此，条件（4）成立。

反过来，假设 $f^* \in \mathcal{F}$ 满足方程（4）。对于每个起讫点 $w \in \mathcal{W}$ 和类别 $b \in \mathcal{B}_w$，鉴于 $\bar{r}$ 是所有已使用路径中成本最高的路径，即 $c^{\bar{r}}_{w,b}(f^*) = \max\{c^r_{w,b}(f^*) : f_{r*} > 0, r \in \mathcal{R}_{w,b}\}$，且 $\mu_{w,b} = c^{\bar{r}}_{w,b}(f^*)$，方程（5b）成立。接下来，我们通过反证法证明方程（5a）。对于每个 $w \in \mathcal{W}$和 $b \in \mathcal{B}_w$，假设存在一条可用路径 r'（即 $Q^{r'}_{w,b}(f^*) > 0$），满足 $c^{r'}_{w,b}(f^*) < \mu_{w,b} = c^{\bar{r}}_{w,b}(f^*)$。那么，必有 $r' \in \mathcal{R}^{\text{dominate}}_{w,b,\bar{r}}$，从而 $\tilde{Q}^{\bar{r}}_{w,b}(f^*) = \sum_{r'' \in \mathcal{R}^{\text{dominate}}_{w,b,\bar{r}}} Q^{r''}_{w,b}(f^*) \geq Q^{r'}_{w,b}(f^*) > 0$。根据条件（4），这与 $\bar{r}$ 是一条已使用路径相矛盾。由反证法可知，方程（5a）成立。□

该命题表明，在用户均衡整数规划下，任何已使用路径的成本均不高于其他可用路径的成本，其中 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{w,b})_{w \in \mathcal{W}, b \in \mathcal{B}_w}$ 充当区分这两类路径的阈值。为弥合已使用路径的成本与该阈值之间可能存在的差距，我们为每个起讫点 $w \in \mathcal{W}$、类别 $b \in \mathcal{B}_w$和路径 $r \in \mathcal{R}_w$引入一个额外的成本变量 $V^r_{w,b}$，并将所有此类变量汇集为向量 $\boldsymbol{V}$。具体而言，对于每条已使用路径，我们令 $V^r_{w,b} = \mu_{w,b} - c^r_{w,b}(\boldsymbol{f})$；对于可用路径，则令 $V^r_{w,b} = 0$。基于这一构造，我们得到以下非线性互补问题模型：

$$0 \leq \boldsymbol{f} \perp \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{V} - \Lambda \boldsymbol{\mu} \geq 0, \tag{6a}$$

$$0 \leq \boldsymbol{\mu} \perp \Lambda^T \boldsymbol{f} - \boldsymbol{d} \geq 0, \tag{6b}$$

$$0 \leq \boldsymbol{V} \perp \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{f}) \geq 0, \tag{6c}$$

其中，$c(f) = (c^r_{w,b}(f))_{w \in \mathcal{W}, b \in \mathcal{B}_w, r \in \mathcal{R}_w}$和 $Q(f) = (Q^r_{w,b}(f))_{w \in \mathcal{W}, b \in \mathcal{B}_w, r \in \mathcal{R}_w}$分别表示出行成本向量和可用容量向量；$\Lambda = [\lambda_{r,b}]_{|n_f| \times |\mathcal{B}|}$ 表示路径类别关联矩阵，当路径 r 属于类别 b 时，$\lambda_{r,b} = 1$；否则，$\lambda_{r,b} = 0$；$n_f = \sum_{w \in \mathcal{W}} |\mathcal{B}_w| \times |\mathcal{R}_w|$ 是路径流向量 f 的维数。接下来的定理将证明，该非线性互补问题公式等价于用户均衡整数规划条件。

定理 1。 在假设 *1* 下，非线性互补问题(6) 等价于 *UEIP* 条件(1)、(2)、(3)和(5).

证明。 **必要性**：假设解$(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ 满足 UEIP 条件 (1)、(2)、(3) 和 (5)。令$\boldsymbol{x}^* = \Delta^T \boldsymbol{f}^*$，其中 $\Delta = [\delta^{r,A}{}_{w,b}]_{|n_f| \times |\mathcal{A}|}$ 是路径-弧关联矩阵。接下来我们将证明互补条件 (6) 成立。

条件 (6b)：条件 (1) 表明 $\Lambda^T \boldsymbol{f}^* - \boldsymbol{d} = 0$ 和 $\boldsymbol{\mu}^* \perp \Lambda^T \boldsymbol{f}^* - \boldsymbol{d}$。方程（5b）意味着 $\boldsymbol{\mu}$ 是一个正向量。因此，条件 (6b) 成立。

条件（6c）：对于任意弧 $a \in \mathcal{A}^{\text{priority}}$，有 $q_a(x^*) = u_{\text{riding}(A)} - \sum_{A' \in \text{Prior}(A)} x^*_{A'} \geq u_{\text{riding}(A)} - x^*_a$ 乘坐(A)。根据容量约束（3），有 $q_a(x^*) \geq 0$。因此，$Q^r_{w,b}(f^*) = \min\{q_a(x^*) : a \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}\} \geq 0$ 对于所有 $w \in \mathcal{W}$、$b \in \mathcal{B}_w$和 $r \in \mathcal{R}_w$。

对于每个起讫点 $w \in \mathcal{W}$、类别 $b \in \mathcal{B}_w$ 和路径 $r \in \mathcal{R}_w$，令

$$V_{w,b}^r = \begin{cases} 0, & \text{if } Q_{w,b}^r(\boldsymbol{f}^*) > 0 \\ \mu_{w,b}^* - c_{w,b}^r(\boldsymbol{f}^*), & \text{if } Q_{w,b}^r(\boldsymbol{f}^*) = 0 \text{ and } f_{w,b}^{r*} > 0 \\ \max\{\mu_{w,b}^* - c_{w,b}^r(\boldsymbol{f}^*), 0\}, & \text{if } Q_{w,b}^r(\boldsymbol{f}^*) = 0 \text{ and } f_{w,b}^{r*} = 0 \end{cases}, \tag{7}$$

因此我们有$\boldsymbol{V} \perp \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{f}^*)$。同时，考虑到 $\mu^*_{w,b} - c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) \geq 0$ 当 $f_{r*w,b} > 0$ 时，根据方程（5b），我们必有 $\boldsymbol{V} \geq 0$。因此，条件（6c）成立。

条件（6a）：根据方程(7)，我们还得到 $c(f) + V - \Lambda\boldsymbol{\mu} \geq 0$，因为 (I) $V^r_{w,b} \geq \mu^*_{w,b} - c^r_{w,b}(f^*)$，当 $Q^r_{w,b}(f^*) = 0$ 时；(II) $V^r_{w,b} = 0$ 且 $c^r_{w,b}(f^*) \geq \mu^*_{w,b}$，当 $Q^r_{w,b}(f^*) > 0$ 时，这由方程（5a）得出。

当 $f_{r*w,b} = 0$ 时，f 与 $c(f) + V - \Lambda\boldsymbol{\mu}$ 之间的正交性必须成立。如果 $f_{r*w,b} > 0$，则有两种情形。情形（I）：如果 $Q^r_{w,b}(f^*) > 0$，方程（5a）和（5b）表明 $c^r_{w,b}(f^*) \geq \mu^*_{w,b} \geq c^r_{w,b}(f^*)$，因此 $c^r_{w,b}(f^*) = \mu^*_{w,b}$。于是，我们有 $c^r_{w,b}(f^*) + V^r_{w,b} - \mu^*_{w,b} = 0$，因为 $V^r_{w,b} = 0$。情形（II）：如果 $Q^r_{w,b}(f^*) = 0$，我们同样有 $c^r_{w,b}(f^*) + V^r_{w,b} - \mu^*_{w,b} = 0$，因为在方程（7）中，$V^r_{w,b}$ 被设为 $\mu^*_{w,b} - c^r_{w,b}(f^*)$。因此，正交性始终成立，且条件（6a）成立。

充分性：假设解 $(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{V}^*)$ 满足互补条件（6）。令$\boldsymbol{x}^* = \Delta^T \boldsymbol{f}^*$，下面证明 UEIP 条件（1）、（2）、（3）和（5）成立。

条件（2）： 互补条件（6a）直接表明，对于所有$w \in \mathcal{W}$、$b \in \mathcal{B}_w$和$r \in \mathcal{R}_w$，都有$f^{r*}_{w,b} \geq 0$。

条件（3）：$Q(f^*)$ 的非负性表明，对于所有 $a \in \mathcal{A}^{\text{priority}}$，$q_a(x^*) \geq 0$。对于任意乘车弧 $a \in \mathcal{A}^{\text{riding}}$，令 a 为具有最低装载优先级的入弧。于是有 $0 \leq q_a(x^*) = u_a - \sum_{a' \in \text{Prior}(a)} x^*_{a'} = u_a - x^*_a$。因此，容量约束（3）得到满足。

条件（1）： 假设对于某个起讫点 $w \in \mathcal{W}$ 和类别 $b \in \mathcal{B}_w$，

$$\sum_{r \in \mathcal{R}_w} f^{r*}_{w,b} > d_{w,b}. \tag{8}$$

根据互补条件（6a）和（6b），我们必须有 $\mu^*_{w,b} = 0$，并且对于每条路径 $r \in \mathcal{R}_w$，

$$f^{r*}_{w,b}(c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + V^{r*}_{w,b} - \mu^*_{w,b}) = 0 \Rightarrow f^{r*}_{w,b}(c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + V^{r*}_{w,b}) = 0.$$

此外，由于 $c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*)$ 为正且 $V^{r*}_{w,b}$ 为非负数，我们必须有 $f_{r*w,b} = 0$，对于所有 $w \in \mathcal{W}$、$b \in \mathcal{B}_w$和 $r \in \mathcal{R}_w$ 均成立。

另一方面，方程（8）表明 $\sum_{r \in \mathcal{R}_w} f^{r*}_{w,b} > 0$，并且在该起讫点和类别中必然存在一条具有正流量的路径（$f_{r*w,b} > 0$），这就产生了矛盾。因此，需求约束（1）成立。

条件（5）：对于每个起讫点 $w \in \mathcal{W}$、类别 $b \in \mathcal{B}_w$和路径 $r \in \mathcal{R}_w$，如果 $Q^r_{w,b}(f^*) > 0$，则根据互补条件（6c），我们有 $V^{r*}_{w,b} = 0$。由于 $c^r_{w,b}(f^*) + V^{r*}_{w,b} - \mu^*_{w,b}$ 为非负数，因此得到 $c^r_{w,b}(f^*) \geq \mu^*_{w,b}$，从而条件（5a）成立。

另一方面，若 $f_{r*w,b} > 0$，根据互补条件（6a），有 $c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + V^{r*}_{w,b} - \mu^*_{w,b} = 0$。因此，由于$V^{r*}_{w,b}$非负，$c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) \leq \mu^*_{w,b}$，故条件（5b）成立。□

3.2 存在性与唯一性

我们首先证明 NCP（6）解的存在性，然后讨论其唯一性。

命题 2。在假设 *1* 和 *2* 下，*NCP*（6）存在解。

证明。为了证明 NCP（6）存在解，我们首先回顾一下：当映射连续且可行集紧致时，解必然存在。在 NCP（6）中，尽管函数

$$H(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{V}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{V} - \Lambda\boldsymbol{\mu} \\ \Lambda^T\boldsymbol{f} - \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{f}) \end{pmatrix}$$

连续，可行集 $\Omega = \{\boldsymbol{f} \geq 0, \boldsymbol{\mu} \geq 0, \boldsymbol{V} \geq 0\}$ 无界，因此不是紧致集。我们的证明通过为每个变量引入上界约束，构造一个新的非线性互补问题，使其可行集成为紧致集。随后我们证明，在新问题的解处，这些新增的上界约束均不起作用。因此，修改后的非线性互补问题的任何解也满足原非线性互补问题（6）。取两个标量 e_1 和 e_2，使得

$$e_1 > \max\{d_{w,b} : w \in \mathcal{W}, b \in \mathcal{B}_w\} \text{ and } e_2 > \max\{c^r_{w,b} : w \in \mathcal{W}, b \in \mathcal{B}_w, r \in \mathcal{R}_w\}.$$

定义 $\Omega' = \Omega \cap \{\boldsymbol{f} \leq e\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} \leq e_2\mathbf{1}, \boldsymbol{V} \leq e_2\mathbf{1}\}$。由于 Ω' 是紧致的，以下非线性互补问题必定有解：

$$0 \leq \boldsymbol{f} \perp \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{V} - \Lambda\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\kappa} \geq 0, \tag{9a}$$
$$0 \leq \boldsymbol{\mu} \perp \Lambda^T\boldsymbol{f} - \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\rho} \geq 0, \tag{9b}$$
$$0 \leq \boldsymbol{V} \perp \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{\nu} \geq 0, \tag{9c}$$
$$0 \leq \boldsymbol{\kappa} \perp e_1\mathbf{1} - \boldsymbol{f} \geq 0, \tag{9d}$$
$$0 \leq \boldsymbol{\rho} \perp e_2\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu} \geq 0, \tag{9e}$$
$$0 \leq \boldsymbol{\nu} \perp e_2\mathbf{1} - \boldsymbol{V} \geq 0. \tag{9f}$$

设 $(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{V}^*)$ 为此解。若我们证明 $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\rho}$和 $\boldsymbol{\nu}$ 均等于零，则 $(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{V}^*)$ 也必定是非线性互补问题（6）的一个解。

对于 $\boldsymbol{\kappa}$：假设对于某些 $w \in \mathcal{W}$、$b \in \mathcal{B}_w$、$r \in \mathcal{R}_w$，有 $\kappa^r_{w,b} > 0$。根据互补条件（9d），我们有 $f^{r*}_{w,b} = e_1 > d_{w,b}$，因此 $\sum_{r\in\mathcal{R}_w} f^{r*}_{w,b} - d_{w,b} + \rho_{w,b} > 0$。然后，根据条件（9b），我们有 $\mu^*_{w,b} = 0$。此外，由于 $f^{r*}_{w,b} = e_1 > 0$，我们有

$$0 = c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + V^{r*}_{w,b} - \mu^*_{w,b} + \kappa^r_{w,b} = c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + V^{r*}_{w,b} + \kappa^r_{w,b} > 0,$$

因为 $c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*)$ 为正，且 $\kappa^r_{w,b}$ 为正，$V^{r*}_{w,b}$ 为非负。这一矛盾得出 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$。

对于 $\boldsymbol{\rho}$：对于每个起讫点对 $w \in \mathcal{W}$和类别 $b \in \mathcal{B}_w$，由于根据假设存在一条路径 $r \in \mathcal{R}_w$，满足 $Q^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) > 0$，我们有 $Q^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + \nu^r_{w,b} > 0$。根据条件（9c），$V^{r*}_{w,b} = 0$。因此，

$$\begin{aligned} &0 \leq c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + V^{r*}_{w,b} - \mu^*_{w,b} + \kappa^r_{w,b} = c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) - \mu^*_{w,b} \\ &\Rightarrow \mu^*_{w,b} \leq c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) < e_2. \end{aligned} \tag{10}$$

这意味着，对于所有 $e^2 - \mu^*_{w,b} > 0$ 和 $w \in \mathcal{W}$ 及 $b \in \mathcal{B}_w$，$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ 由条件（9e）得出 .

对于 $\boldsymbol{\nu}$：假设 $\nu^r_{w,b} > 0$ 对于某些 $\mathrm{w} \in \mathcal{W}$、$\mathrm{b} \in \mathcal{B}_w$、$\mathrm{r} \in \mathcal{R}_w$，则有 $\mathrm{V}^{r*}_{w,b} = \mathrm{e}_2 > 0$。根据条件（9c），有 $\mathrm{Q}^r_{w,b}(\mathrm{f}^*) + \nu^r_{w,b} = 0$，因此 $\mathrm{Q}^r_{w,b}(\mathrm{f}^*) = -\nu^r_{w,b} < 0$。根据 $\mathrm{Q}^r_{w,b}(\mathrm{f}^*)$ 的定义，路径 r 中必定存在一条可用容量为负的弧，即存在一个 $\mathrm{A} \in \mathcal{A}^{\text{priority}}$ w,b,r，使得 $0 > \mathrm{q}_A(\mathrm{x}^*) = \mathrm{u}_{\text{riding}(A)} - \sum_{A'\in\text{Prior(A)}} \mathrm{x}^*_{A'}$。

令 A' 为 $\text{Prior}(A)$ 中承载正流量且装载优先级最低的弧。那么，A'与A具有相同的可用容量，即 $q_{A'}(\boldsymbol{x}^*) = q_A(\boldsymbol{x}^*) < 0$。此外，至少存在一条已使用的

路径r'经过该弧。不失一般性，设r'属于起讫点对$w' \in \mathcal{W}$和类别$b' \in \mathcal{B}_w$。根据互补条件 (9a) 以及$f^{r'*}_{w',b'} > 0$这一事实，我们有

$$c^{r'}_{w',b'}(\boldsymbol{f}^*) + V^{r'*}_{w',b'} - \mu^*_{w',b'} + \kappa^{r'}_{w',b'} = 0 \Rightarrow V^{r'*}_{w',b'} = \mu^*_{w',b'} - c^{r'}_{w',b'}(\boldsymbol{f}^*).$$

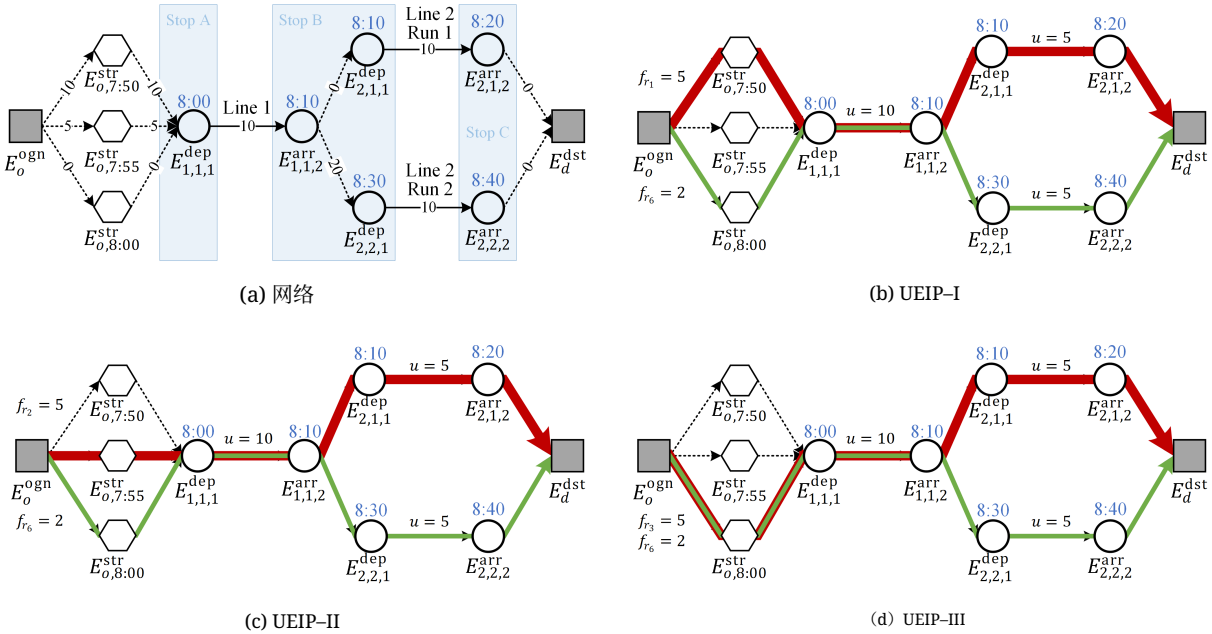
由于$\mu^*_{w',b'} < e_2$（方程（10））且$c^{r'}_{w',b'}(f^*)$为正，我们得到$V^{r'*}_{w',b'} < e_2$。这意味着根据条件（9f），$\nu^{r'}_{w',b'} = 0$。另一方面，$Q^{r'}_{w',b'}(f^*) = \min\{q_{A''}(x^*) : A'' \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}\} \le q_{A'}(x^*) < 0$。这意味着$Q^{r'}_{w',b'}(f^*) + \nu^{r'}_{w',b'} < 0$，这与条件（9c）矛盾。因此，$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$成立。□

既然已经证明 NCP（6）存在解，接下来我们将讨论其唯一性。由于映射$H(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V})$是非单调的，NCP（6）的解集——也就是 UEIP 解集——通常并非唯一。接下来我们讨论这种非唯一性的影响。

3.3 非唯一性的意外后果

许多交通分配问题并不存在唯一解。出现这种情况时，通常会将有效算法返回的任何解都视为同样可接受。然而，正如下文所示，某些 UEIP 解可能明显违背现实中的乘客行为。这削弱了 NCP公式（6）的适用性，因为它可能得到行为上不合理或运营上荒谬的解。

考虑图5(a)所示的一个玩具网络，它由两条线路（1号线和2号线）组成。具体



(a) 网络　(b) UEIP–I

(c) UEIP–II　(d) UEIP–III

图 5：不合理 UEIP 状态的示例。

具体而言，1号线只有一个班次，而2号线包含两个班次（班次1和班次2）。不考虑拥堵效应，每条弧都标注了其成本。七名乘客从起点o前往目的地d，有三个出发时间选项：7:50、7:55和8:00。所有乘客首先乘坐高容量线路1（容量 = 10）从A站前往B站。随后，其中一部分乘客可以直接换乘2号线的低容量班次

1（容量 = 5）前往目的地，无需等待；其余两名乘客则必须留在站台等待2号线的班次2。这一情形产生了三个不同的用户均衡整数规划解，即UEIP–I、UEIP–II和UEIP–III，如图5(b)–5(d)和表3所示。这些解的区别仅在于乘坐班次1的乘客所选择的出发时间。在UEIP–I和UEIP–II中，这些乘客分别于7:50和7:55开始行程，以赶上8:00发车的1号线。然而，这样的结果并不现实。由于1号线未满载——也就是说，无论乘客到达A站的先后顺序如何，他们都能上车——最优做法就是像UEIP–III中那样于8:00出发。提前出发毫无益处，只会增加等待时间和提前出发惩罚。

表3：三个用户均衡整数规划解的汇总。

路线	轨迹	Cost	UEIP–I			UEIP–II			UEIP–III		
			f	Q	V	f	Q	V	f	Q	V
r_1	7:50，运行 1	40	5	0	0	0	0	≥ 0	0	0	≥ 0
r_2	7:55，运行 1	30	0	0	≥ 10	5	0	10	0	0	≥ 10
r_3	8:00，运行 1	20	0	0	≥ 20	0	0	≥ 20	5	0	20
r_4	7:50，运行 2	60	0	3	0	0	3	0	0	3	0
r_5	7:55，运行 2	50	0	3	0	0	3	0	0	3	0
r_6	8:00，运行 2	40	2	3	0	2	3	0	2	3	0

为说明不现实解存在的原因，我们以 UEIP–II 为例。分配给班次1（即路径 r_2）的乘客无法将出发时间改为 8:00（即改乘路径r_3），因为弧 $(E^{\text{arr}}_{1\,1},,2,E^{\text{dep}}_{2\,1\,1},,)$ 被视为不可用，从而导致路径 r_3 不可用。然而，我们认为，路径 r_3 对选择r_2, 的乘客而言应被视为“可用”，因为将流量从r_2 转移到r_3 仅会改变其出发时间，并不会给瓶颈弧 $(E^{\text{arr}}_{1\,1},,2,E^{\text{dep}}_{2\,1\,1},,)$增加额外流量。更一般地，即使路径 r 包含一些不可用弧，当另一条路径 r' 也经过这些弧时，将流量从r' 重新分配到r 并不会增加这些不可用弧上的负荷。因此，这种重新分配应当是可行的，并且相对于路径r'而言，路径 r 应被视为可用。

总之，这个例子表明，路径可用性的定义偏离了乘客的实际行为，导致用户均衡整数规划解集中出现不切实际的解。在下一节中，我们将完善可用路径的定义，并提出一种新的均衡条件及其相应的NCP公式，从而消除这类不切实际的结果。我们还将开发一种专门用于求解所提模型的算法。

4 符合行为规律的用户均衡整数规划公式

现在，我们将转向一种经过完善的用户均衡整数规划条件，它不仅排除了不符合行为规律的解，也使算法更易于求解。下文中，第4.1节介绍完善后的用户均衡整数规划条件及相应的NCP公式，第4.2节则介绍求解算法。

4.1 重新审视用户均衡整数规划

前面的例子表明，路径可用性并非绝对，而是相对于参考路径而言；如果重新分配流量没有给不可用弧增加额外负载，那么这种重新分配仍可能是可行的。因此，

我们将路径 r' 相对于路径 r 的可用容量定义为

$$Q_{r',\,r\,w,\,b}(\boldsymbol{f}) = \min\{q_A(\boldsymbol{x}) : A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r'} \setminus \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}\}, \quad \forall w \in \mathcal{W},\ \forall b \in \mathcal{B}_w,\ \forall r', r \in \mathcal{R}_w \text{ and } r' \neq r.$$

注意，由于当 $r' \neq r$ 时，$\mathcal{A}^{\text{priority}}{}_{w,\,b,\,r'} \setminus \mathcal{A}^{\text{priority}}{}_{w,\,b,\,r}$ 非空，因此 $Q_{r',\,r\,w,\,b}(\boldsymbol{f})$ 是定义良好的。基于此，我们将路径可用性的定义修订如下：

定义 3（相对路径可用性）。给定任意可行流量向量 $\boldsymbol{f} \in \mathcal{F}$，对于每个起讫点对 $w \in \mathcal{W}$ 和类别 $b \in \mathcal{B}_w$，如果路径 $r' \in \mathcal{R}_w$ 上所有未包含在路径 r 中的弧均可用，则称路径 $r \in \mathcal{R}_w$ 相对于另一条路径 $r' \in \mathcal{R}_w$ 可用。等价地，当 $Q_{r',\,r\,w,\,b}(\boldsymbol{f}) > 0$时，该条件成立。

根据这一定义，我们可以收紧均衡条件，以排除行为不一致。

定义 4（隐式优先级下的精化用户均衡）。若对于每个起讫点对 $w \in \mathcal{W}$ 和类别 $b \in \mathcal{B}_w$，路径 $r \in \mathcal{R}_w$ 上的任何个体都无法通过单方面切换到相对于 r 可用的另一条可用路径来降低其出行成本 $c^{r}_{w,\,b}(\boldsymbol{f})$，则称可行流量向量 $\boldsymbol{f} \in \mathcal{F}$ 为隐式优先级下的精化用户均衡（*R-UEIP*）。形式化地，令相对于 r 的主导路径的总可用容量为$\hat{Q}^{r}_{w,\,b}(\boldsymbol{f}) Q_{r',\,r\,w,\,b}(\boldsymbol{f})$。那么，$\boldsymbol{f} \in \mathcal{F}$是 *R-UEIP* 解，当且仅当

$$f^{r}_{w,b} = 0 \quad \textit{whenever } \hat{Q}^{r}_{w,b}(\boldsymbol{f}) > 0, \quad \forall w \in \mathcal{W},\ \forall b \in \mathcal{B}_w,\ \forall r \in \mathcal{R}_w. \tag{11}$$

很容易验证，在上一节的玩具示例中，不现实的均衡 UEIP–I 和 UEIP–II 不满足精化均衡条件，而 UEIP–III 满足。两种均衡之间的关系可概括如下：

命题 3。如果$\boldsymbol{f}^*$ 是 *R-UEIP*，那么它也是用户均衡整数规划，但反之不成立。

证明。假设 f^*满足 R-UEIP 条件。令 $\mathrm{x}^* = \Delta^T \mathrm{f}$。对于任意起讫点对 $\mathrm{w} \in \mathcal{W}$、任意类别 $\mathrm{b} \in \mathcal{B}_w$以及任意两条不同的路径 $\mathrm{r}、\mathrm{r}' \in \mathcal{R}_w$，可得 $\mathrm{Q}_{r',\mathrm{r\,w,b}}(\mathrm{f}^*) = \min\{\mathrm{q}_A(\mathrm{x}^*) : \mathrm{A} \in \mathcal{A}^{\text{priority}}{}_{\mathrm{w,b,r}'} \setminus \mathcal{A}^{\text{priority}}{}_{\mathrm{w,b,r}}\} \geq \min\{\mathrm{q}_A(\mathrm{x}^*) : \mathrm{A} \in \mathcal{A}^{\text{priority}}{}_{\mathrm{w,b,r}'}\} = \mathrm{Q}^{r'}{}_{\mathrm{w,b}}(\mathrm{f}^*)$。因此，

$$\hat{Q}^{r}_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) = \sum_{r' \in \mathcal{R}^{\text{dominate}}_{w,b,r}(\boldsymbol{f}^*)} Q^{r',r}_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) \geq \sum_{r' \in \mathcal{R}^{\text{dominate}}_{w,b,r}(\boldsymbol{f}^*)} Q^{r'}_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) = \tilde{Q}^{r}_{w,b}(\boldsymbol{f}^*).$$

因此，若 $\tilde{Q}^{r}_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) > 0$，则 $\hat{Q}^{r}_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) > 0$。根据 R-UEIP 条件 (11)，这意味着$f^{r*}_{w,b} = 0$，从而证明了正向结论。第 3.2 节中给出的反例表明，反向结论并不成立。□

这一结果表明，R-UEIP 的解集更小，排除了 UEIP 所允许的某些不切实际结果。接下来，我们构建一个用于计算精化均衡的 NCP 模型。对于每条弧 $A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}$，我们引入一个变量 v_A，并将这些变量汇集为向量 $\boldsymbol{v}$；该向量与弧的可用容量正交，即 $v_A \perp q_A(\boldsymbol{x})$。令 $\bar{\Delta} = [\delta^{r,A}{}_{w、\,b}]_{|n_f| \times |\mathcal{A}^{\text{priority}}|}$ 为路径-弧关联矩阵。我们提出以下 NCP 模型：

$$0 \leq \boldsymbol{f} \perp \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}) + \bar{\Delta}\boldsymbol{v} - \Lambda\boldsymbol{\mu} \geq 0, \tag{12a}$$

$$0 \leq \boldsymbol{\mu} \perp \Lambda^T \boldsymbol{f} - \boldsymbol{d} \geq 0, \tag{12b}$$

$$0 \leq \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \geq 0. \tag{12c}$$

命题 4. 在假设 *1* 下，若 f^* 是 *NCP* (12) 的一个解，则 f^* 满足 *R-UEIP* 条件 (1)、(2)、(3) 和(11)。

证明。 证明 f^* 满足可行条件 (1)、(2) 和 (3) 的推理与定理 1 中相同，只需将 V 替换为 $\tilde{\Delta}v$，因此此处省略。接下来，我们证明 f^* 也满足条件 (11)。

对于任意起讫点对 $w \in \mathcal{W}$ 和任意类别 $b \in \mathcal{B}_w$，假设存在一条路径 $r \in \mathcal{R}_w$ 使得 $\hat{Q}^r_{w,b}(f^*) > 0$。那么，必定存在另一条路径 $r' \in \mathcal{R}_w$，满足 $c^{r'}_{w,b}(f^*) < c^r_{w,b}(f^*)$ 且 $Q_{r',r}(f^*) > 0$。这意味着对于所有 $A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r'} \setminus \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}$，$q_A > 0$。根据互补条件 (12c)，对于所有此类 A，都有 $v_A = 0$。将这些 v_A 值代入 (12a)，得到：

$$0 \le c^{r'}_{w,b}(f^*) + \sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r'}} v_A - \mu_{w,b} = c^{r'}_{w,b}(f^*) + \sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r'} \cap \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v_A - \mu_{w,b}.$$

此外，由于 $c^{r'}_{w,b}(f^*) < c^r_{w,b}(f^*)$ 且 $\sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r'} \cap \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v_A \le \sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v_A$，因此可得

$$0 < c^r_{w,b}(f^*) + \sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v_A - \mu_{w,b}.$$

最后，根据式 (12a) 中的互补条件，我们得到 $f_{r*w,b} = 0$，这证明 f^* 满足式 (11)。

□

在与 NCP（6）相同的假设下，也可以保证 NCP（12）的解存在。关于解的存在性的结果如下所述：

命题 5. 在假设 *1* 和 *2* 下，*NCP* (12) 有解。

证明. 见附录 B。 □

注释 1. 引入的变量 v 可解释为乘客在穿越某些活动（弧）时所产生的焦虑成本；由于这些活动的装载优先级较低，因此无法保证乘客能够上车。如图 *6* 所示，停留弧 $(E^{arr}_{2\,1,,2}, E^{dep}_{2\,1\,,,2})$ 和上车弧 $(E^{str}_{o_3,7:53}, E^{dep}_{2\,1\,,,2})$ 的可用容量为正，

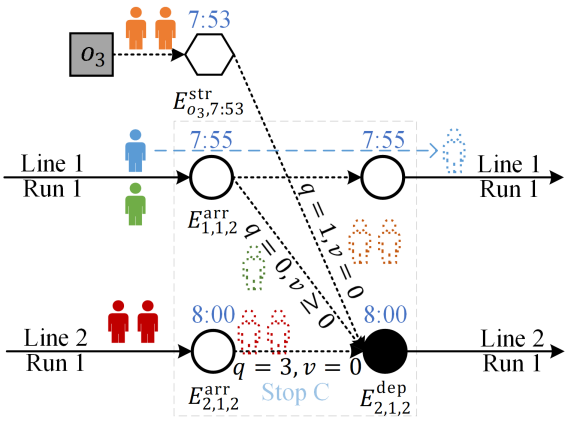


图 6：所引入变量 v 的示意图。

这意味着选择这些弧的乘客不必担心无法上车；因此，相应的焦虑成本

为零。相比之下，最低优先级换乘弧($E^{arr}_{1\,1,,2}$,$E^{dep}_{2\,1\ ,,2}$) 的可用容量为零，这意味着选择该弧的乘客无法确保上车。因此，他们可能会产生正的焦虑成本。对于每个起讫点对 $w \in \mathcal{W}$ 和每个 $b \in B_w$，如果我们将出行成本 $c^r_{w,b}$ 与焦虑成本$\sum_{A\in\mathcal{A}^{priority}\ w,b,r} v_A$ 之和视为路径 r 的广义成本，那么由非线性互补问题(12) 得到的均衡可视为这样一种状态：同一起讫点对和类别的所有乘客都承担相同的广义成本。

与上一节介绍的等价 UEIP 表述 (6) 相比，精化模型 (12) 不仅排除了行为上不现实的解，还具有计算优势。在等价表述中，优先级约束 (6c) 施加在路径 层面，导致约束之间高度耦合，难以分解。因此，必须预先枚举所有可行路径，并将其作为求解算法的输入，这会带来高昂的计算开销。相比之下，在精化模型中，优先级约束 (12c) 施加在弧 层面，从而形成可分解的网络流结构，适用于列生成算法；这类算法能够在求解过程中动态生成路径。

4.2 求解算法

为获得 R-UEIP 解，我们提出一种将 NCP (12) 重构为数学规划与均衡约束（MPEC）的算法。处理这类互补系统的一种直接方法是，对所有互补条件应用 merit 函数或平滑函数，并求解由此得到的无约束优化问题。然而，条件 (12a) 和 (12b) 的形式与经典静态交通分配问题（Beckmann等人，1956年）相似。这种结构上的相似性使得我们能够利用现有的分配算法（如 TAPAS（Bar-Gera，2010年）和 iGP（Xie等，2018））高效计算流量；用于动态构造路径集的列生成步骤同样可以交由这些算法完成。为保留这一计算优势，我们保留 (12a) 和 (12b) 的原始形式，将其作为下层均衡约束，并仅对条件 (12c) 应用 merit 函数，由此形成上层优化。

我们使用 Fischer-Burmeister 函数（Fischer，1992）来编码互补条件（12c）。对于标量对（a，b），FB 函数定义为 $\varphi(\mathrm{a},\mathrm{b}) = \sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2} - (\mathrm{a}+\mathrm{b})$，其满足 $\varphi(\mathrm{a},\mathrm{b}) = 0$当且仅当 $0 \le \mathrm{a} \perp \mathrm{b} \ge 0$。将其应用于引入的变量 v 和可用容量 q(x)，我们定义 $\boldsymbol{\varphi}(\mathrm{v},\mathrm{x}) = \left(\varphi(\mathrm{v}_A, \mathrm{q}_A(\mathrm{x}))\right)\mathrm{A}\in\mathcal{A}^{\text{priority}}$，相应的 merit函数为

$$\Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})\|^2 = \sum_{A\in\mathcal{A}^{\text{priority}}} \varphi(v_A, q_A(\boldsymbol{x}))^2.$$

然后，$\boldsymbol{v}^*$ 满足（12c）当且仅当其最小化 Ψ（$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{x}$），其中可用容量 $\boldsymbol{q}$ 通过弧流量 $\boldsymbol{x}$间接取决于$\boldsymbol{v}$。

从$\boldsymbol{v}$ 到$\boldsymbol{x}$ 的映射由（12a）–（12b）定义。对于每个起讫点对$w \in \mathcal{W}$、类别$b \in \mathcal{B}_w$和路径$r \in \mathcal{R}_w$，令

$$\hat{c}^r_{w,b} = c^r_{w,b} + \sum_{A\in\mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v_A$$

为广义路径成本，并将这些成本汇总为 $\hat{\boldsymbol{c}}$。利用 $\hat{\boldsymbol{c}}$，条件 (12a)–(12b) 可改写为等价的均衡系统

$$0 \le \boldsymbol{f} \perp \hat{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) - \Lambda\boldsymbol{\mu} \ge 0, \tag{13a}$$

$$0 \le \boldsymbol{\mu} \perp \Lambda^T\boldsymbol{f} - \boldsymbol{d} \ge 0. \tag{13b}$$

这个下层问题的结构与经典静态交通分配模型相同，只是将通常的路径出行成本替换为广义成本 $\hat{c}$。

将 merit 函数 $\Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})$ 与均衡条件 (13) 结合，可将 NCP (12) 重新表述为以下数学规划与均衡约束（MPEC）：

$$\min_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}} \Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}) \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0} \text{ and Condition (13).} \tag{14}$$

移除$\boldsymbol{v}$ 的非负约束，不会影响其与 NCP (12) 在理论上的等价性。然而，允许$\boldsymbol{v}$ 的分量为负会导致广义成本为负，违反交通分配中的标准假设，并使最短路径搜索等过程变得复杂。因此，在重新表述的模型中保留约束$\boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}$ 。

当下层均衡问题 (13) 存在唯一的弧流解时，$\boldsymbol{v}$ 到$\boldsymbol{x}$ 的映射是良定义的；当广义成本是弧流量的严格递增函数时，通常可确保这一点（Patriksson，2015）。在这种情况下，可以用隐式方法求解 MPEC (14)。具体而言，将隐函数$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v})$ 代入 MPEC 的目标函数，从而消除均衡约束，然后对所得问题应用投影梯度算法。投影步骤只需满足$\boldsymbol{v}$的非负约束，因此可以非常高效地执行。相比之下，当下层均衡问题 (13) 不存在唯一的弧流解时，我们将 MPEC (14) 中的均衡条件重新表述为一组不等式约束，并使用通用非线性规划算法（如序列二次规划（SQP））求解所得模型。这两种求解方法——隐式方法和基于非线性规划的方法——的详细算法步骤见附录 C。

5 数值算例

本节采用所提出的方法，介绍三个用于求解非线性互补问题（12）的数值实验。第一个实验基于香港大学学生通勤的案例研究，展示了该方法准确捕捉优先规则的能力，并将其结果与显式优先级模型的结果进行了比较。第二个实验采用 Nguyen 等人（2001）提出的基准网络，证明了我们的方法能够准确恢复 R-UEIP。最后，第三个实验在苏福尔斯公交网络上评估了所提出算法的计算效率。本节所呈现的所有结果均在一台运行 Windows 10（64 位）的个人计算机上获得，该计算机配备 AMD Ryzen 7 4800H 2.90 GHz 中央处理器和 16 GB 内存。

成本结构。 我们首先说明数值实验中使用的成本函数。所有成本函数均取自现有文献，并假设与每种弧类型相关的成本对所有乘客都相同，而不论其起讫点对或类别如何。具体而言，对于每条上车弧$A = (E_o^{\text{str}}, E^{\text{dep}}{}_l, {}_j, {}_i)$，其成本为

$$\eta_1 \cdot (\tau^{\text{dep}}_{l,j,i} - t),$$

即时间持续时长乘以 η_1（时间价值）。同样，对于每条换乘弧$A = (E_l^{\text{arr}}{}_{,j,i}, E^{\text{dep}}{}_{l'}, {}_{j'}, {}_{i'})$，其成本为

$$\eta_1 \cdot (\tau^{\text{dep}}_{l',j',i'} - \tau^{\text{arr}}_{l,j,i}).$$

对于乘车弧$A = (E^{\text{dep}}{}_{l,\ j,\ i}, \overset{\text{arr}}{El}{}_{,\ j,\ i+1})$，其成本为

$$\eta_1 \cdot (\tau^{\text{arr}}_{l,j,i+1} - \tau^{\text{dep}}_{l,j,i}) + \pi^{i,i+1}_{l} + \eta_2 \cdot \max\left\{0, \frac{x_A}{u_A} - \rho\right\},$$

其中，$\pi^{i,i+1}{}_{l}$ 是从站点 s^i_l 搭乘线路 l前往 $s^{i+1}{}_{l}$ 所产生的票价或惩罚，$\eta_2 > 0$ 是拥挤的边际效用损失，$\rho \in [0,1]$ 是拥挤感知阈值（Hamdouch 和 Lawphongpanich，2008）。此处，只有当负载率 x_A/u_A超过阈值 ρ时，拥堵项才为正。对于停站弧 $A = (\overset{\text{arr}}{El}{}_{,j,i}, E^{\text{dep}}{}_{l,j,i})$，其成本的定义类似：

$$\eta_1 \cdot (\tau^{\text{dep}}_{l,j,i} - \tau^{\text{arr}}_{l,j,i}) + \eta_2 \cdot \max\left\{0, \frac{x_A}{u_A} - \rho\right\}.$$

另外两类弧——接入弧 $\mathcal{A}^{\text{access}}$ 和离站弧 $\mathcal{A}^{\text{egress}}$ ——的成本取决于起讫点对 $w \in \mathcal{W}$ 和类别 $b \in \mathcal{B}_w$。对于每条离站弧 $A = (\overset{\text{arr}}{El}{}_{,j,i}, E^{\text{dst}}_d)$，其成本由从站点 s^i_l 步行至目的地 d的时间，以及提前到达和迟到惩罚构成。形式上，其成本为

$$t^{\text{walk}}_{s^i_l,d} + \begin{cases} \eta_3 \cdot (\tau^-_{w,b} - (\tau^{\text{arr}}_{l,j,i} + t^{\text{walk}}_{s^i_l,d})), & \text{if } \tau^{\text{arr}}_{l,j,i} + t^{\text{walk}}_{s^i_l,d} < \tau^-_{w,b}, \\ 0, & \text{if } \tau^{\text{arr}}_{l,j,i} + t^{\text{walk}}_{s^i_l,d} \in [\tau^-_{w,b}, \tau^+_{w,b}], \\ \eta_4 \cdot (\tau^{\text{arr}}_{l,j,i} + t^{\text{walk}}_{s^i_l,d} - \tau^+_{w,b}), & \text{if } \tau^{\text{arr}}_{l,j,i} + t^{\text{walk}}_{s^i_l,d} > \tau^+_{w,b}, \end{cases}$$

其中，$\eta_3 > 0$ 和 $\eta_4 > 0$ 分别是反映乘客对过早和过晚到达的厌恶程度的系数。最后，对于接入弧 $A = (E^{\text{ogn}}_o, E^{\text{str}}_o t,)$，其成本为

$$\eta_5 \cdot \max\{\tau^{\text{free}}_{w,b} - t, 0\},$$

其中，$\tau^{\text{free}}_{w\,b}$表示自由流最晚出发时间 （Nguyen 等人，2001），即当不存在容量导致的延误时，起讫点对 w 、类别为b 的乘客仍能在$\tau^+{}_{w,b}$ 之前到达的最晚出发时间。早于此时间出发的乘客将受到惩罚。路径成本 $\overset{r}{c}{}_{w,b}(\boldsymbol{f})$ 是起讫点对w、类别为b且沿路径$r \in \mathcal{R}_{w,b}$出行的乘客所经历的弧行程成本总和。

5.1 香港大学学生通勤案例的见解

本节以香港大学学生的早高峰通勤为案例，说明所提出的公共交通分配模型能够准确刻画乘客的选择和排队行为。如图 7 所示，乘客从赛马会学生村四苑出发前往主校区，期望到达时间为 [9:00 至 9:20]；迟到会导致缺课并受到高额惩罚。可选路径分为两类。一种选择是乘坐 71 路巴士，车内乘车时间较长，约为 30 分钟；另一种选择是乘坐港铁（MTR），车内乘车时间仅约 17 分钟，但从车站前往校区需要使用容量有限的电梯。实际上，乘客经常要排队等候电梯，等待时间从十分钟到几十分钟不等。由此产生两个明显的权衡：（i）是乘坐速度较慢但更可靠的公交车，还是冒着长时间排队的风险乘坐较快的港铁；（ii）对于选择港铁的乘客，是提早出发以免迟到，还是晚些出发以减少排队等待时间。为说明这两种权衡，第 5.1.1 节分析所提出模型得出的分配结果，第 5.1.2 节则将这些结果与显式优先级模型的结果进行比较（见附录A）。

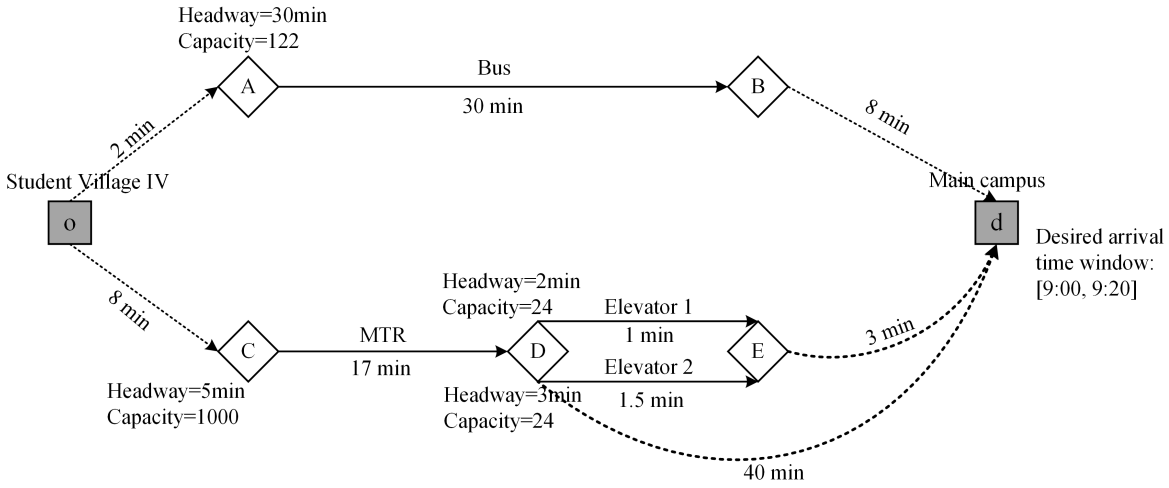


图 7：学生通勤案例的示例网络。

高峰时段，电梯以满载运转，停靠模式固定，因此可将其建模为定时公交线路。本案例考虑两部电梯：电梯 1（e1）从港铁站直达山顶校区，行程时间为 1 分钟，发车间隔为 2 分钟；电梯 2（e2）提供非直达服务，行程时间为 1.5 分钟，发车间隔为 3 分钟。两部电梯的容量均为 24 名乘客。乘客也可以选择从港铁站步行前往校区，需时 25 分钟，另有相当于 15 分钟的疲劳惩罚，因此有效出行时间为 40 分钟。71 路巴士使用 Enviro500MMC 11.3 米车辆运营，载客容量为 122 人；港铁线路由 Metro-Cammell 电动车组列车运营，总容量为 2504 人。扣除 1504 人的背景客流后，港铁的可行运力设为 1000 人。应用学生优惠后，港铁和公交车的票价分别为 4.4 港元和 6.7 港元。成本函数的参数设为 $\eta_1 = 0.55$, $\eta_2 = 5.0$,$\eta_3 = 0.2$, $\eta_4 = 10.0$, $\eta_5 = 1.0$ 和 $\rho = 0.8$。该案例采用附录 C.1 所述的隐式方法求解，算法以 C++ 实现。

5.1.1 所提模型下学生出行选择分析

表4展示了不同总需求水平下公交车与港铁之间的分配结果。由于公交车班次稀疏（每 30 分钟一班），在此情景中，只有上午 8:40的班次与乘客相关。该公交班次的最低出行成本（不包括拥挤惩罚和额外等待）为 37.70。当总需求为 200、300 或 400 时，港铁乘客的最高出行成本分别为 30.35、32.55 和 37.13，均低于 37.70。因此，没有乘客选择公交路线。随着需求增加到 500，部分港铁乘客必须提前出发，以免迟到。此时，港铁出行成本的最高值几乎等于公交成本，因此有 93.39 名乘客转乘公交车。当需求升至 600 和 700 时，港铁出行成本的最高值进一步上升，公交车达到满载（公交流量 = 122.00），并出现提前出发排队 现象：为了在有限的巴士运力中获得更高的上车优先级，乘客会比必要时间更早到达 A站。这种出发时间提前的程度取决于换乘的感知收益，具体而言，即港铁出行成本的最高值与未提前出发时的公交出行成本之间的差值

。当总需求水平为 600 和 700 时，出发时间分别提前 2 分钟和 5 分钟，从而使两种交通方式的成本大致均衡（由于时刻表和出发时间选择具有离散性，因而存在细微差异）。

Ta表 4：不同总需求水平下公交车与港铁之间的分配结果 .

需求	200	300	400	500	600	700
港铁出行成本最大值	30.35	32.55	37.13	37.72	41.85	47.56
公交出行成本	37.70	37.70	37.70	37.70	41.85	46.45
公交流量	0.00	0.00	0.00	93.39	122.00	122.00
出发时间提前	0 分钟	0 分钟	0 分钟	0 分钟	2 分钟	5 分钟

我们进一步分析选择港铁的乘客在迟到与提早出发之间的权衡。乘客是否迟到取决于其搭乘的电梯出发时间：如果电梯在上午 9:16 之后出发，乘客就会迟到。图 8 展示了不同需求水平下，乘客在不同地铁列车和电梯运行班次之间的分布。横轴表示电梯出发时间，左侧纵轴表示地铁列车到达 D站 的时间，右侧纵轴表示搭乘的电梯运行班次。时间以数字形式表示（例如，上午 9:16 表示为 76）。

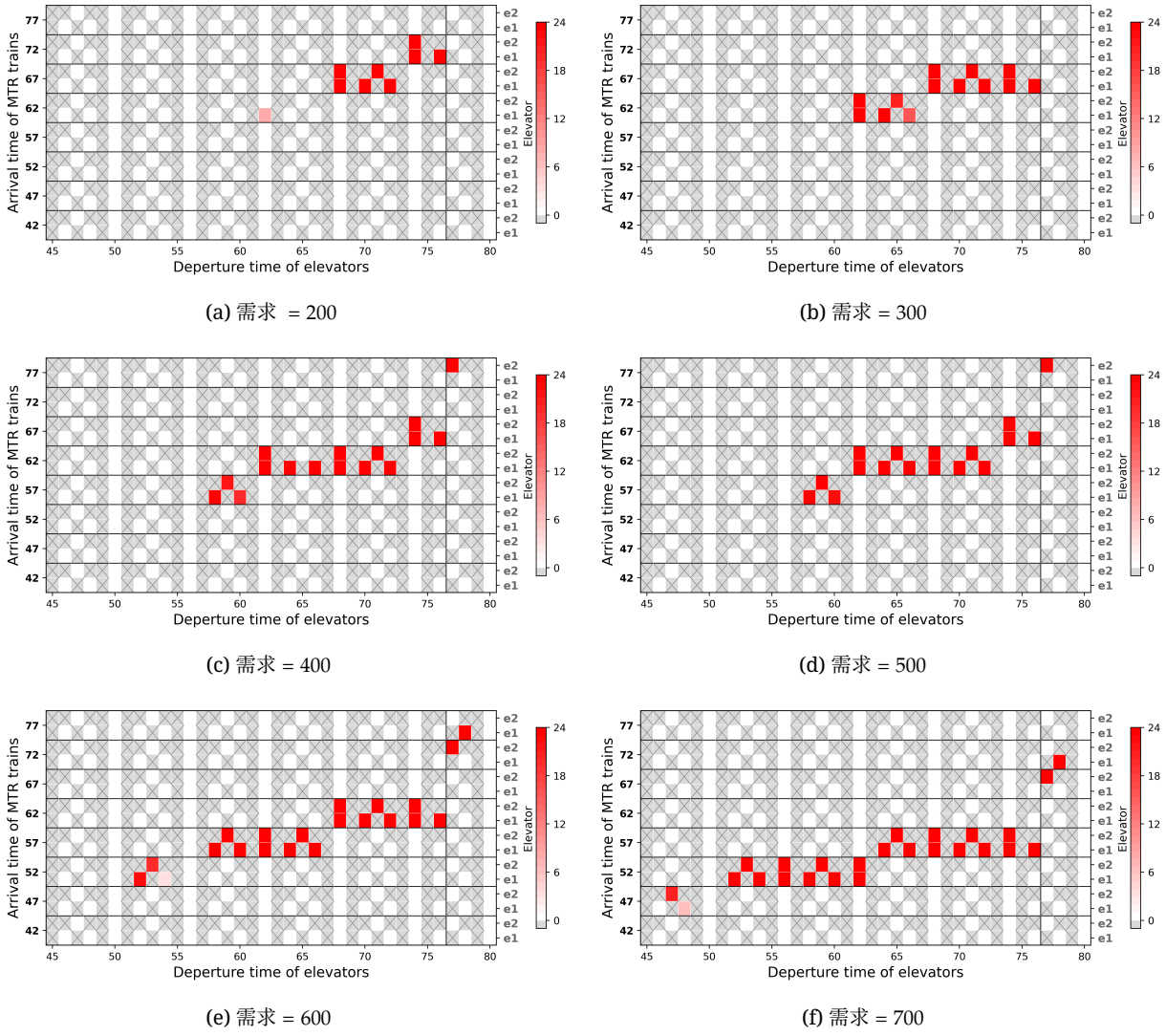
当总需求为 200 或 300 时，没有乘客迟到（图 8(a) 和图 8(b)）。这是因为迟到乘客可能产生的最低出行成本为 35.63，高于这两个需求水平下的最高港铁出行成本。随着需求持续增加，新增乘客必须提早出发，以避免迟到。当需求达到 400 时，准时乘客的最高出行成本升至 37.13，高于 35.63，这表明现在有些乘客宁愿晚些出发并接受迟到惩罚。如图 8(c) 所示，有 24 名乘客作出了这一选择。总需求进一步增至 500、600 和 700 时，迟到程度加重，迟到乘客人数分别增至 24、48 和 48 人（图 8(d) — 图 8(f)）。

除了增加晚点乘客的数量外，更高的需求还会导致更长的电梯等待时间。例如，对于乘坐上午9:02到达的港铁列车（时间62）的乘客，当需求为200时不会形成队列。当需求增加到300和400时，最长电梯等待时间分别延长至4分钟和10分钟。当需求达到600时，乘客在上电梯前至少需要排队等待6分钟，最长达14分钟。如此严重的拥堵模式与现实观察结果高度一致，表明所提出的模型能够切实捕捉排队现象。

5.1.2 与显式优先级模型的比较

作为比较，我们使用以C++ 实现的基于MSA的算法求解了该案例研究的显式优先级模型（模型和算法的详细信息见附录A）。当总需求达到600或700时，显式优先级模型的相对间隙无法收敛至低于 10^{-2}，因此所得结果无法进行比较。因此，在本节中，我们将总需求设为500；在此需求水平下，相对间隙收敛至低于 10^{-5}，表明已达到较为准确的均衡。

总体而言，所提出的隐式优先级模型和显式优先级模型得出的均符合乘客优先规则的均衡状态，其流量分布模式却有所不同。在显式优先级模型的结果中，72.21 名乘客选择乘坐公交车，而在所提出的模型中，



(a) 需求 = 200

(b) 需求 = 300

(c) 需求 = 400

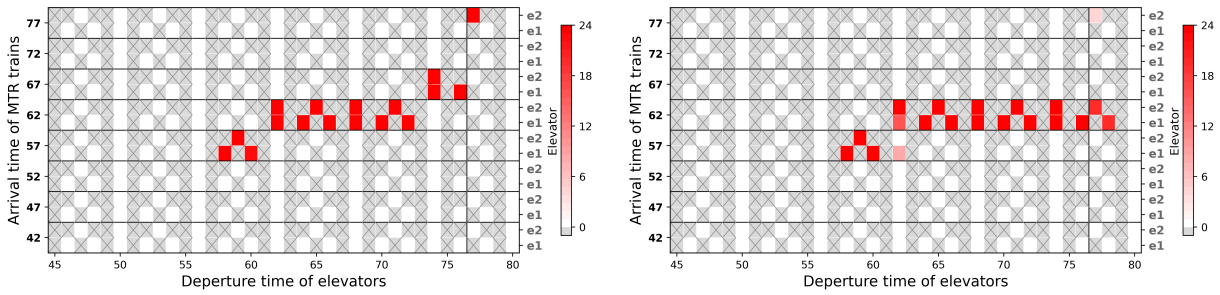
(d) 需求 = 500

(e) 需求 = 600

(f) 需求 = 700

图 8：不同总需求水平下港铁和电梯运行班次的乘客分布。灰色交叉单元格表示没有电梯出发，而红色的深浅表示特定港铁–电梯组合上的乘客数量。

如表4所示，公交流量达到93.39。图9展示了乘客在港铁列车上的分布以及由此形成的电梯队列。在两种结果中，电梯队列均遵循先到先服务原则——也就是说，乘坐较早到达的港铁列车的乘客总是先于乘坐较晚到达列车的乘客搭乘电梯（如图9所示，在同一部电梯上，代表较早到达乘客的红色方块位于代表较晚到达乘客的方块下方或左侧）。



（a）所提出的隐式优先级模型　　（b）显式优先级模型

图9：所提出的隐式优先级模型和显式优先级模型下，乘客在港铁列车上的分布及电梯队列。

然而，显式优先级模型的结果呈现出一种不切实际的现象。考虑在上午9:02（时间62）和上午9:17（时间77）到达的乘客，以及于上午9:17（时间77）和上午9:18（时间78）出发的两部电梯。一些较早到达的乘客让出“e2”电梯（于时间77出发）上4.61个单位的容量给较晚到达的乘客，却转而搭乘“e1”电梯（于时间78出发），因而承担更高的出行成本——这是一种不理性的选择。其原因在于显式优先级模型的决策机制，该机制基于预期出行成本。具体而言，在上午9:02到达的乘客被分配到两种公交出行方案中，两者的区别仅在于乘坐“e1”还是“e2”电梯。尽管对于部分乘客而言，从“e1”（于上午9:18出发）改乘“e2”（于上午9:17出发）可以降低实际出行成本，但这种换乘并未发生，因为从模型的角度看，这两种公交出行方案的预期出行成本已经相同，因此处于均衡状态。这个例子凸显了前文提到的显式优先级模型的一项关键局限：它人为地将本质上彼此无关联的乘客视为同一个决策实体，并假定他们会根据预期出行成本集体做出选择，以此强制实现均衡。相比之下，我们提出的模型根据实际出行成本确定路径选择，因此在行为表现上更为真实，也更具灵活性。

5.2 基准网络中的验证准确性

图 10 所示的基准网络由六个站点和四条线路组成，每条线路的容量为 20 名乘客。乘客分为四个起讫点对 (o_1,d_1)、(o_1,d_2)、(o_2,d_1) 和 (o_2,d_2)，其期望到达时间窗均为 [8:45、9:00]。每个起讫点的需求为 10。成本参数设为 $\eta_1 = \eta_5 = 1.00$ 和 $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0.00$。Nguyen 等人（2001）通过求解用户均衡整数规划（UEIP）的一个近似问题，得到了路径流向量 f^0，如表 5 第四列所示。该解不满足 UEIP 条件和 R-UEIP 条件，也不符合车辆容量约束。我们将其作为初始路径流向量。对于通向两条饱和弧 ($E^{dep}_{2\,1\,2}$, , , $E^{arr}_{2\,1}$, ,3) 和 ($E^{dep}_{1\,1\,2}$, , , $E^{arr}_{1\,1}$, ,3) 的所有入弧，初始 v 设为 5.00，而所有其他弧的初始 v 设为 0.00。初始

μ 为 $\mu^0_{(o_1,d_1)} = 65.00, \mu^0_{(o_1,d_2)} = 75.00, \mu^0_{(o_2,d_1)} = 60.00, \mu^0_{(o_2,d_2)} = 75.00$。此处，我们采用附录 C.2 中所述的基于非线性规划的方法求解该示例，具体使用 MATLAB 中 *fmincon* 函数的 SQP 求解器。

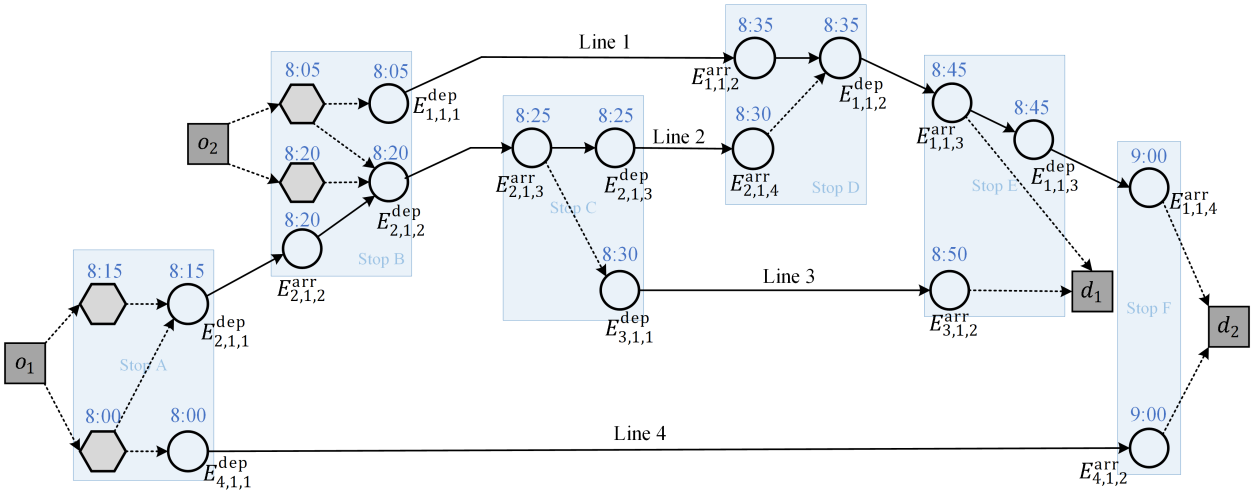


图 10：基准网络。

经过 55 次迭代后，算法在约 0.11 秒内收敛；最终目标值为$\Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}) = 6.55 \times 10^{-6}$。这表明已获得数学规划与均衡约束（14）的高精度全局最优解，对应一个 R-UEIP 解。表 5 的第 5、6、7 列分别报告了最优路径流量 $f^{r*}_{w,b}$、主导路径的可用总容量 $\hat{Q}^r_{w,b}$以及出行成本 $c^r_{w,b}$。可以轻易验证，所有 $\hat{Q}^r_{w,b} > 0$ 的路线均未被使用，从而确认该解符合 R-UEIP 定义（定义 4）。

表 5：基准网络中的路径流结果。

OD对	路线	路径描述	f^0	f^*	$\hat{Q}$	c
(o_1,d_1)	1	8:15 - 2号线 - D站 - 1号线	0.000	0.000	0.000	30.000
	2	8:15 - 2号线 - C站 - 3号线	10.000	10.000	0.000	35.000
	3	8:00 - 2号线 - D站 - 1号线	0.000	0.000	10.000	60.000
	4	8:00 - 2号线 - C站 - 3号线	0.000	0.000	0.00	65.000
(o_1,d_2)	5	8:15 - 2号线 - D站 - 1号线	6.236	5.000	0.000	45.000
	6	8:00 - 2号线 - D站 - 1号线	0.000	0.000	5.000	75.000
	7	8:00 - 4号线	3.764	5.000	0.000	75.000
(o_2,d_1)	8	8:20 - 2号线 - D站 - 1号线	0.000	0.000	0.000	25.000
	9	8:20 - 2号线 - C站 - 3号线	4.764	5.000	0.000	30.000
	10	8:05 - 2号线 - D站 - 1号线	0.000	0.000	0.000	55.000
	11	8:05 - 2号线 - C站 - 3号线	0.000	0.000	5.000	60.000
	12	8:05 - 1号线	5.236	5.000	0.000	55.000
(o_2,d_2)	13	8:20 - 2号线 - D站 - 1号线	0.000	0.000	0.000	40.000
	14	8:05 - 2号线 - D站 - 1号线	0.000	0.000	0.000	70.000
	15	8:05 - 1号线	10.000	10.000	0.000	70.000

5.3 苏福尔斯网络的验证计算效率

苏福尔斯公交网络改编自 Szeto 和 Jiang（2014），包含 24 个站点、10 条线路和 16 个起讫点对。各起讫点的需求列于表6。乘客的期望到达时间窗均为 $[60,\ 90]$。由于原始网络说明仅提供了各线路的发车间隔，因此按照给定的发车间隔，将各线路的首班车出发时间设为 0，以此构建时刻表。10 条线路共生成 113 个班次，所得扩展事件活动图包含 1,525 个节点和 12,951 条弧。成本函数参数设为 $\eta_1 = 1.0$, $\eta_2 = 2.0$, $\eta_3 = \eta_4 = \eta_5 = 1.2$ 和$\rho = 0.0$。在此示例中，通过隐式方法获得解。

表6：苏福尔斯公交网络的需求数据。

OD	需求	OD	需求	OD	需求	OD	需求
(1,13)	200	(2,13)	100	(3,13)	200	(4,13)	200
(1,20)	100	(2,20)	100	(3,20)	100	(4,20)	100
(1,21)	100	(2,21)	100	(3,21)	100	(4,21)	100
(1,24)	200	(2,24)	100	(3,24)	200	(4,24)	200

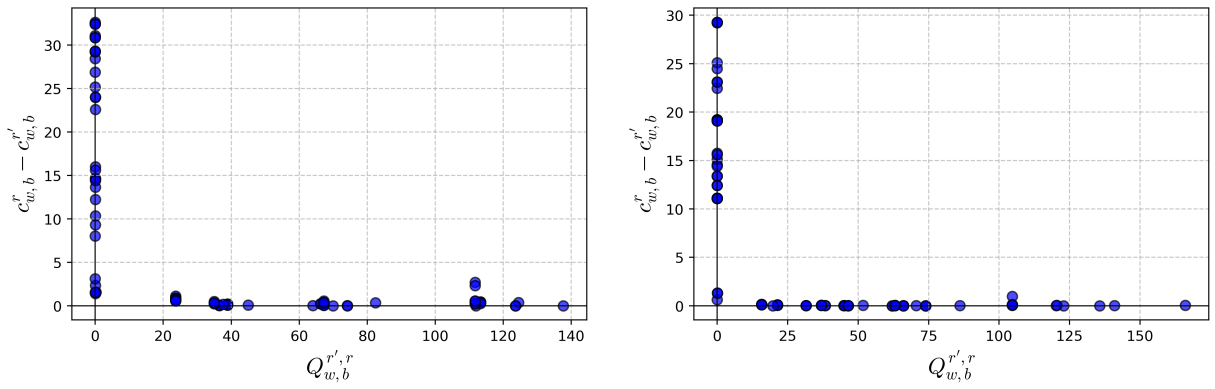
表7报告了算法3使merit函数 $\Psi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$ 低于预定义阈值所需的迭代次数和CPU时间。初始目标函数值为 1.02×10^7。经过3560次迭代（约22.45分钟）后，该值降至10以下；经过8276次迭代（55.31分钟）后，进一步降至1以下。

表7：达到预定收敛阈值所需的迭代次数和CPU时间。

阈值	10^4	10^3	10^2	10	1
迭代次数	34	396	1116	3560	8276
CPU时间	15.22 秒	2.51 分钟	6.80 分钟	22.45 分钟	55.31 分钟

为了更直观地说明收敛精度，图11展示了当 $\Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})$ 分别低于 10 和 1 时，所有已使用路径 r 及其被支配对应路径r'的可用容量 $Q_{r',r\,w,b}$ 与成本差$c^{r}_{w,b} - c^{r'}{}_{w,b}$ 的散点图。根据 R-UEIP（定义 4）的定义，对于任意路径对(r,r')，这两个量——可用容量或成本差——至少有一个必须为零。如图11所示，当 $\Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}) < 10$时，几乎所有点都靠近$x$轴或$y$轴。偏离程度最大的点，其可用容量为 111.77，成本差为 2.69。当$\Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}) < 1$时，收敛精度进一步提高，所有点都更加靠近坐标轴。对于偏离程度最大的路径对，可用容量为 104.68，成本差为 0.97。这些结果表明，该解已达到令人满意的收敛精度。

我们还应用基于MSA的算法求解该网络上的显式优先级模型。然而，该算法未能达到可接受的收敛水平：计算一小时后，最小相对间隙仍为0.014。在这一精度下，所得路径选择仍远未达到均衡。表8报告了每个起讫点对中，流量不可忽略（大于1.0）的公交方案-出发时间对之间的最大成本差。例如，对于起讫点对(1,20)，最大成本差达到56.71。在该起讫点对中，有两个公交方案-出发时间对的流量分别为87.50和11.94，预期出行成本分别为73.21和129.92。同样，起讫点对(2,13)呈现出



(a) $\Psi < 10$ (b) $\Psi < 1$

图11：不同收敛精度下的可用容量和成本差。

两个流量分别为30.23和4.17、预期成本分别为82.93和94.50的公交方案-出发时间对之间，最大成本差为11.57。

表8：显式优先级模型的解中起讫点对内的最大成本差。

OD	最大差值	OD	最大差值	OD	最大差值	OD	最大差值
(1,13)	0.00	(2,13)	11.57	(3,13)	1.51	(4,13)	0.00
(1,20)	56.71	(2,20)	4.40	(3,20)	0.00	(4,20)	0.00
(1,21)	32.82	(2,21)	1.27	(3,21)	0.03	(4,21)	0.00
(1,24)	4.07	(2,24)	0.00	(3,24)	10.73	(4,24)	0.00

6 结论

本文重新审视并拓展了一种基于时刻表的公共交通分配框架，该框架通过隐式方法刻画乘客优先规则。我们首先将 Nguyen 等人（2001）的用户均衡整数规划重新表述为非线性互补问题，并在温和条件下证明均衡状态的存在性，为此建立了此前尚未确立的理论基础。NCP公式还揭示，均衡可能并不唯一，且可能包含行为上不切实际的状态。为此，我们通过修改路径可用性的定义和 NCP公式，改进了原有框架，从而排除所有此类行为不一致的均衡。改进后的模型在结构上仍然易于求解：通过在弧层面而非路径层面施加优先级约束条件，它避免了对所有可行路径进行显式枚举，并具有可分解的网络流结构。通过使用 Fischer-Burmeister 函数对一个互补条件进行平滑处理，我们得到了一个连续可微的数学规划与均衡约束模型（MPEC），并为其开发了两种求解方法——隐式方法和基于非线性规划的方法。

通过对香港大学学生通勤进行真实案例研究，我们首先证明，该模型能够真实地刻画电梯中的先到先服务排队，以及公交乘客为竞争上车优先级而产生的提前出发行为。与显式优先级模型的比较凸显了所提方法的一项关键优势：通过依据实际出行成本而非预期出行成本做出决策，改进后的框架避免了行为上不合理的结果——例如，乘客仅为维持预期成本的一致性而接受高额的迟到罚款——并由此得到行为逻辑一致的均衡。此外，

在基准网络和苏福尔斯公交网络上开展的数值实验表明，所提算法能够以合理的计算开销求得高精度均衡。

本研究还提出了未来研究的若干方向。首先，所提出的算法无法保证全局最优性，并且其对超大规模网络的可扩展性有限。开发具有可证明收敛性质、能够高效处理大规模网络的算法，将对该模型在现实应用中的实际应用价值产生重要意义。其次，尽管UEIP均衡概念已得到形式化定义，但仍需进一步开展行为验证，以解释其如何实现。在道路交通分配文献中，研究者已投入大量精力探讨用户均衡（UE）的行为基础与稳定性性质（例如，Smith，1984；Yang，2005；Li等人，2024b），以及随机用户均衡（SUE）的相关问题（例如，Horowitz，1984；Cascetta，1989；Watling 和 Hazelton，2003；Cantarella 和 Watling，2016）。类似地，一个有前景的研究方向是考察UEIP能否被解释为某种具有行为合理性的逐日调整过程所产生的均衡结果。此外，近期研究利用逐日动态模型，考察在多个解中哪一个均衡更有可能在现实中出现（Li等人，2024a）。我们关于UEIP非唯一性的发现，包括识别出一些在行为上似乎不合理的解，自然引出了这样一个问题：能否从动态视角排除这类结果。最后，现有大多数公交网络设计研究在评估设计方案时，依赖于不包含优先规则的公交分配模型（Yin 等人，2021；Xie等，2021；Feng 等人，2025），因而忽略了乘客优先级排序所引发的排队和拒载影响。这主要是因为，将基于DNL的优先分配纳入网络设计问题会导致难以承受的计算复杂度。我们的无DNL框架或许能够以更易处理的方式，将由优先级驱动的乘客行为整合到公交网络设计中，而这种整合是未来研究的一个有前景方向。

参考文献

Bar-Gera, H. (2010). 基于成对替代路段的交通分配。《交通研究*B*辑：方法论》，44(8-9):1022–1046。Beckmann, M., McGuire, C. B. 和 Winsten, C. B. (1956). 交通经济学研究。耶鲁大学出版社，纽黑文，CT。北京日报 (2023). 早高峰期间沙河地铁站排起长队。北京日报网。访问日期：2025年11月14日，URL: https://news.bjd.com.cn/2023/02/27/10349927.shtml。Cantarella, G. E. 和 Watling, D. P. (2016). 将道路交通分配建模为逐日动态确定性过程：离散时间与连续时间模型的统一方法。《*EURO*交通与物流期刊》，5(1):69–98。Cascetta, E. (1989). 采用随机过程方法分析交通网络中的时间动态。《交通研究*B*辑：方法论》，23(1):1–17。Cats, O. 和 West, J. (2020). 拥堵网络动态公交分配模型中的学习与适应。《交通研究记录：交通研究委员会期刊》，2674(1):113–124。

Cats, O.、West, J. 和 Eliasson, J. (2016). 用于评估公共交通系统拥堵与拥挤效应的动态随机模型。《交通研究*B*辑：方法论》，89:43–57。Cepeda, M.、Cominetti, R. 和 Florian, M. (2006). 具有严格容量约束的拥堵公共交通网络基于频率的分配模型：均衡的刻画与计算。《交通研究*B*辑：方法论》，40(6):437–459。Cominetti, R. 和 Correa, J. (2001). 拥堵公共交通网络中的共同线路与乘客分配。《交通科学》，35(3):250–267。Feng, L.、Li, J.、Xu, Z. 和 Xie, J. (2025). 起点和换乘站同步的双层公共交通时刻表编制。可见 *SSRN 5295135*。Feng, L.、Xie, J.、Nie, Y. M. 和 Liu, X. (2020). 带侧约束交通分配问题的高效算法。《交通研究记录：交通研究委员会期刊》，2674(4):129–139。Fischer, A. (1992). 一种特殊的牛顿型优化方法。优化，24(3-4):269–284。Friesz, T. L.、Bernstein, D.、Smith, T. E.、Tobin, R. L. 和 Wie, B.-W. (1993). 动态网络用户均衡问题的变分不等式表述。《运筹学》，41(1):179–191。Gentile, G. 和 N¨okel (2016). 智能交通系统时代的公共交通客流建模，第10卷。施普林格。Hamdouch, Y.、Ho, H.、Sumalee, A. 和 Wang, G. (2011). 考虑车辆容量和座位可用性的基于时刻表的公共交通分配模型。《交通研究*B*辑：方法论》，45(10):1805–1830。Hamdouch, Y. 和 Lawphongpanich, S. (2008). 考虑出行策略与容量约束的基于时刻表的公共交通分配模型。《交通研究*B*辑：方法论》，42(7-8):663–684。Hamdouch, Y.、Szeto, W. 和 Jiang, Y. (2014). 考虑出行策略与供给不确定性的新型基于时刻表的公共交通分配模型。《交通研究*B*辑：方法论》，67:35–67。香港巴士维基 (2025). “顶闸”（俚语解释）。香港巴士维基，Fandom。访问日期：2025年11月14日，URL: https://hkbus.fandom.com/wiki/%E9%A0%82%E9%96%98。Horowitz, J. L. (1984). 双链路交通网络中随机均衡的稳定性。《交通研究*B*辑：方法论》，18(1):13–28。Larsson, T. 和 Patriksson, M. (1995). 用于带链路容量侧约束的交通分配问题的增广拉格朗日对偶算法。《交通研究*B*辑：方法论》，29(6):433–455。Li, J.、Wang, Q.、Feng, L.、Xie, J. 和 Nie, Y. M. (2024a). 求解最可能用户均衡问题的逐日动态方法。《交通科学》，58(6):1193–1213。Li, J.、Wang, Z. 和 Nie, Y. M. (2024b). Wardrop均衡可能具有有界理性：一种新的路径选择行为理论。《交通科学》，58(5):973–994。Nguyen, S.、Pallottino, S. 和 Malucelli, F. (2001). 具有时刻表的交通网络乘客分配建模框架。《交通科学》，35(3):238–249。Nie, Y. M.、Zhang, H. 和 Lee, D.-H. (2004). 带链路容量约束的交通分配问题模型与算法。《交通研究*B*辑：方法论》，38(4):285–312。Nuzzolo, A.、Crisalli, U. 和 Rosati, L. (2012). 用于拥堵公共交通网络的显式容量约束基于时刻表的分配模型。《交通研究C辑：新兴技术》style>，20(1):16–33。

Nuzzolo, A., Russo, F., and Crisalli, U. (2001). 面向公共交通网络的双重动态时刻表型分配模型。《交通科学》, 35(3):268–285. Papola, N., Filippi, F., Gentile, G., and Meschini, L. (2008). 基于时刻表的公共交通分配：具有车辆容量约束的新型动态均衡模型。载于 Nuzzolo, A. and Wilson, N. H. M.（编）, 《交通网络的时刻表建模：理论与应用》, 第 1–26 页。施普林格。Patriksson, M. (2004). 交通均衡的敏感性分析。《交通科学》, 38(3):258–281. Patriksson, M. (2015).《交通分配问题：模型与方法》。Courier Dover出版社。Poon, M., Wong, S., and Tong, C. (2004). 拥堵公共交通网络的动态时刻表模型。《交通研究*B*辑：方法论》, 38(4):343–368. Smith, M. J. (1984). 动态交通分配模型的稳定性——Lyapunov方法的应用。《交通科学》, 18(3):245–252. Spiess, H. and Florian, M. (1989). 最优策略：一种新的公共交通网络分配模型。《交通研究*B*辑：方法论》, 23(2):83–102. Szeto, W. and Jiang, Y. (2014). 公共交通分配：基于路径的表述、外梯度法与悖论。《交通研究*B*辑：方法论》, 62:51–76. Tobin, R. L. and Friesz, T. L. (1988). 网络流均衡的敏感性分析。《交通科学》, 22(4):242–250. Watling, D. and Hazelton, M. L. (2003). 逐日分配模型的动态与均衡。《网络与空间经济学》, 3(3):349–370. Wu, J. H., Florian, M., and Marcotte, P. (1994). 公共交通均衡分配：模型与求解算法。《交通科学》, 28(3):193–203. Xie, J., Nie, Y. M., and Liu, X. (2018). 一种用于交通分配的贪心路径算法。《交通研究记录：交通研究委员会期刊》, 2672(48):36–44. Xie, J., Zhan, S., Wong, S. C., and Lo, S. M. (2021). 拥堵公共交通网络的基于时刻表的时刻表模型。《交通研究*C*辑：新兴技术》, 124:102925. Xu, Z., Xie, J., Liu, X., and Nie, Y. M. (2020). 用于公共交通均衡分配问题的基于超路径的算法。《交通研究*E*辑：物流与交通评论》, 143:102102. Xu, Z., Xie, J., Liu, X., and Nie, Y. M. (2022). 用于基于策略的均衡交通分配问题的超灌木算法。《交通科学》, 56(4):877–903. Yang, F. (2005).《运用演化博弈论研究逐日交通动态》。博士学位论文，威斯康星大学麦迪逊分校，威斯康星州麦迪逊。Yao, X., Han, B., Yu, D., and Ren, H. (2017). 基于仿真的基于时刻表的公共交通网络动态客流分配建模。《自然与社会中的离散动力学》, 2017(1):2890814. Yin, J., D'Ariano, A., Wang, Y., Yang, L., and Tang, T. (2021). 时变客运需求下轨道交通网络的时刻表协调。《欧洲运筹学杂志》, 295(1):183–202. Yin, J., Yang, L., Liang, Z., D'Ariano, A., and Gao, Z. (2025). 城市轨道交通系统中的实时列车车辆与时刻表重新编排。《*INFORMS*计算杂志》，即将刊出。

A An 显式优先级公交分配模型及其问题

现有显式优先级模型假设乘客选择线路区段（Yao 等人，2017）或策略（Hamdouch 和 Lawphongpanich，2008），而动态网络加载过程则确定其实际上车、换乘和下车时间，以及实际出行体验。在本附录中，我们考虑这样一种情形：乘客选择出发时间和一系列线路区段。

对于起讫点对 $w = (o、d) \in \mathcal{W} := \mathcal{O} \times \mathcal{D}$，公交出行方案是公共交通网络中的任一路径，该路径从起点 o出发，到达目的地 d，并规定乘客的接入站点、车内线路区段（包括任何站内换乘）以及最终下车站点。我们用 $\mathcal{P}_w$ 表示起讫点对w 的此类方案集合。每位乘客选择一个公交出行方案$p \in \mathcal{P}_w$ 和一个出发时间$t \in \mathcal{T}$。令$g^{p}{}_{,t\ w,b}$ 表示起讫点对w 中选择$(p、t)$的类别b 乘客数量，并将所有此类变量汇集为向量$\boldsymbol{g}$。可行集 $\mathcal{G}$ 由所有满足以下条件的$\boldsymbol{g}$ 组成

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_w}\sum_{t\in\mathcal{T}} g_{w,b}^{p,t} = d_{w,b}, \quad \forall w \in \mathcal{W},\ \forall b \in \mathcal{B}_w,$$
$$g_{w,b}^{p,t} \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{W},\ \forall b \in \mathcal{B}_w,\ \forall (p,t) \in \mathcal{P}_w \times \mathcal{T}.$$

我们首先介绍动态网络加载过程，随后描述显式优先级模型及其相应的基于MSA的求解算法。最后，我们使用一个简单示例来说明这类显式优先级模型固有的行为问题。

A.1 动态网络加载

形式上，DNL可视为一个映射$D:\ \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ 它将任意公交出行方案及出发时间的流量向量$\boldsymbol{g} \in \mathcal{G}$ 转换为由此产生的时空路径流量向量$\boldsymbol{f} = D(\boldsymbol{g})$。具体而言，对于每个节点$E \in \mathcal{E}$ 和每条弧$A \in \mathcal{A}$，令$x^{w}{}_{,b,p,t\ E}$ 和 $x^{w}{}_{,b,p,t\ A}$ 分别表示与经过该节点和该弧的方案–出发组合$(p,t) \in \mathcal{P}_w \times \mathcal{T}$相关联的起讫点对$w \in \mathcal{W}$及类别 $b \in \mathcal{B}_w$ 的流量。动态网络加载过程以给定的公交出行方案和出发时间向量$\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}$为输入，并模拟相应的节点流量和弧流量，

$$\left(x_E^{w,b,p,t}\right)_{\forall E\in\mathcal{E},\forall w\in\mathcal{W},\forall b\in\mathcal{B}_w,\forall (p,t)\in\mathcal{P}_w\times\mathcal{T}} \quad \text{and} \quad \left(x_A^{w,b,p,t}\right)_{\forall A\in\mathcal{A},\forall w\in\mathcal{W},\forall b\in\mathcal{B}_w,\forall (p,t)\in\mathcal{P}_w\times\mathcal{T}'}$$

同时遵循上车优先级。最后，对于每个起讫点对$w \in \mathcal{W}$、类别$b \in \mathcal{B}_w$以及$(p,t) \in \mathcal{P} \times \mathcal{T}$，令$\mathcal{R}^{p}{}_{,t\ w,b}$ 表示所有时空路径的集合，这些路径的出发时间、上车站点、线路选择、换乘序列和最终下车站点均与(p,t)中指定的内容一致。时空路径流量根据每条弧上的流量分配比例确定：

$$f_{w,b}^{r} = g_{w,b}^{p,t} \sum_{A\in\mathcal{A}_w^r} \frac{x_A^{w,b,p,t}}{\sum_{A'\in\mathcal{A}^+_{\text{tail}(A)}} x_{A'}^{w,b,p,t}}, \forall r \in \mathcal{R}_{w,b}^{p,t}, \tag{15}$$

其中，$\mathcal{A}_w^r$ 是属于路径r的弧集；$\text{tail}(A)$ 是A的尾节点；$\mathcal{A}_E^+$ 和 $\mathcal{A}_E^-$ 分别是E的出弧集和入弧集。

算法 1 详细介绍了动态网络加载的计算过程。首先，对于每个起讫点对 (p,t)，将类别 $b \in \mathcal{B}_w$ 下所有方案—出发组合的流量加载到其起点节点 E_o^{ogn}：

$$x_{E_o^{\text{ogn}}}^{w,b,p,t} = g_{w,b}^{p,t}. \tag{16}$$

随后，为保持公共交通系统的时间一致性，事件—活动图 $\mathcal{H}(\mathcal{E},\mathcal{A})$ 中所有其他节点的加载按照拓扑顺序和时间顺序相结合的方式进行。共有三种情况：（I）如果节点 E 表示一个出发事件，则对于每条入弧 $A \in \mathcal{A}_E^-$，只有当乘客选择的出发时间 t 与 E的时间戳一致时，才能将起点节点的乘客加载到该弧上。令 $\text{timestamp}(E)$ 表示 E的时间戳。随后更新弧流量如下：

$$x_A^{w,b,p,t} = \begin{cases} x_{\text{tail}(A)}^{w,b,p,t}, & \text{if timestamp}(E) = t, \\ 0, & \text{if timestamp}(E) \neq t, \end{cases} . \tag{17}$$

（II）如果节点 E 表示一个车辆出发事件，则经由入弧到达并在随后车内乘车弧 riding（E）上车的乘客，将按照上车优先级装载，直至达到车辆容量 $u^{\text{riding}(E)}$ 。因此，我们按照优先级递减的顺序遍历节点 E 的所有入弧，并计算相应的弧流量。对于每条入弧 $A \in \mathcal{A}_E^-$，令 $\bar{\mathcal{P}}_w^A$表示经过与A 对应的站点、并选择与$E =$ head（A）相关联线路的起讫点对 $w \in \mathcal{W}$ 的公共交通方案集合。令 $\bar{x}^w$、$_b$、$_p$、$_{t\,E}$ 和 $\bar{u}^{\text{riding}(E)}$ 分别表示装载所有更高优先级入弧上的乘客后，剩余的客流量和剩余容量。在无容量限制条件下，位于（A）尾部且希望在事件E 上车的乘客总数为

$$x_A^{\text{wishing}} = \sum_{w\in\mathcal{W}} \sum_{b\in\mathcal{B}_w} \sum_{p\in\bar{\mathcal{P}}_w^A} \sum_{t\in\mathcal{T}} \bar{x}_{\text{tail}(A)}^{w,b,p,t}.$$

当容量起作用且这些乘客无法全部上车时，我们假设以等概率选取他们。因此，弧流量更新为

$$x_A^{w,b,p,t} = \begin{cases} \bar{x}_{\text{tail}(A)}^{w,b,p,t}, & \text{if } \bar{u}_{\text{riding}(E)} \geq x_A^{\text{wishing}}, \\ \bar{x}_{\text{tail}(A)}^{w,b,p,t} \dfrac{\bar{u}_{\text{riding}(E)}}{x_A^{\text{wishing}}}, & \text{if } \bar{u}_{\text{riding}(E)} < x_A^{\text{wishing}}, \end{cases} . \tag{18}$$

(III) 如果节点 E 对应其他任何类型的事件，则不适用优先级规则或容量约束。对于任意入弧 $A \in \mathcal{A}_E^-$，尾节点 $\text{tail}(A)$ 处的所有流量都会直接加载到该弧上。因此，弧流量更新如下：

$$x_A^{w,b,p,t} = x_{\text{tail}(A)}^{w,b,p,t}. \tag{19}$$

In a在所有情况下，节点 E 处的流量均通过汇总所有入弧上的流量获得 s:

$$x_E^{w,b,p,t} = \sum_{A\in\mathcal{A}_E^-} x_A^{w,b,p,t}. \tag{20}$$

算法 1动态网络加载

1：**输入：** 节点集合 $\mathcal{E}^*$ 按拓扑和时间顺序排序。入弧集合 $\mathcal{A}_E^{-*}$针对所有车辆出发节点E按优先级顺序排序。流量向量 g。2：根据方程（16）加载虚拟起点节点上的客流。3：**对于**每个节点$E \in \mathcal{E}^*$ 和$E \notin O$ **执行**4：**如果**E 是发出节点**则** 5：**对于**每条弧$A \in \mathcal{A}_E^-$ **执行**6：根据方程（17）更新$x^{w,\ b,\ p,\ t\ A}$。7：**结束循环**

8：否则 9：如果 E 是车辆出发节点，则 10：设置 $\bar{u}^{\text{riding}(E)} = u^{\text{riding}(E)}$。11：对于每条弧 A $\in \mathcal{A}_E^{-*}$执行 12：根据方程（18）更新 $x^{w,b,p,t}$ A。13：设置 $\bar{u}_{\text{riding}(E)} = \bar{u}_{\text{riding}(E)} - \sum_{w\in\mathcal{W}} \sum_{b\in\mathcal{B}_w} \sum_{p\in\bar{\mathcal{P}}_w^A} \sum_{t\in\mathcal{T}} x^{w,b,p,t}$ A，并设置 $\bar{x}^{w,b,p,t}$ E $= \bar{x}^{w,b,p,t}$ E $- x^{w,b,p,t}$ A。14：结束循环 15：否则 16：对于每条弧 A $\in \mathcal{A}_E^-$ 执行 17：根据方程（19）更新 $x^{w,b,p,t}$ A。18：结束循环 19：结束条件判断 20：结束条件判断 21：根据方程（20）更新 $x^{w,b,p,t}$ E。设置 $\bar{x}^{w,b,p,t}$ E $= x^{w,b,p,t}$ E。22：结束循环 23：根据方程（15）获得时空路径流。

A.2 变分不等式模型与MSA算法

容量约束下动态网络加载的一个关键影响是，选择相同公交出行方案和出发时间(p,t) 的乘客可能会有异质的实际出行体验。因此，(p,t) 并不对应单一的实际时空路径，其出行成本对于所有采用该策略的乘客而言也并非唯一确定。因此，显式优先级模型使用(p,t) 的期望成本进行评估，该成本定义为动态网络加载所产生的所有时空路径上实际成本的流量加权平均值：

$$e_{w,b}^{p,t}(\boldsymbol{g}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r\in\mathcal{R}_{w,b}^{p,t}} c_{w,b}^{r}(\boldsymbol{f}) \frac{f_{w,b}^{r}}{g_{w,b}^{p,t}}, & \text{if } g_{w,b}^{p,t} > 0, \\ c_{w,b}^{\bar{r}}(\boldsymbol{f}), & \text{if } g_{w,b}^{p,t} = 0, \end{cases} \tag{21}$$

其中$\boldsymbol{f} = D(\boldsymbol{g})$。这里，$\bar{r} \in \mathcal{R}^{p,t}_{w,b}$ 是通过在背景加载$\boldsymbol{g}$ 上注入采用(p,t) 的类别b 乘客的无穷小流量而得到的时空路径；在每次上车、停站或换乘机会中，都将该无穷小流量分配给所选线路上最先到达且有剩余容量的车辆。即使(p,t) 未被采用，这一约定仍能确保$e^{p,t}_{w,b}(\boldsymbol{g})$ 定义良好。

定义 5 (显式优先级用户均衡**)**。 若可行流量向量$\boldsymbol{g} \in \mathcal{G}$ 满足以下条件，则称其为显式优先级用户均衡 ***(UEEP)***：对于每个起讫点对 $w \in \mathcal{W}$、类别 $b \in \mathcal{B}_w$和策略$(p,t) \in \mathcal{P} \times \mathcal{T}$，任何乘客都无法通过单方面改选其他公交出行方案或出发时间来降低其期望成本 $e^{p,t}_{w,b}(\boldsymbol{g})$ 。

UEEP 的定义等价于以下变分不等式问题：

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{g}^*)^\top(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}^*) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}, \tag{22}$$

其中$\boldsymbol{g}^*$ 表示均衡流量向量，$\boldsymbol{e}(\cdot)$ 表示相应的期望成本映射。

由于流量向量$\boldsymbol{g}$ 与期望成本向量$\boldsymbol{e}$之间不存在闭式关系，因此映射$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{g})$ 通常不可微。因此，通常采用一阶算法求解问题（22），其中逐次平均法（MSA）是最常用的方法。算法的详细步骤见算法 2。

算法 2逐次平均法

1：步骤 0。使用通过全有或全无分配获得的可行解 $g^1 \in G$ 进行初始化。设置 $k = 1$。2：步骤 1。执行算法 1，得到弧流量 x 和路径流 f。更新期望成本 $e(g^k)$。3：步骤 2。对于每个起讫点对 $w \in \mathcal{W}$ 以及每个类别 $b \in B_w$，确定最小成本对（$\bar{p}$, $\bar{t}$），并设置 $y_{\bar{p},\bar{t}w,b} = d_{w,b}$，以及对于所有 $p \neq \bar{p}$、$t \neq \bar{t}$，设置 $y^p_{,t\,w,b} = 0$。记 $y = (y^p_{,t\,w,b})\ \forall w \in \mathcal{W}, \forall b \in \mathcal{B}_w, \forall (p,t) \in \mathcal{P}_w \times \mathcal{T}$。4：步骤 3。计算相对间隙：

$$RG = 1 - \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{b \in \mathcal{B}_w} e^{\bar{p},\bar{t}}_{w,b} d_{w,b}}{\sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{b \in \mathcal{B}_w} \sum_{p \in \mathcal{P}_w} \sum_{t \in \mathcal{T}} e^{p,t}_{w,b} g^{p,t}_{w,b}}.$$

如果 $RG < \epsilon$，**站点**；否则，更新 $g^{k+1} = kg^k + y^{k+1}$，设置 $k = k + 1$，并返回步骤 1。

A.3 示例与行为问题

这类显式优先级模型无法充分适应公共交通服务在时间上的内在离散性，从而导致在行为上值得质疑的结果。为说明这一点，我们重新考察第 2.2 节中用于隐式优先级模型的示例。表 9 和图 12 展示了显式优先级模型（22）下的用户均衡结果。

表 9：示例公共交通网络上显式优先级模型的用户均衡结果。

OD	出发时间	路径描述	Flow	期望成本
(o_1, d)	**7:24**	**1号线**	**0.5**	**56**
(o_1, d)	**7:24**	**1号线 - 2号线**	**1.5**	**$46 \times 1/1.5 + 76 \times 0.5/1.5 = 56$**
(o_2, d)	7:49	2号线	2	21
(o_3, d)	7:53	1号线	0	27
(o_3, d)	7:53	2号线	2	17

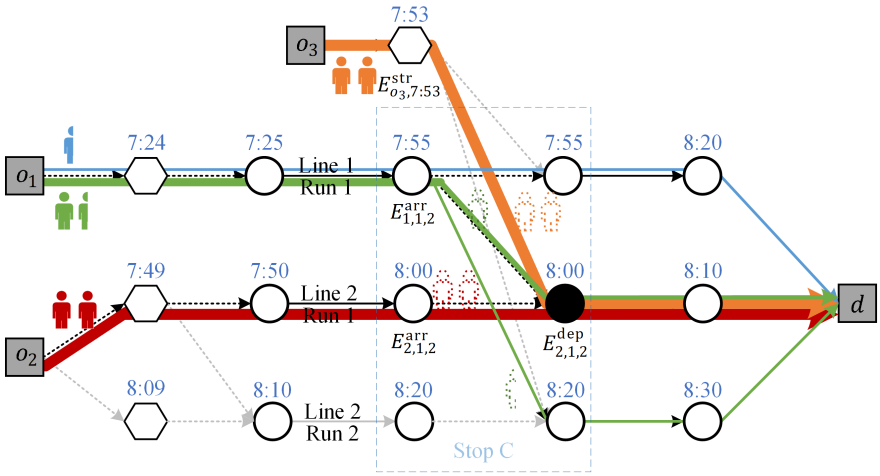


图 12：示例公共交通网络上显式优先级模型的用户均衡流可视化。

在选择乘坐1号线并换乘2号线的起讫点对（o_1,d）乘客中，车辆容量和优先规则意味着，在C站只有一名乘客能够成功登上2号线第1班次

（成本为46），而剩余0.5单位的客流必须等待2号线第2班次（成本为76）。选择该方案的乘客的期望成本等于选择“1号线路不换乘”的成本，两者均为56，因此该解被视为一种均衡。然而，实际上，那些被留下并被迫等待2号线第2班次、从而承担更高实际成本的乘客，可能会倾向于改变未来的决策，例如选择不换乘。

在道路网络的动态交通分配中（Friesz 等人，1993年），每条路段所提供的服务通常被建模为随时间连续变化。显式优先级框架可以通过减小时间步长，进而缩小每个乘客群体的规模，在一定程度上缓解预期成本与实际成本之间的差异。相比之下，在公共交通中，服务在时间上本质是不连续的，而现有的显式优先级框架尚未针对这种不连续性进行修改。因此，这些框架无法弥合均衡定义中的预期成本与个体乘客实际出行体验之间的差距。

B 命题 5 的证明

鉴于非线性互补问题（NCP）（12）的映射

$$\bar{H}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}) + \bar{\Delta}\boldsymbol{v} - \Lambda\boldsymbol{\mu} \\ \Lambda^T\boldsymbol{f} - \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

是连续的，而可行集 $\bar{\Omega} = \{\boldsymbol{f} \geq 0, \boldsymbol{\mu} \geq 0, \boldsymbol{v} \geq 0\}$ 是无界的，因而不是紧致集，命题 5 的证明遵循与命题 2 相同的结构。我们为每个变量引入上界约束，从而得到一个可行集为紧致集的修改后的非线性互补问题。随后，我们证明在该解处这些上界约束均不起作用，这意味着修改后的非线性互补问题的任何解也满足原非线性互补问题（12）。

选择两个标量e_1 和e_2，使得

$$e_1 > \max\{d_{w,b} : w \in \mathcal{W}, b \in \mathcal{B}_w\} \text{ and } e_2 > \max\{c^r_{w,b} : w \in \mathcal{W}, b \in \mathcal{B}_w, r \in \mathcal{R}_w\}.$$

令 $\bar{\Omega}' = \bar{\Omega} \cap \{\boldsymbol{f} \leq e\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} \leq e_2\mathbf{1}, \boldsymbol{v} \leq e_2\mathbf{1}\}$。由于 $\bar{\Omega}'$ 是紧致的，以下非线性互补问题必须存在一个解：

$$0 \leq \boldsymbol{f} \perp \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}) + \bar{\Delta}\boldsymbol{v} - \Lambda\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\kappa} \geq 0, \tag{23a}$$
$$0 \leq \boldsymbol{\mu} \perp \Lambda^T\boldsymbol{f} - \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\rho} \geq 0, \tag{23b}$$
$$0 \leq \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\theta} \geq 0, \tag{23c}$$
$$0 \leq \boldsymbol{\kappa} \perp e_1\mathbf{1} - \boldsymbol{f} \geq 0, \tag{23d}$$
$$0 \leq \boldsymbol{\rho} \perp e_2\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu} \geq 0, \tag{23e}$$
$$0 \leq \boldsymbol{\theta} \perp e_2\mathbf{1} - \boldsymbol{v} \geq 0. \tag{23f}$$

令$(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{v}^*)$ 表示此解。若我们证明 $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$，那么$(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{v}^*)$ 也必定是 NCP（6）的一个解。

对于 $\boldsymbol{\kappa}$：假设对于某些 $w \in \mathcal{W}$、$b \in \mathcal{B}_w$、$r \in \mathcal{R}_w$，有 $\kappa^r_{w,b} > 0$。根据互补条件 (23d)，我们有 $f_{r*}{}_{w,b} = e_1 > d_{w,b}$，因此 $\sum_{r\in\mathcal{R}_w} f^{r*}_{w,b} - d_{w,b} + \rho_{w,b} > 0$。然后，根据条件 (23b)，我们有

$\mu^*_{w,b} = 0$。此外，由于 $f^{r*}_{w,b} = e_1 > 0$，我们有

$$0 = c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + \sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v^*_A - \mu^*_{w,b} + \kappa^r_{w,b} = c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + \sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v^*_A + \kappa^r_{w,b} > 0,$$

因为 $c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*)$ 和 $\kappa^r_{w,b}$ 均为正数，且 $\sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v^*_A$ 非负。这个矛盾推出 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$。

对于 $\boldsymbol{\rho}$：对于每个起讫点对 $w \in \mathcal{W}$ 和类别 $b \in \mathcal{B}_w$，由于根据假设存在一条路径 $r \in \mathcal{R}_w$，使得 $Q^r_{w,b}(f^*) > 0$，因此属于 $\mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}$ 的每条弧都满足 $q_A(x^*) > 0$ 和 $q_A(x^*) + \theta_A > 0$。根据条件 (23c)，对于所有 $A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}$，均有 $v^*_A = 0$。因此，

$$\begin{aligned} 0 \le c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + \sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v^*_A - \mu^*_{w,b} + \kappa^r_{w,b} = c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) - \mu^*_{w,b} \\ \Rightarrow \mu^*_{w,b} \le c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) < e_2. \end{aligned} \tag{24}$$

这意味着，对于所有 $e_2 - \mu^*_{w,b} > 0$，均有 $w \in \mathcal{W}$ 和 $b \in \mathcal{B}_w$，且根据方程 (23e) 有 $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$。

对于 $\boldsymbol{\theta}$：对于任一出发事件，令 A_1 为以该事件为终点且装载优先级最高的弧。如果 $\theta_{A_1} > 0$，互补条件 (23f) 表明 $v^*_{A_1} = e_2$。同时，方程 (24) 意味着，对于所有 $w \in \mathcal{W}$ 和 $b \in \mathcal{B}_w$，均有 $\mu^*_{w,b} < e_2 = v^*_{A_1}$。因此，对于每条满足 $A_1 \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}$ 的路径 r，我们有

$$c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + \sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v^*_A - \mu^*_{w,b} + \kappa^r_{w,b} = c^r_{w,b}(\boldsymbol{f}^*) + \sum_{A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}_{w,b,r}} v^*_A - \mu^*_{w,b} > v^*_{A_1} - \mu^*_{w,b} > 0.$$

根据条件 (23a)，所有这些路径都满足 $f^{r*}_{w,b} = 0$。这意味着弧 A_1 的流量为零，即 $x^*_{A_1} = \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{b \in \mathcal{B}_w} \sum_{r \in \mathcal{R}_w} f^{r*}_{w,b} \delta^r_{A_1} = 0$。于是，可用容量 $q_{A_1}(x^*) = u_{\text{riding}(A_1)} - x^*_{A_1} = u_{\text{riding}(A_1)} > 0$，且 $q_{A_1}(x^*) + \theta_{A_1} > 0$，因此，根据条件 (23c)，$v^*_{A_1} = 0$。这与 $v^*_{A_1} = e_2 > 0$ 矛盾，因此 $\theta_{A_1} = 0$。

接下来，令 A_2 表示以该事件为终点且优先级第二高的弧。如果 $\theta_{A_2} > 0$，我们可以用类似的证明得到 $v^*_{A_2} = e_2$ 和 $x^*_{A_2} = 0$。这表明 A_2 的可用容量等于 A_1，的可用容量，即 $q_{A_2}(x^*) = u_{\text{riding}(A_2)} - x^*_{A_1} - x^*_{A_2} = q_{A_1}$。此外，上述结果与条件 (23c) 一起表明 $q_{A_1} \ge 0$。因此，$q_{A_2} \ge 0$ 且 $q_{A_2} + \theta_{A_2} > 0$。根据条件 (23c)，我们遇到了如下矛盾：$0 = v^*_{A_2} = e_2 > 0$。因此，$\theta_{A_2} = 0$。

以这种方式处理所有终止于出发事件的弧，并对网络中的每个出发事件重复这一过程，我们得到 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$。

C 数学规划与均衡约束算法(14)

本节介绍用于求解数学规划与均衡约束 (14) 的隐式方法、基于非线性规划的方法，以及获取初始解的方法。

C.1 隐式方法

考虑隐函数 $\boldsymbol{x}(v)$ 后，MPEC (14) 可简化为仅涉及上层变量 $\boldsymbol{v}$ 的问题，即 $\min_{v \ge 0} \Psi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}(v))$。我们将投影梯度法与 Armijo线搜索相结合来求解该问题。整个算法总结如下。

算法3隐式方法

1：输入：一个初始解 $(\mathrm{v}^0, \mathrm{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0)$。设置 $\mathrm{k} = 0$。2：步骤 1。计算梯度 $\nabla\Psi(\mathrm{v}^k)$。3：步骤 2。对于每个 $\mathrm{i} = 0, 1, 2, \cdots$：令 $\mathrm{v}' = [\mathrm{v}^k - 2^{-\mathrm{i}}\nabla\Psi(\mathrm{v}^k)]_+$。4：步骤 2.1。获得问题 (13) 的解 x'，然后计算可用容量 $\mathrm{q}(\mathrm{x}')$ 和 merit函数 $\Psi(\mathrm{v}')$。5：步骤 2.2。如果 $\Psi(\mathrm{v}') \leq \Psi(\mathrm{v}^k) - \gamma 2^{-\mathrm{i}}\nabla\Psi(\mathrm{v}^k)^T\nabla\Psi(\mathrm{v}^k)$，则转至步骤 3。6：步骤 3。设置 $\mathrm{v}^{k+1} = \mathrm{v}'$。如果 $\Psi(\mathrm{v}^{k+1}) < \epsilon_1$，则停止。否则，$\mathrm{k} = \mathrm{k} + 1$，并转至步骤 1。

在步骤1中，merit函数 $\Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v}))$ 关于v_A 的梯度为

$$\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v}))}{\partial v_A} = \sum_{A'\in\mathcal{A}^{\text{priority}}} 2\varphi(v_{A'},q_{A'})\frac{\partial\varphi(v_{A'},q_{A'})}{\partial v_A},$$

$$\frac{\partial\varphi(v_{A'},q_{A'})}{\partial v_A} = \begin{cases} (v_{A'}+q_{A'}\frac{\partial q_{A'}}{\partial v_A})\frac{1}{\sqrt{v_{A'}^2+q_{A'}^2}} - 1 - \frac{\partial q_{A'}}{\partial v_A}, & \text{if } A'=A \\ q_{A'}\frac{\partial q_{A'}}{\partial v_A}\frac{1}{\sqrt{v_{A'}^2+q_{A'}^2}} - \frac{\partial q_{A'}}{\partial v_A}, & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$\frac{\partial q_{A'}}{\partial v_A} = -\sum_{A''\in\text{Prior}(A')}\frac{\partial x_{A''}}{\partial v_A}.$$

由于从$\boldsymbol{v}$ 到$\boldsymbol{x}$ 的映射由非线性互补问题（13）定义，导数$\partial x\partial^{A'}v_A$ 没有闭式表达。为求得该导数，我们采用敏感性分析方法（Tobin and Friesz, 1988；Patriksson, 2004）。

在步骤2中，$[\cdot]_+$ 表示到非负空间的投影。下层问题（13）使用iGP算法求解；该算法是Xie等人（2018）提出的一种高效静态交通分配问题求解器。

C.2 基于非线性规划的方法

我们将均衡约束（13）改写为一组非线性不等式，即

$$J(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}) = \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{f} \\ \hat{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) - \Lambda\boldsymbol{\mu} \\ -\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) - \Lambda\boldsymbol{\mu}) \\ \boldsymbol{\mu} \\ \Lambda^T\boldsymbol{f} - \boldsymbol{d} \\ -\boldsymbol{\mu}(\Lambda^T\boldsymbol{f} - \boldsymbol{d}) \\ \boldsymbol{v} \end{array}\right\} \geq 0.$$

这将导致将　数学规划与均衡约束（14）转化为以下非线性规划问题

$$\min_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}} \Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}) \text{ subject to } J(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}) \geq 0.$$

该非线性规划问题可使用多种现有的非线性优化算法求解，例如序列二次规划（SQP）。

C.3 初始解

为初始化数学规划与均衡约束 (14)，我们首先通过求解一个松弛的公共交通分配问题，得到初始的 $\boldsymbol{x}^0$ 和 $\boldsymbol{\mu}^0$；在该问题中，可用容量约束 $q_A(\boldsymbol{x}) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}$ 被标准车辆容量约束 $u_A \geq x_A, \forall A \in \mathcal{A}^{\text{riding}}$ 取代。令 $\boldsymbol{u} = \{u_A : A \in \mathcal{A}^{\text{riding}}\}$ 表示乘车弧的容量向量。松弛后的互补性公式为

$$
\begin{aligned}
&0 \leq \boldsymbol{f} \perp \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}) + \hat{\Delta}\boldsymbol{\nu} - \Lambda\boldsymbol{\mu} \geq 0, \\
&0 \leq \boldsymbol{\mu} \perp \Lambda^T \boldsymbol{f} - \boldsymbol{d} \geq 0, \\
&0 \leq \boldsymbol{\nu} \perp \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \geq 0,
\end{aligned}
$$

其中，$\boldsymbol{\nu} = \{\nu_A : A \in \mathcal{A}^{\text{riding}}\}$ 是车辆容量约束的乘子，$\hat{\Delta} = [\delta^{r,A}{}_w、{}_b]_{|n_f| \times |\mathcal{A}^{\text{riding}}|}$是路径–弧关联矩阵。该模型可视为将经典容量约束交通分配问题（Larsson 和 Patriksson，1995）扩展至公共交通情境（采用不同的出行成本函数定义 $\boldsymbol{c}$），并且可通过现有算法（如 ALM-GP 或 ALM-Greedy）高效求解（Nie 等人，2004；Feng 等人，2020）。

获得$\boldsymbol{x}^0$ 后，我们根据松弛问题的乘子 $\boldsymbol{\nu}$ 初始化上层向量 $\boldsymbol{v}^0$。对于每条弧 $A \in \mathcal{A}^{\text{priority}}$，我们设定

$$
v_A^0 = \begin{cases} \nu_{\text{riding}(A)}, & q_A \leq 0 \\ 0, & q_A > 0 \end{cases}.
$$

这种初始化仅在不可用弧上为$\boldsymbol{v}^0$ 赋予正值，从而引导后续迭代满足可用容量约束 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \geq 0$。除非另有说明，否则默认采用此初始化方法。