arXiv:2601.07732v1 [math.GR] 12 Jan 2026

实闭域上的半单代数群

RAPHAEL APPENZELLER

Abstract. 本文将系统介绍实闭域上的线性代数群与半代数群，并将半单李群的若干关键结果推广到实闭域上的代数群与半代数群。我们证明，对于实闭域 $\mathbb{F}$，半单代数群中的环面是极大 $\mathbb{R}$-分裂的，当且仅当它是极大 $\mathbb{F}$-分裂的。对于 $\mathbb{F}$-点，我们给出并证明岩泽分解 KAU、嘉当分解 KAK 和布鲁哈分解 BWB。对于幺幂子群，我们证明贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式，从而便于分析根群。对于代数群，我们证明雅各布森-莫罗佐夫引理，即关于其李代数与 $\mathfrak{sl}_2$ 同构的子群的结果；当根系约化时，也给出适用于 $\mathbb{F}$-点的一个版本。我们描述了秩 1 子群，它们是 Levi 子群的半单部分。我们证明了 Kostant 凸性定理的半代数版本。本文使用的主要工具是由塔斯基-塞登堡定理推导出的模型论转移原理。

Contents

1. 引言与主要结果 2 1.1. 应用 4 1.2. 半代数群与 o-极小性。5 1.3. 概述 5 1.4. 致谢 5 2. 实闭域 5 2.1. 迁移原理 6 2.2. 实闭域的例子 6 3. 线性代数群 7 3.1. 定义 7 3.2. 态射与环面 8 3.3. 李代数与伴随表示 10 3.4. 根系与球面魏尔群 11 3.5. 博雷尔子群、抛物子群 12 4. 关于李代数与分裂环面的结果 13 4.1. 嘉当对合与嘉当分解 13 4.2. 实Cartan子代数与 $\mathbb{R}$-分裂子代数 17

日期：2026年1月13日。2020年数学主题分类：20G07、14P10、12J15。关键词和短语：代数群、实代数几何、实闭域、李群。

4.3. 实闭域上的李代数 20 4.4. 实闭域上代数群的分裂环面 22 5. 半代数群 25 5.1. 例子 27 5.2. 根系的相容性 27 5.3. 岩泽分解 $G = KAU$ 305.4. 嘉当分解 $G = KAK$ 315.5. 布鲁哈分解 $G = BWB$ 325.6. 贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式 32 5.7. 幺幂群 U 335.8. 代数群的雅各布森-莫罗佐夫引理 36 5.9. 秩1子群 40 5.10. Kostant 凸性 42 参考文献 46

1. Introduction and main results

代数群最初是在代数闭域上研究的，但此后，人们在理解任意域上的代数群方面取得了显著进展[Bor66, Bor91, Hum75, Zim84]。代数群的 $\mathbb{R}$-点构成实李群，从这一视角出发，有许多可用的工具。本文将李群理论中的若干重要结果推广到实闭域上的代数群和半代数群。在实代数几何中，实闭域所起的作用类似于经典代数几何中的代数闭域。

设 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{K}$ 是实闭域，且满足 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \cap \mathbb{R}$。设G是一个半单、自伴（若 $g \in$ G，则 $g^{\mathsf{T}} \in$ G）的线性代数 $\mathbb{K}$-群。代数子群S $<$G若其所有元素均同时可对角化，则称为环面。若这些元素在 $\mathbb{F}$上同时可对角化，则称S为 $\mathbb{F}$-分裂的。许多分解都依赖于环面的选取。下面的第一个结果表明，所有实闭域确定的分裂环面都相同。

定理 4.17. 环面 S $<$G 是极大 $\mathbb{K}$-分裂的，当且仅当它是极大$\mathbb{F}$-分裂的。此外，存在一个自伴的极大 $\mathbb{F}$-分裂环面。

称为线性半代数群的半代数子集。G 的 $\mathbb{K}$-点 G($\mathbb{K}$) 构成这样的线性半代数群。设 $G \subseteq$ G($\mathbb{K}$) 是 G($\mathbb{K}$) 的一个包含单位元的半代数连通分支的半代数子群。其半代数 $\mathbb{R}$-扩张$G_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ 于是成为一个半单李群 [Pil88]。本文的主要目标是研究 $\mathbb{F}$-扩张 $G_{\mathbb{F}}$ of G。设 S($\mathbb{K}$) 是 G 的一个自伴极大 $\mathbb{K}$-分裂环面的 $\mathbb{K}$-点。设 A 为 S($\mathbb{K}$) 的半代数连通分支， $A_{\mathbb{F}}$ 为其半代数扩张。设 $K := G \cap$ SO$_n$ 以及 $K_{\mathbb{F}}$ 的半代数扩张。在实数域上， $K_{\mathbb{R}}$ 是

$G_{\mathbb{R}}$。我们还将半代数群 $N = \mathrm{Nor}_K(A)$ 和 $M = \mathrm{Cen}_K(A)$ 扩张为 $N_{\mathbb{F}}$ 和 $M_{\mathbb{F}}$。根系 Σ 上与 $A_{\mathbb{R}}$ 相关的一个序使我们能够将 U、$U_{\mathbb{R}}$ 和 $U_{\mathbb{F}}$ 定义为分别对应于正根的根空间之和 $(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{K}}$、$(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{R}}$和$(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 的指数映射。我们证明了适用于 $G_{\mathbb{F}}$的 Iwasawa (KAU)、Cartan (KAK) 和 Bruhat (BWB) 分解的以下版本。

定理 5.7 ($G = KAU$)。对于每个 $g \in G_{\mathbb{F}}$，存在 $k \in K_{\mathbb{F}}$, $a \in A_{\mathbb{F}}$,$u \in U_{\mathbb{F}}$，使得 $g = kau$。此分解是唯一的。

定理 5.9 ($G = KAK$)。对于每个 $g \in G_{\mathbb{F}}$，存在 $k_1, k_2 \in K_{\mathbb{F}}$, $a \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $g = k_1 a k_2$。在此分解中，a 在球面魏尔群 $N_{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}}$ 中某个元素的共轭作用下唯一确定。

定理 5.11 ($G = BWB$)。对于每个 $g \in G_{\mathbb{F}}$，存在 $b_1, b_2 \in B_{\mathbb{F}} := M_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}} U_{\mathbb{F}}$ 和 $n \in N_{\mathbb{F}}$，使得 $g = b_1 n b_2$。在此分解中，n 除了乘以 $M_{\mathbb{F}}$ 中的一个元素之外是唯一的。对于球面魏尔群 $W_s := N_{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}}$，我们有双陪集的不交并

$$G_{\mathbb{F}} = \bigsqcup_{[n] \in W_s} B_{\mathbb{F}} n B_{\mathbb{F}}.$$

对于任意域上的代数群，已有布鲁哈分解的一种版本 [Bor91，定理 14。11] 另外两种分解则来自李群理论。关于岩泽分解，Conversano 在可定义群这一更一般（不一定是线性的）框架下得到了一个相关结果 [Con14，定理 2。1]

文献中对根系和魏尔群有各种定义。我们利用定理 4.17，验证通过代数群、实李群、李代数理论以及半代数框架所定义的这些对象彼此一致。

命题 5.5。代数根系 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$ 与实数域上的根系Σ 同构。球面魏尔群 ${}_{\mathbb{K}}W$、${}_{\mathbb{F}}W$、$N_{\mathbb{R}}/M_{\mathbb{R}}$、$N_{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}}$以及由根系 Σ 中根的反射生成的群都彼此同构。

与李群的情形不同，指数映射对 $G_{\mathbb{F}}$可能未定义；但由于 $U_{\mathbb{F}}$ 的元素是幺幂的，它对 $U_{\mathbb{F}}$ 仍然有定义。我们注意到，贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式对$U_{\mathbb{F}}$中的元素成立，这对于研究 $U_{\mathbb{F}}$的结构很有用，见第 5.7 节。

命题 5.12. 设 $u, v \in U_{\mathbb{F}}$, $X := \log(u)$ $Y := \log(v)$ 和 $Z = \log(uv)$。则 $\exp(X)\exp(Y) = \exp(Z)$，且元素 Z 可表示为关于 X 和 Y的迭代交换子的有限和，其前几项为

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}\left([X,[X,Y]] - [Y,[Y,X]]\right) - \frac{1}{24}[Y,[X,[X,Y]]] + \dots$$

我们给出一个广为人知的结果的证明：雅各布森-莫罗佐夫引理对代数群成立。命题 5.19 给出了一个半代数版本。

命题 5.18. 设 $g \in$G 是代数闭域 $\mathbb{D}$ 上特征为 0 的半单线性代数群 G 中的任意幺幂元。那么存在一个代数子群 $\mathrm{SL}_g < \mathrm{G}$，其李代数为 $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_g) \cong \mathfrak{sl}_2$ 且 $g \in \mathrm{SL}_g$。元素 $\log(g) \in \mathrm{Lie(G)}$ 对应于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2.$$

此外，如果 $g \in \mathrm{G}(\mathbb{F})$ 是域 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{D}$ 上的，那么 SL_g 定义在 $\mathbb{F}$ 上。

雅各布森–莫罗佐夫引理产生李代数与 $\mathfrak{sl}_2$ 同构的子群。下面的定理在代数情形下构造与根 $\alpha \in \Sigma$ 相关的、秩可能更高的子群 $\mathrm{L}_{\pm\alpha}$。这些子群是 Levi 子群的半单部分。

定理 5.22. 设 $\alpha \in \Sigma$。那么存在一个定义在 $\mathbb{K}$ 上的半单自伴线性代数群 $\mathrm{L}_{\pm\alpha}$，使得

(i) $\mathrm{Lie}(\mathbf{L}_{\pm\alpha}) = (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}) \oplus (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}) \oplus ([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] + [\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}])$, *and*

(ii) $\mathrm{Rank}_{\mathbb{R}}(\mathbf{L}_{\pm\alpha}) = \mathrm{Rank}_{\mathbb{F}}(\mathbf{L}_{\pm\alpha}) = 1.$

利用岩泽分解 $G_{\mathbb{F}} = U_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}} K_{\mathbb{F}}$（定理 5.6），我们为每个 $g = uak \in G_{\mathbb{F}}$ 关联其 A 分量 $a_{\mathbb{F}}(g) = a \in A_{\mathbb{F}}$。在实数域上，Kostant 凸性定理将 $K_{\mathbb{R}}$ 中元素在 $A_{\mathbb{F}}$ 的 $K_{\mathbb{R}}$ 轨道（在左乘作用下）的 A 分量描述为一个凸集。我们证明了 Kostant 凸性定理在 $\mathbb{F}$ 上的以下半代数版本，该版本限制在乘法闭韦伊尔室上

$$A_{\mathbb{F}}^+ := \{a \in A_{\mathbb{F}} \colon \chi_\delta(a) \geq 1 \text{ for all } \delta \in \Delta\},$$

其中 χ_δ 是与根系 Σ 的某个基 Δ 中各元素相关联的乘法特征。

定理 5.29。对于所有 $b \in A_{\mathbb{F}}^+$，我们有

$$\left\{a \in A_{\mathbb{F}}^+ \colon \exists k \in K_{\mathbb{F}}, a_{\mathbb{F}}(kb) = a\right\} = \left\{a \in A_{\mathbb{F}}^+ \colon \chi_i(a) \leq \chi_i(b) \text{ for all } i\right\}$$

对于某些代数特征 $\chi_i \colon A_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}_{\geq 0}$。

1.1. 应用。本研究是作者博士论文[App24], 的一部分，论文中的结果被用于构造非标准对称空间 $G_{\mathbb{F}}/K_{\mathbb{F}}$的商空间 B，这遵循了 [KT02] 中的思路；这些结果还用于证明 B 是一个仿射 Λ-建筑，另见 [App26]。在 [BIPP21, BIPP23], 中，Burger、Iozzi、Parreau 和 Pozzetti 使用定理 4.17、推论 4.18 和定理 5.9，以及建筑 B，来诠释特征簇的实谱紧化中的边界点。实谱紧化是研究特征簇的一种颇具前景的新方法，并且相较于其他紧化具有一些优势，例如它能保留连通分支。我们相信，只要涉及实闭域上的半单代数群，本文的结果便可广泛应用，正如过去关于实李群的相应结果一样。

1.2. 半代数群与 o-极小性。在模型论中，若一个结构 $(M, <, \ldots)$ 满足：$<$ 是稠密线性序，且 M 的每个可定义子集都是有限个点和开区间的并，则称该结构为 o-极小结构。从[Pil88], 开始，在 o-极小结构中可定义的群已得到广泛研究[OPP96, PPS00a, PPS00b, PPS02, CP13, Con14, BJO14, BBO19, COP22],；综述另见 [Ote08, Con21]。实闭域是 o-极小结构的重要例子。若群 G 的集合 G 及乘法的图可在带有 $\mathbb{F}$中参数的 $\mathbb{F}$内定义，则称群 G 是实闭域 $\mathbb{F}$ 上的半代数群。若半代数群 G 满足$G < \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{F}^{n\times n}$，则称其为线性半代数群。本文所考虑的群 G 是线性半代数群的例子。

若 G 是定义在实闭域 $\mathbb{F}$的某个o-极小扩张上的半单群，则 G 实际上是 $\mathbb{F}$ [PPS02]上的半代数群。若 G是无中心半单半代数群，则 G与一个半单线性半代数群 [可定义同构（OPP96，推论3.3]）。设G是线性半代数群 G的扎里斯基闭包，则 G是G(𝔽)的一个半代数子群，并包含G(𝔽)的半代数连通分支。在本文的设定中，我们还假设 G 是自伴的；关于如何去除这一假设，请参见注4.1。若能确切 выяс明目前的结果可以推广到在o-极小结构中可定义的群的何种范围，将会很有意思。

1.3. 结构安排。我们首先在第 2 节简要介绍实闭域理论、迁移原理及其在半代数集合扩张中的应用。第 3 节将系统介绍线性代数群理论，并包含一些例子。第 4 节回顾实李代数理论，随后将其中一些结果推广到实闭域，并证明关于极大分裂环面的定理 4.17。最后，我们在第 5 节介绍稍微更一般的半代数群概念，并给出群分解及上述其他结果的证明。

1.4. 致谢。我要感谢 Marc Burger 一直以来的支持，尤其感谢他在定理 4.17 和 5.29 方面给予的帮助。我要感谢 Luca de Rosa 和 Xenia Flamm 与我讨论命题 5.18 的早期版本，也感谢 Victor Jaeck 对代数群相关章节提出的反馈。我非常感谢两位匿名审稿人的意见，其中一位指出了本文与在 o-极小结构中可定义的群之间的联系。

2. Real closed fields

关于实代数几何，一本很好的参考书是 [BCR98]。有序域是一个带有全序的域，并且正元素的和与积仍为正。注意，每个有序域的特征都是零。若域 $\mathbb{F}$ 满足以下等价条件之一，则称其为实闭域。

(1) $\mathbb{F}$ 上存在一个全序，使 $\mathbb{F}$ 成为有序域，并且每个正元素都有平方根，每个奇数次多项式都有解。(2) $\mathbb{F}$ 上存在一个序，该序无法扩张到 $\mathbb{F}$的任何真代数域扩张上。

(3) $\mathbb{F}$ 不是代数闭的，但每个有限扩张都是代数闭的。(4) $\mathbb{F}$ 不是代数闭的，但$\mathbb{F}[\sqrt{-1}]$ 是代数闭的。

如果有序域中的每个元素都被某个自然数界定，则称该有序域为阿基米德的。实数域 $\mathbb{R}$ 以及实代数数的子集，都是阿基米德实闭域的例子。研究实闭域时，一个重要工具是下面这个来自模型论的迁移原理。

2.1. 迁移原理。设 $\mathbb{K}$ 是一个有序域。回忆一下，带有 $\mathbb{K}$ 中参数的有序域一阶公式，是指这样一种公式：它由有限个合取 $\wedge$、析取 $\vee$、否定 $\neg$以及变量上的全称$\forall$ 或存在 $\exists$ 量词构成，并且以原子公式为起点。原子公式是形如 $f(x_1,\dots,x_n) = 0$或 $g(x_1,\dots,x_n) \leq 0$的公式，其中 f和g 是系数属于 $\mathbb{K}$ 的多项式。不含自由变量的一阶公式称为语句。根据塔斯基-塞登堡定理，任意语句都等价于一个不含量词的语句，由此可以推得，有序域语言中的实闭域理论是完备的。实际应用中，这意味着以下内容。

定理 2.1。（迁移原理，[BCR98]）设 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{F}'$ 是实闭域。设 φ是一个参数取自 $\mathbb{F}\cap\mathbb{F}'$的语句。那么，对于 $\mathbb{F}$，φ为真，当且仅当对于 $\mathbb{F}'$，φ 为真，形式化地说，即 $\mathbb{F}\models\varphi \iff \mathbb{F}'\models\varphi$。

设 φ 是一个参数取自某个域 $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}\cap\mathbb{R}$ 的一阶公式，它有 n个自由变量。设 X 是 $\mathbb{K}^n$ 的一个子集，可以描述为 $X = \{x\in\mathbb{K}^n\colon\ \mathbb{F}\models\varphi(x)\}$。由迁移原理可知，$X$ 的半代数扩张 $X_{\mathbb{F}} = \{x\in\mathbb{F}^n\colon\ \mathbb{F}\models\varphi(x)\}$ 仅取决于 X，而不取决于 φ，因此定义良好。形如 $\{x\in k\colon\ k\models\varphi(x)\}$ 的集合，其中 $k\supseteq\mathbb{K}$ 是任意有序域，称为半代数集。

2.2. 实闭域的例子。实代数数上的普伊瑟级数域 $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{rc}}$

$$\mathbb{F} := \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0} c_k X^{\frac{k}{m}} :\ k_0, m\in\mathbb{Z},\ m>0,\ c_k\in\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{rc}},\ c_{k_0}\neq 0 \right\},$$

是一个非阿基米德实闭域，其中通过对所有$r\in\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{rc}}$ [BCR98]，将 $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{rc}}$ 上的通常序扩展为 $X > r$。

$\mathbb{Z}$ 上的非主超滤子是一个函数 $\omega\colon\ \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \{0,1\}$，满足

(1) $\omega(\emptyset) = 0$，$\omega(\mathbb{Z}) = 1$。(2) 若 A、$B\subseteq\mathbb{Z}$ 满足 $A\cap B = \emptyset$，则 $\omega(A\cup B) = \omega(A) + \omega(B)$。(3) 所有有限子集 $A\subseteq\mathbb{Z}$ 都满足 $\omega(A) = 0$。

超滤子可以看作只取 0 和 1 的有限可加概率测度。非主超滤子的存在等价于选择公理，[Hal66]。给定一个超滤子 ω，我们将超实数 $\mathbb{R}_\omega$ 定义为无限序列$\mathbb{R}_\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/{\sim}$的等价类，其中 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 当且仅当 $\omega(\{i\in\mathbb{N}\colon\ x_i\neq y_i\}) = 0$ 或

$\omega(\{i \in \mathbb{N}\colon\ x_i = y_i\}) = 1$。我们逐项定义加法和乘法；通过对所有非零项取倒数即可得到乘法逆元，从而使 $\mathbb{F}_\omega$ 成为一个域。考虑常数序列，实数是 $\mathbb{R}_\omega$ 的子域。按照由 $[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}] \le [(y_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ 定义的序关系，超实数构成一个有序域，当且仅当 $\omega(\{i \in \mathbb{N}\colon\ x_i \le y_i\}) = 1$。超实数是实闭的，因为 $\mathbb{R}$ 是实闭的。超实数是非阿基米德的，因为包含 (1, 2, 3, . . .) 的等价类是一个无限元素，也就是说，它大于任何自然数。

设 $b \in \mathbb{R}_\omega$ 是一个无限元素。那么

$$O_b := \{x \in \mathbb{R}_\omega\colon |x| < b^m \text{ for some } m \in \mathbb{Z}\}$$

是 $\mathbb{R}_\omega$ 的一个序凸子环，其极大理想为

$$J_b := \{x \in \mathbb{R}_\omega\colon |x| < b^m \text{ for all } m \in \mathbb{Z}\}.$$

与非主超滤子 ω 和无限元素 b 相关联的罗宾逊域是商空间 $\mathbb{R}_{\omega,\,b} := O_b/J_b$ [Rob96]。罗宾逊域是一个非阿基米德实闭域。注意，$[b] \in \mathbb{R}_{\omega,\,b}$ 是一个大元素，这意味着对于所有 $a \in \mathbb{R}_{\omega,\,b}$，都存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $a < b^n$。

根据实闭域的定义 (1)，语句

$$\varphi\colon \quad \forall a\colon a > 0 \to \exists b\colon b \cdot b = a$$

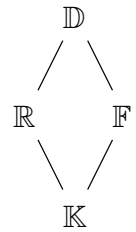
在带有 $\mathbb{Q}$ 中参数的有序域语言中成立，并且对任意实闭域 $\mathbb{F}$ 都成立，形式上为 $\mathbb{F} \models \varphi$。事实上，实闭性可以用有序域语言中的语句来描述。另一方面，阿基米德性无法用有序域语言中的语句来描述。尝试将阿基米德条件写成语句

$$\psi\colon \quad \forall a\colon \exists n \in \mathbb{N}\colon a < n$$

这会失败，因为在有序域语言中不允许使用符号 $\in$ 和 $\mathbb{N}$。这与定理 2.1 相容，因为有些实闭域是阿基米德的，而另一些则不是。我们注意到，根据 G¨odel 不完备定理，自然数 $\mathbb{N}$ 无法在任何满足迁移原理的理论中得到描述。

3. Linear algebraic groups

3.1. 定义。设 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ 是一个子域（通常为 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$、$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{rc}}$ 或 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$），$\mathbb{F}$ 是一个包含 $\mathbb{K}$ 的实闭域（通常是非阿基米德域，例如普伊瑟级数），而 $\mathbb{D}$ 是一个同时包含 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{F}$的代数闭域。我们采用一种朴素的方法研究代数群，将它们视为矩阵群。由于我们讨论的是特征为 0 的域，因此可以尽量减少代数几何方面的内容。关于代数群的详细介绍，请参阅 [Bor66], [Bor91], [Hum75] 或 [Zim84]。



一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ 可以实现为一个仿射代数簇

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{D}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & t \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^{(n+1)\times(n+1)}\colon\ \det(A)\cdot t = 1 \right\}.$$

子群 $G < \mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ 若是坐标环中一组多项式的公共零点集，就称为定义在 $\mathbb{K}$ 上的线性代数群

$\mathbb{K}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})] := \mathbb{K}[(x_{ij}), \det(x_{ij})^{-1}]$，属于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$。我们不考虑更一般的代数群，因此也称 G 为代数群或 $\mathbb{K}$-群。对于任意包含 $\mathbb{K}$ 的交换 $\mathbb{K}$-子代数 $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{D}$，我们令

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{B}) = \left\{(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{D}) \colon a_{ij} \in \mathbb{B} \text{ and } \det(a_{ij})^{-1} \in \mathbb{B}\right\}.$$

线性代数群 G的 $\mathbb{B}$点所构成的群为 $\mathrm{G}(\mathbb{B}) := \mathrm{G} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{B})$。线性代数群 G 的 $\mathbb{R}$ 点构成一个实李群 [Mil13, 定理 2.1]。

将 $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ 视为 $\mathbb{D}^{n+1\times n+1}$的一个代数子集，我们赋予 G 扎里斯基拓扑，其闭集由 $\mathbb{K}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})]$中的多项式组的公共零点构成。若线性代数群 G 连通，且每个闭连通正规阿贝尔子群都是平凡的，则称 G 为半单群。类似地，若一个李群的每个闭连通正规阿贝尔子群都是平凡的，则称该李群为半单群，但此处所指的是李群拓扑。利用子群的扎里斯基闭包可知，G 是半单的，当且仅当 $\mathrm{G}(\mathbb{R})$ 是半单的。

3.1.1. 例子。乘法群 $\mathrm{G}_m = \mathrm{GL}_1(\mathbb{D})$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的线性代数群。注意，G_m 在扎里斯基拓扑下是连通的。其 $\mathbb{C}$-点 $(\mathrm{G}_m)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 在欧几里得拓扑下是连通的，但其 $\mathbb{R}$-点 $(\mathrm{G}_m)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 则不是。

若 V 是一个 $\mathbb{D}$-向量空间，则其自同构群 $\mathrm{GL}(V)$ 是一个代数群。由于 $\mathrm{GL}(V)$ 包含标量乘法构成的闭连通正规阿贝尔子群，$\mathrm{GL}(V)$ 不是半单的。

实李群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$、$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的线性代数群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{D})$、$\mathrm{SO}_n(\mathbb{D})$ 和 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{D})$ 的 $\mathbb{R}$- 点群。

3.2. 态射与环面。对于线性代数群 G，我们考虑理想

$$I(\mathbf{G}) = \left\{p \in \mathbb{D}\left[(x_{ij}), z\right] : p\left(g, \det(g)^{-1}\right) = 0 \text{ for all } g \in \mathbf{G}\right\},$$

根据希尔伯特基定理，它是有限生成的。G 的坐标环为

$$\mathbb{D}[\mathbf{G}] = \mathbb{D}\left[(x_{ij}), d\right] / I(\mathbf{G})$$

其元素称为 G 上的正则函数。给定代数群 G 和 H 之间的映射 φ: $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$，可以定义转置映射 φ°: $\mathbb{D}[\mathrm{H}] \to \mathbb{D}[\mathrm{G}]$，其定义为 $\varphi^{\circ}(f) = f \circ \varphi$。线性代数群 G 和 H 之间的态射是群同态 φ: $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$，其转置映射 φ° 是环同态。如果 G 和 H 定义在 $\mathbb{K}$ 上，且 φ° 将 $\mathbb{K}[\mathrm{H}]$ 映入 $\mathbb{K}[\mathrm{G}]$，那么 φ 定义在 $\mathbb{K}$ 上。态射 $\mathrm{G} \to \mathrm{G}$ 的一个重要例子是由元素 $g \in \mathrm{G}$ 给出的共轭作用 $\mathrm{Int}(g)$: $h \mapsto ghg^{-1}$；若 $g \in \mathrm{G}(\mathbb{K})$，则 $\mathrm{Int}(g)$ 定义在 $\mathbb{K}$ 上。

引理 3.1. 设 φ: $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ 是一个定义在 $\mathbb{K}$ 上的代数 $\mathbb{K}$-群态射 $\mathrm{G} < \mathrm{GL}(n, \mathbb{D})$, $\mathrm{H} < \mathrm{GL}(m, \mathbb{D})$。若我们按分量写成

$$\varphi_{\mathbb{F}} \colon \mathbf{G}(\mathbb{F}) \to \mathbf{H}(\mathbb{F})$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & x_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x_{11}, \ldots, x_{nn}) & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & \varphi_{mm}(x_{11}, \ldots, x_{nn}) \end{pmatrix}$$

则所有 φ_{ij}: G(𝔽) $\to \mathbb{F}$ 都是系数属于 $\mathbb{K}$ 的多项式。

证明。考虑表示 $X_{ij} \in \mathbb{K}$[H] 的多项式。那么

$$\begin{aligned}\varphi^{\circ}(X_{ij})(x_{11},\ldots,x_{nn}) &= X_{ij}(\varphi(x_{11},\ldots,x_{mm}))\\ &= X_{ij}(\varphi_{11}(x_{11},\ldots,x_{nn}),\ldots,\varphi_{mm}(x_{11},\ldots,x_{nn}))\\ &= \varphi_{ij}(x_{11},\ldots,x_{nn})\end{aligned}$$

因此 $\varphi_{ij} \in \mathbb{K}$[G] 是一个多项式。 □

与 (G$_m$)^d 同构的线性代数群 T 称为 d 维环面。若 $g \in$GL$_n$(𝔻) 中的元素是半单的，则 $\mathbb{D}^n$ 由 g 的特征向量张成；等价地， g 可对角化。

定理 3.2（ [Bor91] 中的 8.5）。对于扎里斯基连通代数群 T，以下条件等价。

(1) T 是环面。(2) T 仅由半单元素组成。(3) 整个群 T 可同时对角化。

由于代数群的扎里斯基连通性和元素的半单性在态射 [Bor91, 4.4(4)], 下保持不变，因此环面在态射下的像仍是环面。从代数群 G 到 G$_m$ 的态射 χ: G $\mapsto$ G$_m$ 称为特征。G 的特征构成一个阿贝尔群，记作 $\hat{}$G。若 T $\cong$ (G$_m$)^d 是一个 d 维环面，且元素 $x \in$ T 对应于 $(x_1,\ldots,x_d) \in$(G$_m$)^d，那么 T 的每个特征 χ 都具有如下形式

$$\chi(x) = x_1^{n_1}\cdots x_d^{n_d}$$

对于某个 $n_i \in \mathbb{Z}$ ，因此 $\hat{}$T $= \mathbb{Z}^d$。若存在一个定义在 $\mathbb{K}$ 上的同构 T $\to$ (G$_m$)^d，则称 T 为 $\mathbb{K}$-分裂的。

定理 3.3（ [Bor91] 中的 8.4）。对于定义在 $\mathbb{K}$ 上的环面 T，以下条件等价。

(1) T 是 $\mathbb{K}$-分裂的。

(2) T 的所有特征都定义在 $\mathbb{K}$上,

极大环面 T $\subseteq$ G 是一个既为环面、又未真包含于 G 中任何其他环面的子群。极大 $\mathbb{K}$-分裂环面是一个在所有 $\mathbb{K}$-分裂环面中极大的 $\mathbb{K}$-分裂环面。

定理 3.4（ [Bor91] 中的 11.3 和 20.9）。在连通代数群 G 中，G 的所有极大环面都共轭。在半单 $\mathbb{K}$-群 G 中，极大$\mathbb{K}$-分裂环面在 G(𝕂) 下共轭。

G 的秩是极大环面的共同维数；若 G 定义在 $\mathbb{K}$ 上且为半单的，则 G 的 $\mathbb{K}$-秩是 G 的极大 $\mathbb{K}$-分裂环面的共同维数。态射 G$_m$ $\to$G 是 G 的一个乘法单参数子群。对于环面 T，T 的单参数子群记作 $\check{}$ $X_\star$(T)。对于 $\chi \in$ T 和 $\lambda \in X_\star$(T)，复合 $(\chi \circ \lambda)$: G$_m$ $\to$ G$_m$ 是

环面 $\mathbf{G}_m$ 的一个特征，因此将 $x \in \mathbf{G}_m$ 映到某个 x^m，其中 $m \in \mathbb{Z}$。$\hat{}$ 这定义了一个映射 $b\colon \mathbf{T} \times X_\star(\mathbf{T}) \to \mathbb{Z}$，$(\chi, \lambda) \mapsto m$。

命题 3.5。 [Bor91，命题 8。7] 对于任意环面 T，映射

$$b\colon \hat{\mathbf{T}} \times X_\star(\mathbf{T}) \to \mathbb{Z}$$

是一个非退化双线性形式。

3.2.1. 例子。 $\mathbb{R}$群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\colon\ gg^{\mathsf{T}} = \mathrm{Id}\}$ 是一个环面。与 $\mathbf{G}_m$ 的同构由下式给出

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m &\to \mathrm{SO}_2(\mathbb{C}) \\ a &\mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a + a^{-1} & i(a^{-1} - a) \\ i(a - a^{-1}) & a + a^{-1} \end{pmatrix} \\ a + ib &\leftarrow\!\shortmid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

但 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ 不是 $\mathbb{R}$-分裂的。另一方面，$\mathbb{R}$群 $\mathbf{A}(\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\colon\ g$ 是对角的$\}$，是一个 $\mathbb{R}$-分裂环面。由于 $\mathbb{C}$ 是代数闭的，两个环面都是 $\mathbb{C}$-分裂的。$\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ 和 $\mathbf{A}(\mathbb{C})$ 都是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的极大环面，并且它们在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 下共轭，但不在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 下共轭。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的秩和 $\mathbb{R}$- 秩均为 1。

3.3. 李代数与伴随表示。设 $e \in \mathbf{G}$ 是代数 $\mathbb{K}$群 G 的单位元。定义 G 的李代数有多种方法，其中一些方法可参见 [Hum75] 的第 5 章和第 9 章。一种首先使用的显式定义是将 G 描述为矩阵群

$$\mathbf{G} = \{(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{D})\colon f(a_{ij}) = 0 \text{ for all } f \in I\}$$

其中 $I \subset \mathbb{K}[(x_{ij}), \det(x_{ij})^{-1}]$ 是一个有限子集。对于下面的定义，我们将范围限制在 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{D})$ 的子群，因此可以忽略对 $\det(x_{ij})^{-1}$ 的依赖。对于 $f \in I$，我们将 f 在 $e := \mathrm{Id}$ 处的微分定义为线性多项式

$$\mathrm{d}_e f = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(e) \cdot x_{ij} \in \mathbb{K}[(x_{ij})].$$

以及扎里斯基切空间

$$T_e\mathbf{G} := \left\{(a_{ij}) \in \mathbb{D}^{n \times n}\colon\ \mathrm{d}_e f(a_{ij}) = 0 \text{ for all } f \in I\right\}.$$

现在我们从导子的角度给出切空间的另一种有用描述。点导子是一个 $\mathbb{D}$-线性映射 $\delta\colon \mathbb{D}[\mathbf{G}] \to \mathbb{D}$，满足莱布尼茨法则 $\delta(ff') = \delta(f)f' + f\delta(f')$，其中 $f, f' \in \mathbb{D}[\mathbf{G}]$。对于 $a = (a_{ij}) \in T_e\mathbf{G}$，函数 $\delta_a = f \mapsto \mathrm{d}_e f(a_{ij})$ 是一个点导子，并且每个点导子都具有这种形式 [Hum75, 第 5 节.1]。

从更偏代数的角度来看，线性代数群 G 的坐标环 $\mathbb{D}[\mathbf{G}]$（视为一个 $\mathbb{D}$-代数）的导子是一个线性映射

$$X\colon \mathbb{D}[\mathbf{G}] \to \mathbb{D}[\mathbf{G}]$$

满足莱布尼茨法则 $X(ff') = X(f)f' + fX(f')$，其中 $f, f' \in \mathbb{D}[\mathbf{G}]$。代数群通过左（及右）平移作用于其坐标环$\mathbb{D}[\mathbf{G}]$。对于 $g \in \mathbf{G}$，左平移由 $\lambda_g(f)(h) = f(g^{-1}h)$ 给出，其中

$f \in \mathbb{D}[\mathbf{G}]$, $h \in \mathbf{G}$（右平移则由 $\rho_g(f)(h) = f(hg)$ 给出）。与右平移可交换的 $\mathbb{D}[\mathbf{G}]$ 的 $\mathbb{D}$-向量空间导子

$$\mathfrak{g} := \left\{ X \colon \mathbb{D}[\mathbf{G}] \to \mathbb{D}[\mathbf{G}] \colon \begin{array}{c} X \text{ is a derivation of } \mathbb{D}[\mathbf{G}] \text{ with} \\ X \circ \rho_g = \rho_g \circ X \text{ for all } g \in \mathbf{G} \end{array} \right\},$$

同构于点导子的空间（导子 X 对应于点导子 $\delta := \mathrm{ev}_e \circ X \colon \mathbb{D}[\mathbf{G}] \to \mathbb{D}$，因此 $\delta(f) = (Xf)(e)$ 对于 $f \in \mathbb{D}[\mathbf{G}]$）[Hum75，定理 9。1]，而后者又如前所述被等同于 $\mathbf{G}$ 的扎里斯基切空间 $T_e\mathbf{G}$。赋予由导子上的括号运算定义的李代数结构后，$\mathfrak{g}$ 称为 $\mathbf{G}$ 的李代数。对于包含 $\mathbb{K}$ 的交换 $\mathbb{K}$-子代数 $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{D}$，我们可以利用等同 $\mathfrak{g} = T_e\mathbf{G}$ 来定义 $\mathbf{G}$ 的李代数的 $\mathbb{B}$-点

$$\mathfrak{g}(\mathbb{B}) = T_e\mathbf{G} \cap \mathbb{B}^{n \times n}.$$

我们注意到，实李代数 $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ 是实李群 $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ 的李代数 [Mil13，定理 2。1]。

设 $\varphi \colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ 是代数群 $\mathbf{G}$、$\mathbf{H}$ 的一个态射。转置映射 $\varphi^\circ \colon \mathbb{D}[\mathbf{H}] \to \mathbb{D}[\mathbf{G}]$ 诱导出一个线性映射 $\mathrm{d}_e\varphi$，称为 φ 在 $e \in \mathbf{G}$ 处的微分。用点导子表示，微分定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_e\varphi \colon \mathfrak{g} &\to \mathfrak{h} \\ \delta &\mapsto \delta \circ \varphi^\circ. \end{aligned}$$

群 $\mathbf{G}$ 通过共轭作用 $\mathrm{Int}(g) : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ $h \mapsto ghg^{-1}$ 作用于自身。$\mathrm{Int}(g)$ 在 e 处的微分记作 $\mathrm{Ad}(g)$。态射 $\mathrm{Ad} \colon \mathbf{G} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 称为 $\mathbf{G}$ 的伴随表示，其定义为

$$\mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1} \in T_e\mathbf{G}$$

其中 $X \in \mathfrak{g}$ 被视为 $T_e\mathbf{G}$ 的一个元素。Ad 在 e 处的微分称为伴随表示 $\mathrm{ad} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$。将 $\mathfrak{g} \cong T_e\mathbf{G}$ 识别后，ad 定义为 $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$，其中 $X, Y \in \mathfrak{g}$，这里 $[\cdot, \cdot]$ 是矩阵括号。

3.4. 根系与球面魏尔群。现在设 $\mathbf{G}$ 是一个半单代数群，$\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个环面。由于 $\mathrm{Ad}(\mathbf{S})$ 也是一个环面，其元素同时可对角化，李代数 $\mathfrak{g}$ 因而分解为特征子空间

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{(\mathbf{S})} \oplus \bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha^{(\mathbf{S})}$$

其中

$$\mathfrak{g}_\alpha^{(\mathbf{S})} = \{ X \in \mathfrak{g} \colon \mathrm{Ad}(s)(X) = \alpha(s) \cdot X \quad \text{for all } s \in \mathbf{S} \}$$

对于某个 $\alpha \in \hat{\mathbf{S}}$。满足 $\alpha \neq 0$ $\mathfrak{g}_\alpha^{(\mathbf{S})} \neq 0$ 的元素称为（相对于 $\mathbf{S}$ 的）根，而 $\mathfrak{g}_\alpha^{(\mathbf{S})}$ 称为根空间。所有根的集合记为 $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$。如果 $\mathbf{G}$ 定义在 $\mathbb{K}$ 上，且 $\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个极大 $\mathbb{K}$- 分裂环面，那么 ${}_{\mathbb{K}}\Phi := \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$ 称为 $\mathbf{G}$ 的 $\mathbb{K}$- 根集合。由于 $\mathbf{G}$ 的所有极大 $\mathbb{K}$-分裂环面在 $\mathbb{K}$ [上共轭（参见 Bor91，定理 20.9(ii)）]，${}_{\mathbb{K}}\Phi$ 只依赖于 $\mathbb{K}$，而不依赖于极大 $\mathbb{K}$-分裂环面 $\mathbf{S}$ 的选择。

定理 3.6 (21.6 [Bor91])。设 $\mathbf{G}$ 是一个半单 $\mathbb{K}$-群，$\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个极大$\mathbb{K}$-分裂环面。回顾，$\hat{\mathbf{S}} \cong \mathbb{Z}^d$。设 $\Phi = \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$。那么，在 $\mathbb{R}$-向量空间 $V = \mathbf{S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 上存在一个 $\hat{}$ 容许标量积，使得 (V, Φ) 是一个晶体根系，即：

(1) Φ 是 V 的有限对称（$\Phi = -\Phi$）子集，它张成 V 且不包含 0。(2) 对每个 $\alpha \in \Phi$，存在一个关于 α 的反射 r_α: $V \to V$，使 Φ 保持不变。

(3) 如果 $\alpha, \beta \in \Phi$，那么 $2\langle\alpha,\beta\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle \in \mathbb{Z}$。

如果 S 是一个极大 $\mathbb{K}$-分裂环面，那么相对于 $\mathbb{K}$ 的球面魏尔群是

$$ {}_{\mathbb{K}}W = {}_{\mathbb{K}}W(\mathbf{S},\mathbf{G}) = \mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})/\,\mathrm{Cen}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) $$

ˆ，且在 S、S 和 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$ 上忠实作用。

3.5. 博雷尔子群、抛物子群。设 G 是一个连通代数群。如果一个子群的导出列（由反复取交换子群构成）终止，则称其为可解子群。若子群 B $<$ G 在连通可解子群中极大，则称 B 为 G 的博雷尔子群。闭子群 P $<$ G 是抛物子群，当且仅当它包含一个博雷尔子群。极小抛物子群恰好是博雷尔子群。一般而言，博雷尔子群可能无法定义在 $\mathbb{K}$ 上；在这种情况下，极小抛物 $\mathbb{K}$-子群可能不是博雷尔子群。

定理 3.7。（布鲁哈分解，[Bor91，定理 21.15]）设 S 为一个极大 $\mathbb{K}$-分裂环面，P 为包含 S 的一个极小抛物 $\mathbb{K}$子群。记 π: $\mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}$(S) $\to$ ${}_{\mathbb{K}}W$ 为魏尔群投影。则 G($\mathbb{K}$) =P($\mathbb{K}$)Nor$^{\mathbf{G}(\mathbb{K})}$(S($\mathbb{K}$))P($\mathbb{K}$)，事实上，这是双陪集的不交并

$$ \mathbf{G}(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{w \in {}_{\mathbb{K}}W} \mathbf{P}(\mathbb{K})\pi^{-1}(w)\mathbf{P}(\mathbb{K}). $$

选定一个包含极大 $\mathbb{K}$-分裂环面的极小抛物 $\mathbb{K}$子群 P 后，任何包含 P 的抛物 $\mathbb{K}$子群都称为标准抛物子群。

3.5.1. 例子。$\mathrm{SL}_3 = \mathrm{SL}_3(\mathbb{D})$ 中对角矩阵所成的群是一个极大$\mathbb{Q}$-分裂环面 T。包含 T 的极小抛物 $\mathbb{Q}$子群有六个（在此情形下，它们是博雷尔子群）。它们由下式给出

$$ \left\{ \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3 \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} \star & 0 & \star \\ \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3 \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3 \right\}, $$
$$ \left\{ \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3 \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3 \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} \star & \star & 0 \\ 0 & \star & 0 \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3 \right\} $$

并且对应于球面魏尔群通过共轭作用传递作用的魏尔室。 ${}_{\mathbb{K}}W$ 的一组相应代表元为

$$ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, $$
$$ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

4. Results about Lie algebras and split tori

设 G 是定义在 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ 上且在转置下不变的半单代数群。李代数 $\mathfrak{g} = T_e\mathbf{G}$ 由有限个系数取自 $\mathbb{K}$ 的线性方程定义，因此我们可以考虑其 $\mathbb{K}$-点$\mathfrak{g}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^{n\times n}$，它是一个 $\mathbb{K}$-向量空间，也是一个代数的（因而是半代数的）集合。设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$ 是实闭域 $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{K}$ 上 $\mathfrak{g}(\mathbb{K})$ 的半代数扩张。注意，$\mathfrak{g}_{\mathbb{F}} = \mathfrak{g}(\mathbb{F})$，但在下文中，我们将采用半代数的观点。为保持一致，我们记 $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} := \mathfrak{g}(\mathbb{K})$。

本节回顾实李群 $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ 及其李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的相关事实。我们有时会参考 Helgason 著作 [Hel78] 的第 3 章和 Knapp 著作 [Kna96], 的第 6 章；其精简介绍见 [Wis01]。

4.1. 嘉当对合与嘉当分解。回顾一下，李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的伴随表示

$$\mathrm{ad} := \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} := \mathrm{d}_e\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}(\mathbb{R})} \colon \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$$

由 $X \mapsto [X, \cdot\,]$ 给出。Killing型 B 是定义在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上的双线性型，定义如下:

$$B(X, Y) := \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$$

对于 X、$Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$。如果李代数是非阿贝尔的，且不含任何非零真理想，则称其为单李代数。如果李代数是单李代数的直积，则称其为半单李代数。根据 Cartan判别法，半单等价于具有非退化的 Killing型。由于 G 是半单的，因此 $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ 也是半单的，且 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$。李代数自同构 θ: $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 称为对合，若 $\theta^2 = \mathrm{Id}$。对于任意对合 θ: $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$，我们可以定义双线性型 B_θ 如下:

$$B_\theta(X, Y) := -B(X, \theta Y)$$

对于 $X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$。如果 B_θ 是正定的，则称 θ 为嘉当对合。下面是一个关于嘉当对合的技术性结果，在 [Hel78] 中作为习题提出，并在 [Kna96, 定理 6.16] 中得到证明。

引理 4.1. 设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 是一个实半单李代数，θ 是一个嘉当对合，σ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上的任意对合。则存在一个自同构 $\varphi \in \mathrm{Ad}(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$，使得 $\varphi\theta\varphi^{-1}$ 与 σ 对易。

前述引理的一个应用是，所有嘉当对合都是共轭的，参见 [Kna96, 推论 6.19]。

定理 4.2. 设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 是一个实半单李代数。$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的任意两个嘉当对合都通过 $\mathrm{Ad}(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$ 中的某个元素共轭。

证明。设 θ 和 θ' 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的两个嘉当对合。如果 θ 与 θ' 对易，则它们具有相同的特征子空间。我们断言 $E_1(\theta) = E_1(\theta')$ 且 $E_{-1}(\theta) = E_{-1}(\theta')$，因为否则，例如，如果 $\theta(X) = X$ 且 $\theta'(X) = -X$，那么

$$B_{\theta'}(X, X) = -B(X, \theta'(X)) = -B(X, -X) = B(X, \theta(X)) = -B_\theta(X, X),$$

但 $B_\theta(X, X)$ 和 $B_{\theta'}(X, X)$ 都应为正数。由此可知，若 θ和 θ' 对易，则 $\theta = \theta'$，因为 θ 和 θ' 在它们各自的特征子空间上取相同的值。若 θ 和 θ' 不对易，则我们可以应用引理 4.1，找到

$\varphi \in \mathrm{Ad}(G(\mathbb{R}))$，使得 $\varphi\theta\varphi^{-1}$ 与 θ'对易，因此根据前面的论证，$\varphi\theta\varphi^{-1} = \theta'$。□

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的直和分解 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. 称为嘉当分解，如果

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$$

且 Killing型 B 在 $\mathfrak{k}$ 上负定，在 $\mathfrak{p}$上正定。嘉当对合与嘉当分解之间存在对应关系。嘉当对合 θ 定义了 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$的特征子空间分解 $\mathfrak{k} = E_1(\theta)$、 $\mathfrak{p} = E_{-1}(\theta)$。利用 θ 与括号运算可交换，可以验证这些括号关系。由于 $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})\,\mathrm{ad}(\mathfrak{p})(\mathfrak{k}) \subseteq \mathfrak{p}$ 且 $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})\,\mathrm{ad}(\mathfrak{p})(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{k}$，我们有

$$B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\mathfrak{k})\,\mathrm{ad}(\mathfrak{p})) = 0$$

且该分解是正交的。由于 θ 是嘉当对合， B_θ 正定，因此 B 在 $\mathfrak{k}$ 上负定，在 $\mathfrak{p}$上正定。从嘉当分解 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$出发，我们可以定义对合

$$\theta\colon X \mapsto \begin{cases} X & \text{if } X \in \mathfrak{k} \\ -X & \text{if } X \in \mathfrak{p} \end{cases}$$

它与括号运算相容，并且 B_θ 是正定的。为了进一步细化分解，我们需要以下引理。

引理 4.3. 设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 是一个嘉当分解，其嘉当对合为θ ，并设 $X \in \mathfrak{p}$。映射 $\mathrm{ad}(X)\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 关于标量积 B_θ是对称的。

证明。我们有

$$\begin{aligned} B_\theta(\mathrm{ad}(X)(Y), Z) &= -B([X,Y], \theta(Z)) = B(Y, [X,Z]) = -B(Y, [\theta(X), \theta(Z)]) \\ &= -B(Y, \theta([X,Z])) = B_\theta(Y, \mathrm{ad}(X)Z) \end{aligned}$$

对所有 $X \in \mathfrak{p}$ 和 Y， $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$均成立。 □

现在，设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 是一个固定的嘉当分解，其对应的嘉当对合为 θ。设 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ 是一个极大阿贝尔子空间。我们可以定义 $G(\mathbb{R})$ 的实秩： $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(G(\mathbb{R})) := \dim(\mathfrak{a})$。根据定理 4.2，它与 $\mathfrak{p}$ 无关；又由于任意两个极大阿贝尔子空间彼此共轭（见 [Kna96, 定理 6.51]），它也与 $\mathfrak{a}$无关。集合$\{\mathrm{ad}(H)\colon H \in \mathfrak{a}\}$ 由对称的、因而可对角化的线性映射构成。由于这些映射两两可交换，它们同时可对角化。由此得到分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$$

其中，对于对偶空间 $\mathfrak{a}^\star$ of $\mathfrak{a}$ 中的每个 $\alpha \in \mathfrak{a}^\star$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\colon [H, X] = \alpha(H) \cdot X \text{ for all } H \in \mathfrak{a}\}$$

其中 $\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a}^\star\colon \ \alpha \neq 0$ 以及 $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$。 Σ 中的元素称为限制根，而 $\mathfrak{g}_\alpha$ 是它们对应的限制根空间。请注意，与复李代数的分解不同，根空间的维数可能不为一[1]。在第 3.4 节中，我们定义了代数

[1]在实半单李代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 中，我们有 $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 2$。

群的极大分裂环面。在第 5.2 节中，我们将证明这两种方法得到相同的根空间和根系。

命题 4.4。（[Kna96，命题 6.40]）限制根空间分解是关于 B_θ 的正交直和，并且对所有 α、$\beta \in \Sigma$ 都成立

（i） $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，（ii） $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$，以及（iii） $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{k}:$ 对所有 $H \in \mathfrak{a}\}$, $[H, X] = 0$。

内积 B_θ 可限制到 $\mathfrak{a}$ 上，并用于建立同构 $\mathfrak{a}^\star \cong \mathfrak{a}$，从而使 $\mathfrak{a}^\star$ 成为一个欧几里得向量空间。

定理 4.5。（[Kna96，推论 6.53]）根集（Σ，$\mathfrak{a}^\star$）是一个晶体学根系 [2]。

通过选取根系 Σ的一个有序基，我们可以定义正根集 $\Sigma_{>0}$。于是

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_{>0}} \mathfrak{g}_\alpha$$

是 $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$的一个幂零子代数。我们有以下性质。

引理 4.6. ([Kna96，引理 6.45]) 设 $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ 是一个实半单李代数。存在 $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ 的一个基，使得表示 ad($\mathfrak{g}_\mathbb{R}$) 的矩阵具有以下性质

(1) ad($\mathfrak{k}$) 的矩阵是反对称的。(2) ad($\mathfrak{a}$) 的矩阵是对角的。(3) ad($\mathfrak{n}$) 的矩阵是对角线上为 0 的上三角矩阵。

在李代数层面，我们也有岩泽分解。

定理 4.7. ([Kna96，命题 6.43]) 设 $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ 是一个半单李代数。那么 $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ 是一个直和。

下面这个关于李子代数的引理

$$\mathfrak{l} := (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}) \oplus (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}) \oplus ([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] + [\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}])$$

对于某个 $\alpha \in \Sigma$，在第5.9节考察某些秩 1 子群时会用到。注意，由 Cartan判别法可知，$\mathfrak{l}$ 是半单的，因为其 Killing型是 $\mathfrak{g}$的定定 Killing型的限制。因此，$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{l}$ 是 $\mathfrak{l}$的嘉当分解。

引理 4.8. 设 $\alpha \in \Sigma$ 和 $X \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$。那么，$\mathfrak{l}$ 的实秩 $\mathrm{rank}_\mathbb{R}$ 为一。$\mathfrak{l}$ 的对称部分的一个极大阿贝尔子空间由$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{l} = \langle [X, \theta(X)] \rangle$给出。

[2] Σ 可能不是约化的，例如当 $G = \mathrm{SU}(2, 1)$时。

证明。我们利用以下事实： B_θ 在 $\mathfrak{a}$ 上给出了一个标量积，从而可以将 $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}^*$对应起来，将 $\alpha \in \Sigma$ 映射到由 $\alpha(H) = B_\theta(H_\alpha, H)$定义的 H_α ，对所有$H \in \mathfrak{a}$均成立。设 $X \in \mathfrak{g}_\alpha$、$Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 和 $H \in \mathfrak{a}$。于是

$$\begin{aligned} B_\theta([X,Y],H) &= -B([X,Y],\theta(H)) = B([X,Y],H) = -B(Y,[X,H]) \\ &= B(Y,[H,X]) = B(Y,\alpha(H)X) = \alpha(H)B(Y,X) \\ &= B_\theta(H_\alpha,H)B(X,Y) = B_\theta(B(X,Y)\cdot H_\alpha, H), \end{aligned}$$

这里用到了 B 是 $\mathrm{ad}(X)$-不变的。元素

$$W = [X,Y] - B(X,Y)\cdot H_\alpha \in \mathfrak{g}_0$$

满足 $B_\theta(W,H) = 0$ 对所有 $H \in \mathfrak{a}$均成立，因此属于与 $\mathfrak{a}$正交的 $\mathfrak{g}_0$ ，故由命题 4.4， $W \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{k}$ 。类似地，可以证明，对于任意$X' \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$和 $Y' \in \mathfrak{g}_{-2\alpha}$，存在某个 $W' \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$，使得 $[X',Y'] = W' + 2B(X',Y')\cdot H_\alpha$。任意元素 $Z \in \mathfrak{a}\cap\mathfrak{l}$都属于 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus [\mathfrak{g}_{2\alpha},\mathfrak{g}_{-2\alpha}]$，因为 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}_0$与$\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$正交。因此， Z可以写成 $Z = W + W' + (B(X,Y) + 2B(X',Y'))\cdot H_\alpha \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{a}$，故 $W + W' = 0$且 $Z \in \langle H_\alpha \rangle$。

如果 $Y = \theta(X)$，那么

$$\theta(W) = \theta([X,\theta(X)] - B(X,Y)\cdot H_\alpha) = [\theta(X),X] - \theta(H_\alpha)B(X,Y) = -W$$

这意味着 $W \in \mathfrak{p}\cap\mathfrak{k}$，因此 $W = 0$。我们已经证明 $[X,\theta(X)] \in \mathfrak{a}\cap\mathfrak{l} \subseteq \langle H_\alpha\rangle$。由于 B是定定的， $[X,\theta(X)] \neq 0$且 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{l} = \langle [X,\theta(X)]\rangle$。

映射 $\theta|_{\mathfrak{l}}$是一个嘉当对合，其嘉当分解为 $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}\cap\mathfrak{l}$。 $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{l}$中存在一个包含于 $\mathfrak{a}$的极大阿贝尔子空间，根据上述结果，它等于$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{l} = \langle [X,\theta(X)]\rangle$。 $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{l}$的极大阿贝尔子空间的维数恰好等于 $\mathfrak{l}$的秩，且为一。□

下述结果是文献中雅各布森–莫罗佐夫引理的一个特例。注意，这个引理对一般的 $X \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$不成立。

引理 4.9. 设 $\alpha \in \Sigma$和 $X \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$。则存在 $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$ 和$H \in \mathfrak{a}$ ，使得 (X, Y, H) 构成一个 $\mathfrak{sl}(2)$-三元组，即

$$[X,Y] = H, \quad [H,X] = 2X, \quad [H,Y] = 2Y.$$

证明. 设 $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ 如引理 4.8 的证明中所定义，由 $\alpha(H) = B_\theta(H_\alpha, H)$ 对所有 $H \in \mathfrak{a}$ 成立。给定 $X \in \mathfrak{g}_\alpha$，令

$$Y := \frac{-2}{B_\theta(X,X)\cdot\alpha(H_\alpha)}\theta(X) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

且 $H := [X,Y]$。在引理 4.8 的证明中，我们看到

$$[X,\theta(X)] = B(X,\theta(X))\cdot H_\alpha = -B_\theta(X,X)\cdot H_\alpha,$$

由此 $H \in \mathfrak{a}$ ，而且

$$\begin{aligned} [H,X] &= \left[\left[X, \frac{-2}{B_\theta(X,X)\alpha(H_\alpha)}\theta(X)\right], X\right] \\ &= \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}[H_\alpha, X] = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}\alpha(H_\alpha)X = 2X \end{aligned}$$

同理， $[H,Y] = -2Y$。 □

4.1.1. 例子。由于 $\mathrm{G}(\mathbb{R})$ 在转置下保持不变，$\sigma\colon g \mapsto (g^{-1})^{\mathsf{T}}$是该李群的一个对合，其微分 $\theta := \mathrm{d}_e\sigma\colon X \mapsto -X^{\mathsf{T}}$ 是李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$上的一个对合，后者分解为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$对称部分 $\mathfrak{p}$ 和反对称部分 $\mathfrak{k}$。可以验证

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{and} \quad [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$$

并且 Killing型在 $\mathfrak{k}$ 上负定、在 $\mathfrak{p}$上正定。因此，$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 是嘉当分解，而 θ 是嘉当对合。

4.2. 实Cartan子代数与 $\mathbb{R}$-分裂子代数。本节讨论有限维半单实李代数$\mathfrak{g}$的嘉当子代数。这些结果尤其适用于实李群 $\mathrm{G}(\mathbb{R})$ 的李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 。

若阿贝尔子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 满足

$$\mathfrak{h} = \mathrm{Nor}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{g}\colon [X,Y] \in \mathfrak{h} \text{ for all } Y \in \mathfrak{h}\}.$$

若对每个 $X \in \mathfrak{a}$，$\mathrm{ad}(X)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 在 $\mathbb{R}$ 上均可对角化，则称阿贝尔子代数 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ 为 $\mathbb{R}$-分裂。令 $r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ 表示此类 $\mathbb{R}$-分裂阿贝尔子代数的最大维数，并记

$$V(\mathfrak{g})\colon = \{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}\colon \ \mathfrak{a} \text{是一个 } \mathbb{R}\text{-分裂阿贝尔子代数，且 } \dim(\mathfrak{a}) = r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})\}.$$

极大 $\mathbb{R}$-分裂嘉当子代数是指包含 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 中某个元素作为子集的嘉当子代数。令

$$\mathcal{C}(\mathfrak{g}) = \{\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}\colon \mathfrak{h} \text{ is a maximally } \mathbb{R}\text{-split Cartan subalgebra }\}.$$

Knapp [Kna96] 对这些对象采用了略有不同的定义和名称。我们将在此证明二者是一致的。我们首先证明，我们对嘉当子代数的概念与 [Kna96] 中的概念一致。

引理 4.10。设 $\mathfrak{h}$ 是有限维实半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数。那么，$\mathfrak{h}$ 是嘉当子代数，当且仅当它满足以下条件之一

(i) $\mathfrak{h}$ 是阿贝尔的，且 $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$。

(ii) 复化 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{h} \oplus i\mathfrak{h}$ 是阿贝尔的，且 $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$。

(iii) 复化 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 是幂零的，且 $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$。

(iv) 复化 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 是幂零的，并且

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\colon \exists n \in \mathbb{N},\ \forall H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}},\ \mathrm{ad}(H)^n X = 0\}.$$

(v) 复化 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 是极大阿贝尔的，且子集 $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 可同时对角化。

证明。概念 (i) 就是我们对嘉当子代数的定义。对于任意 $X = X_1 + iX_2 \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $Y = Y_1 + iY_2 \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，我们有

$$\mathrm{ad}(Y)X = [Y_1 + iY_2, X_1 + iX_2] = [Y_1, X_1] - [Y_2, X_2] + i([Y_1, X_2] + [Y_2, X_1]).$$

[3]更一般地，嘉当子代数定义为幂零且自正规化的子代数。在我们的语境中，我们将范围限定为特征为 0 的域上的半单李代数；在这种情况下，嘉当子代数是阿贝尔的。

由此公式可推得，实李代数的子代数是阿贝尔的，当且仅当其复化是阿贝尔的。还可得，对于任意实子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$，我们有

$$\mathrm{Nor}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \iff \mathrm{Nor}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}.$$

由此可知，概念 (i) 和 (ii) 等价。要证明 (ii) 推出 (iii)，只需注意到每个阿贝尔子代数都是幂零的；反过来则需要用到半单性，见 [Kna96，命题 2.10]。条件 (iv) 是 [Kna96] 中采用的定义，而 (iii) 与 (iv) 等价，见 [Kna96，命题 2.7]。(iv) 与 (v) 等价，见 [Kna96，推论 2.13]。□

若存在一个嘉当对合 θ，使得 $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$，则称子集 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 为 θ-稳定的。若 θ 由上下文给定，则“ θ- 稳定 ”指的是那个特定的嘉当对合。

命题 4.11。（[Kna96，命题 6.59]）设 $\mathfrak{g}$ 是实半单李群 G 的李代数，且 $\mathrm{Ad}(G)^\circ$ 是 $\mathrm{Ad}(G) \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 在李群拓扑下的连通分支。任意嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 都通过 $\mathrm{Ad}(G)^\circ$ 共轭于一个 θ-稳定的嘉当子代数。

若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ 是与嘉当对合 θ相关联的嘉当分解，且 $\mathfrak{h}$ 是一个 θ-稳定的嘉当子代数，则 $\mathfrak{a} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{t} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ 是 θ-稳定的，并且 $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$。若嘉当子代数的 $\dim(\mathfrak{a})$ 达到最大值，则称其为极大非紧。虽然所有复嘉当子代数都互为共轭 [Kna96，定理 2.15], 对于实嘉当子代数，空间 $\mathfrak{a}$ 和$\mathfrak{t}$的维数保持不变。

命题 4.12。（[Kna96，命题 6.61]）设 $\mathfrak{g}$ 是半单实李群 G 的李代数，并设 K 是一个李代数为 $\mathfrak{k}$ 的子群，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$是与嘉当对合 θ相关联的嘉当分解。

所有极大非紧 θ-稳定的嘉当子代数在 $\mathrm{Ad}(K)^\circ$下共轭。

总之，命题 4.11 和 4.12 使我们能够将极大非紧 θ-稳定嘉当子代数的定义扩展到所有嘉当子代数：规定一个嘉当子代数若与某个 θ-稳定的极大非紧嘉当子代数共轭，则称其为极大非紧。现在我们将证明，极大 $\mathbb{R}$-分裂嘉当子代数 $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ 的集合与极大非紧嘉当子代数的集合重合。

命题 4.13. 对于有限维实半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的任意极大 $\mathbb{R}$-分裂子代数 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$，都存在一个极大非紧嘉当子代数 $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{a}$。每个极大非紧嘉当子代数都包含一个极大 $\mathbb{R}$-分裂子代数 $\mathfrak{a}$；如果 $\mathfrak{h}$ 是 θ-稳定的，那么在上述分解中，$\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$，且 $r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{a})$。

证明。我们引入几个概念。若 k 是一个域，且 $\mathfrak{g}$ 是一个半单的 k-李代数，那么若阿贝尔子代数 $\mathfrak{h}$ 满足 $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$由在 k的代数闭包上可对角化的线性映射组成，则称其为环面型。若 $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$中的所有元素在 k 自身上都可对角化，则称 $\mathfrak{h}$ 为 k-分裂环面型。若

此外，若 $\mathfrak{h}$ 在所有 k-分裂环面型子代数中是极大的，则称 $\mathfrak{h}$ 为极大k-分裂环面型。

现在设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维实半单李代数。按我们的术语，设 $\mathfrak{a} \in V(\mathfrak{g})$ 中的 $\mathfrak{a}$ 是极大 $\mathbb{R}$-分裂环面型的。设 $\mathfrak{h}$ 是包含 $\mathfrak{a}$ 的极大环面子代数；由于 $\mathfrak{g}$ 是有限维的，这样的子代数存在。我们要证明 $\mathfrak{h}$ 是一个嘉当子代数，并使用引理 4.10 的特征 (v)。由于 $\mathfrak{h}$ 是阿贝尔的，其复化 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 也是阿贝尔的。由于 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathbb{C}$- 分裂的，$\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{h}) \oplus i\,\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ 的所有元素在 $\mathbb{C}$ 上都可对角化。这意味着 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的环面子代数；根据线性代数中的一个一般事实，$\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ 可同时对角化。复化 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 也是极大阿贝尔的，因为对于所有 $X = X_1 + iX_2 \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，若 $[X, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}] = 0$，则特别地，对于 $H \in \mathfrak{h}$

$$0 = [X, H] = [X_1 + iX_2, H] = [X_1, H] + i[X_2, H],$$

因此 X_1、$X_2 \in \mathfrak{h}$，所以 $X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$。这表明，根据特征 (v)，$\mathfrak{h}$ 是一个嘉当子代数。

根据命题 4.11，存在一个嘉当对合 θ 和一个 $g \in G_{\mathbb{R}}$，使得 $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h})$ 是一个 θ-不变的嘉当子代数，其分解为 $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{t}'$，如前所述。由于 $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{p}$，它是 $\mathbb{R}$-分裂的。事实上，对于 $X = X_{\mathfrak{a}'} + X_{\mathfrak{t}'} \in \mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{t}'$，只有当 $X_{\mathfrak{t}'} = 0$时，$\mathrm{ad}(X)$ 才能在 $\mathbb{R}$ 上对角化。由于可对角化性在共轭作用下保持不变，$\mathrm{Ad}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}'$，并且根据 $\mathfrak{a}$的极大性，我们有 $\mathrm{Ad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$。因此，$\mathfrak{h}$ 是极大非紧的。

如果我们改为从一个极大非紧 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$出发，同样可以得到（可能需要通过共轭作用将其变为一个 θ-稳定的子代数）一个 $\mathbb{R}$-分裂子代数 $\mathfrak{a}$，且满足 $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$。先验地，$\mathfrak{a}$ 作为 $\mathfrak{h}$的子代数，是极大 $\mathbb{R}$-分裂的；但是，如果 $\mathfrak{a}$ 包含在更大的子代数 $\mathfrak{a}'$ 中，且该子代数在 $\mathfrak{g}$中是极大 $\mathbb{R}$-分裂的，那么上述构造将得到一个嘉当子代数 $\mathfrak{h}' = \mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{t}'$，满足 $\dim(\mathfrak{a}') > \dim(\mathfrak{a})$，这是不可能的，因为我们假设 $\mathfrak{h}$ 是极大非紧的，这意味着 $\dim(\mathfrak{a})$ 是最大的。根据定义，$r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathbb{R}$-分裂阿贝尔子代数的最大维数，因此 $r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{a})$。□

现在我们回到半单代数群 G 的 $\mathbb{R}$-点 $\mathrm{G}(\mathbb{R})$ 的李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$，并整理 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 和 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 的若干性质。

引理 4.14. 回顾一下，对于代数群 G，$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(\mathrm{G})$ 是 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的任意阿贝尔子空间的最大维数，其中 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ 是与某个嘉当对合 θ 相关联的嘉当分解。我们有

(1) $r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(\mathrm{G})$。 (2) $\mathrm{G}(\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 和 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 上传递作用。 (3) $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 包含一个 θ-稳定元素。

证明。一个极大 $\mathbb{R}$-分裂嘉当子代数，或者根据命题 4.13，一个极大非紧 Cartan 子代数，可以通过以下方式得到：从一个嘉当对合 θ 开始，取 $\mathfrak{p}$ 的一个极大阿贝尔子空间 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$，再取 $\mathrm{Cen}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ 的一个极大阿贝尔子空间 $\mathrm{Cen}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})\mathfrak{t} \subseteq$。于是 $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$ 是一个 θ-稳定的极大非紧嘉当子代数，见 [Kna96，命题 6.47]。这证明了 (3)。

根据命题 4.13，$r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = \dim(\mathfrak{a})$，并且由于 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的一个极大阿贝尔子空间，$r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = 秩_{\mathbb{R}}(G)$，这证明了 (1)。
由命题 4.11 和 4.12，Ad(G(ℝ))，进而 G(ℝ)，在$\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$上递作用。接下来，设 $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \in V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$。由命题 4.13，存在极大非紧嘉当子代数 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$，使得 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$ 且 $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{h}'$。由命题 4.12，$\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}'$ 都共轭于一个由 θ稳定的极大非紧嘉当子代数 $\mathfrak{h}''$。由命题 4.13，$\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{a}'$的相应共轭与交集 $\mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{p}$重合，因此彼此相同。这表明 Ad(G(ℝ)) 在 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$上递作用，从而完成了 (2) 的证明。□

4.3. 实闭域上的李代数。设 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{R}$ 的子域，且 $\mathbb{F}$ 是实闭域，满足 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$。本节还假设 $\mathbb{K}$ 是实闭的。设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}^{n\times n}$ 是定义在 $\mathbb{K}$上的自伴（$g \in \mathrm{G}$ 蕴含 $g^{\mathsf{T}} \in \mathrm{G}$）半单代数群 G 的李代数的 $\mathbb{K}$-点。设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$和 $\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$ 为半代数扩张。第 4.2 节的定义也适用于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$:

阿贝尔子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$ 称为嘉当子代数，如果 $\mathfrak{h} = \mathrm{Nor}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}}(\mathfrak{h})$。阿贝尔子代数 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$ 称为 $\mathbb{F}$-分裂的，如果对于每个 $X \in \mathfrak{a}$，$\mathrm{ad}(X)\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{F}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$ 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化。令 $r_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 为这类 $\mathbb{F}$-分裂阿贝尔子代数的最大维数，并用 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 表示所有满足 $\dim(\mathfrak{a}) = r_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 的 $\mathbb{F}$- 分裂阿贝尔子代数的集合。极大 $\mathbb{F}$- 分裂嘉当子代数是指包含 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 中某个元素作为子集的嘉当子代数。我们用 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 表示所有极大 $\mathbb{F}$-分裂嘉当子代数的集合。现在我们将使用迁移原理，将 $\mathbb{F}$-分裂代数与上一节研究的实子代数联系起来。在下面的引理中，我们固定嘉当对合 $\theta\colon X \mapsto -X^{\mathsf{T}}$，它的存在性源于 G 是自伴的。

引理 4.15. 若 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{K}$ 是两个实闭域，且满足 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ 和$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$，则

(1) $r_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}) = r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = r_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$。 (2) G(𝕂) 在 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$ 和 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$ 上传递作用，且这两个集合都非空。 (3) $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$ 包含一个 θ-稳定元素，即存在 $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$，使得$\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$。

(4) 设 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$的子代数。则

$$\mathfrak{a} \in V(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}) \iff \mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \in V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \iff \mathfrak{a}_{\mathbb{F}} \in V(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$$
$$\mathfrak{h} \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}) \iff \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \iff \mathfrak{h}_{\mathbb{F}} \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}).$$

证明. 我们的首要目标是将 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$ 看作一个半代数集。设 k 是任意一个包含 $\mathbb{K}$ 的实闭域。设 $\mathcal{L}$ 是一个半单 k-代数，使得 $\mathcal{L}$ 也是一个定义在 $\mathbb{K}$上的半代数集。设 $r \le n := \dim_k(\mathcal{L})$。集合 $\mathrm{Grass}_r(\mathcal{L})$ 可以识别为 $k^{n\times n}$ 的一个代数子集，即

$$\varphi\colon \mathrm{Grass}_r(\mathcal{L}) \to \left\{A \in k^{n\times n}\colon A^{\mathsf{T}} = A,\ A^2 = A,\ \mathrm{Tr}(A) = r\right\}$$

将 k 维子空间 V 映射到正交投影 $\mathcal{L} \to V$，参见[BCR98，定理 3.4.4]。此外，对于任意 $A \in \varphi(\mathrm{Grass}_r(\mathcal{L}))$，我们有如下

描述

$$\varphi^{-1}(A) = \{v \in \mathcal{L} \colon Av = v\}.$$

阿贝尔子代数 $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{L}$恰好在对所有 $x \in \mathfrak{a}$，$\mathrm{ad}(x)$ 在 k 上可对角化时是 k-分裂的。只需要求对于 $\mathfrak{a}$的一组基 $\{v_1, \ldots, v_r\}$，映射 $\mathrm{ad}(v_i)\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 在 k 上可对角化。一个矩阵为 $M = (M_{ij})$ 的线性映射在 k 上可对角化，当且仅当它的特征多项式可分解为一次因子；这一条件可以写成一阶公式：

$$f(M) = \exists x_1, \ldots, x_n \colon \forall X \colon \det(M_{ij} - X\delta_{ij}) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i).$$

我们可以将“$\mathfrak{a} = \varphi^{-1}(A)$ 是一个 k-分裂阿贝尔子代数”这一陈述写成一阶公式

$$\exists v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{L} \colon \left(\forall a_1, \ldots, a_n \colon \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \to a_1 = 0 \wedge \ldots \wedge a_n = 0 \right) \wedge$$
$$\bigwedge_{i=1}^{r} Av_i = v_i \ \wedge \bigwedge_{i,j=1}^{r} [v_i, v_j] = 0 \ \wedge$$
$$\bigwedge_{\ell=1}^{r} \left(\exists M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{nn} \colon \bigwedge_{i=1}^{n} [v_\ell, v_i] = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} e_j \ \to f(M) \right),$$

换言之：存在 $\mathcal{L}$ 的一组基，其前 r 个向量构成 $\mathfrak{a} = \varphi^{-1}(A)$ 的一组基，且 $\mathfrak{a}$是阿贝尔的，并且对每个 $\ell \in \{1, \ldots, r\}$，$\mathrm{ad}(v_\ell)$ 在这组基下的矩阵 M 在 k上可对角化。

通过量词消去，我们得到一个等价的无量词一阶陈述 $g(A)$，并且可以将其写成

$$\varphi(V(\mathcal{L})_r) = \{A \in \varphi(\mathrm{Grass}_r(\mathcal{L})) \colon g(A)\}$$

一个由系数属于 k 的多项式定义的半代数集，其中 $V(\mathcal{L})_r$ 表示所有维数为 r 的 k-分裂阿贝尔子代数所组成的集合。

现在，对于 $k = \mathbb{R}$，我们知道 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})}$ 非空，但对于任意 $r > r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$，$V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_r$ 为空。我们考虑一阶公式

$$\exists A \in \varphi(V(\mathfrak{g}_k)_r),$$

该公式定义在 $\mathbb{K}$ 上，因为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$，因此括号运算定义在 $\mathbb{K}$ 上。由于该公式对 $k = \mathbb{R}$ 和 $r = r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 成立，根据迁移原理，我们得出它对 $k = \mathbb{K}$ 和 $k = \mathbb{F}$ 也成立，即 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}) = V(\mathfrak{g})_{r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})} \neq \emptyset$，且 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}) = V(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})_{r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})} \neq \emptyset$。对于任意 $r > r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$，我们知道该公式对 $k = \mathbb{R}$ 不成立，因此根据迁移原理，它对 $k = \mathbb{K}$ 和 $k = \mathbb{F}$ 也不成立，即对于任意 $r > r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$，$V(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})_r = \emptyset$ 且 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})_r = \emptyset$。由此可得 $r_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}) = r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = r_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$，这就是我们正在证明的引理中的陈述 (1)。

我们描述

$$\mathcal{C}(\mathfrak{g}_k) = \left\{ \mathfrak{h} \in \mathrm{Grass}_{r_k(\mathfrak{g}_k)}(\mathfrak{g}_k) \colon \begin{array}{c} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0, \ \mathrm{Nor}_{\mathfrak{g}_k}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}, \\ \exists \mathfrak{a} \in V(\mathfrak{g}_k) \colon \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h} \end{array} \right\}$$

同理。设 $v_1, \ldots, v_n$ 再次构成半单 k代数 $\mathcal{L}$ 的一组基，且$v_1, \ldots, v_r$ 构成子代数 $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{L}$的一组基。每当$_{\mathcal{L}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$时，

$[v_i, v_j] \in \mathfrak{a}\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, r\}$，也就是说，给定 $\mathfrak{a} = \varphi^{-1}(A)$，我们有

$$h(A)\colon \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{r} A[v_i, v_j] = [v_i, v_j].$$

当且仅当下列一阶公式成立时，我们有 $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$

$$\exists v_1, \dots, v_n \in \mathcal{L}\colon \left(\forall a_1, \dots, a_n\colon \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \to \bigwedge_{i=1}^{n} a_i = 0 \right) \wedge$$
$$\bigwedge_{i=1}^{r} Av_i = v_i \quad \wedge \quad \bigwedge_{i,j=1}^{r} [v_i, v_j] = 0 \quad \wedge \quad h(A) \quad \wedge$$
$$\exists B \in V(\mathcal{L})\colon \forall v \in \mathcal{L}\colon Bv = v \to Av = v.$$

我们再次利用量词消去，得到一个与 $s(A)$ 等价且不含量词的陈述。因此，$\mathcal{C}(\mathcal{L})$ 可以视为半代数集

$$\varphi(\mathcal{C}(\mathcal{L})) = \{A \in \varphi(\mathrm{Grass}_{r_k(\mathcal{L})}(\mathcal{L}))\colon s(A)\}.$$

根据实李群理论，由引理 4.14(3) 可知 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 非空。又由于 $\exists A \in \varphi(\mathcal{C}(\mathfrak{g}_k))$ 是一个定义在 $\mathbb{K}$ 上的一阶陈述，我们可以利用迁移原理得出 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$ 和 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 也非空。陈述 (4) 则由集合 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$ 和 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$ 的半代数描述以及迁移原理得出。

群 $\mathsf{G}(k)$ 通过共轭作用于 $\mathsf{Grass}_r(\mathfrak{g}_k)$。相应地，在 $\varphi(\mathsf{Grass}_r(\mathfrak{g}_k))$ 上的作用由 $g.A = A \circ \mathsf{Ad}(g^{-1})$ 给出，其中 $g \in \mathsf{G}(k)$、$A \in \varphi(\mathsf{Grass}_r(\mathfrak{g}_k))$，且 $\mathsf{Ad}(g)\colon \mathfrak{g}_k \to \mathfrak{g}_k, X \mapsto gXg^{-1}$。

由引理 4.14(2)，我们知道该作用在 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 和 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 上是传递的。由于所有涉及的集合都是半代数集，我们可以将传递性表述为一个一阶公式，

$$\forall A, B \in \varphi(V(\mathfrak{g}_k))\ \exists g \in \mathbf{G}\colon \forall v \in \mathfrak{g}_k\colon A(g^{-1}vg) = Bv.$$

并得出 $\mathsf{G}(\mathbb{K})$ 在 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$ 和 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$ 上传递作用，从而完成 (2) 的证明。

最后，对于 $\theta\colon \mathfrak{g}_k \to \mathfrak{g}_k, X \mapsto -X^{\mathsf{T}}$ 和 $A \in \varphi(\mathcal{C}(\mathfrak{g}_k))$，注意到 $v \in \theta(\varphi^{-1}(A))$ 当且仅当 $A(\theta(v)) = \theta(v)$，也就是说 $\theta A \theta v = v$。因此，条件 $\theta(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ 对应于 $A = \theta A \theta$。由引理 4.14(3)，我们知道一阶公式

$$\exists A \in \varphi(\mathcal{C}(\mathfrak{g}_k))\colon \forall v \in \mathfrak{g}_k\colon Av = \theta A \theta v$$

对 $k = \mathbb{R}$ 成立，由此得出它对 $k = \mathbb{K}$ 也成立，从而证明了 (3)。□

4.4. 实闭域上代数群的分裂环面。设 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{F}$ 是满足 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R} \cap \mathbb{F}$ 的实闭域。设 G 是一个半单自伴（$g \in \mathsf{G}$ 蕴含 $g^{\mathsf{T}} \in \mathsf{G}$）的代数 $\mathbb{K}$ 群。设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}^{n \times n}$ 是李代数的 $\mathbb{K}$ 点。设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 和 $\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$ 是半代数扩张，那么 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 也是 $\mathsf{G}(\mathbb{R})$ 的李代数。

$\mathbb{R}$ 的所有子域 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{R}$ 中都是稠密的，也就是说，$\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{R}$，其中 $\overline{\mathbb{K}}$ 是 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑下的闭包。这一事实的以下推广将在本节主要结果定理 4.17 的证明中用到。

引理 4.16. 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是在 $\mathbb{K}$ 上定义的代数集。那么在通常的 $\mathbb{R}^n$ 拓扑中有 $\overline{A_{\mathbb{K}}} = A_{\mathbb{R}}$。

证明. 首先注意到，代数集 $A_{\mathbb{R}}$ 是扎里斯基闭的，因此在 $\mathbb{R}^n$、$\overline{A_{\mathbb{R}}} = A_{\mathbb{R}}$ 的通常拓扑中也是闭的。我们知道 $A_{\mathbb{K}} \subseteq A_{\mathbb{R}}$，因此 $\overline{A_{\mathbb{K}}} \subseteq \overline{A_{\mathbb{R}}} = A_{\mathbb{R}}$。

另一方面，设 $x \in A_{\mathbb{R}}$。由于 $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{R}$，存在 $y_k \in \mathbb{K}^n$ 和 $\varepsilon_k > 0$，使得 $|y_k - x| < \varepsilon_k$ 和 $\varepsilon_k \to 0$ 分别作为 $k \to \infty$。现在我们有以下一阶公式

$$\varphi(y, \varepsilon)\colon \quad \exists z \in A\colon \|z - y\| < \varepsilon.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，公式 $\varphi(y_k, \varepsilon_k)$ 在 $\mathbb{R}$ 上成立，我们只需对每个 k 取 $z = x$。根据迁移原理，该公式在 $\mathbb{K}$ 上也成立，这意味着我们有 $z_k \in A_{\mathbb{K}}\colon \|z_k - y_k\| < \varepsilon_k$. 我们得出结论

$$\|z_k - x\| \leq \|z_k - y_k\| + \|y_k - x\| < 2\varepsilon_k \to 0$$

作为 $k \to \infty$，即 $x \in \overline{A_{\mathbb{K}}}$。 □

根据第 3.2.1 小节，环面可以相对于某个域是分裂的，而在某个子域上却不是分裂的。现在我们证明，只要所有涉及的域都是实闭的，这种情况就不会发生。

定理 4.17. 任意极大 $\mathbb{K}$-分裂环面 $S < G$ 都是极大 $\mathbb{F}$-分裂的。此外，存在一个极大 $\mathbb{F}$-分裂环面 S，使得 $g^{\mathsf{T}} = g$ 对于所有 $g \in S$。

证明. 我们首先找一个极大 $\mathbb{K}$-分裂环面 T^s，使得 $g^{\mathsf{T}} = g$ 对于所有 $g \in T^s$。

引理 4.15(3) 指出，存在一个极大 $\mathbb{K}$-分裂的嘉当子代数 $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$，使得 $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$。我们考虑其复化 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$；根据引理 4.10(ii)，它也是一个嘉当子代数，即 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 是阿贝尔的，且 $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$。于是

$$\mathbf{T}(\mathbb{C}) := \mathrm{Nor}_{\mathbf{G}(\mathbb{C})}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^\circ = \{g \in \mathbf{G}(\mathbb{C})\colon \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\}^\circ.$$

构成 $G(\mathbb{C})$ 的一个扎里斯基连通闭子群，其李代数为 $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$。根据 [Bor91，引理 18.5],$T(\mathbb{C})$ 定义在 $\mathbb{K}$ 上。由于 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 是有限维的，$T(\mathbb{C})$ 可以写成有限个多项式的零点集，因此是一个代数群 T 的 $\mathbb{C}$-点。

由于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是半单的，且 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 是嘉当子代数，根据引理 4.10(v)，对所有 $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$，$\mathrm{ad}(H)$ 都同时可对角化。对于 $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$，$\exp(H) \in T_{\mathbb{C}}$，且 $\mathrm{Ad}(\exp(H)) = \exp(\mathrm{ad}(H))$ 是可对角化的。$T(\mathbb{C})$ 中的元素未必全都能写成 $\exp(H)$ 的形式，其中 $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$，但 $\exp(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ 是单位元的一个开邻域，因此生成 $T(\mathbb{C})$。对于任意 $g \in T(\mathbb{C})$，存在 $H_1, \ldots, H_n \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$

使得

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(g) &= \mathrm{Ad}\left(\prod_{i=1}^{n}\exp(H_i)\right) = \mathrm{Ad}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n}H_i\right)\right)\\ &= \exp\left(\mathrm{ad}\left(\sum_{i=1}^{n}H_i\right)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{ad}\left(H_i\right)\right),\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 是阿贝尔的。由于 $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ 同时可对角化，$\mathrm{Ad}(g)$ 可对角化。类似地，对于所有 g、$h \in \mathbf{T}(\mathbb{C})$，我们有 $\mathrm{Ad}(g)\,\mathrm{Ad}(h) = \mathrm{Ad}(h)\,\mathrm{Ad}(g)$。因此 $\mathrm{Ad}(\mathbf{T}(\mathbb{C}))$ 同时可对角化，这意味着根据 Bor91, Proposition 8.4]，$\mathbf{T}(\mathbb{C})$ 可由 [对角化。由于 $\mathbf{T}(\mathbb{C})$ 连通，根据 Bor91, Proposition 8.5]，$\mathbf{T}$ 是一个环面。

如果我们将范围限制在对称矩阵

$$\mathbf{T}^s = \{g \in \mathbf{T} \colon \sigma(g) = g^{-1}\}$$

我们看到 $\mathrm{Lie}(\mathbf{T}^s(\mathbb{R})) = \mathrm{Lie}(\mathbf{T}(\mathbb{R})) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ 是与标准 Cartan对合 $\theta = \mathrm{d}_e\sigma$: $X \mapsto -X^{\mathsf{T}}$ 对应的嘉当分解。

令 $\mathfrak{a} \in V(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})$ 为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ 的一个极大阿贝尔 $\mathbb{K}$-分裂子代数，其中 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$。由引理4.15(4)，我们有 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ 和 $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \in V(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})$，其中 $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$。由命题 4.13，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 是一个极大 $\mathbb{R}$-分裂嘉当子代数，且 $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p}$。

因此，$\mathrm{Lie}(\mathbf{T}^s(\mathbb{R})) = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p}$ 是极大 $\mathbb{R}$-分裂的（或按第 4.2 节的术语称为极大非紧）。由此可得，$\mathbf{T}^s(\mathbb{R})$ 是极大 $\mathbb{R}$-分裂环面。注意，$\mathbf{T}^s$ 定义在 $\mathbb{K}$上。

现在我们要证明 $\mathbf{T}^s$ 实际上是 $\mathbb{K}$-分裂的。我们考虑相对根系 ${}_{\mathbb{R}}\Phi := \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T}^s)$。对于任意根 $\alpha\colon \mathbf{T}^s \to \mathbf{G}_m$, $\alpha \in {}_{\mathbb{R}}\Phi$，我们知道$\alpha_{\mathbb{R}}(\mathbf{T}^s(\mathbb{K})) \subseteq \mathbb{K}^\times$，因为 α 由如下性质定义：对于 $g \in \mathbf{T}^s(\mathbb{K})$ $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$，$\mathrm{Ad}(g)X = \alpha_{\mathbb{R}}(g)X$。$\alpha$ 的图是一个代数集

$$\mathrm{graph}(\alpha) = \{(x, z) \in \mathbf{T}^s \times \mathbf{G}_m \colon z = \alpha(x)\}$$

定义在 $\mathbb{R}$上，我们的目标是证明它实际上定义在 $\mathbb{K}$上。

现在，$(x, z) \in \mathrm{graph}(\alpha)_{\mathbb{R}}$ 当且仅当 $x \in \mathbf{T}^s(\mathbb{R})$ 且 $z = \alpha_{\mathbb{R}}(x)$。根据引理 4.16，$\mathbf{T}^s(\mathbb{R}) = \mathbf{T}^s(\mathbb{K})$，因此 $x \in \mathbf{T}^s(\mathbb{R})$ 等价于存在一个 $x_n \in \mathbf{T}^s(\mathbb{K})$ 的序列，使得 $x_n \to x$ 如 $n \to \infty$。由于 $\alpha_{\mathbb{R}}$ 是连续的，我们有 $\alpha_{\mathbb{R}}(x_n) \to z$ 如 $n \to \infty$。由此可得，$(x, z) \in \mathrm{graph}(\alpha)_{\mathbb{R}}$ 当且仅当存在一个序列 $(x_n, \alpha_{\mathbb{R}}(x_n)) \in \mathrm{graph}(\alpha)_{\mathbb{K}}$，且 $(x_n, \alpha_{\mathbb{R}}(x_n)) \to (x, z)$ 如 $n \to \infty$，即

$$\mathrm{graph}(\alpha)_{\mathbb{K}} = \mathrm{graph}(\alpha)_{\mathbb{R}},$$

这意味着图$(\alpha)_{\mathbb{K}}$ 在图$(\alpha)_{\mathbb{R}}$中稠密，特别是扎里斯基稠密（扎里斯基开集在通常拓扑下也是开集，而一个集合稠密，当且仅当每个开集都与它相交）。将图(α)视为一个代数群，我们可以利用[Zim84, Proposition 3.1.8]得出结论：图(α)定义在 $\mathbb{K}$上。因此，每个 $\alpha \in {}_{\mathbb{R}}\Phi$ 都定义在 $\mathbb{K}$上，事实上，每个乘法特征都定义在 $\mathbb{K}$上。根据 [Bor91, Corollary 8.2], ，这意味着$\mathbf{T}^s$ 是 $\mathbb{K}$-分裂的。由此，我们找到了一个极大 $\mathbb{K}$-分裂环面，它对所有 $g \in \mathbf{T}^s$都满足 $g^{\mathsf{T}} = g$。

接下来我们将证明 $\mathrm{rank}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}) = \mathrm{rank}_{\mathbb{K}}(\mathbf{G})$，如下所示。

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}) \leq r_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}) = r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = \mathrm{rank}_{\mathbb{K}}(\mathbf{G}) \leq \mathrm{rank}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G})$$

回顾一下，$\mathrm{rank}_{\mathbb{F}}(G)$ 是极大 $\mathbb{F}$-分裂环面的维数，而 $r_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 是 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 中一个元素的维数。事实上，任意极大$\mathbb{F}$-分裂环面的李代数都是阿贝尔且 $\mathbb{F}$-分裂的，即包含于 $V(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 中的一个元素。第一个等式是引理 4.15(1)。第二个等式正是我们在本证明中所做的：我们找到了极大 $\mathbb{K}$-分裂环面 T^s，其李代数 $\mathrm{Lie}(T^s(\mathbb{R}))$ $= \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$，维数为 $r_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$。最后一个不等式成立，因为每个 $\mathbb{K}$-分裂环面也都是$\mathbb{F}$-分裂的。

设 S 是一个极大 $\mathbb{K}$-分裂环面。那么 S 也是 $\mathbb{F}$-分裂的（但可能不是极大的）。设 T 是一个极大 $\mathbb{F}$-分裂环面，且 $S \subseteq T$。那么 $\dim(S) = \mathrm{rank}_{\mathbb{K}}(G) = \mathrm{rank}_{\mathbb{F}}(G) = \dim(T)$，并且由于环面是连通的，$S = T$。因此，每个极大 $\mathbb{K}$-分裂环面 S 也是极大 $\mathbb{F}$-分裂的。□

推论 4.18。设 $S < G$ 是一个极大 $\mathbb{K}$-分裂环面。那么 S 在 G 中的 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$ of$\mathbb{K}$-根集合与 ${}_{\mathbb{F}}\Phi$ 一致，因此标准抛物子群的集合也与标准抛物 $\mathbb{F}$-子群的集合一致。特别地，任意 $\mathbb{F}$-抛物子群都与一个抛物 $\mathbb{K}$-子群在 $G(\mathbb{F})$-共轭。

证明。 $\mathbb{K}$-根集合定义为 ${}_{\mathbb{K}}\Phi := \Phi(S,G)$，其中 S 是 G 的一个极大$\mathbb{K}$-分裂环面 [Bor91, 21.1]。由定理 4.17，S 也是 $\mathbb{F}$-分裂的，因此我们有 ${}_{\mathbb{K}}\Phi := \Phi(S,G) = {}_{\mathbb{F}}\Phi$。

沿用 [Bor91, 21.11], ，我们在 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$上选取一个序，并固定与 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$中的正根相对应的极小抛物 $\mathbb{K}$-子群 P。包含 P 的任何抛物$\mathbb{K}$-子群都称为标准抛物子群。标准抛物$\mathbb{K}$-子群与 $I \subseteq {}_{\mathbb{K}}\Delta$ 的 ${}_{\mathbb{K}}\Delta$ 单根子集之间存在一一对应关系，见 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$ [Bor91, 命题 21.12]。由于 ${}_{\mathbb{F}}\Delta = {}_{\mathbb{K}}\Delta$，标准抛物 $\mathbb{K}$-群与标准抛物 $\mathbb{F}$-群一致。根据 [Bor91, 命题 21.12], ，任意抛物 $\mathbb{F}$-群都与唯一一个标准抛物子群共轭，共轭元素取自 $G(\mathbb{F})$。特别地，每个 $\mathbb{F}$-抛物子群都与一个 $\mathbb{K}$-抛物子群 $G(\mathbb{F})$-共轭。□

注 4.1. 在定理 4.17 中，当我们使用标准嘉当对合 θ: $X \mapsto -X^{\mathsf{T}}$ 时，依赖于 G 是自伴的这一事实。若能证明即使 G 不是自伴的，也存在半代数 Cartan 对合，将有助于解决下述问题。

问题 4.19. 如果 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{F}$ 是带有 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R} \cap \mathbb{F}$ 的实闭域，并且 G 是一个半单代数的 $\mathbb{K}$-群（不一定是自伴的），那么所有极大 $\mathbb{K}$-分裂环面都是极大 $\mathbb{F}$-分裂环面吗？是否存在一个在某个嘉当对合 θ 下保持不变的极大 $\mathbb{F}$-分裂环面?

5. Semialgebraic groups

若 $\mathbb{K}$ 是实闭域，则同时也是半代数集（参数取自 $\mathbb{K}$）的 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ 的子群，称为定义在 $\mathbb{K}$上的线性半代数群，或简称半代数 $\mathbb{K}$群。设 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{F}$ 是满足 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R} \cap \mathbb{F}$的实闭域。设 G 是一个半单自伴（$g \in G$ 蕴含$g^{\mathsf{T}} \in G$）的代数 $\mathbb{K}$群。G 的 $\mathbb{K}$点 $G(\mathbb{K})$ 构成一个半代数 $\mathbb{K}$群。此外，$G(\mathbb{K})$ 到 $\mathbb{F}$ 的半代数扩张与 G 的 $\mathbb{F}$点重合，即 $G(\mathbb{F}) = G(\mathbb{K})_{\mathbb{F}}$，并且对于每个半代数 $\mathbb{K}$群 G，都有 $G = G_{\mathbb{K}}$。

从现在起，设 G 是一个满足以下条件的群

$$\mathbf{G}(\mathbb{K})^\circ < G < \mathbf{G}(\mathbb{K}),$$

其中 $\mathbf{G}(\mathbb{K})^\circ$ 是 $\mathbf{G}(\mathbb{K})$ 的单位元所在的半代数连通分支。由于 G 是有限个半代数陪集的并， G 是半代数 $\mathbb{K}$群。延拓到 $\mathbb{R}$上的半代数扩张因而满足 $(\mathbf{G}(\mathbb{K})^\circ)_{\mathbb{R}} = \mathbf{G}(\mathbb{R})^\circ < G_{\mathbb{R}} < \mathbf{G}(\mathbb{R}) = \mathbf{G}(\mathbb{K})_{\mathbb{R}}$，且 $G_{\mathbb{R}}$ 是李群。代数群 $\mathbf{K} := \mathbf{G} \cap \mathbf{SO}_n$ 类似地定义了一个半代数子群 $K := \mathbf{K}(\mathbb{K}) \cap G$，其半代数扩张满足 $K_{\mathbb{R}} = \mathbf{K}(\mathbb{R}) \cap G_{\mathbb{R}}$，并且是李群。

引理 5.1。半代数群 G 在转置下保持不变。

证明。由于 $\mathbf{G}$ 在转置下保持不变，李群 $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ 也如此，因此 $\mathbf{K}(\mathbb{R})$ 是极大紧的。特别地，$\mathbf{K}(\mathbb{R})$ 与每个连通分支相交（在欧几里得拓扑中，因而在半代数拓扑中也是如此），由此 $\mathbf{G}(\mathbb{R}) = \mathbf{K}(\mathbb{R}) \cdot \mathbf{G}(\mathbb{R})^\circ$。因此

$$G_{\mathbb{R}} = \mathbf{G}(\mathbb{R}) \cap G_{\mathbb{R}} = (\mathbf{K}(\mathbb{R}) \cap G_{\mathbb{R}}) \cdot (\mathbf{G}(\mathbb{R})^\circ \cap G_{\mathbb{R}}) = K_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{G}(\mathbb{R})^\circ.$$

根据 [BCR98，定理 2.4，5], $\mathbf{G}(\mathbb{R})^\circ$ 在欧几里得拓扑下也连通（因而道路连通），所以在转置下不变。由于$K_{\mathbb{R}}$ 在转置下也不变， $G_{\mathbb{R}}$ 在转置下不变。这是一个半代数性质，因此 G也具有这一性质。□

我们考虑李代数 T_eG的 $\mathbb{K}$点 $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}^{n\times n}$ 。令 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$的半代数扩张。那么 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 就是实李群 $G_{\mathbb{R}}$的李代数。由于 $G_{\mathbb{R}}$ 是自伴的， $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$也如此。李群同态 $G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}$， $g \mapsto (g^{-1})^{\mathsf{T}}$ 的微分是标准的嘉当对合θ： $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$， $X \mapsto -X^T$，并导出如第 4.1 节所示的、分解为两个特征子空间 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 的嘉当分解。 $K_{\mathbb{R}}$ 的李代数为

$$\mathrm{Lie}(K_{\mathbb{R}}) = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}} \cap \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}}) \cap \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{so}_n = \mathfrak{k}.$$

设 $\mathbf{S}$ 为极大 $\mathbb{K}$-分裂环面，由定理 4.17 可知，我们不妨假设它是自伴的。令 $A = (S_{\mathbb{K}})^\circ$ 为包含单位元的 $S_{\mathbb{K}}$ 半代数连通分支。令 $A_{\mathbb{R}}$ 为 A 的半代数扩张。我们用 $\mathfrak{a}$ 表示 $A_{\mathbb{R}}$ 的李代数。注意到 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$。由定理 4.17，$\mathbf{S}$ 既是极大 $\mathbb{K}$-分裂的，也是极大 $\mathbb{R}$-分裂的，因此 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}$ 中的极大阿贝尔子代数。与第 4.1 节一样，现在可以定义根空间分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$$

其中 $\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a}^\star : \ \alpha \neq 0, \ \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ 是一个根系。注意到

$$N_{\mathbb{R}} := \mathrm{Nor}_{K_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{a}) = \left\{k \in K_{\mathbb{R}} \colon kXk^{-1} \in \mathfrak{a} \text{ for all } X \in \mathfrak{a}\right\}$$

and

$$M_{\mathbb{R}} := \mathrm{Cen}_{K_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{a}) = \left\{k \in K_{\mathbb{R}} \colon kXk^{-1} = X \text{ for all } X \in \mathfrak{a}\right\},$$

是半代数群，因为只需验证 X 在 $\mathfrak{a}$的一组基上满足条件。选取有序基 $\Delta \subseteq \Sigma$ 便在 Σ上给出一个全序。我们考虑李代数

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$$

根据引理 4.6，它是幂零的。因此，指数映射和对数都是多项式，我们可以定义李群

$$U_{\mathbb{R}} = \{g \in G_{\mathbb{R}} \colon \log(g) \in \mathfrak{n}\}$$

它是按同样方式定义的代数 $\mathbb{K}$-群 U 的 $\mathbb{R}$-点群[4]。

5.1. 例子。对于代数群 $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n$，其极大 $\mathbb{K}$-分裂环面

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \star & & \\ & \ddots & \\ & & \star \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_n \right\}.$$

我们有

$$\begin{aligned}
K_{\mathbb{F}} &= \mathrm{SO}_n(\mathbb{F}) \\
A_{\mathbb{F}} &= \{a = (a_{ij}) \in S_{\mathbb{F}} \colon a_{ii} > 0\} \\
U_{\mathbb{F}} &= \{g = (g_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \colon g_{ii} = 1,\ g_{ij} = 0 \text{ for } i > j\} \\
N_{\mathbb{F}} &= \{ \text{ permutation matrices with entries in } \pm 1\} \\
M_{\mathbb{F}} &= \{a = (a_{ij}) \in S_{\mathbb{F}} \colon a_{ii} \in \{\pm 1\}\} \\
B_{\mathbb{F}} &= \{g = (g_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \colon g_{ij} = 0 \text{ for } i > j\}.
\end{aligned}$$

5.2. 根系的相容性。在第 3.4 章关于代数群的讨论中，我们定义了相对于 $\mathbb{K}$-分裂环面 S 的根系 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$，它由满足以下条件的 $\alpha \in \mathbf{S} \setminus \{1\}$ 组成：

$$\mathfrak{g}_\alpha^{(\mathbf{S})} = \{X \in \mathfrak{g} \colon \mathrm{Ad}(s)X = \alpha(s) \cdot X \text{ for all } s \in \mathbf{S}\}$$

非零。由定理 4.17，我们有 ${}_{\mathbb{K}}\Phi = {}_{\mathbb{R}}\Phi = {}_{\mathbb{F}}\Phi$。在本章中，我们定义了一个根系 Σ，它由满足以下条件的 $\alpha \in \mathfrak{a}^\star \setminus \{0\}$ 组成：

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \colon \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H) \cdot X \text{ for all } H \in \mathfrak{a}\}$$

非空。本节将证明，这些根系概念以及球面魏尔群的各种概念彼此一致。我们先来看如何从 Σ中的一个根构造出 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$ 中的一个代数特征。

引理 5.2。设 $\alpha \in \Sigma$。那么同态

$$\begin{aligned}
\chi_\alpha \colon A_{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R}_{>0} \\
\exp(H) &\mapsto e^{\alpha(H)}
\end{aligned}$$

$\hat{}$ 是 S 中一个代数特征在 $A_{\mathbb{R}}$ 上的限制。

证明。我们选取一个与根分解相容的 $\mathfrak{g}$ 基

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha.$$

[4]在李群理论中，这个群通常记作 N；而在代数群的语境下，更常用 U。

在此基下，Ad($S_{\mathbb{R}}$) 和 ad(𝔞) 中的矩阵都是对角矩阵。事实上，任何对应于根 $\alpha \in \Sigma$ 的对角项[5] 都满足

$$(\mathrm{ad}(H))_{\alpha\alpha} = \alpha(H)$$

对所有 $H \in \mathfrak{a}$。我们定义一个特征

$$\chi(a) := (\mathrm{Ad}(a))_{\alpha\alpha} \qquad \text{for } a \in \mathbf{S}$$

根据定义，它是代数的。设 $\chi_{\mathbb{R}}\colon S_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ 是 χ 的 $\mathbb{R}$ 点，且 $\chi_{\mathbb{R}}|_{A_{\mathbb{R}}}$ 是其在 $A_{\mathbb{R}}$ 上的限制。现在我们断言 $\chi_\alpha = \chi_{\mathbb{R}}|_{A_{\mathbb{R}}}$：当 $a = \exp(H) \in A_{\mathbb{R}}$ 对于 $H \in \mathfrak{a}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbb{R}}(a) &= (\mathrm{Ad}(a))_{\alpha\alpha} = (\mathrm{Ad}(\exp(H)))_{\alpha\alpha} \\ &= (\exp(\mathrm{ad}(H)))_{\alpha\alpha} = e^{\mathrm{ad}(H)_{\alpha\alpha}} = e^{\alpha(H)} = \chi_\alpha(a).\end{aligned}$$

□

引理5.3。设 $\alpha \in \Sigma$。那么存在一个 $x_\alpha \in \mathfrak{a}$，使得同态

$$\begin{aligned} t_\alpha^{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}_{>0} &\to A_{\mathbb{R}} \\ e^s &\mapsto \exp(s x_\alpha)\end{aligned}$$

是 $X_\star$(S) 中一个定义在 $\mathbb{K}$ 上的代数单参数群 t_α 的限制。于是，命题 3.5 中的非退化双线性形式为

$$b(\chi_\alpha, t_\beta) = \frac{2\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle} \in \mathbb{Z}.$$

证明。回忆一下，Killing型在 $\mathfrak{a}$ =Lie($A_{\mathbb{R}}$) 上诱导出一个标量积 B_θ，从而导出同构 $\mathfrak{a}^\star \cong \mathfrak{a}, \gamma \mapsto H_\gamma$，其定义性质为 $B_\theta(H_\gamma, H) = \gamma(H)$，对所有 $H \in \mathfrak{a}$ 成立。对于 $\beta \in \Sigma$，余根

$$\beta^\vee = \frac{2}{B_\theta(H_\beta, H_\beta)}\beta$$

可用于定义

$$x_\beta := H_{\beta^\vee} = \frac{2}{B_\theta(H_\beta, H_\beta)} H_\beta \in \mathfrak{a}.$$

现在我们为 $s \in \mathbb{R}$ 定义 $t_\beta^{\mathbb{R}}(e^s) = \exp(s x_\beta)$，并注意，对于每个 $\alpha \in \Sigma$

$$\chi_\alpha^{\mathbb{R}}(t_\beta^{\mathbb{R}}(e^s)) = e^{s\alpha(x_\beta)} = (e^s)^{2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}}$$

并且我们注意到，这一刻画唯一确定了 $t_\beta^{\mathbb{R}}$。

ˆ 在代数方面，来自命题 3.5 的非退化双线性配对 b: S $\times$ $X_\star$(S) $\to \mathbb{Z}$ 诱导出一个同构

$$\begin{aligned} X_\star(\mathbf{S}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbb{Z}) \\ t &\mapsto (\chi \mapsto b(\chi, b)).\end{aligned}$$

我们可以利用它构造如下与 $\beta \in \Sigma$ 相关的代数单参数群 t_β：选取一个基 $\Delta \subseteq \Sigma$，我们得到一个 $\mathbb{Z}$-基 $\{\chi_\alpha\colon \alpha \in \Delta\}$ˆ ˆ，即格 S 的基。我们规定 Hom$_{\mathbb{Z}}$(S $\mathbb{Z}$) 中的一个元素，使得 χ_δ 被

[5]注意，$\mathfrak{g}_\alpha$ 可能不是一维的，但此时 ad(的所有对角项 H) 对应于 $\mathfrak{g}_\alpha$ 中的基向量的值都相等，因此讨论 (ad(H))$_{\alpha\alpha}$ 是有意义的。

映射到 $2\langle\delta、\ \beta\rangle/\langle\beta、\ \beta\rangle$。因此，我们有一个代数单参数群 t_β，使得对于所有 χ_α，当 $\alpha\in\Sigma$ 时，我们有

$$\chi_\alpha\left(t_\beta\left(x\right)\right)=x^{2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}}$$

对所有 $x\in\mathbf{G}_m$。限制 $t_\beta|_{\mathbb{R}_{>0}}$ 随后与 $t_\beta^{\mathbb{R}}$重合。由于 S 是 $\mathbb{K}$-分裂的，t_β 定义在 $\mathbb{K}$ 上。□

命题 5.4。根系 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$ 与 Σ 同构。球面魏尔群 ${}_{\mathbb{K}}W$ 与 $N_{\mathbb{R}}/M_{\mathbb{R}}$ 同构。

证明。我们首先寻找一个相容的映射 ${}_{\mathbb{K}}\Phi\to\Sigma$。令 $\chi\in{}_{\mathbb{K}}\Phi$。由于 S 是 $\mathbb{K}$-分裂的，χ 定义在 $\mathbb{K}$ [上，见 Bor91，推论 8.2]。因此我们可以考虑李群同态 $\chi_{\mathbb{R}}$：$S_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^\times$ 及其导数 $\mathrm{d}_e\chi_{\mathbb{R}}$：$\mathfrak{a}\to\mathbb{R}$，我们断言它是 Σ中的一个元素。我们首先断言 $\mathrm{d}_e\chi_{\mathbb{R}}$ 非零，因为否则$\chi_{\mathbb{R}}$ 将是局部常值的，从而只能取有限多个值。但是由于$\chi_R(S_{\mathbb{R}})$在 $\chi(\mathbf{S})=\mathbf{G}_m$ [中扎里斯基稠密，见 Bor91，推论 18.3], ，这不可能成立。接下来，我们断言

$$\mathfrak{g}_\chi:=\left(\mathfrak{g}_\chi^{(\mathbf{S})}\right)_{\mathbb{R}}\subseteq\mathfrak{g}_{\mathrm{d}_e\chi_{\mathbb{R}}},$$

这表明 ${}_{\mathbb{K}}\Phi\to\Sigma$ 定义良好。设 $H\in\mathfrak{a}$，使得 $a=\exp(H)\in A_{\mathbb{R}}\subseteq S_{\mathbb{R}}$。由于 S 是 $\mathbb{K}$-分裂的，我们有

$$\mathrm{Ad}(\exp(H))=\mathrm{Id}\cdot\alpha_{\mathbb{R}}(\exp(H))$$

作为映射 $\mathfrak{g}_\chi\to\mathfrak{g}_\chi$。事实上，$\mathrm{Ad}\circ\exp=\mathrm{Id}\cdot(\chi_{\mathbb{R}}\circ\exp)$ 是映射 $\mathfrak{a}\to\mathrm{GL}(\mathfrak{g}_\chi)$。在 $0\in\mathfrak{a}$ 处取导数，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}&=\mathrm{ad}\circ\mathrm{Id}=\mathrm{d}_e\mathrm{Ad}\circ\mathrm{d}_0\exp=\mathrm{d}_0(\mathrm{Ad}\circ\exp)\\&=\mathrm{d}_0(\mathrm{Id}\cdot(\chi_{\mathbb{R}}\circ\exp))=\mathrm{Id}\cdot\mathrm{d}_e\chi_{\mathbb{R}}\circ\mathrm{d}_0\exp=\mathrm{Id}\cdot\mathrm{d}_e\chi_{\mathbb{R}}\end{aligned}$$

作为映射 $\mathfrak{a}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_\chi)$。这意味着对所有 $X\in\mathfrak{g}_\chi$ 和所有 $H\in\mathfrak{a}$，都有 $\mathrm{ad}(H)X=\mathrm{d}_e\chi_{\mathbb{R}}(H)\cdot X$，从而有 $X\in\mathfrak{g}_{\mathrm{d}_e\chi_{\mathbb{R}}}$。

现在，我们将证明引理 5.2 中的映射 $\alpha\mapsto\chi_\alpha$，此处将其视为 S 中的一个代数特征 χ_α，实际上将 $\Sigma\to{}_{\mathbb{K}}\Phi$ 映到。由于

$$(\chi_\alpha)_{\mathbb{R}}(\exp(H))=e^{\alpha(H)},$$

我们很容易看出，当 $\alpha\neq0$ 时，$\chi_\alpha\neq1$。接下来我们将证明

$$\mathfrak{g}_\alpha\subseteq\left(\mathfrak{g}_{\chi_\alpha}^{(\mathbf{S})}\right)_{\mathbb{R}}.$$

对于 $a=\exp(H)\in A_{\mathbb{R}}$，由上述公式可知

$$\mathrm{Ad}(a)=\exp(\mathrm{ad}(H))=\exp(\mathrm{Id}\cdot\alpha(H))=\mathrm{Id}\cdot e^{\alpha(H)}=\mathrm{Id}\cdot\chi_\alpha(a)$$

作为定义在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上的函数。由于 $A_{\mathbb{R}}$ 在 S 中扎里斯基稠密，对于所有 $s\in\mathbf{S}$ 和 $X\in\mathfrak{g}_\alpha$，$\mathrm{Ad}(s)X=\chi_\alpha(a)\cdot X$。

我们注意到 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$ 与 Σ 之间的两个映射互为逆映射，这可由以下事实得出：

$$\left(\mathfrak{g}_\alpha^{(\mathbf{S})}\right)_{\mathbb{R}}\subseteq\mathfrak{g}_{\mathrm{d}_e\alpha_{\mathbb{R}}}\subseteq\left(\mathfrak{g}_{\chi_{\mathrm{d}_e\alpha_{\mathbb{R}}}}^{(\mathbf{S})}\right)_{\mathbb{R}}\qquad\text{for }\alpha\in{}_{\mathbb{K}}\Phi$$

and

$$\mathfrak{g}_\alpha\subseteq\left(\mathfrak{g}_{\chi_\alpha}^{(\mathbf{S})}\right)_{\mathbb{R}}\subseteq\mathfrak{g}_{\mathrm{d}_e(\chi_\alpha)_{\mathbb{R}}}\qquad\text{for }\alpha\in\Sigma.$$

注意，由于 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，映射 ${}_{\mathbb{K}}\Phi\to\Sigma$ 可扩展为其向量空间上的一个同构。对于 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$ 和 Σ，Weyl 群 ${}_{\mathbb{K}}W$ 和 $W_s=$

$N_{\mathbb{R}}/M_{\mathbb{R}}$ 由沿着垂直于根 [的超平面的反射生成（Bor91，定理 212] ；Kna96，命题 732]）。这意味着两个根的标量积在映射 ${}_{\mathbb{K}}\Phi \to \Sigma$ 下保持不变，因此这两个根系同构。□

由此还可以得出，各种可定义的魏尔群彼此相同。

命题 5.5。以下定义的魏尔群彼此同构。

(i) 由根系${}_{\mathbb{K}}\Phi$中的根所对应的反射生成的魏尔群 W 。(ii) 来自代数群理论的魏尔群 ${}_{\mathbb{R}}W = \mathrm{Nor}^{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(\mathbf{S}(\mathbb{F}))/\mathrm{Cen}^{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(\mathbf{S}(\mathbb{F}))$。(iii) 由根系$\Sigma$中的根所对应的反射生成的魏尔群 W_s 。(iv) 李群语境下的魏尔群 $W(G_{\mathbb{R}}, A_{\mathbb{R}})$ $= N_{\mathbb{R}}/M_{\mathbb{R}}$。(v) 半代数扩张的魏尔群 $N_{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}}$ 。

证明。根据命题 5.4，${}_{\mathbb{K}}\Phi \cong \Sigma$，所以 (i) 和 (iii) 相同。根据 [Bor91, 定理 21.2]，$W = {}_{\mathbb{R}}W$，所以 (i) 和 (ii) 的概念一致。根据 [Kna96, 命题 7.32]，$W_s = W(G_{\mathbb{R}}, A_{\mathbb{R}})$，所以 (iii) 和 (iv) 的概念一致。设$W_s = \{w_1, \dots, w_{|W_s|}\}$ 为 W_s 中有限多个元素的一个列表，并将其视为抽象群。一阶公式

$$\varphi\colon \quad \exists n_1, \dots, n_{|W_s|} \in N\colon \left(\bigwedge_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{|W_s|} \neg\, n_j^{-1} n_i \in M \right) \wedge \left(\forall n \in N\colon \bigvee_{i=1}^{|W_s|} n^{-1} n_i \in M \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i,j,\ell=0 \\ w_i w_j = w_\ell}}^{|W_s|} n_\ell^{-1} n_i n_j \in M \right)$$

说明 N 中有 $|W_s|$ 个元素，它们在 N/M 中有不同的代表元，而这样的元素只有 $|W_s|$ 个，并且它们满足与 W_s 相同的群乘法表。简言之，这说明 N/M 与 W_s 同构。现在，根据 (iv)，公式 φ 在 $\mathbb{R}$ 上成立，我们可以应用迁移原理得到关于 $\mathbb{F}$ 的陈述，从而表明 (v) 中的概念给出相同的 Weyl 群。□

5.3. 岩泽分解 $G = KAU$。我们回顾经典的岩泽分解，它适用于 $G_{\mathbb{R}}$。

定理 5.6。（[Kna96，定理 6.46]）设 $G_{\mathbb{R}}$ 为半单李群。设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ 为其李代数的岩泽分解。设 $A_{\mathbb{R}}$ 和$U_{\mathbb{R}}$ 为李代数分别为 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{n}$的解析子群。则乘法映射 $K_{\mathbb{R}} \times A_{\mathbb{R}} \times U_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}$ 是一个微分同胚。此分解是唯一的。

我们注意到，所有群 $G_{\mathbb{R}}$、$K_{\mathbb{R}}$、$A_{\mathbb{R}}$ 和 $U_{\mathbb{R}}$ 都是定义在$\mathbb{K}$上的半代数群，因此对于任何包含 $\mathbb{K}$的实闭域$\mathbb{F}$，我们都可以考虑 $G_{\mathbb{F}}$、$K_{\mathbb{F}}$、$A_{\mathbb{F}}$ 和 $U_{\mathbb{F}} \subseteq \mathbb{F}^{n\times n}$。我们使用迁移原理推导出如下岩泽分解的半代数版本。我们指出，通过取逆，除 $G = KAU$外，我们还得到分解 $G = UAK$；二者都将称为岩泽分解。

定理 5.7（$G = KAU$）。对于每个 $g \in G_{\mathbb{F}}$，存在 $k \in K_{\mathbb{F}}$、$a \in A_{\mathbb{F}}$、$u \in U_{\mathbb{F}}$，使得 $g = kau$。此分解是唯一的。

证明。我们将该分解写成一个一阶公式

$$\begin{aligned}\varphi\colon\quad & (\forall g \in G\ \exists k \in K, a \in A, u \in U\colon g = kau)\ \wedge \\ & (\forall k, k' \in K, a, a' \in A, u, u' \in U\colon kau = k'a'u' \to (k = k' \wedge a = a' \wedge u = u'))\end{aligned}$$

根据定理 5.6 的经典岩泽分解，该公式在 $\mathbb{R}$ 上成立。由迁移原理定理 2.1，φ 在所有实闭域 $\mathbb{F}$ 上成立。注意，应用经典岩泽定理时，我们利用了 $K_{\mathbb{R}}$ 是极大紧的，$\mathrm{Lie}(A_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{a}$，且 $\mathrm{Lie}(U_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{n}$。□

5.4. 嘉当分解 $G = KAK$。我们利用实李群的嘉当分解，在 $\mathbb{F}$ 上找到一个类似的陈述。

定理 5.8。（[Kna96，定理 7.39]）每个元素 $g \in G_{\mathbb{R}}$ 都有一个分解 $g = k_1 a k_2$，其中 k_1、$k_2 \in K_{\mathbb{R}}$ 且 $a \in A_{\mathbb{R}}$。在此分解中，a 在 $W(G_{\mathbb{R}}, A_{\mathbb{R}})$中某个元素的共轭作用下唯一确定。

证明。根据命题 5.5，${}_{\mathbb{R}}W = \mathrm{Nor}_G(S)/\mathrm{Cen}_G(S)$ 同构于 $W(G_{\mathbb{R}}, A_{\mathbb{R}}) = \mathrm{Nor}_{K_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{a})/\mathrm{Cen}_{K_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{a})$。这就是 [Kna96, 定理 7.39] 的陈述。□

定理 5.9（$G = KAK$）。每个元素 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 都有一个$g = k_1 a k_2$ 分解，其中 k_1、$k_2 \in K_{\mathbb{F}}$ 和 $a \in A_{\mathbb{F}}$成立。在此分解中，a 在相差一个 $N_{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}}$ 中元素的共轭作用下唯一确定。

证明。该陈述的存在性部分由以下一阶公式推出：

$$\varphi\colon\quad \forall g \in G\ \exists k_1, k_2 \in K\ \exists a \in A\colon g = k_1 a k_2,$$

根据定理 5.8，该公式在 $\mathbb{R}$ 上成立，因此根据迁移原理，它也在 $\mathbb{F}$ 上成立。为证明 a的唯一性，我们考虑以下一阶逻辑公式：

$$\begin{aligned}\psi\colon\quad & \forall a, a' \in A, k_1, k_1', k_2, k_2' \in K\colon k_1 a k_2 = k_1' a' k_2' \ \to \\ & \big(\exists n \in N\colon a = n a' n^{-1}\ \wedge\ \big(\forall n' \in N\colon a = n' a' (n')^{-1} \to n^{-1} n' \in M\big)\big)\end{aligned}$$

其中指出，a在 N 中的某个元素的共轭作用下唯一确定，且该元素在 M的一个元素作用下唯一确定。在 $\mathbb{R}$上，定理 5.8 表明 ψ 成立，因此根据迁移原理，ψ 在 $\mathbb{F}$上也成立，从而完成证明。□

5.5. 布鲁哈分解 $G = BWB$。根据 [Kna96, 第 398]页， $B_{\mathbb{R}} := M_{\mathbb{R}}A_{\mathbb{R}}U_{\mathbb{R}}$ 是 $G_{\mathbb{R}}$ 的一个闭子群，并且我们有如下布鲁哈分解。

定理 5.10. ([Kna96, 定理 7.40]) 每个元素 $g \in G_{\mathbb{R}}$ 都可以写成 $g = b_1 n b_2$，其中 b_1、$b_2 \in B_{\mathbb{R}}$ 和 $n \in N_{\mathbb{R}}$。在此分解中， n 在相差一个 $M_{\mathbb{R}}$中的元素的意义下唯一。由于球面魏尔群是$W_s = N_{\mathbb{R}}/M_{\mathbb{R}}$，我们有双陪集的不交并

$$G_{\mathbb{R}} = \bigsqcup_{[n]\in W_s} B_{\mathbb{R}} n B_{\mathbb{R}}.$$

群 $B_{\mathbb{R}}$ 是半代数的，布鲁哈分解可以推广到 $G_{\mathbb{F}}$。

定理 5.11（$G = BWB$）。每个元素 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 都可以写成 $g = b_1 n b_2$，其中 b_1、$b_2 \in B_{\mathbb{F}}$ 和 $n \in N_{\mathbb{F}}$。在此分解中， n 在相差一个 $M_{\mathbb{F}}$中的元素的意义下唯一。我们有双陪集的不交并

$$G_{\mathbb{F}} = \bigsqcup_{[n]\in W_s} B_{\mathbb{F}} n B_{\mathbb{F}}.$$

证明。该分解的存在性直接由迁移原理和定理 5.10 得出。为证明唯一性，我们使用一阶公式

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad & \forall b_1, b_2, b_1', b_2' \in B, n, n' \in N \\ & b_1 n b_2 = b_1' n' b_2' \to n^{-1} n' \in M, \end{aligned}$$

根据定理 5.10，这在 $\mathbb{R}$ 上成立。由于根据命题 5.5， $W_s = N_{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}} = N_{\mathbb{R}}/M_{\mathbb{R}}$ $G_{\mathbb{F}}$ 是如所述的互不相交的并。□

Let

$$A_{\mathbb{F}}^{+} = \{a \in A_{\mathbb{F}} \colon \chi_\alpha(a) \geq 1 \text{ for all } \alpha \in \Delta\},$$

其中 χ_α 是与 $\alpha \in \Delta$ 相关联的代数特征。于是，我们可以在嘉当分解 $G_{\mathbb{F}} = K_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}}^{+} K_{\mathbb{F}}$ 中选取 $a \in A_{\mathbb{F}}^{+}$； 该选取是唯一的，因为 Weyl 群在魏尔室集合上简单传递地作用。

5.6. 贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式。给定 X、$Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$，贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式给出了形式幂级数描述： $Z = \log(\exp(X)\exp(Y))$ 可用 X、Y 以及 X 和 Y 的迭代交换子来表示，参见例如 [Jac79，命题 V.1] 或 [Mag54]。该形式幂级数在单位元 [的一个邻域内收敛（见 3], Hoc65，X 中的定理 3.1），但一般而言未必处处收敛。若 X、$Y \in \mathfrak{n}_{\mathbb{R}}$，则该幂级数由多项式给出，因而处处收敛 [Wei63]。由于只涉及有限项，可以直接验证，或应用迁移原理，得到关于 $\mathfrak{n}_{\mathbb{F}} := \bigoplus_{\alpha>0}(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 中元素的贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式。

命题 5.12. 对任意 X、$Y \in \mathfrak{n}_{\mathbb{F}}$，存在 $Z \in \mathfrak{n}_{\mathbb{F}}$，使得指数映射$(X)$ 指数映射(Y) = 指数映射(Z)。元素 Z 可表示为迭代交换子的有限和，其前几项为

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}\left([X,[X,Y]] - [Y,[Y,X]]\right) - \frac{1}{24}[Y,[X,[X,Y]]] + \dots$$

文献中存在各种不同的变体。我们将使用 Zassenhaus 公式

$$\exp(X+Y)=\exp(X)\exp(Y)\exp\left(-\frac{1}{2}[X,Y]\right)\exp\left(\frac{1}{3}[Y,[X,Y]]+\frac{1}{6}[X,[X,Y]]\right)\cdots$$

对于 X、$Y\in\mathfrak{n}_{\mathbb{F}}$，可通过迭代计算 $\exp(-X)\exp(X+Y)=\exp(Z)$ [Mag54]，由上式得到。

5.7. 幺幂群 U。根分解中的根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}=\mathfrak{g}_0\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{g}_\alpha.$$

与正根相对应，由引理 4.6 可知，它们由同时幂零的元素组成。因此，该群

$$U_{\mathbb{R}}=\exp(\mathfrak{n})=\exp\left(\bigoplus_{\alpha\in\Sigma_{>0}}\mathfrak{g}_\alpha\right)$$

是幺幂的。事实上，$U_{\mathbb{R}}$ 是代数群 U 的 $\mathbb{R}$-点，也是半代数群 $\mathbb{K}$-group $U=U_{\mathbb{K}}=\mathbf{U}(\mathbb{K})$ 的半代数扩张。

设 $\alpha\in\Sigma$。当 $2\alpha\notin\Sigma$ 时，根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 是一个理想。无论如何，$\mathfrak{g}_\alpha\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha}$都是一个理想，其中 $\mathfrak{g}_{2\alpha}=0$ 当 $2\alpha\notin\Sigma$时成立。因此，对于每个 $\alpha\in\Sigma$，都有一个幺幂子群 $U_\alpha=\exp(\mathfrak{g}_\alpha\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha})<U$，称为根群。它也是一个半代数 $\mathbb{K}$-群，因为指数函数在幂零元上是多项式。注意，若二者都存在，则 $U_{2\alpha}<U_\alpha$。

下面的引理表明，$A_{\mathbb{F}}$ 将根群（U_α）$_{\mathbb{F}}$规范化。

引理 5.13. 设 $\alpha\in\Sigma$、$X\in\mathfrak{g}_\alpha$、$X'\in\mathfrak{g}_{2\alpha}$ 和 $a\in A_{\mathbb{F}}$。那么

$$a\exp(X+X')a^{-1}=\exp\left(\chi_\alpha(a)X+\chi_\alpha(a)^2X'\right),$$

其中 $\chi_\alpha\colon\ A_{\mathbb{F}}\to\mathbb{F}_{>0}$ 是引理 5.2 中的代数特征。

证明。我们知道 $\mathrm{Ad}_a(X)=\chi_\alpha(a)X$ 且 $\mathrm{Ad}_a(X')=\chi_{2\alpha}(a)X'=\chi_\alpha(a)^2X'$。然后利用矩阵乘法的分配律，得到

$$\begin{aligned}a\exp(X+X')a^{-1}&=a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(X+X')^n}{n!}a^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a(X+X')^na^{-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(a(X+X')a^{-1}\right)^n=\exp\left(aXa^{-1}+aX'a^{-1}\right)\\&=\exp\left(\mathrm{Ad}_a(X)+\mathrm{Ad}_a(X')\right)=\exp\left(\chi_\alpha(a)X+\chi_\alpha(a)^2X'\right)\end{aligned}$$

□

我们考虑对加法封闭的 $\Theta\subseteq\Sigma_{>0}$，也就是说，对于任意 α、$\beta\in\Theta$，若和 $\alpha+\beta\in\Sigma$，则 $\alpha+\beta\in\Theta$。对于任意对加法封闭的 $\Theta\subseteq\Sigma_{>0}$，

$$\mathfrak{g}_\Theta:=\bigoplus_{\alpha\in\Theta}\mathfrak{g}_\alpha$$

是一个理想，因为对于任意 $\alpha,\beta\in\Sigma$，都有 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，见命题 4.4。因此

$$(U_\Theta)_{\mathbb{R}}:=\exp(\mathfrak{g}_\Theta)$$

是半代数群 U_Θ 的 $\mathbb{R}$-扩张；事实上，当 $\Theta = \Sigma_{>0}$ 时，我们得到 $U = U_{\Sigma_{>0}}$。由 Baker-Campbell-Hausdorff公式，我们得到 $(U_\Theta)_{\mathbb{F}}$ 的如下描述。

引理 5.14. 设 $\Theta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq \Sigma_{>0}$ 是一个对加法封闭的子集，且满足 $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k$。则

$$(U_\Theta)_{\mathbb{F}} := \exp\left(\bigoplus_{\alpha\in\Theta}(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}\right) = \prod_{i=1}^{k}\exp\left((\mathfrak{g}_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}\right) = \langle u \in U_\alpha \colon \alpha \in \Theta\rangle.$$

证明。我们首先证明

$$\exp\left(\bigoplus_{\alpha\in\Theta}(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}\right) \subseteq \prod_{i=1}^{k}\exp\left((\mathfrak{g}_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}\right)$$

对 $|\Theta|$ 使用归纳法。如果 $|\Theta| = 1$，则该陈述显然成立。现在假设 $\Theta = \{\alpha_1\} \cup \Theta'$，其中对于所有 $\beta \in \Theta'$ 都有 $\alpha_1 > \beta$，并且满足

$$\exp\left(\bigoplus_{\alpha\in\Theta'}(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}\right) \subseteq \prod_{i=2}^{k}\exp\left((\mathfrak{g}_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}\right).$$

令 $X_i \in (\mathfrak{g}_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}$。回顾对于所有 α、$\beta \in \Sigma$，都有 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，参见命题 4.4。因此，我们可以使用第5.6节中关于 Baker-Campbell-Hausdorff 公式的 Zassenhaus公式，得到有限乘积

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right) = \exp(X_1)\exp\left(\sum_{i=2}^{k}X_i\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left[X_1, \sum_{i=2}^{k}X_i\right]\right)\dots$$

然后反复应用命题 5.12 中的原始版本，将表达式化简回

$$\exp(X_1)\exp\left(\sum_{i=2}^{k}\tilde{X}_i\right)$$

对于某个新的 $X_i \in (\mathfrak{g}_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}$，其中 $\tilde{}$。应用归纳法假设，我们得出

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right) \in \exp(X_1)\prod_{i=2}^{k}\exp\left((\mathfrak{g}_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}\right) \subseteq \prod_{i=1}^{k}\exp\left((\mathfrak{g}_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}\right).$$

接下来，我们注意到 $\prod_{i=1}^{k}$ 指数映射$((\mathfrak{g}_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}) \subseteq \langle u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \colon \alpha \in \Theta\rangle$。最后，我们证明包含关系

$$\langle u \in U_\alpha \colon \alpha \in \Theta\rangle \subseteq \exp\left(\bigoplus_{\alpha\in\Theta}(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}\right)$$

对 $\langle u \in U_\alpha$ 中一个元素的字长进行归纳：$\alpha \in \Theta\rangle$。若字长为 1，则结论成立。现在假设

$$v = \exp\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)$$

对某个 $X_i \in (\mathfrak{g}_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}$，并考虑某个 $X \in (\mathfrak{g}_{\alpha})_{\mathbb{F}}$ 和某个 $\alpha \in \Theta$ 的 $\exp(X)$ $u = $。应用命题 5.12 可得

$$\begin{aligned} uv &= \exp(X)\exp\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) \\ &= \exp\left(X + \sum_{i=1}^{k} X_i + \frac{1}{2}\left[X, \sum_{i=1}^{k} X_i\right] + \dots\right) \in \exp\left(\bigoplus_{\alpha\in\Theta} (\mathfrak{g}_{\alpha})_{\mathbb{F}}\right) \end{aligned}$$

从而完成证明。 □

我们指出，引理 5.14 中乘积表达式的顺序以 $\exp((\mathfrak{g}_{\alpha})_{\mathbb{F}})$ 开始，它对应最大的 $\alpha = \alpha_1$，随后按递减顺序排列。将 U_Θ 中的元素写成 U_Θ 中元素的逆元，也会得到一个以最小根开始、随后按递增顺序排列的表达式。下面的技术引理在应用中很有用。

引理 5.15. 设 $\Theta \subseteq \Sigma_{>0}$ 是一个对加法封闭的子集，且 $\alpha \in \Sigma_{>0}$ 满足对所有 $\beta \in \Theta$ 都有 $\alpha > \beta$。那么对所有 $u \in$，都有 $uU_\Theta u^{-1} = U_\Theta$ $\exp((\mathfrak{g}_{\alpha})_{\mathbb{F}})$。
对于每个子集 $\Psi \subseteq \Sigma_{>0}$，元素 $u \in U_\Theta$ 都可以表示为 $u = u'u''$，其中

$$u' \in \prod_{\alpha\in\Theta\cap\Psi} \exp((\mathfrak{g}_{\alpha})_{\mathbb{F}}) \quad and \quad u'' \in \prod_{\alpha\in\Theta\setminus\Psi} \exp((\mathfrak{g}_{\alpha})_{\mathbb{F}}).$$

证明. 设 $X \in (\mathfrak{g}_{\alpha})_{\mathbb{F}}$ 且 $\exp(Y) \in U_\Theta$。于是我们可以两次应用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式（命题 5.12），得到

$$\begin{aligned} \exp(X)\exp(Y)\exp(X)^{-1} &= \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \dots\right)\exp(-X) \\ &= \exp\left(Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \dots\right) \in U_\Theta. \end{aligned}$$

我们对 Θ 的大小使用归纳法来证明第二个陈述。如果 $|\Theta| = 1$，则该陈述显然成立。现在考虑在加法下封闭的子集 $\Theta' := \Theta\setminus\{\alpha\}$，其中 α 是 Θ 的最大元素。对于 $u \in U_\Theta$，我们使用引理 5.14 得到 $u = u_\alpha \bar{u}$，其中 $\bar{u} \in U_{\Theta'}$。如果 $\alpha \notin \Psi$，则可以使用该引理的第一部分改写为 $u = \bar{u}u_\alpha$。无论哪种情况，归纳假设都给出

$$\bar{u}' \in \prod_{\beta\in\Theta'\cap\Psi} \exp((\mathfrak{g}_{\beta})_{\mathbb{F}}) \quad \text{and} \quad \bar{u}'' \in \prod_{\beta\in\Theta'\setminus\Psi} \exp((\mathfrak{g}_{\beta})_{\mathbb{F}})$$

使得 $\bar{u} = \bar{u}'\bar{u}''$。然后 $u = u_\alpha\bar{u}'\bar{u}''$ 或 $u = \bar{u}'\bar{u}''u_\alpha$，正如所要求的。 □

引理 5.13 和 5.14 可用于证明 $A_{\mathbb{F}}$ 规范化了 $U_{\mathbb{F}}$ 的全部。

命题 5.16. 设 $\Theta \subseteq \Sigma_{>0}$ 对加法封闭。则 $A_{\mathbb{F}}$ 规范化 $(U_\Theta)_{\mathbb{F}}$：对所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$，$u \in (U_\Theta)_{\mathbb{F}}$：$aua^{-1} \in (U_\Theta)_{\mathbb{F}}$。特别地，$aU_{\mathbb{F}}a^{-1} = U_{\mathbb{F}}$ 对所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$。

证明。设 $a \in A_{\mathbb{F}}$。根据引理 5.14，任意 $u \in (U_\Theta)_{\mathbb{F}}$ 都可写成 $u = u_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot u_{\alpha_k}$，其中 $u_{\alpha_i} \in (U_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}$，且 $\Theta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$。根据引理 5.13，

$au_{\alpha_i}a^{-1} \in (U_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}$，因此

$$aua^{-1} = au_{\alpha_1}a^1 \cdot \ldots \cdot au_{\alpha_k}a^{-1} \in \prod_{i=1}^{k}(U_{\alpha_i})_{\mathbb{F}} = (U_\Theta)_{\mathbb{F}},$$

这里我们再次使用了引理 5.14。 □

5.8. 代数群的雅各布森-莫罗佐夫引理。在代数群层面上，代数群的雅各布森-莫罗佐夫引理似乎已是众所周知的结果。由于我们未能在文献中找到详细论述，现将在此给出其陈述和证明。经典雅各布森-莫罗佐夫引理适用于特征为 0 的域上的半单李代数。以下表述比我们在引理 4.9 中证明的结果更一般。

命题 5.17. [Bou08b, VIII §11.2 Prop. 2] 设 $\mathfrak{g}$ 为半单李代数，$x \in \mathfrak{g}$ 为非零幂零元。那么存在 h、$y \in \mathfrak{g}$，使得 (x, y, h) 是一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组，即

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h$$

因此，由 x、h、y 生成的李代数同构于 $\mathfrak{sl}_2$。

我们将使用 [Bor91, 第 7] 章和 [PR93]，来证明代数闭域$\mathbb{D}$上特征零情形下代数群的雅各布森-莫罗佐夫引理的以下版本。注意，任何李代数为 $\mathfrak{sl}_2$ 的半单线性代数群都同构于 SL_2 或 PGL_2 [（Hum75，推论 32.2]）。

命题 5.18. 设 $g \in$G 是代数闭域 $\mathbb{D}$ 上特征零的半单线性代数群 G 中任意一个幺幂元。那么存在一个代数子群 $\mathrm{SL}_g < \mathrm{G}$，其李代数为 $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_g) \cong \mathfrak{sl}_2$ 且 $g \in \mathrm{SL}_g$。元素 $\log(g) \in \mathrm{Lie(G)}$ 对应于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2.$$

此外，若 $g \in \mathrm{G}(\mathbb{F})$ 是定义在域 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{D}$ 上的，那么可以假设 SL_g 定义在 $\mathbb{F}$ 上。

证明。由于 $g \in \mathrm{G}$ 是幺幂的，幂零元 $x = \log(g) \in \mathfrak{g}$ 存在。根据雅各布森-莫罗佐夫引理和命题 5.17，存在 y、$h \in \mathfrak{g}$，使得 (x, y, h) 是一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。令 $\mathfrak{sl}_g$ 表示由x、y 和 h 生成的 $\mathfrak{g}$ 的子代数。因此，$x \in \mathfrak{sl}_g$ 对应于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2$$

在同构 $\mathfrak{sl}_g \cong \mathfrak{sl}_2$ 下。我们沿用 [Bor91, 7.1] 并定义

$$\mathcal{A}(\mathfrak{sl}_g) = \bigcap \{\mathbf{H} \colon \mathbf{H} \text{ algebraic subgroup of } \mathbf{G} \text{ with } \mathfrak{sl}_g \subseteq \mathrm{Lie}(H)\},$$

这是一个闭连通代数子群。设

$$\mathrm{SL}_g = [\mathcal{A}(\mathfrak{sl}_g), \mathcal{A}(\mathfrak{sl}_g)]$$

为其换位子群。由于$\mathfrak{sl}_g$是连通的，根据 [Bor91, 2.3] ，它是一个代数群。接着我们利用 [Bor91] 得到

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_g) \overset{7.8}{=} [\mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{sl}_g)), \mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{sl}_g))] \overset{7.9}{=} [\mathfrak{sl}_g, \mathfrak{sl}_g] = \mathfrak{sl}_g$$

其中最后一个等式由 $\mathfrak{sl}_g \cong \mathfrak{sl}_2$ 得出。映射

$$\alpha \colon \mathbf{G}_a \to \mathbf{G}$$
$$t \mapsto \exp(tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!}$$

是多项式，因此是代数群态射。我们有 $\mathrm{Lie}(\alpha(\mathbf{G}_a)) = \langle x \rangle \subseteq \mathfrak{sl}_g$ ，因此由 [Bor91, 7.1(2)] 可得 $g \in \alpha(\mathbf{G}_a) \subseteq \mathrm{SL}_g$ 。

若 $g \in \mathbf{G}(\mathbb{F})$，则 $\log(g) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$，并且我们可以假设 $y, h \in \mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$ 也成立。因此 $\mathfrak{sl}_g \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$。现在， $\mathcal{A}(\mathfrak{sl}_g)$ 如 [Bor91, 2.1(b)] 中所述，是定义在 $\mathbb{F}$ 上的。于是根据 [Bor91, 2.3]，SL_g 定义在 $\mathbb{F}$ 上。□

让我们回到实闭域 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \cap \mathbb{R}$ 的情形。回忆第 5 节 5.7 中， $U_{\mathbb{F}}$ 对于 $\alpha \in \Sigma_{>0}$ 有由幺幂元组成的子群 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$ ，这些子群定义为 $U_\alpha = \exp((\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{K}} \oplus (\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{K}})$ 的半代数扩张。下面是雅各布森–莫罗佐夫引理的另一种变体，但它仅在 Σ 约化时成立。

命题 5.19. 设 $\alpha \in \Sigma$ ，并假设 $\mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$。设 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$。则存在 $X \in (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 和 $t \in \mathbb{F}$ ，使得 $u = \exp(tX)$。令 (X, Y, H) 为引理 4.9 的 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。于是存在群同态 $\varphi_{\mathbb{F}} \colon \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}) \to G_{\mathbb{F}}$ ，它是定义在 $\mathbb{F}$ 上的代数群态射 $\varphi \colon \mathrm{SL}(2, \mathbb{D}) \to \mathbf{G}$ 的限制，且 φ 的核有限，并且

$$\varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = u = \exp(tX) \quad and \quad \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \exp(tY).$$

*I*若 φ 不是单射，则 $\ker(\varphi) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ，且 φ 可经由同构分解

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{D}) := \mathrm{SL}(2, \mathbb{D}) \,/\, \ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathrm{SL}(2, \mathbb{D}))$$

该同构也定义在 $\mathbb{F}$上。此外，对于任意 $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{F})$， $\varphi(g^{\mathsf{T}}) = \varphi(g)^{\mathsf{T}}$。

证明. 令 u, X, t 如陈述所述。我们将命题 5.18 应用于 $\exp(X) \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$ ，得到一个定义在 $\mathbb{F}$ 上的代数群 $\mathrm{SL}^{\exp(X)}(\mathbb{D}) < \mathbf{G}$，其李代数为 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{D})$。根据 [Hum75, 推论 32.3], ，李代数为 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{D})$ 的代数群只有 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{D})$ 和 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{D}) := \mathrm{SL}(2, \mathbb{D})/Z(\mathrm{SL}(2, \mathbb{D}))$。在这两种情况下，我们都得到一个具有有限核的代数群同态 $\varphi \colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{D}) \to \mathrm{SL}^{\exp(X)}$ 。

注意，由于 $X \in (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}$，引理 4.9 中的 $\mathfrak{sl}_2$-三元组由 (X, Y, H) 描述，并且我们有一个李代数同构 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{D}) \cong \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}^{\exp(X)}(\mathbb{D}))$。注意，这两个李代数同构

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{D}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_{\exp(X)}(\mathbb{D}) \\ \mathfrak{sl}_2(\mathbb{D}) \cong \mathfrak{sl}_{\exp(X)}(\mathbb{D}) &\qquad \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{D}) \\ X &\qquad \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

可能并不一致。由于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{D})$ 没有任何外自同构（[Hum75，定理 14.1] 和 [FH04，命题 D.40]），这两个同构仅相差某个 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{D})$ 中元素 g 的 $\mathrm{Ad}(g)$。因此，在共轭作用下，我们可以假设 $\mathrm{d}\varphi\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{D}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}^{\exp(X)}(\mathbb{D}))$ 映射

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto X, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto H \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto Y.$$

尽管共轭作用可能由 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{D})$ 中的元素给出，但 $\mathrm{d}\varphi$ 的显式描述表明，φ 仍定义在 $\mathbb{F}$ 上。命题陈述中对 $\exp(tX)$ 和 $\exp(tY)$ 的描述也随之成立。最后注意，转置是 $\mathrm{d}\varphi$-等变的，因此也是 φ-等变的。□

由于在 $\mathfrak{sl}_2$-三元组中，$H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{F}}$ 我们得到乘法一参数群

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{>0} &\to A_{\mathbb{F}} \\ \lambda &\mapsto \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

它们满足以下性质，后文将会用到。

引理 5.20. 设 $\alpha \in \Sigma$ 满足 $(\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{F}} = 0$。设 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$，且 $\varphi\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{D}) \to \mathrm{G}$ 如命题 5.19 所述。对于每个 $\lambda \in \mathbb{F}_{>0}$

$$\chi_\alpha\left(\varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right) = \lambda^2.$$

证明。注意，对于所有 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$，交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F}) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g)} & \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}\varphi_{\mathbb{F}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}\varphi_{\mathbb{F}}} \\ \mathfrak{g}_{\mathbb{F}} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(\varphi_{\mathbb{F}}(g))} & \mathfrak{g}_{\mathbb{F}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) & \xrightarrow{c_g} & \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathbb{F}}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathbb{F}}} \\ G_{\mathbb{F}} & \xrightarrow{c_{\varphi_{\mathbb{F}}(g)}} & G_{\mathbb{F}} \end{array}$$

彼此交换。对于

$$a = \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad X = \mathrm{d}\varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}$$

于是我们有

$$\mathrm{Ad}\,(a)\, X = \mathrm{d}\varphi_{\mathbb{F}}\left(\mathrm{Ad} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{d}\varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda^2 X$$

并且由于 $\chi_\alpha(a)$ 由 $\mathrm{Ad}(a)X = \chi_\alpha(a)X$ 定义，我们有 $\chi_\alpha(a) = \lambda^2$。 □

引理 5.21。设 $\alpha \in \Sigma$ 满足 $(\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{F}} = 0$。设 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 和 $X \in (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}$，$t \in \mathbb{F}$ 以及 $\varphi\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{D}) \to \mathrm{G}$ 如命题 5.19 中所述，使得 $u = \exp(tX)$。元素

$$m(u) := \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 0 & t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{F}}$$

包含于 $\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$ 中，并且

$$\chi_\alpha(m(u) \cdot a \cdot m(u)^{-1}) = \chi_\alpha(a)^{-1}$$

对于任意 $a \in A_{\mathbb{F}}$。

当 $t=1$ 时，甚至 $m(u) \in N_{\mathbb{F}} = \mathbf{Nor}_{K_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$ 和

$$m(u) \cdot (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot m(u)^{-1} = (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}.$$

证明。令 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 和

$$a_\perp := \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} \sqrt{\chi_\alpha(a)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\chi_\alpha(a)}^{-1} \end{pmatrix},$$

则 $a_0 := a a_\perp^{-1}$ 满足

$$\chi_\alpha(a_0) = \chi_\alpha(a)\chi_\alpha(a_\perp)^{-1} = \chi_\alpha(a)\frac{1}{\chi_\alpha(a)} = 1$$

由引理 5.20。对于任意 $u' \in$ 指数映射$((\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}})$ 或 $u' \in$指数映射$((\mathfrak{g}_{-\alpha})_{\mathbb{F}})$，$a_0 u' = u' a_0$ 由引理 5.13。注意到

$$\begin{aligned} m(u) = \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 0 & t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix} &= \varphi_{\mathbb{F}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/t & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\in \exp((\mathfrak{g}_{-\alpha})_{\mathbb{F}}) \cdot u \cdot \exp((\mathfrak{g}_{-\alpha})_{\mathbb{F}}) \end{aligned}$$

这意味着 $a_0 m(u) = m(u) a_0$。现在

$$\begin{aligned} m(u) \cdot a \cdot m(u)^{-1} &= m(u) \cdot a_0 \cdot a_\perp \cdot m(u)^{-1} = a_0 \cdot m(u) \cdot a_\perp \cdot m(u)^{-1} \\ &= a_0 \cdot \varphi_{\mathbb{F}} \left(\begin{pmatrix} 0 & t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\chi_\alpha(a)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\chi_\alpha(a)}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 1/t & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= a_0 \cdot \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} \sqrt{\chi_\alpha(a)}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\chi_\alpha(a)} \end{pmatrix} = a_0 a_\perp^{-1} \in A_{\mathbb{F}} \end{aligned}$$

因此 $m(u) =$ 或$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$。我们直接看到

$$\chi_\alpha(m(u) \cdot a \cdot m(u)^{-1}) = \chi_\alpha(a_0 \cdot a_\perp^{-1}) = \chi_\alpha(a_0) \cdot \chi_\alpha(a_\perp)^{-1} = \chi_\alpha(a)^{-1}.$$

现在，若 $t=1$ 我们可以利用命题 5.19 得知 φ 保持转置，从而证明

$$\begin{aligned} m(u) \cdot m(u)^{\mathsf{T}} &= \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{\mathsf{T}} \\ &= \varphi_{\mathbb{F}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id} \end{aligned}$$

因此 $m(u) \in K_{\mathbb{F}}$，故 $m(u) \in N_{\mathbb{F}} = \mathbf{Nor}_{K_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$。于是 $m(u)$ 是球面魏尔群 $W_s = N_{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}}$ 中某个元素 $w = [m(u)]$ 的一个代表元。虽然 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$，

$$\begin{aligned} m(u) \cdot u \cdot m(u)^{-1} &= \varphi_{\mathbb{F}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}, \end{aligned}$$

因此我们有 $w(\alpha) = -\alpha$。然后

$$m(u) \cdot (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot m(u)^{-1} = (U_{w(\alpha)})_{\mathbb{F}} = (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}.$$

□

5.9. 秩 1 子群。设 $\alpha \in \Sigma$。本节研究由代数群 $\mathbf{U}_\alpha$ 和 $\mathbf{U}_{-\alpha}$生成的群。当 $\dim(\mathbf{U}_\alpha) = 1$ 时，该群由命题 5.19 中 Jacobson-Morozov 态射 $\varphi\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{D}) \to \mathbf{G}$ 的像给出。一般而言，当 $\dim(\mathbf{U}_\alpha)$ 不等于 1 时，所生成的群比 φ 的像更大，但仍为秩 1。

定理 5.22。设 $\alpha \in \Sigma$。那么存在一个定义在 $\mathbb{K}$ 上的半单自伴线性代数群 $\mathbf{L}_{\pm\alpha}$

(i) $\mathrm{Lie}(\mathbf{L}_{\pm\alpha}) = (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}) \oplus (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}) \oplus ([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] + [\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}])$.

(ii) $\mathrm{Rank}_{\mathbb{R}}(\mathbf{L}_{\pm\alpha}) = \mathrm{Rank}_{\mathbb{F}}(\mathbf{L}_{\pm\alpha}) = 1$.

证明。我们考虑半单的 $\mathbb{D}$-李代数

$$\mathfrak{l} := (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}) \oplus (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}) \oplus ([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] + [\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}]).$$

与命题 5.18 的证明类似，我们遵循 Borel [Bor91, 7.1]，定义连通正规代数子群

$$\mathcal{A}(\mathfrak{l}) = \bigcap \{\mathbf{H} \colon \mathbf{H} < \mathbf{G} \text{ is an algebraic subgroup } \mathfrak{l} \subseteq \mathrm{Lie}(\mathbf{H})\}$$

$\mathbf{G}$。我们令 $\mathbf{L}_{\pm\alpha} := [\mathcal{A}(\mathfrak{l})\ \mathcal{A}(\mathfrak{l})]$。于是 (i) 可由

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{L}_{\pm\alpha}) = [\mathcal{A}(\mathfrak{l}), \mathcal{A}(\mathfrak{l})] = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{l},$$

其中在步骤 $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{l}$ 中，我们用到了 $\mathfrak{l}$ 是半单的。由 [Bor91, 2.1(b)]，代数群$\mathcal{A}(\mathfrak{l})$ 定义在 $\mathbb{K}$ 上。因此，由 [Bor91, 2.3]，$\mathbf{L}_{\pm\alpha}$ 定义在 $\mathbb{K}$ 上且连通。由于 $\mathfrak{l}$ 是半单的，$\mathbf{L}_{\pm\alpha}$ 也是半单的。由命题 4.4，$\theta(X) = -X^\intercal$ 和 $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$，且 $\theta(\mathfrak{g}_{2\alpha}) = \mathfrak{g}_{-2\alpha}$，因此 $\theta([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ 且 $\theta([\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}]) = [\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}]$，故 $\mathfrak{l}$ 和 $\mathbf{L}_{\pm\alpha}$ 是自伴的。

对于 (ii)，引理 4.8 告诉我们，$\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$ 的实秩为 1，因此 $\mathrm{Rank}_{\mathbb{R}}(\mathbf{L}_{\pm\alpha}) = 1$。由分裂环面定理——定理 4.17——可得 $\mathrm{Rank}_{\mathbb{R}}(\mathbf{L}_{\pm\alpha}) = \mathrm{Rank}_{\mathbb{F}}(\mathbf{L}_{\pm\alpha}) = 1$。□

现在考虑 G 的半代数子群 $L_{\pm\alpha} := \mathbf{L}_{\pm\alpha} \cap G$。

引理 5.23。$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} \subseteq \mathrm{Cen}_{G_{\mathbb{F}}}(\{a \in A_{\mathbb{F}} \colon \chi_\alpha(a) = 1\})$。

证明。这是一个半代数命题，因此只需在实数域上证明即可。设 $a \in A_{\mathbb{R}}$，且 $\chi_\alpha(a) = 1$。我们有

$$\mathrm{Lie}(L_{\pm\alpha}) = (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}) \oplus (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}) \oplus ([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus [\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}]).$$

对于 $X \in (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{R}}$ 和 $X' \in (\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{R}}$，由引理 5.13 可得

$$a \exp(X) a^{-1} = \exp(\chi_\alpha(a) X) = \exp(X)$$
$$a \exp(X') a^{-1} = \exp(\chi_\alpha(a)^2 X') = \exp(X')$$

同样的论证表明，对于 $Y \in (\mathfrak{g}_{-\alpha})_{\mathbb{R}} \oplus (\mathfrak{g}_{-2\alpha})_{\mathbb{R}}$，有 $a \exp(Y) a^{-1} = \exp(Y)$。由于 $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{l}) \oplus (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{l})$，对于显然成立的 $H \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{l}$，同样有 $a \exp(H) a^{-1} = \exp(H)$。我们已经证明

$$\mathrm{Ad}(a) \colon \mathrm{Lie}((L_{\pm\alpha})_{\mathbb{R}}) \to \mathrm{Lie}((L_{\pm\alpha})_{\mathbb{R}})$$

是单位元，而 a 的共轭作用在 $(L_{\pm})_{\mathbb{R}}$的连通分支上为常值。由于 $L_{\pm\alpha}$ 作为代数群是连通的，且 $c_a^{-1}(\mathrm{Id})$ 是闭代数集，因此 a 的共轭作用是恒等作用。□

我们可以将 $L_{\pm\alpha}$ 视为迄今所建立理论的一个例子，特别是可以应用第 5 节开头所述的群分解。由于 $\mathsf{S} < \mathsf{G}$ 是一个自伴最大分裂环面，其李代数包含 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus [\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}]$，因此 $\mathsf{S}_{\pm\alpha} := \mathsf{S} \cap \mathsf{L}_{\pm\alpha}$ 是 $\mathsf{L}_{\pm\alpha}$的一个自伴最大分裂环面。于是 $K_{\pm\alpha} := L_{\pm\alpha} \cap \mathsf{SO}_n = L_{\pm\alpha} \cap K$。考虑 $\mathbb{F}$-点，包含单位元的 $(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{K}}$ 的半代数连通分支可以半代数地延拓至 $(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$。下面给出引理 5.20 的一个版本，不过现在讨论的是秩 1 群 $(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$。

引理 5.24. 对于每个 $t \in \mathbb{F}_{>0}$，存在一个 $a \in (A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$，使得 $\chi_\alpha(a) = t$。

证明. 这显然是一阶陈述，因此只需证明它对 $\mathbb{R} = \mathbb{F}$ 成立。设 $X \in (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{R}} \setminus 0$。由引理 4.8，我们知道 $\exp([X, \theta(X)]) \in (A_{\pm\alpha})_{\mathbb{R}}$。给定 $t \in \mathbb{R}_{>0}$，令

$$a := \exp\left(\frac{\log(t)}{\alpha([X, \theta(X)])} \cdot [X, \theta(X)]\right).$$

由引理 5.2，$\chi_\alpha(a) = e^{\alpha(\log(a))} = e^{\log(t)} = t$。 □

根空间分解于是给出 $U_{\pm\alpha} = \exp(\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}) = U_\alpha$，并且球面魏尔群 $W_{\pm\alpha} = (N_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}/(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 可以由下式定义

$$(N_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} := \mathrm{Nor}_{(K_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}}((A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}})$$
$$(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} := \mathrm{Cen}_{(K_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}}((A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}).$$

我们注意到，作为引理 5.23 的推论，$N_{\pm\alpha} \subseteq N_{\mathbb{F}}$，并且 $\mathsf{Nor}^{L_{\pm\alpha}}(A_{\pm\alpha}) \subseteq \mathsf{Nor}^{K_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$。

当 Σ 是约化的情形下，可以用 Jacobson-Morozov 引理来解释。给定 $u \in (U_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$，我们注意到，命题 5.19 中的态射 $\varphi_{\mathbb{F}}\colon \mathsf{SL}(2, \mathbb{F}) \to G_{\mathbb{F}}$ 的取值落在 $(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 中。事实上，

$$(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = \varphi_{\mathbb{F}}\left(\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} : \lambda > 0\right\}\right)$$

因为在 $\mathbb{R}$ 上，这两个群都是连通的一维群。根据引理 5.21，元素

$$m = \varphi_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \in (N_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$$

是球面魏尔群 $W_{\pm\alpha} = \{[\mathrm{Id}], [m]\}$ 中唯一非平凡元素的一个代表元。现在，我们可以将布鲁哈分解定理 5.11 应用于 $(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$。

推论 5.25。设 $(B_\alpha)_{\mathbb{F}} := (M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$。那么

$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = (B_\alpha)_{\mathbb{F}}(N_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(B_\alpha)_{\mathbb{F}},$$

并且元素 $m \in (N_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 是 $W_{\pm\alpha}$ 中唯一元素的一个代表元，因此

$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \sqcup (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot m \cdot (B_\alpha)_{\mathbb{F}}.$$

以下变体在应用中很有用。

推论 5.26. 对于

$$(B_\alpha)_{\mathbb{F}} := (M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}},$$
$$(B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} := (M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}},$$

我们得到这些分解

$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \sqcup m \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}},$$
$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \sqcup (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot m \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}},$$
$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = (B_\alpha)_{\mathbb{F}}(N_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(B_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$$

其中，最后一个分解中的元素 $(N_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 是 $W_{\pm\alpha} = \{\mathrm{Id}\ [m]\}$ 中唯一一个元素的代表元。

证明。我们使用引理 5.21 中的 $m^{-1} \cdot (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot m = (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$。根据推论 5.25，我们选取 m^{-1} 作为 $[m^{-1}] = [m] \in W_{\pm\alpha}$ 的代表元，并得到

$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \sqcup (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot m^{-1} \cdot (B_\alpha)_{\mathbb{F}},$$

so

$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = m \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \cdot m^{-1} \sqcup (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \cdot m^{-1}.$$

将此表达式右乘 $m \in (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$，得到

$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \sqcup m \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}},$$

再将 $(B_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 左乘于此，便得到其余两个分解。□

5.10. Kostant 凸性。利用岩泽分解 $G_{\mathbb{F}} = U_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}K_{\mathbb{F}}$ 定理 5.6，我们为每个 $g = uak \in G_{\mathbb{R}}$ 关联其 A 分量 $a_{\mathbb{R}}(g) = a \in A_{\mathbb{R}}$。下面是 Kostant 凸性定理，我们将在本章中将其推广到 $G_{\mathbb{F}}$。

定理 5.27。 [Kos73，定理 4.1] 对每个 $b \in A_{\mathbb{R}}$，

$$\{a_{\mathbb{R}}(kb) \in A_{\mathbb{R}} \colon k \in K_{\mathbb{R}}\} = \exp\left(\mathrm{conv}(W_s \log(b))\right),$$

其中 log： $A_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{a}$ 是 exp 的逆映射， W_s 是作用于 $\mathfrak{a}$ 的球面魏尔群，而 conv($W_s$log(b)) 是 log(b) 的 Weyl 群轨道的凸包。

定理 5.27 中等式左侧已经是一个半代数集，我们将把右侧也改写为半代数集。为此，我们首先分析根系 $\Sigma \subseteq \mathfrak{a}^\star$。

回顾第 4.1 节，我们在 $\mathfrak{a}$ 上有一个标量积 B_θ，可据此建立一个同构 $\mathfrak{a}^\star \to \mathfrak{a}, \alpha \mapsto H_\alpha$，它满足定义性质 $\lambda(H) = B_\theta(H_\lambda, H)$，对所有 $H \in \mathfrak{a}$ 均成立。本节中，我们将用括号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 B_θ 以及 $\mathfrak{a}^\star$ 上相应的标量积。对于 $\lambda \in \mathfrak{a}^\star$，定义

$$x_\lambda = \frac{2}{\langle H_\lambda, H_\lambda \rangle} H_\lambda = \frac{2}{\langle \lambda, \lambda \rangle} H_\lambda$$

它满足如下性质：对所有的 α、$\beta \in \Sigma$,

$$\langle H_\alpha, x_\beta \rangle = \frac{2\langle H_\alpha, H_\beta \rangle}{\langle H_\beta, H_\beta \rangle} \in \mathbb{Z}$$

因为 Σ 是晶体根系，定理 4.5。设 $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$ 是 Σ 的基，并将 $x_i := x_{\delta_i}$ 和 $H_i := H_{\delta_i}$ 简记为。令

$$\overline{\mathfrak{a}}^+ = \{H \in \mathfrak{a} \colon \delta(H) \geq 0 \text{ for all } \delta \in \Delta\}.$$

在证明定理 5.27 的过程中，Kostant 使用下图所示的闭凸锥来描述 conv($W_s x$)

$$\mathfrak{a}_p := \left\{ x \in \mathfrak{a} \colon x = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}_{\geq 0} x_i \right\}$$

图 1。

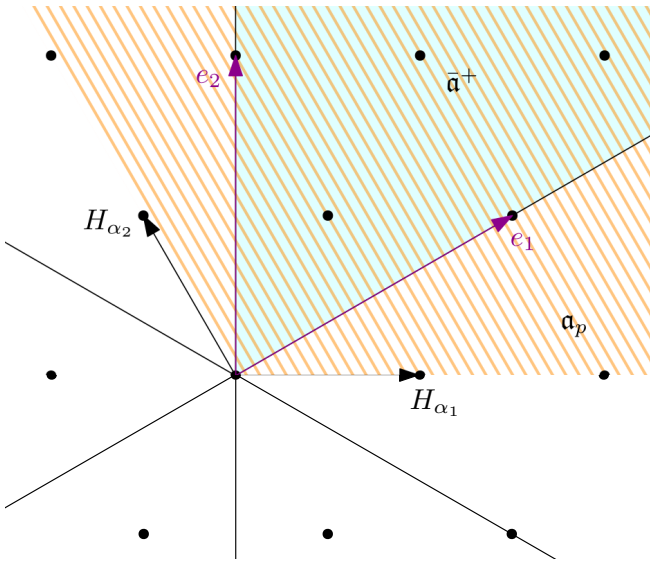


FIGURE 1. SL_3 的 A_2 型根系。凸锥 $\mathfrak{a}_p$ （橙色条纹）可视为由 H_{α_i} 张成，或视为由 e_i 本原向量所定义的半空间的交集。

引理 5.28。 [Kos73，引理 3.3.(2)] 令 x、$y \in \overline{\mathfrak{a}}^+$。则

$$y \in \operatorname{conv}(W_s x) \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathfrak{a}_p.$$

现在我们希望用不等式描述 $\mathfrak{a}_p$ 。锥 $\mathfrak{a}_p$ 是由以下半平面所定义的开半空间的交集

$$E_j = \sum_{k \neq j} \mathbb{R} x_k.$$

任意与 E_j 正交的向量 $x \in \mathfrak{a}$ 都满足 $\langle x、\ x_i \rangle = 0$ ，对所有 $i \neq j$ 均成立。令 $x = \sum_k \lambda_{jk} H_k$，则对所有 $i \neq j$ 均有

$$\langle x, x_i \rangle = \sum_k \lambda_{jk} \langle H_k, x_i \rangle = 0.$$

对于每个 $i \neq j$，这是一个以 λ_{j1}、……、λ_{jr} 为变量，以 $\langle H_k、\ x_i \rangle \in \mathbb{Z}$ 为系数的齐次线性方程。因此，关于 λ_{jk} 存在一个有理数解（从而也存在整数解）。这表明 $x \in E_j^{\perp} \setminus \{0\}$ 可以选为格 $\Gamma = \sum_{l=1}^{r} \mathbb{Z} H_k$ 中的元素。 $\Gamma \cap E_j^{\perp}$ 中有两个本原向量。令 e_j 为其中唯一一个与 $\mathfrak{a}_p$ 位于 ∂E_j 同侧的向量。因此

$$\mathfrak{a}_p = \{x \in \mathfrak{a} \colon \langle e_j, x \rangle \geq 0 \text{ for all } j\}.$$

在同构 $\mathfrak{a}^\star \cong \mathfrak{a}$ 下，格 Γ 对应于 $L = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\alpha$，我们将对应于 $e_j \in \Gamma$ 的元素定义为 $\gamma_j \in L$。根据引理 5.2，γ_j 定义了一个代数特征 $\chi_j\colon\ A_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$，满足

$$\chi_j(\exp(H)) = e^{\gamma_j(H)}$$

对所有 $H \in \mathfrak{a}$。乘法闭韦伊尔室为

$$A^+_{\mathbb{R}} := \{a \in A_{\mathbb{R}} \colon \chi_\delta(a) \geq 1 \text{ for all } \delta \in \Delta\} = \exp \overline{\mathfrak{a}}^+$$

这是一个半代数集，因此具有一个 $\mathbb{F}$-扩张 $A^+_{\mathbb{F}}$。利用岩泽分解 $G_{\mathbb{F}} = U_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}} K_{\mathbb{F}}$ 和定理 5.7，我们像之前一样，为每个 $g = uak \in G_{\mathbb{F}}$ 关联其 A-分量 $a_{\mathbb{F}}(g) = a \in A_{\mathbb{F}}$。现在可以得出适用于 $G_{\mathbb{F}}$ 的 Kostant 凸性定理的以下版本，如图 2 所示。

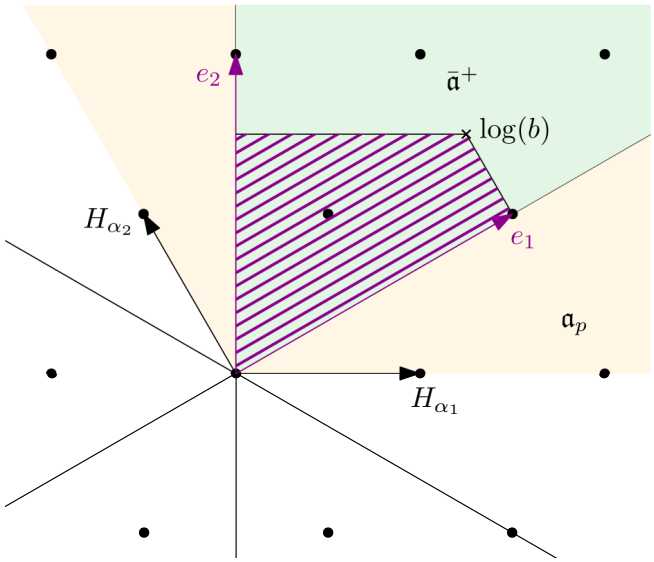


FIGURE 2. 与 SL_3 相关联的 A_2 型根系。Kostant 凸性定理 5.29 中由不等式定义的凸集以紫色标示。

定理 5.29。对所有 $b \in A^+_{\mathbb{F}}$，有

$$\left\{a \in A^+_{\mathbb{F}} \colon \exists k \in K_{\mathbb{F}}, a_{\mathbb{F}}(kb) = a\right\} = \left\{a \in A^+_{\mathbb{F}} \colon \chi_i(a) \leq \chi_i(b) \text{ for all } i\right\}.$$

证明。我们先验证该定理对 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 成立。当且仅当存在某个 $k \in K_{\mathbb{R}}$，使得元素 $a \in A^+_{\mathbb{R}}$ 满足 $a_{\mathbb{R}}(kb) = a$，当且仅当 $a \in A^+_{\mathbb{R}} \cap \exp(\mathrm{conv}(W_s \log(b)))$；这由定理 5.27 得出。这意味着对某些 $H \in \overline{\mathfrak{a}}^+$ 和 $H \in$，有 $a = \exp(H)$ 且 $H \in \mathrm{conv}(W_s \log(b))$。根据引理 5.28，这等价于

$$\log(b) - H \in \mathfrak{a}_p = \{x \in \mathfrak{a} \colon \langle e_j, x\rangle \geq 0 \text{ for all } j\},$$

取指数后，这等价于

$$\chi_i(ba^{-1}) \geq 1$$

对所有 i，因此

$$\chi_i(a) \leq \chi_i(b),$$

与定理中一样。这就完成了情形 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$。现在注意，属于陈述中的任一集合都可以表述为一阶公式。由于在 $\mathbb{R}$ 上这两个公式彼此蕴含，根据迁移原理，它们在 $\mathbb{F}$ 上也彼此蕴含。证明至此结束。□

下面的引理在应用中很有用。

引理 5.30。对于所有 $\eta \in L = \sum_{\delta\in\Delta} \mathbb{Z}\delta$，有

$$\eta = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{\langle \eta, \delta_\ell\rangle}{\langle \gamma_\ell, \delta_\ell\rangle}\gamma_\ell$$

并且对于 $\eta^+ := \sum_{\alpha\in\Sigma_{>0}} \alpha$，$\eta^+$ 是 γ_ℓ 的正线性组合，

$$\eta^+ = \sum_{\alpha\in\Sigma_{>0}} \alpha \in \sum_{\ell=1}^{r} \mathbb{Q}_{>0}\gamma_\ell.$$

证明。根据定义，对于所有 $\ell \neq j$，$\langle x_j,\ e_\ell\rangle = 0$，但由于 $\langle x_\ell,\ e_\ell\rangle \neq 0$，否则$e_\ell = 0$。这意味着 $\{e_1, \ldots, e_r\}$，因此 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ 线性无关：因为如果 $x = \sum_\ell \lambda_\ell e_\ell = 0$，那么 $\langle x_j,\ x\rangle = \lambda_j\langle x_j,\ e_j\rangle = 0$，所以对于所有$j$，$\lambda_j = 0$。

因此我们可以找到 $n_{i\ell} \in \mathbb{Q}$，使得

$$\delta_i = \sum_{\ell=1}^{r} n_{i\ell}\gamma_\ell.$$

由于当 $\ell \neq k$ 时 $\langle \gamma_\ell,\ \delta_k\rangle = 0$，我们有 $\langle \delta_i,\ \delta_k\rangle = n_{ik}\langle \gamma_k,\ \delta_k\rangle$。由于 $x_\ell \in \mathfrak{a}_p$，$\langle e_\ell,\ x_\ell\rangle \geq 0$，并且由于 $e_j \neq 0$ 以及当 $\ell \neq j$ 时 $\langle e_\ell,\ x_j\rangle = 0$，实际上 $\langle e_\ell,\ x_\ell\rangle > 0$。因此也有 $\langle \gamma_\ell,\ \delta_\ell\rangle > 0$，所以我们可以用 $\langle \gamma_\ell,\ \delta_\ell\rangle$ 将 $\langle \delta_i,\ \delta_\ell\rangle = n_{i\ell}\langle \gamma_\ell,\ \delta_\ell\rangle$ 除以，得到

$$n_{i\ell} = \frac{\langle \delta_i, \delta_\ell\rangle}{\langle \gamma_\ell, \delta_\ell\rangle}.$$

对于 $\eta \in L = \sum_{\delta\in\Delta} \delta$，我们有

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\delta_i = \sum_{i=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} \lambda_i \frac{\langle \delta_i, \delta_\ell\rangle}{\langle \gamma_\ell, \delta_\ell\rangle}\gamma_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{r} \frac{\langle \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\delta_i, \delta_\ell\rangle}{\langle \gamma_\ell, \delta_\ell\rangle}\gamma_\ell = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{\langle \eta, \delta_\ell\rangle}{\langle \gamma_\ell, \delta_\ell\rangle}\gamma_\ell.\end{aligned}$$

对于 $\delta \in \Delta$，回忆一下，反射 σ_δ 会置换 $\Sigma_{>0} \setminus \{\delta, 2\delta\}$、[的元素（Bou08a, VI.1.6 推论 1]）。令

$$\eta^+ = \sum_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha.$$

如果 $\sigma_\delta(\eta - \delta) = \eta - \delta$，例如当 Σ 是约化的时，那么我们可以利用反射 σ_δ 保持标量积这一性质，得到

$$\begin{aligned}\langle \eta, \delta\rangle &= \langle \sigma_\delta(\eta), -\delta\rangle = \langle \sigma_\delta(\eta - \delta) + \sigma_\delta(\delta), -\delta\rangle \\ &= \langle (\eta - \delta) - \delta, -\delta\rangle = -\langle \eta, \delta\rangle + 2\langle \delta, \delta\rangle.\end{aligned}$$

因此 $\langle \eta,\ \delta\rangle = \langle \delta,\ \delta\rangle > 0$。如果 Σ 不是约化的，且 $\delta,\ 2\delta \in \Sigma$，那么 $\sigma(\eta - 3\delta) = \eta - 3\delta$，并且

$$\begin{aligned}\langle \eta, \delta\rangle &= \langle \sigma_\delta(\eta), -\delta\rangle = \langle \sigma_\delta(\eta - 3\delta) + \sigma_\delta(3\delta), -\delta\rangle \\ &= \langle (\eta - 3\delta) - 3\delta, -\delta\rangle = -\langle \eta, \delta\rangle + 6\langle \delta, \delta\rangle,\end{aligned}$$

因此 $\langle \eta, \delta\rangle = 3\langle \delta, \delta\rangle > 0$。这表明 η 是元素 γ_ℓ的正线性组合。□

注意，对于稍简单的情形，$\eta = \sum_{\delta\in\Delta}\delta$, η 可能不是 $\sum \mathbb{Z}\gamma_\ell$中元素的正线性组合，类型 G_2的示例见图3。

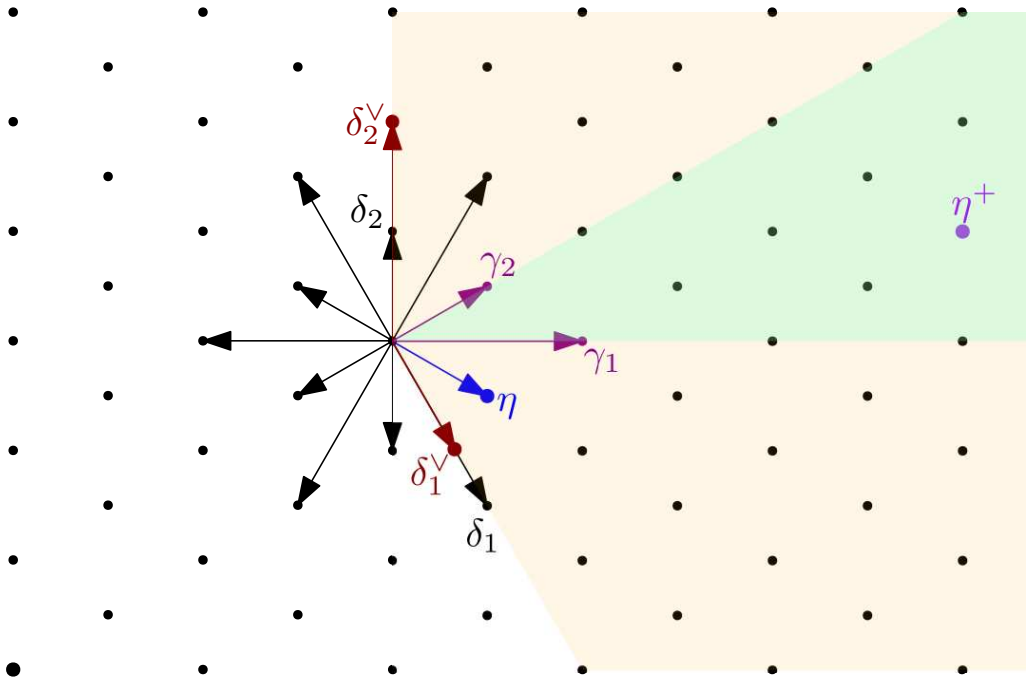


FIGURE 3. 类型为 G_2 的根系，其基为 δ_1, δ_2，与余根 x_1, x_2 对应的余根为 $\delta_1^\vee, \delta_2^\vee$，而张成魏尔室（$\mathfrak{a}^\star$）$^+$的元素为 γ_1, γ_2 。引理 5.30 中的元素$\eta^+ := \sum_{\alpha>0}\alpha$ 属于（$\mathfrak{a}^\star$）$^+$，而另一个候选元素 $\eta := \delta_1 + \delta_2$ 则不属于。

REFERENCES

[App24] R. Appenzeller. 半代数群与广义仿射建筑，2024。博士论文。[App26] R. Appenzeller. 实闭域上半单代数群的广义仿射建筑，2026。arXiv:2601.03226，即将发表于《明斯特数学杂志》。[BBO19] E. Baro, A. Berarducci, M. Otero. o-极小群的嘉当子群与正则点。《伦敦数学学会杂志》，第二辑，100(2):361–382，2019。[BCR98] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy.《实代数几何》。Springer，1998。[BIPP21] M. Burger, A. Iozzi, A. Parreau, M. B. Pozzetti. 特征簇的实谱紧化：刻画与应用。巴黎科学院数学报告，359:439–463，2021。[BIPP23] M. Burger, A. Iozzi, A. Parreau, M. B. Pozzetti. 特征簇的实谱紧化，2023。[BJO14] E. Baro, E. Jaligot, M. Otero. 在 o-极小结构中可定义的群的嘉当子群。Jussieu数学研究所期刊，13(4):849–893，2014。[Bor66] A. Borel. 线性代数群。载于《代数群与不连续子群》（1965年科罗拉多州博尔德纯数学研讨会论文集），第3–19页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1966。[Bor91] A. Borel.《线性代数群》，第二版增订本，第68卷。数学研究生教材，1991。[Bou08a] N. Bourbaki.《李群与李代数》第4–6章。施普林格出版社，柏林，第二版，2008。印刷版。[Bou08b] N. Bourbaki.《李群与李代数》第7–9章。施普林格出版社，柏林，2008年第一版英文版平装印刷本。印刷版。

[Con14] A. Conversano. 将在 o-极小结构中可定义的群化归到紧情形。《符号逻辑杂志》，79(1):45–53，2014。[Con21] A. Conversano. 在 o-极小结构中可定义的群：若干性质与一幅图。《应用逻辑杂志》—IfCoLog《逻辑应用杂志》，8(7):2235–2259，2021。[COP22] A. Conversano, A. Onshuus, S. Post. 实李群与 o-极小性。美国数学会会刊，150(6):2701–2714，2022。[CP13] A. Conversano, A. Pillay. 关于在 o-极小结构中可定义的群的 Levi 子群与 Levi 分解。《基础数学》，222(1):49–62，2013。[FH04] W. Fulton, J. Harris.《表示论：入门课程》。Springer，2004。[Hal66] J. D. Halpern. 向量空间的基与选择公理。《美国数学会会刊》，17(3):670–673，1966。[Hel78] S. Helgason.《微分几何、李群与对称空间》。Academic Press，1978。[Hoc65] G. Hochschild.《李群的结构》。Holden-Day, Inc.，旧金山—伦敦—阿姆斯特丹，1965。[Hum75] J. E. Humphreys.《线性代数群》。Springer，1975。[Jac79] N. Jacobson.《李代数》。Dover Publications, Inc.，纽约，1979。1962年原版的再版。[Kna96] A. W. Knapp.《李群：进阶导论》。Springer，1996。[Kos73] B. Kostant. 关于凸性、Weyl 群与岩泽分解。《高等师范学校科学年鉴》，4(6):413–455，1973。[KT02] L. Kramer, K. Tent. 仿射 Λ-建筑、李群的超幂与黎曼对称空间：Margulis 猜想的代数证明。arXiv 数学电子预印本，math/0209122，2002。[Mag54] W. Magnus. 关于线性算子的微分方程的指数解。《纯数学与应用数学通讯》，7:649–673，1954。[Mil13] J. S. Milne. 李代数、代数群与李群，2013。可见 www.jmilne.org/math/。[OPP96] M. Otero, Y. Peterzil, A. Pillay. 关于实闭域的 o-极小扩张中可定义的群与环。《伦敦数学学会通报》，28(1):7–14，1996。[Ote08] M. Otero. 关于在 o-极小结构中可定义的群的综述。载于《代数与分析应用中的模型理论》第2卷，第177–206页。剑桥：剑桥大学出版社，2008。[Pil88] A. Pillay. 关于在 o-极小结构中可定义的群与域。《纯粹与应用代数杂志》，53(3):239–255，1988。[PPS00a] Y. Peterzil, A. Pillay, S. Starchenko. o-极小结构中的可定义单群。《美国数学会汇刊》，352(10):4397–4419，2000。[PPS00b] Y. Peterzil, A. Pillay, S. Starchenko. 实闭域上的单代数群与半代数群。《美国数学会汇刊》，352(10):4421–4450，2000。[PPS02] Y. Peterzil, A. Pillay, S. Starchenko. 在 o-极小结构中可定义的线性群。《代数杂志》，247(1):1–23，2002。[PR93] V. Platonov, A. Rapinchuk.《代数群与数论》。Academic Press，1993。[Rob96] A. Robinson.《非标准分析》。普林斯顿数学经典丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1996。1974年第二版重印，附 Wilhelmus A. J. Luxemburg 序言。[Wei63] J. Wei. 关于 Baker-Hausdorff 定理与 Magnus 定理的全局有效性注记。《数学物理杂志》，4:1337–1341，1963。[Wis01] F. Wisser. 复半单李代数与实半单李代数的分类。硕士论文，维也纳大学，2001。[Zim84] R. J. Zimmer.《遍历理论与半单群》，数学专著第81卷。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1984。

Institute for Mathematics, Heidelberg University, Germany
电子邮件地址：rappenzeller@mathi.uni-heidelberg.de